وزارة التعليـم العـالي و البحث العلـمي

جامعة غارداية

كلية العلوم الإقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

مطبوعة موجهة لطلبة السنة أولى نظام (ل.م.د) جذع مشترك

تحت عنوان :

محاضرات في الإحصاء 02

- دروس و تمارين محلولة -

من إعداد :

د/ طويطي مصطفى

أستاذ محاضر "أ"

السنة الجامعيـ 2017-2018 ـة

الفهرس

الفهرس

الفصل الثالث : التوزيعات الإحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل

الفصل الرابع : التوزيعات الإحتمالية للمتغير العشوائي المتصل

قائمة الملاحق

قائمة المراجـع

المقدمـــــة

تقديم المطبوعة :

يعتبر مقياس "الاحصاء" بمختلف أصنافه من المقاييس الضرورية التي يتوجب على كل طالب(ة) مهما كان التخصص الذي يدرسه أو مستواه التعليمي، أن يلم بمفاهيمه وأساليبه الأساسية، كونه يمكن من التحكم في أدوات التعبير الكمي والنوعي عن مختلف الظواهر التي تدخل ضمن مجال الإختصاص، سواء كان في العلوم الاجتماعية، الاقتصادية، الطبية، البيولوجية، الزراعية أو غير ذلك من التخصصات الأكاديمية في الجامعات أو المعاهد أو المدارس.

وبما أن محتوى هذه المطبوعة يتعلق بالمستوى الثاني من علم الاحصاء (الاحصاء الرياضي)، والذي يسمى في برنامج التعليم القاعدي المشترك لشهادة ليسانس بـ الاحصاء (02) الذي يتم تقديمه خلال السداسي الثاني لطلبة السنة أولى جذع مشترك (LMD)، ضمن وحدة التعليم المنهجية برصيد (04) ومعامل (02) في ميدان العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير، فإننا سنركز على تقديمه وفق البرنامج المعتمد، والذي يقسم محتواه إلى أربعة فصول أساسية متكاملة، الهدف منها هو تمكين الطالب (ة) من التحكم في نظرية الإحتمالات من خلال لوصف مختلف الظواهر الاقتصادية بطرق علمية من خلال عملية جمع وتنظيم وتلخيص البيانات وعرضها ثم تحليلها وتفسيرها للوصول بها إلى معلومات تساعد في إتخاذ القرارات الحاسة و السليمة، وبناءا على هذا الغرض فقد تم تخصيص الفصل الأول كمدخل للاحتمالات، وذلك بالتعريف بأهم المصطلحات المتعلقة بها المتمثلة في التجربة العشوائية و أنواعها، الحوادث وأهم العمليات المطبقة عليها، طرق العد وتصنيفاتها؛ التبديلات، الترتيبات ثم التوفيقات، أيضا الإحتمال وطرق حسابه، أما الفصل الثاني فقد تناولنا فيه المتغير العشوائي بنوعيه المنفصل (المنقطع) والمتصل (المستمر) وذلك بالتعريف بقانون الإحتمال والتوزيع التراكمي ودالة كثافة الإحتمال وكدا دالة التوزيع التراكمية، إلى جانب التطرق إلى أهم الخصائص الإحصائية للمتغير العشوائي (الأمل الرياضي، التباين والإنحراف المعياري)، في حين أن الفصلين الثالث والرابع فقد تم تخصيصهما إلى التوزيعات الإحتمالية، بالتعرض إلى أهم القوانين الإحتمالية حسب طبيعة المتغير العشوائي المدروس، إذ تم التطرق في قوانين التوزيع الإحتمالي لمتغير منفصل إلى : التوزيع المنتظم المنفصل، التوزيع البرنولي، التوزيع الثنائي الحدين والمتعدد (كثير الحدود) ، التوزيع البواسوني ، التوزيع الهندسي ، التوزيع فوق الهندسي (الهندسي الزائد)، التوزيع الثنائي السالب ؛ أما بالنسبة لقوانين التوزيع الإحتمالي لمتغير متصل فقد تم التطرق إلى : التوزيع المنتظم متصل، التوزيع الطبيعي الإحتمالي والمعياري مع التعرض إلى تقريبات التوزيعات المنفصلة إلى التوزيع الطبيعي، أيضا تم تناول التوزيع الأسي، توزيع

ستودنت، توزيع كاي مربع، توزيع فيشر، توزيع غاما، توزيع بيتا، توزيع وايبول مع الإشارة إلى حالة خاصة منه تعرف بتوزيع رايلي.

وبهدف تبسيط عملية حساب وفهم التوزيعات الإحتمالية فقد تم إضافة ملحقين، الأول خاص بدوال Excel لإستخراج التوزيعات الإحتمالية المنفصلة والمتصلة، والثاني متعلق بالجداول التوزيعات الجاهزة، وحتى لا يكون محتوى المطبوعة نظريا أو في شكل علاقات وصيغ إحصائية مجردة، فقد تم تدعيم نهاية كل فصل بسلسلة من التمارين مع إرفاقها بالحل النموذجي ليتمكن القارئ من التدرب على تفسير مضمون التجارب العشوائية و إحتمال تحقق كل حالة بيها، وفق حالات مختلفة من أجل إختبار المدارك والمفاهيم التي إكتسبها في الجانب النظري .

الفصل الأول : مدخل لنظرية الإحتمالات

أهداف الفصل؛

بعد إتمام الطالب(ة) لهذا الفصل سيكون باستطاعته أن :

- يحدد الهدف من دراسة مقياس الاحصاء 02؛
- التحكم في مصطلحات الاحصاء الرياضي : التجربة، الحدث، الإحتمال، ...؛
- طرق عد الحالات الممكنة أوالملائمة لتجربة عشوائية ؛
- التحكم في طرق حساب الإحتمال المستقل أو المشروط ؛

المحاور المستهدفة؛

بغرض تحقيق أهداف هذا الفصل، فإننا سوف نتطرق إلى المحاور الأساسية المتمثلة فيمايلي:

- التجربة العشوائية : تعريفه، أنواعه وحدوده؛
- طرق العد : التبديلات، الترتيبات، التوفقيات؛
- الاحتمالات البسيطة؛
- الاحتمال الشرطي؛
- نظرية بايز والاحتمال الكلي؛
- سلسلة تمارين مع حلول نموذجية.

المدى الزمني للفصل ؛

سيتم تغطية محتوى هذا الفصل وفق المتطلب الزمني الأتي :

- حصة محاضرة : أربع ساعات ونصف (ثلاثة حصص)؛
- حصة أعمال موجهة : أربع ساعات ونصف (ثلاثة حصص).

الفصل الأول

مدخل لنظرية الإحتمالات

تعتبر نظرية الاحتمال من أهم أسس الإحصاء الرياضي كونها تعتمد على محاولة فهم وتحليل لُعب الحظ كان أطلقه عليها عالم الرياضيات الايطالي جيرولامو كاردانو(Hieronymus Cardanus)، لهذا نجد أن نظرية الاحتمالات جذورها متعلقة بألعاب الفُرص، وتم استخدام نظرية حساب الاحتمالات في حساب الفرص لظهور عناصر من بين مجموعة كبيرة من العناصر الأخرى، وذلك مع الأخذ بعين الاعتبار أنواع الاحتمالات، فيما إذا كانت مشروطة أو المستقلة، أيضا متنافية أو غير متنافية، مؤكدة أو مستحيلة، كما أن لنظرية الاحتمالات علاقة وثيقة بطرق العد والتي تعرف في العديد من المراجع بالتحليل التوفيقي.

لهذا قبل التطرق إلى الاحتمالات سوف نقوم بالتعرض إلى التجربة في ميدان الاحتمالات، وبما أنها ظاهرة قابلة للعد سيتم التطرق إلى طرق عد الحالات الممكنة والملائمة في كل تجربة .

1. مفاهيم أساسية في نظرية الاحتمالات

تعتمد نظرية الاحتمال على مجموعة من المفاهيم الأساسية التي سيتم التعريف بها في هذا الجزء على النحو الأتي؛

1-1. التجربة : يشير مصطلح التجربة إلى كل عملية تؤدي إلى ملاحظة أو قياس يتعلق بنتائج معينة وفق شروط محددة، وبالتالي فإن التجربة هي التي تكون جميع نتائجها المحتملة معلومة مسبقا ولكن لا يمكن التنبؤ بحدوث أي من هذه النتائج أولا أو أيهما يحدث قبل الأخر، لهذا لا يمكن التحقق من حدوثها بشكل مؤكد إلا بعد إجراء تلك التجربة بشكل فعلي .

وعلى العموم يمكن تقسيم التجربة إلى نوعين هما :

- **التجربة النظامية** : هي التي يمكننا أن نتوقع نتائجها مسبقا بالاعتماد على مجموعة من القواعد والقوانين العلمية المحددة، إنطلاقا من جملة من المشروط، التي تؤدي إلى نتيجة واحدة، فعلى سبيل المثال إذا علمت الجاذبية تقدر بـ m و أن الكتلة تقدر بـ g، فإن الثقل (P) يحسب كما يلي :

$$P = m \times g$$

وبالتالي فإن القيمة المطلوبة تحدد بشكل وحيد ومعرف يعتمد على معطى التجربة .

- **التجربة العشوائية** : هي كل تجربة نقوم بها بإمكاننا معرفة جميع نواتجها الممكنة قبل إجرائها، إلا أنه لا يمكن تحديد الناتج الذي سيقع فعلا، لأنها تعتمد على الصدفة (العشوائية)، بمعنى أنها كل تجربة يمكن تكرارها تحت نفس الشروط ولكنها لا تعطي نفس النتائج، فعلى سبيل المثال إذا تم تنفيذ تجربة رمي قطعة نقود في الهواء،

فليس بمقدورنا أن نعرف النتيجة مسبقا، فيما إذا كانت سوف تسقط على جانب الكتابة أو على جانب الصورة، ونفس الشيء إذا كانت التجربة تتمثل في التصويب نحو هدف معين .

وبما أن التجربة معروفة النتائج الممكنة مسبقا إلا أنه لا يمكننا تحديد النتيجة بدقة قبل تنفيذ التجربة، فإن مثل هذه العملية تدعى بالتجربة العشوائية أو الاحتمالية، وبما أن نظرية الاحتمال تعتمد على التجربة العشوائية فإنه يجب أن تتوفر بها شرطين أساسيين هما :

- إمكانية تحديد ووصف جميع النتائج الممكنة للتجربة قبل القيام بتنفيذها؛
- لا يمكن معرفة نتيجة التجربة بدقة إلا بعد التنفيذ .

ومن أبسط أمثلة التجربة الحالات الآتية :

- رمي قطعة النقود، أو حجر (زهرة) النرد في الهواء؛
- كمية تساقط الأمطار في مدينة ما، أو درجة الحرارة؛
- قياس ضغط الدم لمريض، أو عدد نبضات القلب؛
- إصابة الهدف في تجربة التصويب .

2-1. فضاء العينة : تعبر عن جميع النتائج الممكنة لتجربة العشوائية، تدعى أيضا بفراغ العينة أو المجموعة الأساسية ويرمز لها بـ

Ω . فعلى سبيل المثال فإن فضاء العينة، إذا كان الهدف القيام بالتجارب الآتية؛

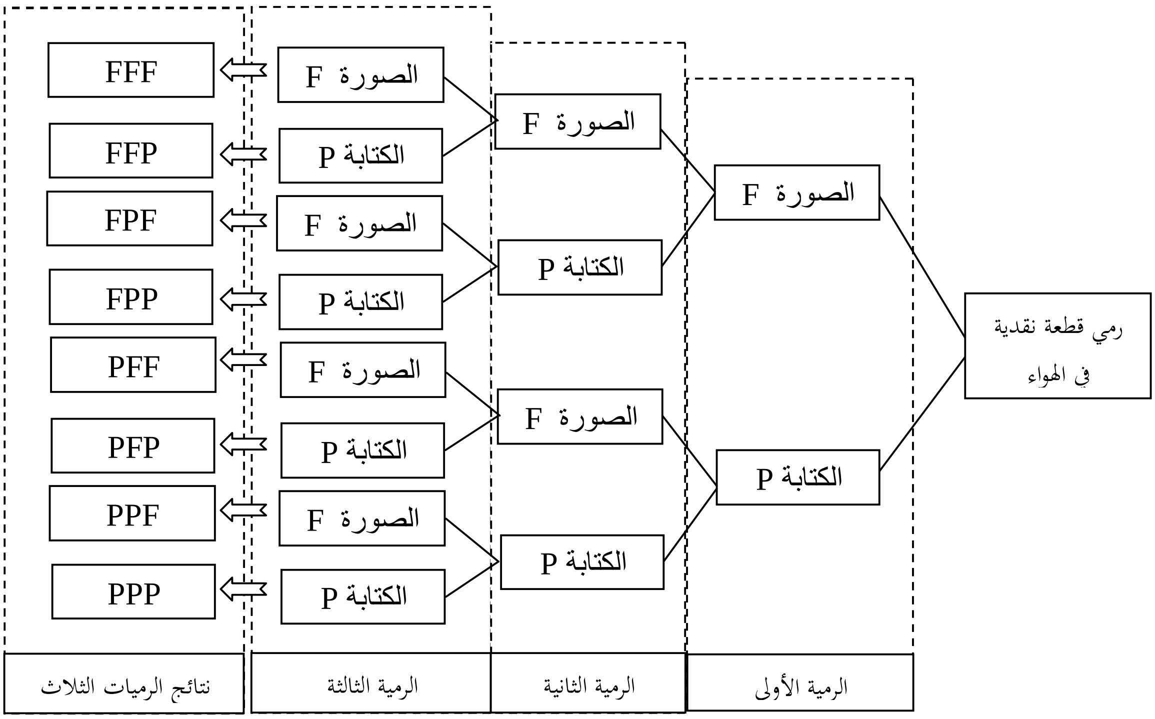
- رمي قطعة نقود في الهواء (F ترمز لظهور الصورة وP ترمز لظهور الكتابة)، فإن فضاء العينة هو :

$$\Omega = \{F , P\}$$

- رمي حجر نرد،)، فإن فضاء العينة هو :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- في تجربة إلقاء قطعة نقدية ثلاثة مرات متتالية، ونقوم بتسجيل الوجه الظاهر، سنحصل على الشكل الأتي :



ومنه فإن فضاء العينة هو :

$$\Omega = \{(F,F,F);(F,F,P);(F,P,F);(F,P,P);(P,F,F);(P,F,P);(P,P,F);(P,P,P)\}$$

3-1. الحدث : هناك من يطلق عليه لفظ الإمكانية لكونها تعبر عن النتائج الممكنة لتحقق واقعة أو صفة معينة، ويقصد بالحدث كل إمكانية أو نتيجة ما من بين أحداث أو نتائج أخرى ضمن فراغ العينة وقد تكون هي المجموعة الأساسية.

وعليه فإن الحدث هو مجموعة جزئية (A_i) من فراغ العينة (Ω)، فعلى سبيل المثال إذا تم رمي زهرة نرد في الهواء، فإن فراغ العينة هو :

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

وإذا كانت التجربة تهتم بالأحداث الآتية :

- الحدث (A_1) يعبر عن ظهور الرقم الفردي، أي أن : $A_1 = \{1, 3, 5\}$
- الحدث (A_2) يعبر عن ظهور الرقم الزوجي، أي أن : $A_2 = \{2, 4, 6\}$
- الحدث (A_3) يعبر عن ظهور رقم أكبر من 4، أي أن : $A_3 = \{5, 6\}$
- الحدث (A_4) يعبر عن ظهور رقم ظهور رقم أكبر من 4 أو رقم أولي، أي أن : $A_4 = \{1,2,3,5,6\}$
- الحدث (A_5) يعبر عن ظهور كتابة ورقم زوجي أو صورة ورقم أصغر من 3 في تجربة رمي زهرة نرد وقطعة نقدية في أن واحد، أي أن : $A_5 = \{(P.2),(P.4),(P.6),(F.1),(F.2)\}$

وبالتالي فإنه يتم تقسيم الحوادث إلى حوادث أولية وأخرى مركبة، وذلك كما يلي؛

- **الحوادث الأولية** : هي التي تكون مشكلة من عنصر أو مفردة واحدة من المجموعة الأساسية (Ω)، في المثال السابق إذا كان الاهتمام بظهور رقم معين عند رمي زهرة نرد، أو توفر خاصية معينة في الرقم الظاهر، كأن نهتم بظهور رقم أولي مثلا.
- **الحوادث المركبة** : هي الحوادث التي تتشكل من مجموعتين جزئيتين (حدثين أوليين) على الأقل، بحيث إذا تحقق أحداها فذلك يعني بالضرورة تحقق الحدث المركب، فعلى سبيل المثال الحدث B يعبر في تجربة رمي زهرة نرد عن ظهور رقم أكبر من 4 أو رقم أولي، أي أن :

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = \{5, 6\} \\ \\ B_2 = \{1,2,3,5\} \end{array}\right\} \Rightarrow B = \{1,2,3,5,6\}$$

أو أن الحدث M يعبر عن ظهور صورة ورقم فردي أو صورة ورقم أصغر من 3 أو صورة والعدد 5 في تجربة رمي زهرة نرد وقطعة نقدية في أن واحد، أي أن :

$$\left.\begin{array}{l} M_1=\{(F.1),(F.3),(F.5)\} \\ M_2=\{(F.1),(F.2)\} \\ M_3=\{(F.5)\} \end{array}\right\} \Rightarrow M=\{(F.1),(F.2),(F.3),(F.5)\}$$

4-1. أنواع الحوادث : للحوادث أنواع مختلفة يجب التمييز بينها من أجل التحكم الجيد في قواعد نظرية الاحتمالات، لذلك نجد الحدث الأكيد(Ω)، والحدث المستحيل (ϕ)، والحدث النقيض ($\bar{E}$)، وأيضا نجد الحوادث المتنافية والحوادث المستقلة.

- **الحدث الأكيد** : هو الحدث الذي يكون تحققه مؤكد وحتمي، لكون عناصره تتشكل من جميع عناصر المجموعة الأساسية (فراغ العينة) للتجربة العشوائية، ويرمز له بالرمز Ω.

برفض أن الحدث A يعبر عن ظهور رقم أقل من أو يساوي 6 في تجربة رمي زهرة نرد في الهواء، نلاحظ أن أي رقم سوف يظهر سيحقق حتما هذا الحدث، أي أن :

$$\Omega=A=\{1,2,3,4,5,6\}$$

- **الحدث المستحيل** : هو الحدث الذي لا يحتوى على أي عنصر من عناصر المجموعة الأساسية بمعنى عدم إشتراكه مع فراغ العينة في ولا عنصر واحد، لهذا لا يمكن أن يقع أو يتحقق، ويرمز له بالمجموعة الخالية ($\{\}$ أو ϕ).

برفض أن الحدث B يعبر عن ظهور رقم أكبر من 6 في تجربة رمي زهرة نرد في الهواء، نلاحظ أن عدم وجود أي عنصر في المجموعة الأساسية للتجربة العشوائية يوافق هذا الحدث، وبالتالي مستحيل أن يتحقق، لهذا نقوم عنه حدث مستحيل.

- **الحدث النقيض** : يطلق عليه أيضا الحدث المعاكس(العكسي) أو المتمم، وهو الحدث الذي يعنى تحققه بالضرورة عدم تحقق الحدث الأساسي، والعكس صحيح لأن تقاطعهما ينتج عنه مجموعة خالية، ويتم تمييزه بوضع خط فوق رمز الحدث الأساسي، مثل متمم أو معاكس الحدث الأكيد هو الحدث المستحيل، أي أن : $(\overline{\Omega}=\phi)$.

برفض أن الحدث C يعبر عن ظهور رقم فردي في تجربة رمي زهرة نرد في الهواء، فإن الحدث النقيض يتمثل في ظهور رقم زوجي، أي أن :

$$\overline{C}=\{2,4,6\}$$

- **الحوادث المتنافية** : تعبر عن الأحداث التي تحقق إحداها ينفي تحقق الحدث أو الأحدث الأخرى، بمعنى لا يمكن أن تتحقق في آن واحد، مثل حدوث الحدث الأساسي ومعاكسه، وبالتالي نقول عن حدثين A و B أنهما متنافيين إذا كان تقاطعهما يشكل المجموعة الخالية، وهو ما يمكن التعبير عنه بالصيغة التالية؛

$(A\cap B)=\phi \Leftarrow$ ومنه فإن الحدثين A و B متنافيين، والعكس صحيح.

وبشكل عام، فإن الأحداث المتنافية هي التي تحقق الشرط الأتي :

$$\forall i \neq j \;\; ; \left(A_i \cap A_j\right) = \phi$$

- **الحوادث المستقلة :** التنافي لا يعنى بالضرورة الاستقلالية، لهذا فإن الاستقلالية تمكن من إضافة معلومة عن إمكانية وقوع أو عدم وقوع الحادث أو الأحداث الأخرى، لهذا نقول عن الحدثين A و B أنهما مستقلين إذا تم التأكد من أن:

- الشرط الأول : الحدث A والحدث B وكذلك تقاطعهما لا يساوي المجموعة الخالية، أي أن :

$$\left(A \cap B\right) \neq \phi \wedge \;\; A \neq \phi \wedge B \neq \phi$$

- الشرط الثاني : إذا تحقق الشرط الأول فإن الحكم على إستقلالية الحدثين أم لا يتوقف على تحقق :

$(A \cap B) = A \times B \Leftarrow$ الحدثين A و B مستقلين عن بعضهما البعض، أي أن وقوع إحداهما لا يؤثر على وقوع الأخر؛

$(A \cap B) \neq A \times B \Leftarrow$الحدثين A و B غير مستقلين(مرتبطين)، وبالتالي فإن وقوع الحدث الأول يؤثر على وقوع الحدث الثاني.

فعلى سبيل المثال إذا قلنا بأن الآلات تعمل بصورة مستقلة بعض بعضها البعض، فهذا يعنى أنه إذا تعطلت إحداها فهذا لا يعنى أن الإنتاج (العمل) سوف يتوقف، بينما إذا كانت غير مستقلة فإن توقف الأولى يعنى بالضرورة توقف العمل في الثانية .

5-1. عمليات على الحوادث : تتعلق تطبيقات نظرية الاحتمالات في الغالب بعدد من الحوادث المركبة والمتداخلة فيما بينها أكثر مما تتعلق بحادث أولي، كأن يكون الهدف من التجربة العشوائية الاهتمام بمعرفة ما إذا كان من الممكن وقوع الحدثين AوB في أن واحد أو إذا كان بالإمكان وقوع إحدى الحدثين على الأقل، أو من الممكن وقوع الحدث A وعدم وقوع الحدث B أو غير ذلك من الأهداف المرتبطة بالتجربة العشوائية .

وللإجابة على هذه التساؤلات و أخرى، نقوم بدراسة العلاقات الثنائية والمتعددة بين الحوادث بالاعتماد على مفهوم المجموعات في الحوادث الأولية أو الحوادث المرتبطة بتجربة عشوائية

- **عملية الجمع :** في عملية الجمع بين المجموعتين أو أكثر، يتوجب تحديد فيما إذا كانت متنافية أم غير متنافية، بحيث نقول عن حدثين A و B أنهما متنافيين إذا كان تقاطعهما يشكل المجموعة الخالية، وهو ما يمكن التعبير عنه بالصيغة التالية؛

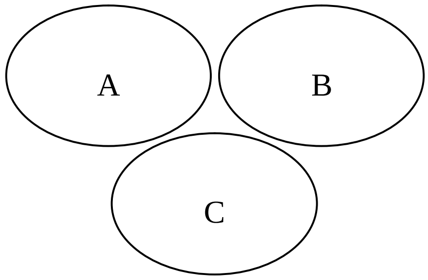
$\left(A \cap B\right) = \phi \Leftarrow$ومنه فإن الحدثين A و B متنافيين،

$\left(A \cap B\right) \neq \phi \Leftarrow$ومنه فإن الحدثين A و B غير متنافيين.

- حالة تنافي الأحداث : تأخذ الصيغة الصورة الأتية ؛

$$\left(A + B\right) = A \cup B$$

$(A+B+C)=A\cup B\cup C$



وبشكل عام، نقول عن متتالية من الحوادث $[A_1, A_2, A_3, ..., A_n]$ المرتبطة بتجربة E، بأنها متنافية مثنى مثنى إذا كان كل حدثين متنافيين، والذي يتم التعبير عنه بالصيغة الآتية؛

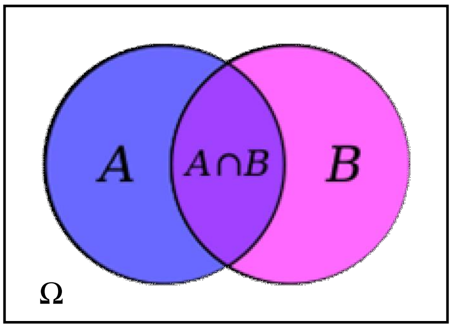
$$\forall i\neq j \quad ; (A_i\cap A_j)=\phi$$

$$(A_1+A_2+...+A_n)=\sum_{i=1}^{n} A_i=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

- **حالة عدم تنافي الأحداث :** تأخذ الصيغة الصورة الأتية ؛

- إذا كان الحدثين A وB حدثين غير متنافيين، فإن الصيغة تأخذ الشكل الأتي :

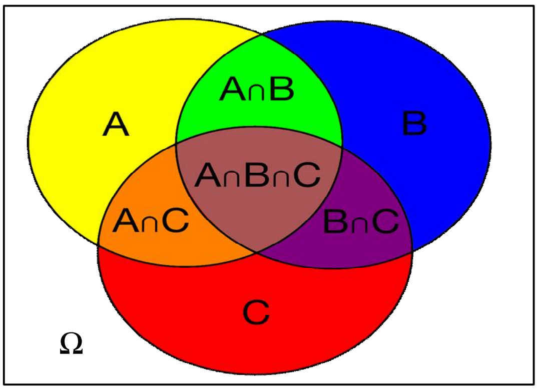
$(A\cup B)=(A)+(B)-(A\cap B)$



- إذا كان لدينا ثلاثة حوادث A وB و C أحداث غير متنافية، فإن الصيغة تأخذ الشكل الأتي :

$(A\cup B\cup C)=(A)+(B)+(C)-(A\cap B)-(A\cap C)-(B\cap C)+(A\cap B\cap C)$

والصورة التالية تبين ذلك :



وبشكل عام، لدينا :

$$\forall i \neq k \neq m \neq \ldots \; ; \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i - \sum_{\substack{i=1 \\ k=2}}^{n} (A_i \cap A_k) + \sum_{\substack{i=1 \\ k=2 \\ m=3}}^{n} (A_i \cap A_k \cap A_m) - \ldots + (-1)^{n-1} \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right)$$

- **عملية الطرح (الفرق):** فرق الحدث A عن الحدث B يعبر عن جميع العناصر التي تنتمي إلى الحدث A وغير المنتمية إلى الحدث B، وتأخذ الرمز : $A-B$ أو $A \setminus B$ ، ويعطى بالصيغة الآتية؛

$$(A-B) = (A \cap \overline{B})$$
$$(B-A) = (B \cap \overline{A})$$

ومنه نلاحظ بأن؛

$$\boxed{(A-B) \neq (B-A)}$$

وتجدر الإشارة إلى أن الفرق بين الحدثين وعكسهما، بمعنى الفرق التناظري للحدثين A و B يعبر عن العناصر التي تنتمي إلى أحد الفرق بين الحدثين، ويرمز لها بـ $A \Delta B$ ، ويعطى بالصيغة الآتية؛

$$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$$

- **عملية الضرب :** في عملية الضرب على مجموعتين أو أكثر، يتوجب تحديد فيما إذا كانت مستقلة أم غير مستقلة، بحيث نقول عن حدثين A و B أنهما مستقلة إذا كان وقوع حدث غير مرتبط بحدث أخر، وهو ما يمكن التعبير عنه بالصيغة التالية؛

$$\boxed{(A \setminus B) = A \quad or \quad (B \setminus A) = B}$$

حالة الأحداث المستقلة، إذا كان وقوع الحدثين في أن واحد، مع أنهما مستقلين عن بعضهما البعض، فإن الصيغة التي يعبر عنها تأخذ الصورة الآتية؛

$$(A * B) = (A \cap B)$$
$$(A * B * C) = (A \cap B \cap C)$$

ولدينا أيضا؛

$$(A*A)=(A\cap A)=A$$
$$(A*\overline{A})=(A\cap \overline{A})=\{\ \}=\phi$$

وبشكل عام، لدينا :

$$(A_1*A_2*...*A_n)=\prod_{i=1}^{n}A_i=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$$

في حالة كان الحدثين غير مستقلين فإن؛

$$(A*B)\neq(A\cap B)$$
$$(A\cap B)=(A-B)*B \quad or \quad (A\cap B)=(B-A)*A$$

ملاحظة : قاعدة الضرب في حالة الأحداث غير المستقلة (المرتبطة) تعرف بالإحتمال الشرطي، وهذا ما سوف نتعرض إليه في العنصر الموالي .

بشكل عام؛ يمكن تلخيص عمليات الجمع (الإتحاد) والضرب (التقاطع) بين الأحداث والعلاقة بينهما في الجدول الأتي :

عمليات الإتحاد بين الأحداث	عمليات التقاطع بين الأحداث
$(A\cup A)=A$ $(A\cup B)=(B\cup A)$ $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ $\Omega\cup A=A\cup\Omega=A$ $(A\cup\overline{A})=\Omega$ $A=\overline{\overline{A}}$ $(\overline{A\cup B})=\overline{A}\cap\overline{B}$	$(A\cap A)=A$ $(A\cap B)=(B\cap A)$ $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ $\Omega\cap A=A\cap\Omega=A$ $(A\cap\overline{A})=\{\ \}=\phi$ $A=\overline{\overline{A}}$ $(\overline{A\cap B})=\overline{A}\cup\overline{B}$
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	

2. طرق العد

تعتمد نظرية الاحتمالات على تحديد عدد الحالات الممكنة في التجربة بالإضافة إلى عدد الحالات الملائمة، ونظرا لتعقد عملية تحديد هذه الحالات في حالة البيانات الكبيرة، فقد تم إيجاد صيغ رياضية يتم المفاضلة بينها على أساس ثلاثة معايير أساسية، نطرحها في شكل أسئلة كما يلي؛

- هل الغرض من عملية العد يعتمد على ترتيب جميع عناصر المجموعة أو جزء منها فقط ؟

- هل عملية ترتيب العناصر مهم أو غير مهم ؟
- هل يمكن تكرار أو استعمال عنصر من المجموعة أكثر من مرة واحدة ؟

فبالإجابة على هذه الأسئلة يمكن تحديد طريقة العد المناسبة لتحديد عدد النتائج الممكنة لتجربة معينة.

1-2. التبديلات : يعبر مصطلح التبديلة عن عدد الحالات الممكنة لترتيب جميع عناصر المجموعة التي عددها (n)، بحيث نأخذ بعين الاعتبار إمكانية تكرار عنصر أو أكثر ضمن المجموعة، ويرمز لها بالرمز P(n) .

لهذا نميز بين حالة التبديلات بدون تكرار العناصر، والتبديلات مع تكرار عنصر واحد على الأقل، وبناءا عليه تأخذ علاقة حساب التبديلات الصيغة التالية كما يلي؛

- **التبديلة بدون تكرار العنصر** : إذا كان كل عنصر يستعمل مرة واحدة في كل تبديلة، فإن العلاقة تأخذ الشكل الأتي؛

$$P(n)=n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times3\times2$$

ملاحظة 01: في بعض الحالات يكون لدينا أكثر من تقسيم واحد ضمن نفس المجموعة، لذلك فإن الصيغة تعدل لتأخذ العلاقة المعممة الأتي؛

$$P(n_1;n_2;\ldots;n_k)=P(n_1)\times P(n_2)\times\ldots\times P(n_k)\Leftrightarrow P(n_1;n_2;\ldots;n_k)=\prod_{i=1}^{m}P(n_i)$$

ملاحظة 02: يمكن أن تكون التبديلات مقيدة بعنصر أو أكثر، لهذا سيتم الاعتماد على الصيغة الآتية؛

$$P(n-k)=(n-k)!$$

فعلى سبيل المثال إذا كانت الهدف معرفة عدد حالات ترتيب مجموعة عدد عناصرها (n) حول طاولة مستديرة، فإن التبديلات تكون مقيدة بأول عنصر، وبالتالي فإن علاقة حساب التبديلات على طاولة مستديرة تأخذ الشكل الأتي :

$$P(n-1)=(n-1)!$$

- **التبديلة مع تكرار العنصر** : إذا كان الغرض تحديد عدد حالات ترتيب مجموعة من العناصر، على أن يتم إستعمال عنصر واحد على الأقل أكثر من مرة كل تبديلة، فإن العلاقة تأخذ الشكل الأتي؛

$$P(n;k_i)=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{m}(k_i!)}=\frac{n!}{(k_1!\times k_1!\times\ldots\times k_m!)}$$

2-2. الترتيبات : تعتمد على عملية اختيار أو انتخاب عدد من المفردات أو العناصر (k) من المجموعة الكلية (n)، من أجل ترتيبها وفق عدد الحالات الممكنة، ويرمز لها بالرمز (A_n^k) .

وبما أن عملية الترتيب تأخذ بعين الإعتبار إمكانية تكرار العنصر المختار، فإننا نميز بين الحالتين التاليتين :

- **الترتيبة بدون تكرار العنصر** : إذا كان كل عنصر يستعمل مرة واحدة فقط، فإن العلاقة تأخذ الشكل الأتي؛

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **الترتيبة مع تكرار العنصر :** يطلق عليها أيضا "القائمة"، بحيث إذا كان هناك عناصر مكررة في المجموعة، وبالتالي إمكانية إستعمالها أكثر من مرة واحدة في الترتيبة، فإن العلاقة تأخذ الشكل الأتي :

$$n^k = (n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k) = \prod_{i=1}^{k}(n_i)$$

ملاحظة : إذا كان عدد العناصر المختارة يساوي عدد عناصر المجموعة $(n = k)$، فإن الترتيبة تتحول إلى تبديلة، ويتم البرهنة على ذلك كمايلي :

$$\left.\begin{array}{l} A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} \\ n = k \end{array}\right\} \Rightarrow A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} \Leftrightarrow A_n^n = n!$$

2-3. التوفيقات : تعتبر أكثر طرق العد إستخدام في نظرية الاحتمالات، ولهذا نفس خصائص الترتيبات، غير أنها لا تشترط ترتيب العناصر المختارة (k)، وبالتالي فهي تعبر عن عدد الحالات الممكنة لتكوين مجموعات جزئية تضم (k) عنصر يتم إختيارها أو إنتخابها من المجموعة الكلية دون الاهتمام بالترتيب، وتأخذ التوافيق الرمز (C_n^k) .

وبما أن عملية تحديد المجموعات الجزئية تأخذ بعين الاعتبار إمكانية تكرار العنصر المختار، فإننا نميز بين الحالتين التاليتين :

- **التوافيق بدون تكرار العنصر :** إذا كان كل عنصر يستعمل مرة واحدة فقط، فإن العلاقة تأخذ الشكل الأتي؛

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

- **التوافيق مع تكرار العنصر :** يمكن أن نجد أن هناك عنصر أو أكثر مكررة في المجموعة، وبالتالي إمكانية استعماله أكثر من مرة داخل المجموعة الجزئية الواحدة، وبناءا عليه فإن العلاقة تأخذ الشكل الأتي :

$$K_n^r = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!}$$

3. الاحتمالات

شهد القرن السادس عشر اهتمام كبير لدى علماء الرياضيات أمثال PASCAL، FERMAT وBERNOULLI وغيرهم إلى إيجاد قواعد حسابية تساعد المقامرين في أوروبا وخاصة في فرنسا على حساب فرصهم في الكسب أو الخسارة، فتم تكوين الاحتمال كي نستخلص نتائج التكرارات النسبية للنواتج التجريبية، فعلى سبيل المثال عندما نقول "من الممكن أن تمطر السماء هذا اليوم" فإننا نعني بهذا أن الظواهر الطبيعية المحيطة بنا خلال هذا اليوم مشابهة لنفس الظواهر الطبيعية في أوقات سابقة التي حدث فيها تساقط للأمطار، ونفس الشيء مع باقي الاستعمالات لهذه التقنية الرياضية .

3-1. تعريف الاحتمال : هو مقياس عددي لإمكانية وقوع حدث معين يكون محصور ما بين الصفر و الواحد يعبر عن حظوظ وقوع هذا الحدث.

فإذا كان m يعبر عن عدد الحالات الملائمة للحدث A، وكان n هو عدد الحالات الممكنة، فإن إحتمال وقوع الحدث A يكون وفق العلاقة التالية :

$$P(A)=\frac{m}{n} \quad si \quad n\geq m\geq 1$$

علما أن؛

A : حدث معين؛

m : عدد الحالات الملائمة (المواتية) للحدث A؛

n : عدد الحالات الممكنة ؛

$P(A)$: احتمال وقوع الحدث A.

ملاحظة 01: نفرق بين الحالات الممكنة والحالات الملائمة على أساس طبيعة النتائج في التجربة، بحيث يقصد بالحالات الممكنة عدد النتائج المختلفة التي يمكن أن تظهر كنتيجة عند إجراء تجربة معينة، وبالتالي فإن عدد الحالات الممكنة عند تجربة رمي قطعة نقدية هو 2، وفي حالة رمي زهرة نرد هي 6 حالات ممكنة، ويرمز لعدد المفردات الممكنة في المجموعة بـ $Card(\Omega)$.

أما بالنسبة للحالات الملائمة فهي تعبر عن عدد النتائج التي تؤدي إلى تحقيق الحدث الذي نهتم بوقوعه عند إجراء التجربة، فعلى سبيل المثال إذا كان الحدث الذي نهتم به هو ظهور رقم زوجي أثناء إلقاء زهرة نرد على الأرض، وبالتالي فإن عدد الحالات التي تحقق هذا الحدث هو 3 أي (2، 4 أو6)، أيضا عدد الحالات الملائمة لظهور صورة عند رمي قطعة نقدية هو 1، ويرمز لعدد المفردات الملائمة في المجموعة بـ $Card(A)$.

وبناءا عليه فإن العلاقة الرياضية لقياس الاحتمال عند التعامل مع المجموعات الجزئية والكلية فإنها تأخذ الصيغة الأتية :

$$P(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

ملاحظة 02: يتم التفرقة بين التكرار النسبي والاحتمال على أساس أن الاحتمال يتولد من المجتمع الاحصائي، أما التكرار النسبي فيعبر عن النسبة التي نحصل عليها من العينة .

3-2. خواص الاحتمال : قبل التعرض إلى خواص الاحتمال علينا أن نشير إلى البديهيات الثلاثة التي قدمها العالم كولموغروف Kolmogorov، والتي تتعلق بالمميز العددي الذي يعبر عن درجة الإمكانية الموضوعية لظهور الحدث A أي بالقياس الاحتمالي المعبر عنه بالرمز $P(A)$، والذي يقرئ باحتمال وقوع الحدث A والمحقق للشروط (بديهيات كولموغروف) الآتية :

- البديهية الأولى : من أجل أي حدث وليكن على سبيل المثال الحدث A، فإن إحتمال وقوعه P(A) يجب أن يحقق المتراجحة الثنائية الآتية ؛

$$1 \geq P(A) \geq 0$$

- البديهية الثانية : احتمال وقوع الحادث الأكيد Ω، يساوي الواحد الصحيح، أي أن ؛

$$P(\Omega)=1$$

- البديهية الثالثة : احتمال اجتماع متتالية قابلة للعد من الحوادث $A_1, A_2, A_3, \ldots A_i$ المنتهية لصف الأحداث I والمتنافية مثنى مثنى، يساوي مجموع احتمالات هذه الحوادث، أي أن ؛

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

فهذه البديهيات الثلاث تدعى بالبديهيات المعرفة للاحتمال، وإضافة إليها نعرض الخواص الأتي :

- احتمال الحدث المستحيل يساوي الصفر: $P(E)=0$
- احتمال الحدث المعاكس(المتمم) :

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

- احتمال الحدث ومتممه :

$$P(A)+P(\overline{A})=P(\Omega)=1$$

- خواص الاحتمال للأحداث المتنافية :
  - إذا كان لدينا الحدثين A وB حدثين متنافيين فإن الاحتمال يأخذ الصيغة الآتية :

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$$

  - إذا كان لدينا الأحداث المتتالية القابلة للعد من الحوادث A، B، ... وZ أحداث متنافية فإن الاحتمال يأخذ الصيغة الآتية :

$$P(A \cup B \cup \ldots \cup Z)=P(A)+P(B)+\ldots+P(Z)$$

وبشكل عام تأخذ الصيغة العبارة التالية :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- خواص الاحتمال للأحداث غير المتنافية :
  - إذا كان لدينا الحدثين A و B حدثين غير متنافيين فإن الاحتمال يأخذ الصيغة الآتية :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

  - بينما إذا كان لدينا الأحداث A و B و C أحداث غير متنافيين فإن الاحتمال يأخذ الصيغة الآتية :

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

  - أما إذا كان لدينا الأحداث المتتالية القابلة للعد من الحوادث A_1، A_2، ... و A_i أحداث غير متنافية فإن الاحتمال يأخذ الصيغة العامة وفق الشكل الآتية :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i=1\\k=2}}^{n} P(A_i \cap A_k) + \sum_{\substack{i=1\\k=2\\m=3}}^{n} P(A_i \cap A_k \cap A_m) - \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

- قاعدة الضرب في حالة الأحداث المستقلة، إذا كان إحتمال وقوع حدثين في أن واحد، مع أنهما مستقلين عن بعضهما البعض، فإن الصيغة التي يعبر عنها تأخذ الصورة الآتية؛

$P(A * B) = P(A \cap B)$

$P(A * B * C) = P(A \cap B \cap C)$

وبشكل عام، لدينا :

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- قاعدة الضرب في حالة الأحداث غير المستقلة (المرتبطة): تعرف بالاحتمال الشرطي، وهذا ما سوف نتعرض إليه في العنصر الموالي، و باختصار فإن تحقق الحدث A يشترط تحقق الحدث B ، وبناءا عليه فإن الاحتمال الشرطي يكتب كما يلي :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \backslash P(B) \neq 0$$

- خواص الاحتمال لعمليتي التقاطع والاتحاد :

$P[A \cup (B \cap C)] = P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap (B \cap C))$

$P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

3-3. دراسة العلاقة بين ثنائية الأحداث : يمكن أن نميز بين حالتين للعلاقة الثنائية للأحدث هما :

- التنافي : نقول عن حدثين A و B أنهما متنافيين إذا كان تقاطعهما يشكل المجموعة الخالية، أو احتمال التقاطع يساوي الصفر، وهو ما يمكن التعبير عنه بالصيغة التالية؛

$P(A\cap B)=0 \Rightarrow (A\cap B)=\phi \Leftarrow$ ومنه فإن الحدثين A و B متنافيين، والعكس صحيح.

- الاستقلالية : لدراسة إستقلالية الحدثين A و B يجب التأكد من أن:

$P(A\cap B)>0\ ;\ \ P(A)>0\ ;\ P(B)>0$ كمرحلة أولى ، ثم التحقق من الشرط الأتي؛

  - $P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \Leftarrow$ الحدثين A و B مستقلين عن بعضهما البعض ؛
  - $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B) \Leftarrow$ الحدثين A و B غير مستقلين (مرتبطين) .

4-3. الاحتمال الشرطي : عندما يكون تحقق حدث مرتبط بتحقق سابقا، فإننا أمام احتمال مشروط، وبفرض أن الحدث A مشروط بتحقق الحدث B فإنه يسمى بالاحتمال الشرطي، والذي يرمز له بالرمز $P(A/B)$ أو $P_B(A)$ ويحسب بالصيغة الآتية؛

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

بحيث أن $P(B)\neq 0$

وبشكل مشابه يحدد الاحتمال الشرطي لوقوع الحدث B بافتراض وقوع الحدث A، أي أن احتمال تحقق الحدث B بشرط أن يكون الحدث A قد تحقق فعلا، ويحسب بالصيغة الآتية :

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

بحيث أن $P(A)\neq 0$

- خواص الاحتمال الشرطي : نعرف الخواص المتعلقة بتحقق احتمال مرتبط بتحقق احتمال مسبقا، على النحو الأتي ؛

  - $1\geq P(A/B)\geq 0$
  - $P(\Omega/B)=1$
  - $P(B/B)=1$
  - $P(\overline{A}/B)=1-P(A/B)$
  - $\begin{cases} P(A\cap B)=P(B)*P(A/B) \\ P(A\cap B)=P(A)*P(B/A) \end{cases}$
  - $\begin{aligned} P(A\cap B\cap C) &= P((A\cap B)\cap C)=P(A\cap B)*P(C/A\cap B) \\ &= P(A)*P(B/A)*P(C/A\cap B) \end{aligned}$
  - $P(A\cup B\setminus C)=P(A\setminus C)+P(B\setminus C)-P(A\cap B/C)$

- **خاصية التقاطع في الاحتمال الشرطي :** إذا كانت لدينا متتالية الحوادث A_1، A_2، ... وA_i قابلة للعد ومتنافية فإن الاحتمال الشرطي يأخذ الصيغة العامة وفق الشكل الآتية :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1).P(A_2/A_1)*P(A_2).P(A_3/A_2\cap A_1)*P(A_3).P(A_4/A_3\cap A_2\cap A_1)*...*P(A_{n-1}).P(A_n/A_{n-1}\cap A_{n-2}\cap...\cap A_2\cap A_1)$$

ملاحظة : إذا كانت الحوادث المتتالية مستقلة فإن الصيغة تأخذ الشكل الأتي :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1).P(A_2).P(A_3)...P(A_n) = P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)$$

- **خاصية الاتحاد في الاحتمال الشرطي :** إذا كانت لدينا متتالية الحوادث A_1، A_2، ... وA_i قابلة للعد ومتنافية فإن الاحتمال الشرطي يأخذ الصيغة العامة وفق الشكل الآتية :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i / B\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i/B)$$

وبدلالة التقاطع يمكن كتابتها كما يلي :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i / B\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap B)\right)}{P(B)}$$

ولدينا :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap B)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i\cap B)$$

وبالتالي فإن :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i / B\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} P(A_i\cap B)}{P(B)}$$

3-5. الاحتمال الكلي و نظرية بايز : قبل التطرق إلى نظرية بايز يتوجب علينا التعرف على الاحتمال الكلي الذي يعتبر جزء من عملية التعميم لقانون الاحتمال الشرطي في حالة تعدد الحوادث المتنافية، بمعنى يعالج إحتمال تحقق حدث معين وليكن D والذي يكون مرافقا للحوادث المتنافية و المتكاملة $(G_1, G_2, ..., G_k)$، فعلى سبيل المثال إذا كان الحدث D يتحقق بشرط تحقق الحدثين G_1, G_2 ، فإن صيغة حساب الاحتمال الكلي تأخذ الشكل الأتي :

$$D = (D\cap G_1)\cup(D\cap G_2)$$

وبدلالة الاحتمال تأخذ الصيغة التالية :

$$P(D) = P(D\cap G_1) + P(D\cap G_2) \quad \cdots \quad (I)$$

بالاعتماد على علاقة الاحتمال الشرطي نجد؛

$$P(D\setminus G_k)\frac{P(D\cap G_k)}{P(G_k)}\Rightarrow P(D\cap G_k)=P(D\setminus G_k).P(G_k)\quad\cdots\quad(II)$$

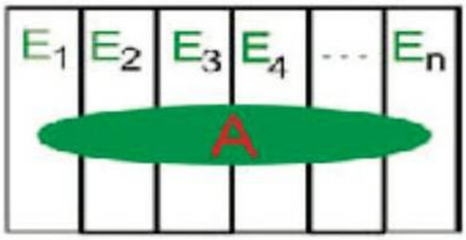
من المعادلتين (I) و(II) نحصل على الصيغة التي تعبر عن الاحتمال الكلي لحدثين (k=2):

$$P(D)=P(D\setminus G_1).P(G_1)+P(D\setminus G_2).P(G_2)$$

وبطريقة مشابهة إذا كان هناك ثلاثة حوادث متنافية ومتكاملة(k=3)، فإن الاحتمال الكلي يأخذ الصيغة الآتية :

$$P(D)=[P(G_1)\times P(D/G_1)+P(G_2)\times P(D/G_2)+P(G_3)\times P(D/G_3)]$$

يمكن تعمم الصيغة المتعلقة بالاحتمال الكلي، بحيث إذا كانت لدينا الحوادث المتنافية والمتكاملة $E_1,E_2,...,E_n$ ، والحدث A كما هو مبين في الشكل الأتي :



فإن العلاقة التي يتم بواسطتها حساب احتمال الحدث A، أي احتمال تحقق الحدث A بشرط أن تتحقق الحوادث المتنافية والمتكاملة $E_1,E_2,...,E_n$ كما يلي؛

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(E_i)\times P(A/E_i)$$

ملاحظة : يتم حساب متمم الاحتمال الكلي بالصيغة الآتية :

$$P(\overline{A})=\sum_{i=1}^{n}P(E_i)\times P(\overline{A}/E_i)$$

- **نظرية بايز :** نظرية بايز أو دستور بايز يطلق عليها قانون احتمال السببية، يستخدم لحساب الاحتمالات الشرطية لحوادث متنافية ومتكاملة المرافقة لحدث معين، فإذا كان الاحتمال الشرطي لتحقق الحدث G_1 بشرط تحقق الحدث D، فإن الاحتمال الشرطي يأخذ الصيغة الأتية :

$$P(G_1\setminus D)=\frac{P(G_1\cap D)}{P(D)}\quad\cdots\quad(I)$$

وبالتالي فإن الاحتمال الشرطي لتحقق الحدث D بشرط أن يكون G_1 قد تحقق فعلا، تأخذ الصيغة الآتية :

$$P(D\setminus G_1)=\frac{P(G_1\cap D)}{P(G_1)}\Leftrightarrow P(G_1\cap D)=P(D\setminus G_1).P(G_1)\quad\cdots\quad(II)$$

فإذا كان لدينا الاحتمال الكلي بالصيغة الأتي :

$$P(D)=P(D\setminus G_1).P(G_1)+P(D\setminus G_2).P(G_2)\quad\cdots\quad(III)$$

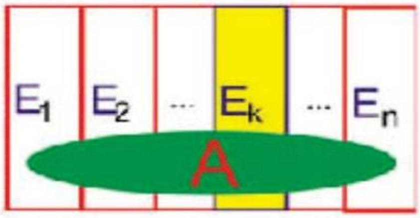
بتعويض المعادلتين (II) و(III) في المعادلة (I) سنحصل على الصيغة التي تعبر عن الاحتمال الشرطي المتعدد (قانون بايز) لحدثين (k=2):

$$P(G_1 \setminus D) = \frac{P(G_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D \setminus G_1).P(G_1)}{P(D \setminus G_1).P(G_1) + P(D \setminus G_2).P(G_2)}$$

وبطريقة مشابهة إذا كان هناك ثلاثة حوادث متنافية ومتكاملة(k=3)، فإن الاحتمال الشرطي المتعدد يأخذ الصيغة الآتية :

$$P(G_1 \setminus D) = \frac{P(G_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D \setminus G_1).P(G_1)}{P(D \setminus G_1).P(G_1) + P(D \setminus G_2).P(G_2) + P(D \setminus G_3).P(G_3)}$$

يمكن تعمم الصيغة المتعلقة بالاحتمال الشرطي المتعدد، بحيث إذا كانت لدينا الحوادث المتنافية والمتكاملة $E_1, E_2, ..., E_n$ ، والحدث A لا يتحقق إلا بتحقق احد هذه الحوادث كما هو مبين في الشكل الأتي :



بصفة عامة، يتم حساب الاحتمالات الشرطية لحوادث متنافية ومتكاملة $E_1, E_2, .., E_k, ..., E_n$ ومرافقة للحدث A الذي لا يتحقق إلا بتحقق احد هذه الحوادث فإن الصيغة العامة تأخذ الشكل الأتي :

$$P(E_k \setminus A) = \frac{P(E_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \setminus E_k).P(E_k)}{P(A \setminus E_1).P(E_1) + P(A \setminus E_2).P(E_2) + ... + P(A \setminus E_k).P(E_k) + ... + P(A \setminus E_n).P(E_n)}$$

أو بالاعتماد على الصيغة المختصرة الأتي :

$$P(E_k \setminus A) = \frac{P(A \setminus E_k).P(E_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \setminus E_i).P(E_i)}$$

سلسلة تمارين الفصل

تمرين رقم 01 :

حدد فراغ (فضاء) العينة في التجارب الآتية :

1. رمي زهرة نرد مرة واحدة؛
2. رمي قطعتين نقديتين في الهواء؛
3. رمي قطعة نقود مع زهرة نرد في أن واحد .

تمرين رقم 02 :

في تجربة عشوائية يتم فيها رمي زهرة نرد مرة واحدة، ولتكن لدينا الحوادث الأتية؛

- الحدث A : الرقم الظاهر أقل من 4؛
- الحدث B : الرقم الظاهر أكبر من أو يساوي 3؛
- الحدث C : الرقم الظاهر زوجي ؛
- الحدث D : الرقم الظاهر فردي .

المطلوب : تحديد مايلي؛

1. فضاء العينة والحوادث : $A, B, C, D, \overline{A}, \overline{C}$ ؛
2. أوجد الحوادث الآتية : $(A+B)$، $(A-B)$، $(C+D)$، $(B-A)$، $(B\cap \overline{A})$، $(A*B)$، $(C*D)$.
3. أوجد الحدثين التاليين : $(A*B*C)$، $(A*B*D)$.

تمرين رقم 03 :

تم اختيار 30 طالب للمشاركة في مسابقة الدكتوراه (ل.م.د) تخصص إدارة وتسيير المنظمات للموسم الجامعي الماضي، كان من ضمنهم 18 طالبة، فإذا كانت اللجنة التي تشرف على المسابقة ترغب في ترتيبهم في قاعة الإمتحان حسب معدلاتهم الانتقائية؛

1. بكم طريقة يمكن ترتيبهم ؟
2. بكم طريقة يمكن ترتيبهم، على أن يتم جمع الطلاب لوحدهم والطالبات لوحدهن ؟
3. إذا علمت بأن الطلبة المختارين للمسابقة لهم تخصصات مختلفة، منهم 10 تخصص إدارة الأعمال، و15 تخصص تسيير المؤسسات و5 تخصص تسيير عمومي؛ فبكم طريقة يمكن ترتيب:

3-1. طلبة كل تخصص على حدى ؟

3-2. ترتيبهم حسب تخصصاتهم ؟

تمرين رقم 04 :

يتكون نادي رياضي لكرة اليد من 12 أعضاء بما فيهم رئيس النادي، فإذا كان لديهم إجتماع بمقر النادي على طاولة مستديرة الشكل لدراسة المسائل العالقة بالنادي، بكم طريقة يمكن إجلاس الأعضاء ؟

- إذا علمت أن المقرر يجب أن يجلس على يمين رئيس النادي، بكم طريقة يمكن إجلاس الأعضاء ؟

تمرين رقم 05 :

يتكون فوج من 38 طالب، وترغب الإدارة في تعيين ممثلين لطلبة في هذا الفوج (رئيس ونائب له)؛ بكم طريقة يمكن :

1. اختيار طلبين من الفوج ؛
2. بفرض أن طالبين يرغبان في الترشح بشرط أن يكونان معا أو لا يترشحان إذا تم اختيار أحدهما دون الأخر ؛
3. إذا فرضنا أن الأستاذ الذي كان يدرس أتناء عملية التعيين، اختار الطالب المميز في الفوج لأن يكون أحد ممثلي الطلبة (رئيس أو نائب)؛
4. إذا وافق أحد الطلبة على الترشح بشرط أن لا يقبل إلا بالتمثيل كرئيس للفوج ؛
5. بفرض أن طالبين يرفضان تمثيل طلبة الفوج إذا تم اختيارهما معا؛

تمرين رقم 06 :

قامت شركة ALFAPIPE لوحدة غارداية بتكوين 20 عامل لديها في مجال التلحيم، والمطلوب دراسة الحالات الأتية؛

1. بكم طريقة يمكن اختيار 05 عمال لفتح ورشة جديد؟
2. بكم طريقة يمكن توزيع العمال المكونين حديثة على ثلاثة ورشات، بحيث يكون 10 للورشة الأولى، 6 للورشة الثانية، و4 عمال للورشة الثالثة ؟

تمرين رقم 07 :

قامت مديرية التربية لولاية غارداية بتوظيف 12 معلم، وأرادت توزيعهم على خمسة مدارس إبتدائية؛

1. بكم طريقة يمكن توزيع هؤلاء المعلمين على المدارس، إذا علمت بأن المدارس المختارة يمكن أن تستقبل معلم أو أكثر، كما يمكنها أن لا تستقبل ولا معلم ؟
2. بفرض أنه يتم توزيع معلم واحد على الأقل لكل مدرسة ؟

تمرين رقم 08 :

يحتوى صندوق على 11 كرات ذات ألوان مختلفة لا يمكن التمييز بينها باللمس، 5 كرات بيضا، 4 سوداء 2 حمراء، نسحب من الصندوق 3 كرات **في أن واحد**، والمطلوب تحديد عدد الحالات الممكنة لسحوبات الآتية؛

1. سحب ثلاثة كرات من الصندوق ؟
2. سحب ثلاثة كرات بيضاء ؟
3. سحب كرة بيضاء واحدة على الأقل ؟
4. الكرتين المسحوبتين لهما نفس اللون ؟
5. بفرض أن سحب الكرات الثلاثة كان **على التوالي دون إرجاع الكرة المسحوبة**؛ حدد ما يلي :
   - عدد الحالات الممكنة لسحب ثلاثة كرات بيضاء ؟
   - عدد الحالات الممكنة لسحب كرة بيضاء واحدة على الأقل ؟
6. نفس المطلوب السابق (5)، بفرض أن عملية سحب الكرات كانت **على التوالي مع إرجاع** الكرة المسحوبة .

تمرين رقم 09 :

تحتوى علبة على 50 مصباح كهربائي، من ضمنها 10 مصابيح تالفة، فإذا تم سحب مصباحين من الصندوق بطريقة عشوائية متتالية بحيث يتم إرجاع المصباح الأول قبل عملية السحب الثانية (سحب مع الإرجاع)، أحسب مايلي؛

1. احتمال أن يكون المصباحين صالحين ؟
2. احتمال أن يكون المصباحين تالفين ؟
3. احتمال أن يكون المصباح الأول صالح و الثاني تالف ؟
4. بفرض أن عملية السحب بدون إرجاع، فما هو احتمال أن يكون المصباحين المسحوبين تالفين ؟
5. بفرض أن عملية سحب المصباحين تكون عشوائية وفي أن واحد، فما هو احتمال أن يكون المصباحين المسحوبين تالفين؟

تمرين رقم 10 :

حسب محاضر الامتحان النهائية للسداسي الأول في قسم الجدع المشترك، تبين أن نسبة الرسوب في مقياس الإحصاء هي 20%، وفي مقياس الرياضيات 25%، وفي المقياسين معا بـ 10% .

إذا تم اختيار طالبا من المحاضر بطريقة عشوائية، حدد الإحتمالات التالية :

1. إذا كان هذا الطالب راسب في الإحصاء، فما هو احتمال أن يكون راسبا في الرياضيات ؟
2. ما هو احتمال أن يكون راسبا في الإحصاء، علما أنه راسب في الرياضيات، ؟
3. إذا كان هذا الطالب راسب في الرياضيات، فما هو احتمال أن يكون ناجحا في الإحصاء ؟
4. ما هو احتمال أن يرسب في الرياضيات أو الإحصاء ؟

تمرين رقم 11 :

على طالب في السنة أولى جدع مشترك أن يختار شعبة من بين الشعب الأربعة (A : ع.اقتصادية؛ B : ع.تسيير؛ C : ع.تجارية وD : ع.مالية ومحاسبة) ليحدد مسار دراسته الجامعية، بحيث أن احتمال اختياره لكل شعبة (A أو B أو C) هو $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{6}$ على التوالي، أما احتمال عدم قبول الشعبة المختارة من طرف لجنة الإنتقاء فهو $\frac{1}{10}$، $\frac{1}{5}$ ، $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{2}$ على التوالي لكل شعبة .

المطلوب : أحسب ما يلي؛

1. احتمال أن يكون الطالب قد اختار شعبة العلوم المالية والمحاسبة (D) ؟
2. احتمال أن لا توافق لجنة الإنتقاء على اختيار الطالب ؟
3. بفرض أن الطالب لم توافق لجنة الانتقاء على اختياره، فما هو احتمال أن يكون قد إختار شعبة علوم التسيير ؟

تمرين رقم 12 :

داخل صندوق بطاقات مرقمة ترقيم تسلسلي من الواحد إلى الخمسين (1 إلى 50)، إذ تم سحب بطاقة واحدة بطريقة عشوائية، ولتكن الأحداث الآتية :

A : الرقم المسحوب قابل للقسمة على 2؛

C : الرقم المسحوب قابل للقسمة على 5؛

B : الرقم المسحوب قابل للقسمة على 3؛

D : الرقم المسحوب قابل للقسمة على 11 .

المطلوب : أجب على ما يلي؛

1. أوجد احتمال الأحداث الآتية : A، B، C، D، $(A \cap B)$، $(A \cap C)$، $(B \cap C)$، $(C \cap D)$، $(A \cap B \cap C)$.
2. أدرس العلاقة بين ثنائية الأحداث التالية : A وB ؛ A وC ؛ B وC ثم C و D .
3. أحسب احتمال الحدثين $P[A \cup (B \cap C)]$ و $P[A \cap (B \cup C)]$ ؛
4. ما احتمال أن يكون الرقم المسحوب قابلا للقسمة على 2 أو 3 أو 5 (واحد من هذه الأرقام على الأقل) ؟

تمرين رقم 13 :

يتوزع طلبة السنة الثانية ضمن مسار العلوم الاقتصادية على ثلاثة أفواج وذلك على النحو الأتي : 35% للفوج الأول (G1)، 25% للفوج الثاني (G2) و40% للفوج الثالث (G3)، فإذا علمت أن نسب النجاح (الطلبة الحاصلين على معدل يفوق أو يساوي 10) في امتحان مقياس رياضيات المؤسسة لكل فوج على التوالي 65%، 80% و60% .

المطلوب : بفرض أن أستاذ المقياس التقى مع أحد الطلبة الحاصلين على معدل أقل من 10، أحسب ما يلي ؛

1. احتمال أن يكون هذا الطالب فعلا غير ناجح ؟
2. احتمال أن يكون الطالب من الفوج الأول (A) ؟
3. احتمال أن يكون الطالب من الفوج الأول(A) أو الفوج الثالث(C) ؟
4. احتمال أن لا يكون الطالب من الفوج الثالث(C) ؟ تحقق من النتيجة بطريقة الحدث المعاكس (المتمم)؟

الحلول النموذجية لسلسلة التمارين

تمرين رقم 01 :

تحديد فراغ (فضاء) العينة في التجارب الآتية :

1. رمي زهرة نرد مرة واحدة :

$$\Omega_1 = \{1;2;3;4;5;6\}$$

2. رمي قطعتين نقديتين في الهواء :

$$\Omega_2 = \{(F,F);(F,P);(P,F);(P,P)\}$$

3. رمي قطعة نقود مع زهرة نرد في أن واحد :

$$\Omega_3 = \{(1,F);(1,P);(2,F);(2,P);(3,F);(3,P);(4,F);(4,P);(5,F);(5,P);(6,F);(6,P)\}$$

تمرين رقم 02 :

في تجربة عشوائية يتم فيها رمي زهرة نرد مرة واحدة، نحدد الحوادث الآتية :

- فضاء العينة :

$$\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$$

- الحدث A : الرقم الظاهر أقل من 4

$$A = \{1;2;3\}$$

- الحدث B : الرقم الظاهر أكبر من أو يساوي 3

$$B = \{3;4;5;6\}$$

- الحدث C : الرقم الظاهر زوجي

$$C = \{2\ ;4\ ;6\}$$

- الحدث D : الرقم الظاهر فردي

$$D = \{1\ ;3\ ;5\}$$

- الحدث $\overline{A}$: الحدث العكسي للحدث A، والذي يعبر عن الرقم الظاهر أكبر من أو يساوي 4

$$\overline{A} = \{4;5;6\}$$

- الحدث $\overline{C}$: الحدث العكسي للحدث C، والذي يعبر عن الرقم الظاهر فردي

$$\overline{C} = D = \{1\ ;3\ ;5\}$$

2. إيجاد الحوادث الآتية :

$$(A+B) = A \cup B = \{1;2;3;4;5;6\} = \Omega$$

$(A-B)=(A\cap \overline{B})=\{1;2\}$

$(C+D)=C\cup D=\{1;2;3;4;5;6\}=\Omega$

$(B-A)=(B\cap \overline{A})=\{4;5;6\}$

$(A*B)=(A\cap B)=\{3\}$

$(C*D)=(C\cap D)=\{\ \}=\phi$ ،

3. أوجد الحدثين التاليين :

$(A*B*C)=(A\cap B\cap C)=\{\ \}$ ،

$(A*B*D)=(A\cap B\cap D)=\{3\}$.

تمرين رقم 03 :

لدينا المعطيات التمهيدية للتمرين كالأتي :

$$N=30\ \mapsto (F=18;H=12)$$

1. عدد طرق ترتيب المترشحين في قاعة الإمتحان : بما أن العملية مرتبطة بـ : ترتيب جميع العناصر وبدون تكرار، فإن المقياس المناسب هو تبديلة بدون تكرار $P(n)$ ، والتي تأخذ الصيغة التالية

$$P(n)=n!\mapsto P(30)=30!\Rightarrow P(30)=30\times 29\times ...\times 2\times 1=2{,}652\times 10^{32}$$

2. عدد طرق ترتيب المترشحين في قاعة الإمتحان على أساس الجنس (الطلاب لوحدهم والطالبات لوحدهن) :

بما أن العملية مرتبطة بـ : ترتيب جميع العناصر وبدون تكرار، فإن المقياس المناسب هو تبديلة بدون تكرار $P(n)$ ، والتي تأخذ الصيغة التالية

$$P(n_1;n_2)=P(n_1)\times P(n_2)\mapsto P(n_1=12;n_2=18)=(12!)\times(18!)\Rightarrow P(12;18)=(12\times 11\times ...\times 2)(18\times 17\times ...\times 2)$$

$$P(n_1=12;n_2=18)=6402374184729600$$

3. عدد طرق ترتيب المترشحين في قاعة الإمتحان وفقا للتخصص: لدينا المجموعات الجزئية للمترشحين حسب التخصصات كمايلي؛

- 10 مترشحين في تخصص إدارة الأعمال؛
- 15 مترشح في تخصص تسيير المؤسسات؛
- 5 مترشحين في تخصص تسيير عمومي .

3-1. عدد طرق ترتيب المترشحين وفق كل تخصص على حدى : يتم التعبير عنها بالصيغة التالية ؛

$$\left.\begin{array}{l} n_1=10 \\ n_2=15 \\ n_3=5 \end{array}\right\}\mapsto P(n_1)\times P(n_2)\times P(n_3)\mapsto P(n_1=10;n_2=15;n_3=5)=(10!)\times(15!)\times(5!)$$

$$P(n_1=10;n_2=15;n_3=5)=1307677996920$$

تمرين رقم 04 :

لدينا المعطيات التمهيدية للتمرين كالأتي :

- عدد الأعضاء : $N = 12 = (11+1)$ ؛
- الجلوس على طاولة مستديرة الشكل

1. عدد طرق إجلاس الأعضاء على طاولة مستديرة الشكل : بما أن العملية مرتبطة بـ : ترتيب جميع العناصر وبدون تكرار، فإن المقياس المناسب هو تبديلة بدون تكرار $P(n)$، لكن هذا الترتيب على طاولة مستديرة (ترتيب متسلسل ومغلق) يعتمد على ضرورة إجلاس أحد الأعضاء قبل البدء بإيجاد تبديلات باقي الأعضاء، وعليه تأخذ التبديلة الصيغة التالية :

$$P(n-1) = (n-1)! \mapsto P(12-1) = 11! \Rightarrow P(11) = 11 \times 10 \times \ldots \times 2 \times 1 = 39916800$$

2. عدد طرق إجلاس الأعضاء على طاولة مستديرة الشكل بحيث يجلس المقرر على يمين رئيس النادي : وفق هذه الحالة نقوم أولا بإجلاس الرئيس ومقرره، ثم البدء في إيجاد تبديلات باقي الأعضاء $(n-2)$، وعليه تأخذ التبديلة الصيغة التالية :

$$P(n-2) = (n-2)! \mapsto P(12-2) = 10! \Rightarrow P(10) = 10 \times \ldots \times 2 \times 1 = 3628800$$

تمرين رقم 05 :

لدينا المعطيات التمهيدية للتمرين كالأتي :

- عدد الأفراد (الطلاب) : $n = 38$
- تعيين ممثلين لطلبة الفوج، بحيث الأول يكون رئيسا، والثاني نائب الرئيس .

1. عدد طرق اختيار الممثلين (رئيس ونائبه) : بما أن العملية مرتبطة بـ : اختيار جزء من الكل و أن الترتيب مهم والتكرار غير ممكن، فإن المقياس المناسب هو الترتيبة بدون تكرار (A_n^k)، والتي تأخذ الصيغة التالية :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\left.\begin{array}{l} n = 38 \\ k = 2 \end{array}\right\} \mapsto A_{38}^2 = \frac{38!}{(38-2)!} \Rightarrow A_{38}^2 = 1406$$

ومنه فإن هناك 1406 طريقة لاختيار رئيس ونائبه لتمثيل طلبة الفوج .

2. عدد طرق اختيار الممثلين (رئيس ونائبه) بفرض أن طالبين يرغبان في الترشح بشرط أن يكونان معا أو لا يترشحان إذا تم اختيار أحدهما دون الأخر : تتمثل في عدد حالات التي يكون فيها الطالبين معا، وعدد الحالات التي لا يكونان معا (اختيار طالبين أخرين)، ويتم التعبير عنهما كما يلي :

- عدد الحالات التي يكون الطالبين معا : تتمثل في اختيار 2 من 2، ثم ضربها في معامل الترتيب " $A_2^2 \times 2$ "؛

- عدد الحالات التي لا يكونان معا (اختيار طالبين أخرين) : تتمثل في اختيار 2 من الطلبة الباقين (36)، " A_{36}^2 " .

وبناءا عليه فإن تحديد عدد الحالات التي يكون فيها الطالبين معا أو لا يكونان معا، يحسب كما يلي :

$$N_2 = A_2^2 \times 2 + A_{36}^2 \mapsto N_2 = (1\times 2) + \frac{36!}{(36-2)!} \Rightarrow N_2 = 1262$$

ومنه فإن هناك 1262 طريقة لاختيار رئيس ونائبه لتمثيل طلبة الفوج، بحيث يكون إحدى الطالبين اللذين يرغبان في الترشح معا أو لا يكونان معا إذا تم اختيار أحدهما دون الأخر .

3. عدد طرق اختيار الممثلين (رئيس ونائبه) إذا فرضنا أن الأستاذ الذي كان يدرس أثناء عملية التعيين، اختار الطالب المميز في الفوج لأن يكون أحد ممثلي الطلبة (رئيس أو نائب): بما أن الأستاذ حدد أحد الممثلين، فإنه يبقى تحديد الممثل الأخر من بين الطلبة الباقين (1 من 37 طالب)، مع ضرورة ترجيح عدد الحالات بمعامل ترتيب المناصب، وبالتالي تأخذ المعلية الصيغة التالية :

$$N_3 = \left(A_1^1 \times A_{37}^1\right)\times 2 \mapsto N_3 = (1)\times\left(\frac{37!}{(37-1)!}\right)\times(2) \Rightarrow N_3 = 74$$

ومنه فإن هناك 74 طريقة لاختيار رئيس ونائبه لتمثيل طلبة الفوج، وفق هذه الحالة.

4. عدد طرق اختيار الممثلين، إذا وافق أحد الطلبة على الترشح بشرط أن لا يقبل إلا بالتمثيل كرئيس للفوج : يتمثل في عدد الحالات الكلية مع حذف الحالات التي يمكن أن يكون فيها نائبا، ويتم التعبير عن هذه الصياغة كمايلي :

$$N_4 = A_{38}^2 - A_{37}^1 \mapsto N_4 = (1406) - (37) \Rightarrow N_4 = 1369$$

ومنه فإن هناك 1369 طريقة لاختيار رئيس ونائبه لتمثيل طلبة الفوج، وفق هذه الحالة.

5. عدد طرق اختيار الممثلين، بفرض أن طالبين يرفضان تمثيل طلبة الفوج إذا تم اختيارهما معا : يتمثل في عدد الحالات الكلية مع حذف الحالات التي يكونان معا، ويتم التعبير عن هذه الصياغة كما يلي :

$$N_5 = A_{38}^2 - \left(A_2^2 \times 2\right) \mapsto N_5 = (1406) - (1\times 2) \Rightarrow N_5 = 1404$$

ومنه فإن هناك 1404 طريقة لاختيار رئيس ونائبه لتمثيل طلبة الفوج، وفق هذه الحالة.

تمرين رقم 06 :

لدينا المعطيات التمهيدية المتمثلة في عدد العمال : $n = 20$

1. عدد الطرق التي يمكن اختيار 05 عمال لفتح ورشة جديد : بما أن العملية مرتبطة بـ : اختيار جزء من الكل و أن الترتيب غير مهم (لا يتم التمييز بين العمال) والتكرار غير ممكن، فإن المقياس المناسب هو التوفيقة بدون تكرار (C_n^k)، والتي تأخذ الصيغة التالية :

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$\left.\begin{matrix} n = 20 \\ k = 5 \end{matrix}\right\} \mapsto C_{20}^5 = \frac{20!}{(20-3)!3!} \Rightarrow C_{20}^5 = 1140$$

ومنه فإن هناك 1140 طريقة لتشكيل مجموعة مكونة من خمسة عمال .

2. عدد الطرق التي يمكن توزيع العمال المكونين حديثة على ثلاثة ورشات : بما أن العملية مرتبطة بـ : توزيع جميع العناصر و أن التكرار ممكن(لأن المجموعة "الورشة" يمكن أن تأخذ أكثر من عامل واحد)، فإن المقياس المناسب هو التبديلة مع تكرار ($P(n;k_i)$)، والتي تأخذ الصيغة التالية :

$$P(n;k_i) = \frac{n!}{(k_1! \times k_1! \times \ldots \times k_P!)}$$

لدينا توزيع العمال على الورشات التالية كما يلي :

- الورشة الأولى : 10 عمال ($k_1 = 10$)
- الورشة الثانية : 6 عمال ($k_2 = 6$)
- الورشة الثالثة : 4 عمال ($k_3 = 4$)

بالتعويض في علاقة التبديلة مع التكرار نحصل على النتيجة التالية :

$$\left.\begin{matrix} k_1 = 10 \\ k_2 = 6 \\ k_3 = 4 \end{matrix}\right\} \mapsto P(n = 20; k_1 = 10, k_2 = 6, k_3 = 4) = \frac{20!}{(10! \times 6! \times 4!)} \Rightarrow P(n; k_1, k_2, k_3) \cong 38798760$$

ملاحظة : يمكن الحصول على نفس النتيجة بإستخدام التوفيقات، وذلك على النحو الأتي :

- عدد الحالات الممكنة لاختيار عمال الورشة الأولى : اختيار 10 عمال من 20 عامل، ويتم ذلك كما يلي؛

$$N_1 = C_{20}^{10} = \frac{20!}{(20-10)!10!} \Rightarrow C_{20}^{10} = 184756$$

- عدد الحالات الممكنة لاختيار عمال الورشة الثانية : اختيار 6 عمال من الباقي، ويتم ذلك كما يلي؛

$$N_2 = C_{(20-10)}^{6} = \frac{10!}{(10-6)!6!} \Rightarrow C_{10}^{6} = 210$$

- عدد الحالات الممكنة لاختيار عمال الورشة الثالثة : تتمثل في تشكيلة العمال الباقين، كما يمكن التعبير عنها كما يلي؛

$$N_3 = C_{(10-6)}^4 = \frac{4!}{(10-6)!4!} \Rightarrow C_4^4 = 1$$

ومنه فإن عدد الحالات الكلية يحسب كمايلي؛

$$N = N_1 \cap N_2 \cap N_3 \Leftrightarrow N = (C_{20}^{10})(C_{10}^{6})(C_4^4) \Rightarrow N = (184756)(210)(1) = 38798760$$

ومنه فإن هناك 38798760 طريقة لاختيار تشكيلة العمال في كل ورشة من الورشات الثلاثة للشركة ALFAPIPE .

تمرين رقم 07 :

لدينا المعطيات التمهيدية، المتمثلة في توظيف 12 معلم، و ترغب المديرية في توزيعهم على خمسة مدارس إبتدائية؛

$n = 20$

1. عدد الطرق التي يمكن بها توزيع المعلمين على خمسة مدارس إبتدائية : بما أن العملية مرتبطة بـ : اختيار الجزء من الكل و الترتيب غير مهم لأن كل المعلمين يؤدون نفس المهمة، بينما هناك تكرار لأن المدرسة المختارة يمكن أن تستقبل معلم أو أكثر، كما يمكنها أن لا تستقبل ولا معلم، وبالتالي فإن المقياس المناسب هو التوفيقة مع تكرار (K_n^r)، والتي تأخذ الصيغة التالية :

$$K_n^r = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}$$

r تمثل عدد المعلمين (تكرار) و n تمثل عدد المدارس المعنية بالتوزيع، بالتعويض في العلاقة، نحصل على النتيجة التالية :

$$\left.\begin{array}{l} n = 5 \\ k = 12 \end{array}\right\} \mapsto K_5^{12} = \frac{(5+12-1)!}{(5-1)!12!} \Rightarrow K_5^{12} = 1820$$

ومنه فإن هناك 1820 طريقة لتوزيع المعلمين على المدارس، بحيث يمكن للمدرسة الواحدة أن تستقبل معلم أو أكثر، كما يمكنها أن لا تستقبل ولا معلم .

2. بفرض أنه يتم توزيع معلم واحد على الأقل لكل مدرسة ؟

2. عدد الطرق التي يتم توزيع معلم واحد على الأقل لكل مدرسة إبتدائية : حتى نضمن تحقق شرط حصول كل مدرسة على معلم واحد على الأقل فإننا نختار بطريقة عشوائية معلم لكل مدرسة، وبالتالي يصبح عدد المعلمين :

$$r' = r - 5 \Rightarrow r' = 7$$

وعلى هذا التكرار نقوم بتوزيع هؤلاء المعلمين على المدارس بحيث يمكن أن تستقبل المدرسة معلم أو أكثر، كما يمكنها أن لا تستقبل ولا معلم، ويتم ذلك كما يلي :

$$\left.\begin{array}{l} n=5 \\ k=7 \end{array}\right\} \mapsto K_5^7=\frac{(5+7-1)!}{(5-1)!7!} \Rightarrow K_5^7=330$$

ومنه فإن هناك 330 طريقة لتوزيع المعلمين على المدارس، بحيث يمكن لكل مدرسة معلم واحد على الأقل .

تمرين رقم 08 :

لدينا صندوق يحتوى على 11 كرية ذات ألوان مختلفة لا يمكن التمييز بينها باللمس، 5 كرات بيضا، 4 سوداء 2 حمراء، نسحب من الصندوق 3 كرات .

أولا- تحديد عدد الحالات الممكنة لسحوبات، إذا كانت عملية سحب الكرات الثلاثة من الصندوق في أن واحد ؛

بما أن العملية مرتبطة بسحب أكثر من كرة واحدة في أن واحد، فهذا يعني أن المقياس المناسب هو التوفيقة بدون إرجاع، والتي تأخذ الصيغة التالية :

$$C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

1. تحديد عدد الحالات الممكنة لسحب ثلاثة كرات من الصندوق : بما أنه لم يتم التمييز بين الكرات المسحوبة، فإن الصيغة المناسبة لهذا المطلب تأخذ العبارة التالية :

$$\left.\begin{array}{l} n=11 \\ k=3 \end{array}\right\} \mapsto C_{11}^3=\frac{11!}{(11-3)!3!} \Rightarrow C_{11}^3=165$$

2. تحديد عدد الحالات الممكنة لسحب ثلاثة كرات بيضاء : بما أنه تم تحديد لون الكرات المسحوبة بلون واحد فقط و التي تمثل 3 كرات من 5، فإن الصيغة المناسبة لهذا المطلب تأخذ العبارة التالية :

$$\left.\begin{array}{l} n=5 \\ k=3 \end{array}\right\} \mapsto C_5^3=\frac{5!}{(5-3)!3!} \Rightarrow C_5^3=10$$

3. تحديد عدد الحالات الممكنة لسحب كرة بيضاء واحدة على الأقل : بما أنه أشترط أن تكون من ضمن الكرات المسحوبة كرة واحدة على الأقل ذات لون أبيض، فإن الصيغة المناسبة لهذا المطلب تأخذ العبارة التالية :

$$N_3=\left[C_5^1\times C_6^2\right]+\left[C_5^2\times C_6^1\right]+\left[C_5^3\times C_6^0\right] \Rightarrow N_3=[(5)(15)]+[(10)(6)]+[(10)(1)]$$

$$\Rightarrow N_3=145$$

ملاحظة : يمكن الحصول على النفس النتيجة، إذا تم الإعتماد على طريقة الحدث العكسي (المتمم)، والذي يعنى عدم الحصول على أي كرة بيضاء، وصياغته تكون كما يلي؛

$$N_3 = C_{11}^3 - C_6^3 \mapsto N_3 = \left(\frac{11!}{(11-3)!3!}\right) - \left(\frac{6!}{(6-3)!3!}\right) \Rightarrow N_3 = 165 - 20 = 145$$

4. تحديد عدد الحالات الممكنة لتكون الكرتين المسحوبتين لهما نفس اللون : بما أنه أشترط أن تكون كرتين لهما نفس اللون، بمعنى إما أن تكون كرتين بيضاء أو كرتين سوداء أو كرتين حمراء، فإن الصيغة المناسبة لهذا المطلب تأخذ الشكل الأتي؛

$$N_4 = \left[C_5^2 \times C_{(4+2)}^1\right] + \left[C_4^2 \times C_{(5+2)}^1\right] + \left[C_2^2 \times C_{(5+4)}^1\right] \Rightarrow N_4 = [(10)(6)] + [(6)(6)] + [(1)(9)]$$

$$\Rightarrow N_4 = 105$$

ثانيا- تحديد عدد الحالات الممكنة لسحوبات، إذا كانت عملية سحب الكرات الثلاثة من الصندوق تكون على التوالي دون إرجاع الكرة المسحوبة ؛

بما أن العملية مرتبطة بسحب أكثر من كرة واحدة على التوالي دون إرجاع الكرة المسحوبة، فهذا يعني أن الترتيب مهم دون تكرار، وبالتالي فإن المقياس المناسب هو الترتيبة بدون تكرار، والتي تأخذ علاقتها الصيغة التالية :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

5-1.عدد الحالات الممكنة لسحب ثلاثة كرات بيضاء :الصيغة المناسبة لسحب ثلاثة كرات بيضاء تكون على الشكل الأتي؛

$$\left.\begin{matrix} n = 5 \\ k = 3 \end{matrix}\right\} \mapsto A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} \Rightarrow A_5^3 = 60$$

ملاحظة : يمكن إيجاد نفس النتيجة، بالإعتماد على العلاقة بين التوفيقة والترتيبة، وذلك كمايلي؛

$$A_n^k = C_n^k \times k! \mapsto A_5^3 = C_5^3 \times 3! = 60$$

5-2. عدد الحالات الممكنة لسحب كرة بيضاء واحدة على الأقل : الصيغة المناسبة لسحب كرة بيضاء واحدة على الأقل تكون وفق العبارة الأتي؛

$$N_5 = \left[\left(A_5^1 \times A_6^2\right) \times 3\right] + \left[\left(A_5^2 \times A_6^1\right) \times 3\right] + \left[\left(A_5^3 \times A_6^0\right)\right]$$

$$N_5 = [(5)(30)(3)] + [(20)(6)(3)] + [(60)(1)] \Rightarrow N_5 = 870$$

باستخدام طريقة الحدث العكسي، نحصل على النتيجة الأتية :

$$N_5 = A_{11}^3 - A_6^3 \mapsto N_5 = \left(\frac{11!}{(11-3)!}\right) - \left(\frac{6!}{(6-3)!}\right) \Rightarrow N_3 = 990 - 120 = 870$$

ثالثا- تحديد عدد الحالات الممكنة لسحوبات، إذا كانت عملية سحب الكرات الثلاثة من الصندوق تكون على التوالي مع إرجاع الكرة المسحوبة قبل السحبة الموالية ؛

بما أن العملية مرتبطة بسحب أكثر من كرة واحدة على التوالي مع إرجاع الكرة المسحوبة، فهذا يعني أن الترتيب مهم ومع التكرار، وبالتالي فإن المقياس المناسب هو الترتيبة مع التكرار (القائمة)، والتي تأخذ علاقتها الصيغة التالية :

$$n^k = (n_1 \times n_2 \times ... \times n_k)$$

5-1.عدد الحالات الممكنة لسحب ثلاثة كرات بيضاء :الصيغة المناسبة لسحب ثلاثة كرات بيضاء تكون على الشكل الأتي؛

$$\left.\begin{matrix} n=5 \\ k=3 \end{matrix}\right\} \mapsto (5)^3 = (5)(5)(5) \Rightarrow (5)^3 = 125$$

5-2. عدد الحالات الممكنة لسحب كرة بيضاء واحدة على الأقل : الصيغة المناسبة لسحب كرة بيضاء واحدة على الأقل تكون وفق العبارة الأتي؛

$$N_6 = \left[\left((5)^1 \times (6)^2\right) \times 3\right] + \left[\left((5)^2 \times (6)^1\right) \times 3\right] + \left[\left((5)^3 \times (6)^0\right)\right]$$

$$\Rightarrow N_6 = 540 + 450 + 125 \Leftrightarrow N_6 = 1115$$

باستخدام طريقة الحدث العكسي، نحصل على النتيجة الآتية :

$$N_6 = \left[(11)^3 - (6)^3\right] \mapsto N_6 = (1331 - 216) \Rightarrow N_6 = 1115$$

ومنه فإن عدد الحالات الممكنة لسحب كرة واحدة بيضاء على الأقل عند عملية السحب على التوالي مع الإرجاع هي 1115 حالة.

تمرين رقم 09 :

لدينا داخل علبة 50 مصباح كهربائي، منها 10 مصابيح تالفة، وبالتالي نعرف ما يلي؛

A: حدث سحب مصباح صالح، P(A) احتمال الحصول على مصباح صالح، يقدر بـ $P(A) = \frac{40}{50} = 0,8$ ؛

B: حدث سحب مصباح تالف، P(B) احتمال الحصول على مصباح تالف، يقدر بـ $P(B) = \frac{10}{50} = 0,2$ ؛

أولا- إذا تم سحب مصباحين من الصندوق بطريقة عشوائية متتالية بحيث يتم إرجاع المصباح الأول قبل عملية السحب الثانية (سحب مع الإرجاع) ؛

1. احتمال أن يكون المصباحين صالحين : بالإعتماد على المعادلة التالية؛

$$P(A \cap A) = P(A) \cap P(A) = P(A) \times P(A)$$

$$P(A \cap A) = \left(\frac{40}{50}\right)\left(\frac{40}{50}\right) = 0,64$$

يعنى أن هناك نسبة 64% أن يتم سحب مصباحين صالحين من علبة المصابيح .

2. احتمال أن يكون المصباحين تالفين :

$$P(B\cap B)=\left(\frac{10}{50}\right)\left(\frac{10}{50}\right)=0{,}04$$

هناك نسبة 4% أن يتم سحب مصباحين غير صالحين من علبة المصابيح .

3. احتمال أن يكون المصباح الأول صالح و الثاني تالف :

$$P(A\cap B)=\left(\frac{40}{50}\right)\left(\frac{10}{50}\right)=0{,}16$$

هناك نسبة 16% أن يتم سحب مصباح صالح و الأخر غير صالح من علبة المصابيح .

ثانيا- إذا تم سحب مصباحين من الصندوق بطريقة عشوائية متتالية دون إرجاع المصباح المسحوب؛

وفق هذا المعطى فإن الترتيب مهم كما أن التكرار غير ممكن، لذلك نعتمد على مقياس التربية بالطريقة الإحتمالية، عدد الحالات الملائمة (الموافقة) للحدث على عدد الحالات الكلية الممكنة؛

E: حدث سحب مصباحين تالفين، P(E) احتمال الحصول على مصباحين تالفين، والذي يحسب وفق العلاقة التالية؛

$$P(E)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

لدينا عدد الحالات الملائمة لسحب مصباحين تالفين

$$Card(A)=A_{10}^{2}\mapsto Card(A)=\frac{10!}{(10-2)!}=90$$

لدينا عدد الحالات الممكنة لسحب مصباحين من علبة المصابيح،

$$Card(\Omega)=A_{50}^{2}\mapsto Card(\Omega)=\frac{50!}{(50-2)!}=2450$$

ومنه فإن احتمال سحب مصباحين تألفين هو :

$$P(E)=\frac{90}{2450}\Rightarrow P(E)=0{,}036735$$

ملاحظة : يمكن الحصول على نفس النتيجة بإستخدام جداء الإحتمالات، مع مراعاة السحب بدون إرجاع

$$P(E)=P_k(A)\times P_{(k-1)}(A)$$

$$P(E)=\left(\frac{10}{50}\right)\times\left(\frac{9}{50}\right)\Rightarrow P(E)=0{,}036735$$

ثالثا- إذا تم سحب المصباحين من العلبة بطريقة عشوائية وفي أن واحد : وفق هذا المعطى فإن الترتيب غير مهم كما أن التكرار غير ممكن، لذلك نعتمد على مقياس التوفيقة بالطريقة الإحتمالية، عدد الحالات الملائمة (الموافقة) على عدد الحالات الكلية الممكنة؛

$$P(E)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

لدينا عدد الحالات الملائمة لسحب مصباحين تالفين

$$Card(A)=C_{10}^{2}\mapsto Card(A)=\frac{10!}{(10-2)!2!}=45$$

لدينا عدد الحالات الممكنة لسحب مصباحين من علبة المصابيح،

$$Card(\Omega)=C_{50}^{2}\mapsto Card(\Omega)=\frac{50!}{(50-2)!2!}=1225$$

ومنه فإن احتمال سحب مصباحين تألفين هو :

$$P(E)=\frac{45}{1225}\Rightarrow P(E)=0,037$$

نلاحظ أن هناك نسبة 3,7% أن يتم سحب مصباحين في أن واحد ويكونان تالفين. .

تمرين رقم 10 :

لدينا من معطيات التمرين البيانات التالية :

S: حدث أن يكون الطالب راسب في مقياس الإحصاء، P(S) احتمال الرسوب في مقياس الإحصاء $P(S)=0,2$ ؛

M: حدث أن يكون الطالب راسب في مقياس الرياضيات ، P(M) احتمال الرسوب في مقياس الرياضيات $P(M)=0,25$ ؛

E: حدث أن يكون الطالب راسب في المقياسين معا، P(E) احتمال الرسوب في المقياسين الإحصاء $P(S\cap M)=0,1$.

إذا تم اختيار طالبا من المحاضر بطريقة عشوائية، حدد الإحتمالات التالية :

1. احتمال أن يكون الطالب راسبا في الرياضيات إذا كان راسبا في الإحصاء : بما أن احتمال رسوب الطالب في الرياضيات مشروط برسوبه في الإحصاء، فإننا سنعتمد على علاقة الاحتمال الشرطي، وذلك على النحو الأتي :

$$P(M/S)=\frac{P(S\cap M)}{P(S)}$$

بالتعويض نحصل على احتمال رسوب الطالب في مقياس الرياضيات بشرط أن يكون راسبا في مقياس الاحصاء، وذلك بـ

$$P(M/S)=\frac{(0,1)}{(0.2)}\Rightarrow P(M/S)=0,5$$

2. احتمال أن يكون الطالب راسبا في الإحصاء إذا كان راسبا في الرياضيات: بما أن احتمال رسوب الطالب في الإحصاء مشروط برسوبه في الرياضيات ، فإننا سنعتمد على علاقة الاحتمال الشرطي، وذلك على النحو الأتي :

$$P(S/M)=\frac{P(S\cap M)}{P(S)}\mapsto P(S/M)=\frac{(0,1)}{(0.25)}\Rightarrow P(S/M)=0,4$$

3. احتمال أن يكون الطالب ناجحا في الإحصاء إذا كان راسبا في الرياضيات : بما أن احتمال نجاح الطالب في الإحصاء مشروط برسوبه في الرياضيات ، فإننا سنعتمد على علاقة الاحتمال الشرطي للحدث المتمم، وذلك على النحو الأتي :

$$P(\overline{S}/M)=1-P(S/M)\mapsto P(\overline{S}/M)=1-(0,4)\Rightarrow P(\overline{S}/M)=0,6$$

4. احتمال أن الطالب راسب في الرياضيات أو الإحصاء : يتم صياغة هذا الاحتمال بالعبارة التالية؛

$$P(M\cup S)=P(M)+P(S)-P(M\cap S)$$

بالتعويض قيم الاحتمال في العلاقة السابقة نحصل على احتمال أن يكون الطالب راسب في الرياضيات أو الاحصاء، وذلك كما يلي؛

$$P(M\cup S)=(0,25)+(0,2)-(0,1)\Rightarrow P(M\cup S)=0,35$$

تمرين رقم 11 : لدينا المعطيات التالية ؛

A : حدث اختيار شعبة العلوم الاقتصادية، P(A) احتمال اختيار شعبة علوم إقتصادية بـ $P(A)=\frac{1}{3}$ ؛

B : حدث اختيار شعبة علوم التسيير، P(B) احتمال اختيار شعبة علوم التسيير بـ $P(B)=\frac{1}{4}$ ؛

C : حدث اختيار شعبة العلوم التجارية، P(C) احتمال اختيار شعبة علوم التجارية بـ $P(C)=\frac{1}{6}$ ؛

D : حدث اختيار شعبة علوم المالية والمحاسبة، P(D) احتمال اختيار شعبة علوم المالية والمحاسبة .

F : حدث عدم موافقة لجنة الإنتقاء على الشعبة التي اختيارها الطالب، P(F) احتمال رفض اللجنة لشعبة التي اختيارها الطالب.

كما لدينا أيضا :

- احتمال عدم قبول اللجنة لشعبة المختارة، إذاكانت شعبة علوم إقتصادية بـ : $P(F/A)=\frac{1}{10}$
- احتمال عدم قبول اللجنة لشعبة المختارة، إذاكانت شعبة علوم التسيير بـ : $P(F/B)=\frac{1}{5}$
- احتمال عدم قبول اللجنة لشعبة المختارة، إذاكانت شعبة علوم تجارية بـ : $P(F/C)=\frac{2}{3}$
- احتمال عدم قبول اللجنة لشعبة المختارة، إذاكانت شعبة علوم المالية والمحاسبة بـ : $P(F/D)=\frac{1}{2}$

1. احتمال أن يكون الطالب قد اختار شعبة العلوم المالية والمحاسبة (D) : بما أن مجموع الإحتمالات يساوي الواحد الصحيح، فإن قيمة احتمال اختيار شعبة علوم المالية والمحاسبة هو :

$$P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)+P(D)=1 \Rightarrow P(D)=\left(1-\frac{9}{12}\right)=\frac{1}{4}$$

ومنه فإن احتمال اختيار الطالب لشعبة علوم المالية والمحاسبة هو 0,25 .

2. احتمال أن لا توافق لجنة الإنتقاء على اختيار الطالب : يتمثل في احتمال $P(F)$، والذي مجموع جداء احتمال اختيار الشعبة في احتمال عدم موافقة اللجنة عليها، وذلك وفق العلاقة التالية ؛

$$P(F)=P(A)\times P(F/A)+P(B)\times P(F/B)+P(C)\times P(F/C)+P(D)\times P(F/D)$$

بالتعويض نحصل على النتيجة التالية :

$$P(F)=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow P(F)=0,31944$$

بمعنى، هناك 31,19% أن لا توافق اللجنة على اختيار الطالب للشعبة المختارة.

3. احتمال عدم موافقة لجنة الانتقاء على اختيار الطالب إذا كان قد إختار شعبة علوم التسيير : بما أننا نسعى إلى حساب احتمال من احتمال جزئي (عدم موافقة اللجنة)، فإنه يتم الإستعانة بعلاقة بايز Bayés، والتي تأخذ وفق هذه الحالة الصيغة التالية؛

$$P(B/F)=\frac{P(B)\times P(F/B)}{P(F)}=\frac{P(B)\times P(F/B)}{P(A)\times P(F/A)+P(B)\times P(F/B)+P(C)\times P(F/C)+P(D)\times P(F/D)}$$

بالتعويض نحصل على النتيجة التالية :

$$P(B/F)=\frac{P(B)\times P(F/B)}{P(F)} \mapsto P(B/F)=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)}{0,3194} \Rightarrow P(B/F)=0,1564$$

بمعنى، هناك 15,64% أن لا تكون اللجنة قد وافقت على اختيار الطالب إذا كان قد إختار شعبة علوم التسيير.

تمرين رقم 12 : لدينا صندوق يحتوى على بطاقات مرقمة ترقيم تسلسلي من الواحد إلى الخمسين (1 إلى 50)، والتجربة تعتمد على سحب بطاقة واحدة بطريقة عشوائية، وليتم تعريف الأحداث الآتية :

A : حدث أن تكون البطاقة المسحوبة من الصندوق تحمل رقم قابل للقسمة على 2؛

B : حدث أن تكون البطاقة المسحوبة من الصندوق تحمل رقم قابل للقسمة على 3؛

C : حدث أن تكون البطاقة المسحوبة من الصندوق تحمل رقم قابل للقسمة على 5؛

D : حدث أن تكون البطاقة المسحوبة من الصندوق تحمل رقم قابل للقسمة على 11 .

1. إيجاد الاحتمالات :

- فضاء العينة (عدد الحالات الممكنة الإجمالية) :

$$\Omega=\{1;2;3;4;5;6;7;9;10;...;50\}\mapsto Card(\Omega)=50$$

- احتمال $P(A)$:

$$A=\{2;4;6;8;10;12;14;16;18;20;22;24;26;28;30;32;34;36;38;40;42;44;46;48;50\}\mapsto Card(A)=25$$

$$P(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}\mapsto P(A)=\frac{25}{50}=0{,}5$$

- احتمال $P(B)$:

$$B=\{3;6;9;12;15;18;21;24;27;30;33;36;39;42;45;48\}\mapsto Card(B)=16$$

$$P(B)=\frac{Card(B)}{Card(\Omega)}\mapsto P(B)=\frac{16}{50}=0{,}32$$

- احتمال $P(C)$:

$$C=\{5;10;15;20;25;30;35;40;45;50\}\mapsto Card(C)=10$$

$$P(C)=\frac{Card(C)}{Card(\Omega)}\mapsto P(C)=\frac{10}{50}=0{,}2$$

- احتمال $P(D)$:

$$D=\{11;22;33;44\}\mapsto Card(D)=4$$

$$P(D)=\frac{Card(D)}{Card(\Omega)}\mapsto P(D)=\frac{4}{50}=0{,}08$$

- احتمال $P(A\cap B)$:

$$(A\cap B)=\{6;12;18;24;30;36;42;48\}\mapsto Card(A\cap B)=8$$

$$P(A\cap B)=\frac{Card(A\cap B)}{Card(\Omega)}\mapsto P(A\cap B)=\frac{8}{50}=0{,}16$$

- احتمال $P(A\cap C)$:

$$(A\cap C)=\{10;20;30;40;50\}\mapsto Card(A\cap C)=5$$

$$P(A\cap C)=\frac{Card(A\cap C)}{Card(\Omega)}\mapsto P(A\cap C)=\frac{5}{50}=0{,}1$$

- احتمال $P(B\cap C)$:

$$(B\cap C)=\{15;30;45\}\mapsto Card(B\cap C)=3$$

$$P(B\cap C)=\frac{Card(B\cap C)}{Card(\Omega)}\mapsto P(B\cap C)=\frac{3}{50}=0{,}06$$

- احتمال $P(C\cap D)$:

$$(C\cap D)=\{\ \}=\phi\mapsto Card(C\cap D)=0$$

$$P(C\cap D)=\frac{Card(C\cap D)}{Card(\Omega)}\mapsto P(C\cap D)=0$$

- احتمال $P(A\cap B\cap C)$:

$$(A\cap B\cap C)=\{30\}\mapsto Card(A\cap B\cap C)=1$$

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{Card(A\cap B\cap C)}{Card(\Omega)}\mapsto P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{50}=0,02$$

2. دراسة العلاقة بين ثنائية الأحداث التالية : يمكن أن نميز بين حالتين للعلاقة الثنائية للأحدث هما :

- التنافي : نقول عن حدثين A و B أنهما متنافيين إذا كان تقاطعهما يشكل المجموعة الخالية، أو احتمال التقاطع يساوي الصفر، وهو ما يمكن التعبير عنه بالصيغة التالية؛

$(A\cap B)=\phi \Rightarrow P(A\cap B)=0$ ⇐ومنه فإن الحدثين A و B متنافيين، والعكس صحيح.

- الاستقلالية : لدراسة إستقلالية الحدثين A و B يجب التأكد من أن: $P(A\cap B)>0\ ;\ \ P(A)>0\ ;\ P(B)>0$ كمرحلة أولى ، ثم التحقق من الشرط الأتي؛

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\Rightarrow$ الحدثين A و B مستقلين عن بعضهما البعض ؛

$P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)\Rightarrow$ الحدثين A و B غير مستقلين (مرتبطين) .

لدينا القيم الإحتمالية للأحدث، وتقاطعاتها على النحو الأتي :

$P(A)=0,5$	$P(A\cap B)=0,16$
$P(B)=0,32$	$P(A\cap C)=0,1$
$P(C)=0,2$	$P(B\cap C)=0,06$
$P(D)=0,08$	$P(C\cap D)=0$

1-2. دراسة العلاقة بين الحدثين A و B : بما أن احتمال كل حدث، وكذا احتمال تقاطع الحدثين غير معدوم، فإن الحدثين غير متنافيين، وبالتالي يمكن أن يكونان مستقلين .

$$P(A\cap B)\overset{??}{=}P(A)\times P(B)\mapsto P(A)\times P(B)=(0,5)(0,32)=0,16\Rightarrow P(A)\times P(B)=P(A\cap B)$$

ومنه فإن الحدثين A و B مستقلين عن بعضهما البعض .

1-2. دراسة العلاقة بين الحدثين A و C : بما أن احتمال كل حدث، وكذا احتمال تقاطع الحدثين غير معدوم، فإن الحدثين غير متنافيين، وبالتالي يمكن أن يكونان مستقلين .

$$P(A\cap C)\overset{??}{=}P(A)\times P(C)\mapsto P(A)\times P(C)=(0,5)(0,2)=0,1\Rightarrow P(A)\times P(C)=P(A\cap C)$$

ومنه فإن الحدثين A و C مستقلين عن بعضهما البعض .

3-2. دراسة العلاقة بين الحدثين B و C : بما أن احتمال تقاطع الحدثين غير معدوم، فإن الحدثين غير متنافيين، وبالتالي يمكن أن يكونان مستقلين .

$$P(B\cap C)\overset{??}{=}P(B)\times P(C)\mapsto P(B)\times P(C)=(0,32)(0,2)=0,064\Rightarrow P(B)\times P(C)\neq P(B\cap C)$$

ومنه فإن الحدثين B و C غير مستقلين عن بعضهما البعض، أي أن إحداهما مرتبط بالأخر .

4-2. دراسة العلاقة بين الحدثين C و D : بما أن احتمال تقاطع الحدثين معدوم، فإن الحدثين متنافيين، وبالتالي لا يمكن دراسة الإستقلالية .

$P(C \cap D) = 0 \Leftarrow$ الحدثين متنافيين .

3. حساب احتمال الحدثين $P[A \cup (B \cap C)]$ و $P[A \cap (B \cup C)]$: لدينا علاقة حساب احتمال إتحاد حدثين بالصيغة الأتية ؛

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

1-3. إيجاد احتمال الحدث $(A \cup (B \cap C))$

$$P[A \cup (B \cap C)] = P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap (B \cap C))$$

بتعويض القيم الإحتمالية نحصل على النتيجة التالية :

$$P[A \cup (B \cap C)] = (0{,}5) + (0{,}06) - (0{,}02) \Rightarrow P[A \cup (B \cap C)] = 0{,}54$$

2-3. إيجاد احتمال الحدث $(A \cap (B \cup C))$

يتم تبسيط هذا الحدث المركب على النحو الأتي:

$$(A \cap (B \cup C)) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

ومنه فإن؛

$$P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

بتعويض القيم الإحتمالية نحصل على النتيجة التالية :

$$P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] = (0{,}16) + (0{,}1) - (0{,}02) \Rightarrow P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] = 0{,}24$$

4. احتمال أن يكون الرقم المسحوب قابلا للقسمة على 2 أو 3 أو 5 : يتم التعبير عن هذه الصيغة باحتمال الحدث الأتي؛

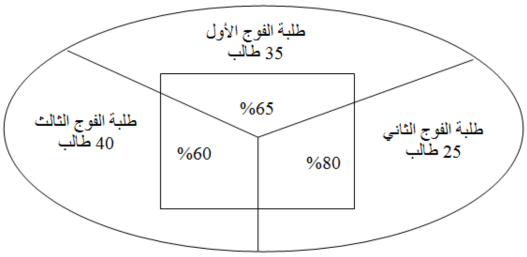
$$P[A \cup B \cup C] = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

بالتعويض القيم الإحتمالية نحصل على النتيجة التالية :

$$P[A \cup B \cup C] = (0{,}5) + (0{,}32) + (0{,}2) - (0{,}16) - (0{,}1) - (0{,}06) + (0{,}02) \Rightarrow P[A \cup B \cup C] = 0{,}72$$

ومنه فإن هناك 72% أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل رقما قابلا للقسمة على 2 أو 3 أو 5 .

تمرين رقم 13 : يمكن التعبير عن معطيات هذا التمرين بالشكل المبين على النحو الأتي؛



نحدد الأحداث الأتية؛

G1 : حدث أن يكون الطالب من الفوج الأول، احتمال أن يكون الطالب من الفوج الأول هو $P(G_1)=\frac{35}{100}=0,35$ ؛

G2 : حدث أن يكون الطالب من الفوج الثاني، احتمال أن يكون الطالب من الفوج الثاني هو $P(G_2)=\frac{25}{100}=0,25$ ؛

G3 : حدث أن يكون الطالب من الفوج الثالث، احتمال أن يكون الطالب من الفوج الثالث هو $P(G_3)=\frac{40}{100}=0,4$.

لدينا أيضا (D) حدث أن يكون الطالب حاصل على معدل يفوق أو يساوي 10 في مقياس رياضيات المؤسسة، وبالتالي فإن ؛

- احتمال أن يكون الطالب نجاح في المقياس علما أنه يدرس في الفوج الأول هو $P(D/G_1)=0,65$ ؛
- احتمال أن يكون الطالب نجاح في المقياس علما أنه يدرس في الفوج الثاني هو $P(D/G_2)=0,8$ ؛
- احتمال أن يكون الطالب نجاح في المقياس علما أنه يدرس في الفوج الثالث هو $P(D/G_3)=0,6$.

1. احتمال أن يكون هذا الطالب فعلا غير ناجح : يتم حساب هذا الاحتمال بتطبيق الصيغة التالية؛ احتمال عدم موافقة اللجنة عليها، وذلك وفق العلاقة التالية ؛

$$P(\overline{D})=P(G_1)\times P(\overline{D}/G_1)+P(G_2)\times P(\overline{D}/G_2)+P(G_3)\times P(\overline{D}/G_3)$$

بالتعويض نحصل على النتيجة التالية :

$$P(\overline{D})=(0,35)(1-0,65)+(0,25)(1-0,8)+(0,4)(1-0,6)\Rightarrow P(\overline{D})=0,3325$$

ملاحظة : يمكن الحصول على نفس النتيجة بالاعتماد على الحدث المعاكس، وذلك كما يلي؛

$$P(\overline{D})=1-P(D)\Leftrightarrow P(\overline{D})=1-[P(G_1)\times P(D/G_1)+P(G_2)\times P(D/G_2)+P(G_3)\times P(D/G_3)]$$

$$P(\overline{D})=1-[(0,35)(0,65)+(0,25)(0,8)+(0,4)(0,6)]\Rightarrow P(\overline{D})=1-0,6675$$

$$P(\overline{D})=0,3325$$

2. احتمال أن يكون الطالب من الفوج الأول (G1) : يتم التعبير عن هذا الاحتمال بالصيغة التالية؛

$$P(G_1/\overline{D})=\frac{P(G_1)\times P(\overline{D}/G_1)}{P(G_1)\times P(\overline{D}/G_1)+P(G_2)\times P(\overline{D}/G_2)+P(G_3)\times P(\overline{D}/G_3)}$$

بالتعويض نحصل على النتيجة التالية؛

$$P(G_1/\overline{D})=\frac{(0,35)(0,35)}{(0,3325)}\Rightarrow P(G_1/\overline{D})=0,368$$

ومنه فإن هناك 36,8% أن يكون الطالب غير ناجح في مقياس رياضيات المؤسسة من الفوج الأول .

3. احتمال أن يكون الطالب من الفوج الأول(G1) أو الفوج الثالث(G3) : يتم التعبير عن احتمال هذا الحدث بالصيغة التالية ؛

$$P(G_1/\overline{D})+P(G_3/\overline{D})=\frac{P(G_1)\times P(\overline{D}/G_1)+P(G_3)\times P(\overline{D}/G_3)}{P(G_1)\times P(\overline{D}/G_1)+P(G_2)\times P(\overline{D}/G_2)+P(G_3)\times P(\overline{D}/G_3)}$$

بالتعويض نحصل على النتيجة التالية؛

$$P(G_1/\overline{D})+P(G_3/\overline{D})=\frac{(0{,}35)(0{,}35)+(0{,}4)(0{,}4)}{(0{,}3325)}\Rightarrow P(G_1/\overline{D})+P(G_3/\overline{D})=0{,}8496$$

ومنه فإن هناك 84,96% أن يكون الطالب غير ناجح في مقياس رياضيات المؤسسة من الفوج الأول أو الفوج الثالث .

4. احتمال أن لا يكون الطالب من الفوج الثالث(G3) : يتم التعبير عن هذا الاحتمال بالحدث المعاكس (المتمم)، وذلك على النحو الأتي:

$$P(\overline{G}_3/\overline{D})=1-P(G_3/\overline{D})\mapsto P(\overline{G}_3/\overline{D})=1-\left(\frac{P(G_3)\times P(\overline{D}/G_3)}{P(\overline{D})}\right)\Leftrightarrow P(\overline{G}_3/\overline{D})=1-\left(\frac{(0{,}4)(0{,}4)}{0{,}3325}\right)$$

$$P(\overline{G}_3/\overline{D})=0{,}5188$$

ومنه فإن هناك 51,88% أن لا يكون الطالب غير الناجح في مقياس الرياضيات المؤسسة من الفوج الثالث (G3) .

ملاحظة : يمكن الحصول على نفس النتيجة، بإعادة صياغة الحدث، حيث يعبر عنه باحتمال أن يكون الطالب من الفوج الأول أو الفوج الثاني، والذي يأخذ الصيغة التالية :

$$P(\overline{G}_3/\overline{D})=P(G_1/\overline{D})+P(G_2/\overline{D})$$

والتي تأخذ الشكل الأتي؛

$$P(\overline{G}_3/\overline{D})=P(G_1/\overline{D})+P(G_2/\overline{D})=\frac{P(G_1)\times P(\overline{D}/G_1)+P(G_2)\times P(\overline{D}/G_2)}{P(G_1)\times P(\overline{D}/G_1)+P(G_2)\times P(\overline{D}/G_2)+P(G_3)\times P(\overline{D}/G_3)}$$

بالتعويض نحصل على النتيجة التالية؛

$$P(\overline{G}_3/\overline{D})=\frac{(0{,}35)(0{,}35)+(0{,}2)(0{,}25)}{(0{,}3325)}\Rightarrow P(\overline{G}_3/\overline{D})=\left(\frac{0{,}1725}{0{,}3325}\right)=0{,}5188$$

الفصل الثاني : المتغيرات العشوائية

أهداف الفصل؛

بعد إتمام الطالب(ة) لهذا الفصل سيكون باستطاعته أن :

- التمييز بين المتغير العشوائي المنفصل و المتغير العشوائي المتصل في التجربة العشوائية؛
- طرق تحديد قانون الإحتمال والتوزيع التراكمي في المتغير العشوائي المنفصل؛
- طرق صياغة دالة كثافة الاحتمال والدالة التراكمية في المتغير العشوائي المتصل؛
- التعرف على أساليب تحديد المميزات الإحصائية للمتغيرات العشوائية من حيث القيمة المتوقعة وكذا مدى تشتت مختلف القيم حول القيمة المتوسطة .

المحاور المستهدفة؛

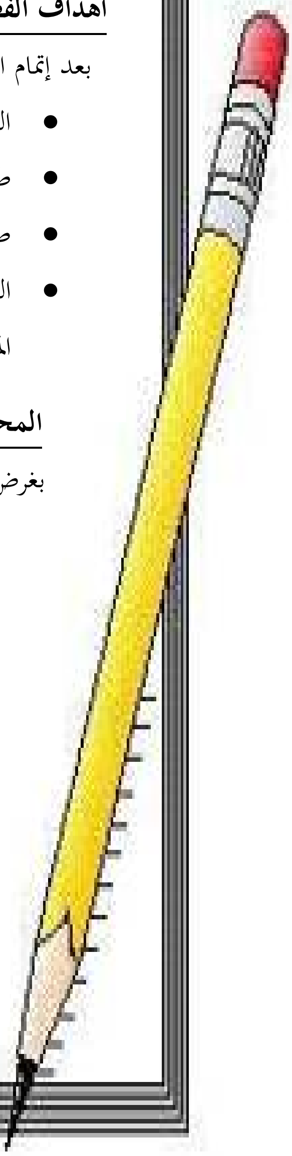
بغرض تحقيق أهداف هذا الفصل، فإننا سوف نتطرق إلى المحاور الأساسية المتمثلة فيمايلي:

- المتغير العشوائي المنفصل (المنقطع)؛
- المتغير العشوائي المتصل (المستمر)؛
- الخصائص الإحصائية للمتغير العشوائي (التوقع الرياضي، التباين، الانحراف المعياري)؛
- سلسلة تمارين مع حلول نموذجية.

المدى الزمني للفصل ؛

سيتم تغطية محتوى هذا الفصل وفق المتطلب الزمني الأتي :

- حصة محاضرة : ثلاثة ساعات (محاضرتين)؛
- حصة أعمال موجهة : ثلاثة ساعات (حصتين).



الفصل الثاني

المتغيرات العشوائية

إن الإحصائي عند قيامه بالتجربة العشوائية يهتم بالنتائج المتولدة عنها أكثر من اهتمامه بتحقق الحدث أو الأحداث المختلفة في الظاهرة المدروسة، لاسيما عندما يقوم بتكرار التجربة أكثر من مرة واحدة وفق نفس الشروط، وبالتالي سيحصل على نتائج مرتبطة بتكرار التجربة، والتي إما أن تكون رقمية كما هو الحال على سبيل المثال في تجربة رمي زهرة نرد، أو أن تكون عددية (ترميزية) كما هو الحال في تجربة رمي قطعة النقود، هذه النتائج تعرف بالمتغيرات العشوائية التي تعبر عن كل تجربة.

ونظر لأهمية دراسة المتغيرات العشوائية في التجارب العشوائية فإننا سوف نتطرق في هذا الجزء إلى مدلول المتغير العشوائي وأنواعه بما في ذلك قوانين ودوال الاحتمال وكذا التوزيعات والدوال التراكمية، إلى جانب الخصائص الإحصائية للمتغير العشوائي.

1- المتغير العشوائي

بما أن التجربة العشوائية تولد مجموعة من الحوادث الأولية والتي ينجم عنها نتائج عددية أو رقمية عندما تكون كيفية (غير كمية)، فإننا نلجأ إلى إعطاء وصف رياضي أشمل لها بالاعتماد على مصطلح المتحول أو المتغير العشوائي.

1-1. تعريف المتغير العشوائي : يقصد به المتغير الذي يأخذ قيم رقمية أو عددية مختلفة تعبر عن نتائج فضاء العينة، وترتبط قيمه بإحتمال تحقق هذه النتائج ضمن مجال هذا المتغير، ونعطي للمتغير العشوائي حرف كبير X أو Y أو ....، وبالنسبة للقيم التي يأخذها أحرف صغيرة $x_1, x_2,....,x_n$ أو $y_1, y_2,....,y_n$ بحسب الرمز المعبر عن المتغير العشوائي، بينما نرمز للاحتمال المرافق (المقابل) لقيمة المتغير بـ $P(X = x_i)$.

ومن أمثلة المتغير العشوائي :

- عدد المرات التي نحصل فيها على الرقم 6 عند رمي زهرة نرد متجانس أربعة مرات متتالية؛

*نلاحظ أن نتائج التجربة يمكن تظهر الرقم 6 ، مرة أو مرتين أو ثلاث مرات أو أربعة أو ولا مرة واحدة، وبالتالي إذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن عدد مرات ظهور الرقم6 في تجربة الرمي، فإنه سيأخذ القيم الآتية :

$$X = \{0,1,2,3,4\}$$

- عدد المصابيح غير الصالحة ضمن علبة تتكون من n مصباح ؛

*إذا كان المتغير العشوائي Y يعبر عن عدد المصابيح غير الصالحة في العلبة، فإنه سيأخذ القيم الأتية :

$$Y = \{0,1,2,3,...,n\}$$

ملاحظات هامة

- يمكن أن لا تكون قيم المتغير العشوائي محددة إذا ماكان فضاء العينة غير محدد، فعلى سبيل المثال ، في تجربة رمي قطعة نقدية عدة مرات حتى نحصل على الكتابة P لأول مرة، إن المتغير العشوائي وليكن Z يأخذ القيم 1 أو 2 أو .....∞ .

- يمكن أن يأخذ المتغير العشوائي قيم سالبة، فعلى سبيل المثال؛ إذاكان في تجربة رمي قطعة نقدية متجانسة خمسة مرات متتالية، بحيث إذا ظهرت الصورة(F) سيربح نقطة في حين إذا ظهرت الكتابة (P)سوف يخسر نقطة.

*إذاكان المتغير العشوائي Z يعبر عن عدد النقاط التي سيحصل عليها في هذه التجربة، فإنه سيأخذ القيم الأتية :

$$Z = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$$

2-1. أنواع المتغير العشوائي : المتغير أو المتحول العشوائي يمكن أن يكون منقطعا Discrete أو متصلا Continouns، ويتم التمييز بينهماكما يلي :

- **المتغير العشوائي المنقطع :** يصطلح عليه أيضا بالمتغير العشوائي المنفصل، وهو الذي يأخذ قيمة من قيم الأعداد الصحيحة (0، 1، 2، ....، n)، على أن تعبر عن وحدة قياس واحدة غير قابلة للتجزئة.
مثال ذلك عدد الشاحنات المقطورة التي تمر على مدينة غارداية في اليوم، أو عدد الأهداف المسجلة للفريق الوطني في كأس العالم بروسيا أو عدد الطالبات في الفوج، إلى غير ذلك من الأمثلة غير قابلة لتجزئة القيمة التي يأخذها المتغير العشوائي في التجربة.
- **المتغير العشوائي المتصل :** يطلق عليه المتغير العشوائي المستمر، وهو المتغير الذي يأخذ أي قيمة داخل مجال معين (عددا لا متناهيا ضمن مجال محدود) وبالتالي فهو يعتمد على وحدة قياس مستمرة أو قابلة للتجزئة مثل الطول(سم، متر...)؛ الزمن (ثانية، دقيقة، ساعة، يوم،.....)؛ المسافة (كلم، ميل، ....)؛ الحجم؛ السرعة؛ الوزن، إلى غير ذلك من التجارب التي يأخذ بها المتغير العشوائي إلى قيم قابلة لتجزئة .

2- التوزيع الاحتمالي والتراكمي للمتغير العشوائي المنفصل

لا نكتفي في التجربة العشوائية بتحديد القيم التي تعبر عن المتغير العشوائي، وإنما نبحث أيضا في العلاقة الموجودة بين القيم التي تعبر عن النتائج الممكنة له والقيم الإحتمالية بشكل ثنائي (التوزيع الاحتمالي) و/أو بشكل تراكمي أو تجميعي (التوزيع التراكمي) الذي يعبر عن قيمة الاحتمال عندما يأخذ المتغير العشوائي قيما أقل من أو يساوي قيمة معينة.

2-1. التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل

يعرف على أنه قانون الاحتمال الذي يتضمن جميع القيم الممكنة للمتغير العشوائي المنقطع مع الاحتمال الخاص بكل منها بشكل ثنائي، كما يتطلب أن يتوفر التوزيع الاحتمالي على الخواص الآتية؛

- قيم المتغير العشوائي تأخذ قيم حقيقية $X \in R$
- احتمال قيم المتغير العشوائي تكون محصور بين الصفر و الواحد : $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$، بحيث أن (i) تأخذ قيم تسلسلية تضمن المجال $i \in [1 \; ; \; n]$.
- مجموع القيم الاحتمالية لقيم المتغير العشوائي تساوي الواحد الصحيح : $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$

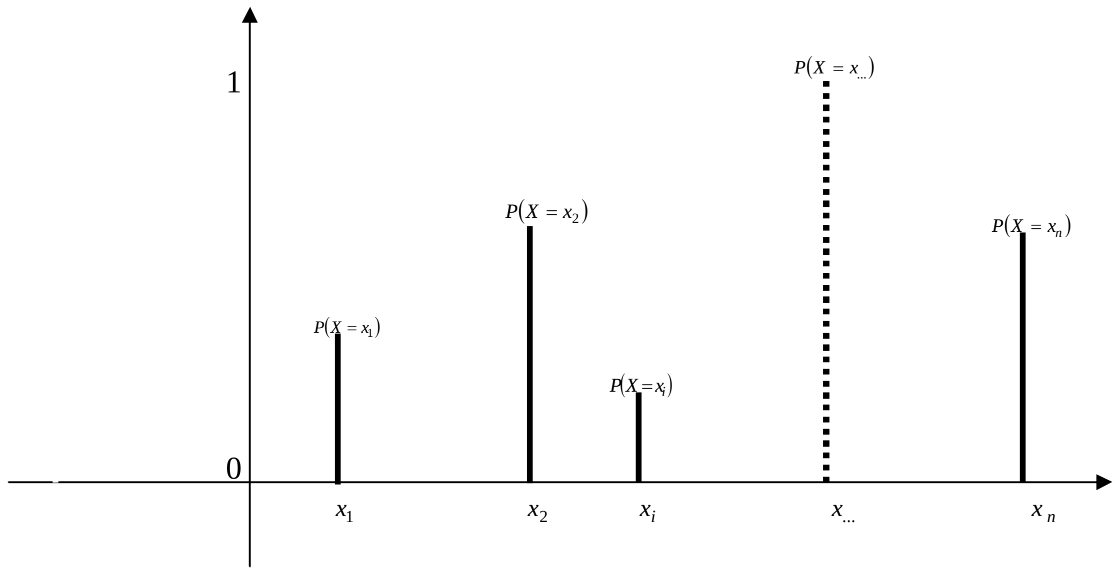
ويتم التعبير عن قانون الاحتمال لمتغير عشوائي وليكن المتغير X الذي يأخذ قيم مختلفة كالأتي : $x_1, x_2, ..., x_n$ ، بحيث يقابلها القيم الاحتمالية $P(X = x_1), P(X = x_2), ..., P(X = x_n)$ ، بإحدى الطريقين :

- **جدول قانون الاحتمال :** يتم التعبير عن العلاقة الموجودة بين قيم المتغير العشوائي وقيم الاحتمال المقابلة لها وفق الصورة التي يأخذها الجدول الآتية :

الجدول رقم (..) : قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

X	x_1	x_2	...	x_n	$\sum$
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	...	$P(X = x_n)$	1

- **التمثيل البياني لقانون الاحتمال :** يأخذ التعبير الهندسي للعلاقة بين قيم المتغير العشوائي وقيم الاحتمال المقابلة لها الشكل البياني كما يلي :



الشكل رقم (..) : التمثيل البياني لقانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

2-2. التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المنفصل

التوزيع التراكمي لمتغير منفصل هو عبارة عن مجموع القيم الاحتمالية المقابلة لجميع النتائج الممكنة التي تقل أو تساوي قيمة معينة في المتغير العشوائي أي أن $P(X \le x)$ ، وتدعى أيضا تابع التوزيع أو دالة التوزيع أو الدالة التجميعية ورمز لها بالرمز $F(x)$ ، حيث أن :

$$F(x) = P(X \le x) \Rightarrow F(x) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)$$

ومن أهم خصائص التوزيع التراكمي ما يلي :

- $1 \ge F(x) \ge 0$
- $F(+\infty) = 1 \ ; \ F(-\infty) = 0$
- $\forall (a,b) \in \Re : \ P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$

يتم التعبير عن التوزيع التراكمي بأسلوب مماثل لقانون الاحتمال، يتم ذلك إما بالاعتماد على الجدول أو الشكل البياني، وذلك على النحو الأتي :

بفرض أنه لدينا المتغير العشوائي المنقطع X الذي يأخذ القيم الآتية : $x_1 < x_2 < .... < x_n$ ، والتي لها قيم إحتمالية $P_1, P_2, ..., P_n$ ، فإن :

الجدول رقم (..) : التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المنفصل X

X	x_1	x_2	...	x_n	$\sum$
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	...	$P(X = x_n)$	1
$F(x)$	$P(X = x_1)$	$P(X \le x_2)$		$P(X \le x_n)$	-

أما بالنسبة لشكل التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المنقطع فيأخذ شكلا سلميا تصاعدي (لا يمكن أن يكون متناقصا) في أي مجال ولا يمكن أن يتجاوز الواحد الصحيح (أكبر قيمة ممكنة لدالة التوزيع هي الواحد).

$$\forall x \in \Re : F(x) = P(X \le x)$$

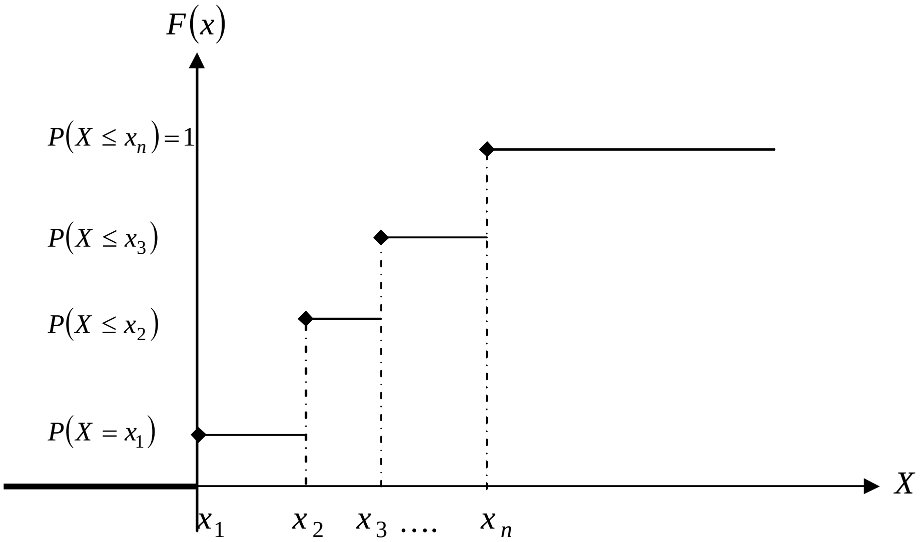
ومنه فإن الحدود تأخذ الصيغة الآتية :

$$\forall x \in]-\infty \ ; x_1[\Rightarrow F(x) = 0$$

$$\forall x \in [x_1 \ ; x_n[\Rightarrow F(x) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)$$

$$\forall x \in [x_n \ ; +\infty[\Rightarrow F(x) = 1$$

أما بالنسبة لتمثيل البياني لتوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المنفصل X، فيكون وفق الصورة الآتية :



الشكل رقم (..) : التمثيل البياني لتوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المنفصل X

3- دالة الكثافة الاحتمالية والتراكمية للمتغير العشوائي المتصل

يختلف أسلوب دراسة العلاقة بين قيم المتغير العشوائي و الاحتمال المقابل له في حالة المتغير غير المنقطع، الذي له عدد غير منتهي من الأعداد ضمن مجال محدود، من حيث أنه لا يمكن التعبير عنه في صيغة الجدول، لهذا يتم اللجوء إلى تابع حقيقي (f) معرف على $\Re$ على أن تعبر الاحتمالات المرافقة في المساحة التي تقع ضمن مجال تعريف المتغير العشوائي .

3-1. دالة كثافة الإحتمالية

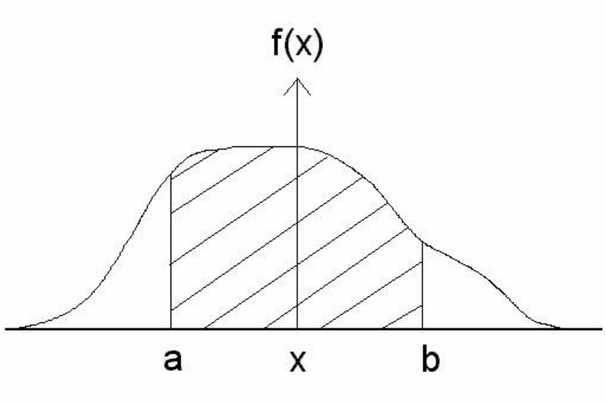
يقصد بها الدالة التي تعبر عن التوزيع الاحتمالي لمتغير متصل، بمعنى تلك الدالة التي بواسطتها نحدد القيمة الاحتمالية المعبرة عن الحوادث الأولية بواسطة المتغير العشوائي المستمر، ويرمز لها بالرمز $f(x)$ إذا كان المتغير (X) يمثل المتغير العشوائي المستمر، كما يجب أن تتوفر دالة كثافة الاحتمال على الخاصيتين التاليتين :

- $\forall x \in \Re : f(x) \ge 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

ويتم تحديد القيمة الاحتمالية بالاعتماد على المساحة الواقعة ضمن المجال الذي يعرف المتغير المستمر وليكن $x \in [b , a]$، بحيث تمثل المساحة ضمن هذا المجال و التي تقع ما بين المنحنى ومحور المتغير المستمر (X) القيمة الاحتمالية المقابلة له، والتي تأخذ الصيغة الآتية :

$$\forall (a,b) \in \Re : P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx \qquad \backslash a \le b$$

ويتم التعبير عن هذه القيمة الاحتمالية بالشكل الموضح فيما يلي :



وبناءا عليه فإن احتمال تحقق المتغير العشوائي X ضمن أي مجال يعبر عن التكامل الرياضي لدالة كثافة الاحتمال في المجال المحدد، ويعبر عنها هندسيا بقيمة تساوي المساحة ما بين المنحنى $f(x)$ وخط المحور(X) ضمن حدود هذا المجال $x' \in [b', a']$.

3-2. الدالة التراكمية

تعبر الدالة التراكمية أو التجميعية عن مقدار التكامل الرياضي لدالة الكثافة الاحتمالية ضمن المجال $]-\infty, x[$، وتعطي بالصيغة الآتية :

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

ويتم التعبير عن الدالة التراكمية بالشكل الأتي :

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < a \\ f(x) & a \le x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

ومن أهم خواص هذه الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر نذكر ما يلي :

- $1 \ge F(x) \ge 0$
- $F(+\infty) = 1 \;\; ; \;\; F(-\infty) = 0$
- $\forall (a,b) \in \Re : \;\; P(a \le x \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$
- $P(X \le x) = P(X < x)$
- $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$
- $P(X < x) = 1 - P(X \ge x)$
- $P(X < b) = P(X \le b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b)$
- $P(X > b) = P(X \ge b) = \int_{b}^{+\infty} f(x)dx = 1 - F(b)$
- $P(X < x) = 1 - P(X \ge x)$

ملاحظات هامة :

1- بما أن احتمال القيمة الثابتة لمتغير المستمر تكون معدومة مهما تكن قيمة هذا الثابت، أي أن :

$$P(X=A)=0$$

2- في المتغير العشوائي المستمر لا يهم تمام أو عدم تمام المتراجحة ($\leq$ or $<$) و($\geq$ or $>$)، أي أن :

$$P(a\leq x\leq b)=P(a\leq x<b)=P(a<x\leq b)=P(a<x<b)$$

3- تفيد دالة الكثافة الاحتمالية في تحديد قيمة الثابت الذي يحدد الدالة، فبفرض أنه لدينا قيمة k التي تحقق f(x) دالة كثافة احتمالية للمتغير X، وبما أن دالة كثافة احتمالية، إذا تحققت الصيغة الآتية :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

بالتعويض نحصل على الأتي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{b} f(x)dx+\int_{b}^{+\infty} f(x)dx=1$$

- **صياغة دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ للمتغير العشوائي (X) ضمن مجال محدد :** ليكن المجال ؛

$$x\in[a\ ;\ b]\Rightarrow a\leq X\leq b$$

فإن الطريقة تتم كالأتي؛

$$f(x)=\begin{cases} f(x) & a\leq X\leq b\\ \\ 0 & x\notin[a\ ;\ b]\end{cases}$$

$$F(x)=P(X\leq x_i)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du=\int_{-\infty}^{0} f(u)du+\int_{0}^{x} f(u)du$$

- $x\in\,]-\infty\ ;\ a[\,\Rightarrow F(x)=0$
- $$x\in[a\ ;\ b[\,\Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du=\int_{-\infty}^{a}(0)du+\int_{a}^{x} f(u)du$$
  $$=\int_{a}^{x} f(u)du$$
- $x\in[b\ ;\ +\infty[\,\Rightarrow F(x)=0$

ومنه فإنه يمكن كتابة دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ على النحو الأتي؛

$$F(x)=\begin{cases} 0 & X<a\\ \int_{a}^{x} f(u)du & a\leq X<b\\ 1 & X\geq b\end{cases}$$

- **صياغة دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ للمتغير العشوائي (X) ضمن عدة مجالات محدد :** لتكن لدينا الدوال الجزئية المتتالية $f_1(x), f_2(x), f_3(x),..., f_k(x)$ والمعرفة على ضمن المجالات على النحو الأتي :

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & a \le X < b \\ f_2(x) & b \le X < c \\ f_3(x) & c \le X < d \\ \dots\dots\dots\dots & \\ f_k(x) & n \le X < m \\ 0 & Other\ Wise\ (x \notin [a \quad m[) \end{cases}$$

$$F(x) = P(X \le x_i) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

- **إذا كان** $x \in]-\infty\ ;\ a[$: بما أن هذا المجال خارج مجال تعريف المتغير العشوائي فإنه يساوي الصفر، أي :

$$x \in]-\infty\ ;\ a[\Rightarrow F(x) = 0$$

- **إذا كان** $x \in [a\ ;\ b[$: تحسب القيمة التراكمية ضمن هذا المجال على النحو الأتي؛

$$x \in [a\ ;\ b[\Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{a} (0)du + \int_{a}^{x} f(u)du$$
$$= \int_{a}^{x} f(u)du$$

- **إذا كان** $x \in [b\ ;\ c[$: تحسب القيمة التراكمية ضمن هذا المجال على النحو الأتي؛

$$x \in [b\ ;\ c[\Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{b} f(u)du + \int_{b}^{x} f(u)du$$
$$= \int_{a}^{b} f(u)du + \int_{b}^{x} f(u)du$$

- **إذا كان** $x \in [c\ ;\ d[$: تحسب القيمة التراكمية ضمن هذا المجال على النحو الأتي؛

$$x \in [c\ ;\ d[\Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{c} f(u)du + \int_{c}^{x} f(u)du$$
$$= \int_{a}^{c} f(u)du + \int_{c}^{x} f(u)du$$

- **إذا كان** $x \in [n\ ;\ m[$: تحسب القيمة التراكمية ضمن هذا المجال على النحو الأتي؛

$$x \in [n\ ;\ m[\Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{n} f(u)du + \int_{n}^{x} f(u)du$$
$$= \int_{a}^{n} f(u)du + \int_{n}^{x} f(u)du$$

- **إذا كان** $x \in [m\ ;\ +\infty[$: تحسب القيمة التراكمية ضمن هذا المجال على النحو الأتي؛

$$x \in [m\ ;\ +\infty[\mapsto x \geq m \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{m} f(u)du + \int_{m}^{+\infty} (0)du$$
$$= \int_{a}^{m} f(u)du = 1$$

ومنه فإنه يتم كتابة دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ على النحو الأتي؛

$$F(x) = \begin{cases} 0 & X < a \\ \int_{a}^{x} f(u)du & a \leq X < b \\ \int_{a}^{b} f(u)du + \int_{b}^{x} f(u)du & b \leq X < c \\ \int_{a}^{c} f(u)du + \int_{c}^{x} f(u)du & c \leq X < d \\ \text{..................} & \\ \int_{a}^{n} f(u)du + \int_{n}^{x} f(u)du & n \leq X < m \\ 1 & X \geq m \end{cases}$$

4. الخصائص الإحصائية للمتغير العشوائي

بالنظر إلى أهمية النتائج المحتملة في التجربة فإن الباحث الإحصائي لا يهتم بقيم التي يأخذها المتغير العشوائي والاحتمالات المقابلة لها وفقط، وإنما يهدف في عديد المرات إلى معرفة مدى تمركز هذه النتائج حول نتيجة معينة، بالإضافة إلى دراسة مدى إنتشار أو تشتت هذه النتائج حول النتيجة المعبرة من طرف عناصر ومفردات التجربة، وهذا ما سوف نحاول التعرف على أساليب تحديدها بالاعتماد على التوقع الرياضي والتباين وكذا الانحراف المعياري .

4-1. الأمل الرياضي : يطلق عليه أيضا مصطلح التوقع الرياضي وهو عبارة عن متوسط المتغير العشوائي الذي يحدد القيمة التي تتمركز حولها باقي القيم التي يأخذها المتغير، مع الأخذ بعين الاعتبار الأوزان التي يعبر عنها بالاحتمالات المقابلة لتلك القيم، أي أن وزن كل قيمة هو مقدار إحتمالها مع التذكير بأن مجموع الأوزان يساوي الواحد، ويرمز للتوقع الرياضي بالرمز $E(x)$ ♦، غير أن العلاقة التي يحسب بها التوقع الرياضي تختلف حسب طبيعة المتغير العشوائي، لذلك نميز بين الصيغتين الآتيتين :

- **المتغير العشوائي المنقطع :** إذا كان لدينا المتغير العشوائي X الذي يأخذ أعداد صحيحة $X : x_1, x_2, ..., x_n$ ، وأن الاحتمال المقابل لكل قيمة منها هي : $P(X): P(x_1), P(x_2), ..., P(x_n)$ ، فإن الصيغة الرياضية للتوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنقطع تعطى كما يلي :

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} [(x_i) \times P(X = x_i)]$$
$$= (x_1 \times P(x_1)) + (x_2 \times P(x_2)) + ... + (x_2 \times P(x_2))$$

- **المتغير العشوائي المستمر:** إذا كان لدينا المتغير العشوائي X الذي له دالة كثافة إحتمالية كالأتي $f(X)$ ، فإن الصيغة الرياضية للتوقع الرياضي للمتغير العشوائي المستمر تعطى كما يلي :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x.f(x)]dx$$

ملاحظة : إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية فإن صيغة التوقع الرياضي تأخذ الشكل المختصر الأتي :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{a} [x.f(x)]dx + \int_{a}^{b} [x.f(x)]dx + \int_{b}^{+\infty} [x.f(x)]dx$$

ونعلم أن قيمة دالة كثافة الاحتمالية خارج مجال التعريف تكون معدومة، وذلك كمايلي :

$$\begin{cases} x \notin]-\infty \ ; \quad a[\Rightarrow \int_{-\infty}^{a} [x.f(x)]dx = 0 \\ \\ x \notin]b \quad ; \ +\infty[\Rightarrow \int_{b}^{+\infty} [x.f(x)]dx = 0 \end{cases}$$

ومنه فإن العلاقة تكتب كمايلي :لهذا فإنه بالتعويض نحصل على النتيجة التالية :

$$E(x) = \int_{a}^{b} [x.f(x)]dx \qquad \backslash x \in [a \ ; b]$$

- **خواص التوقع الرياضي :** هناك مجموعة الخصائص التي يتميز بها التوقع الرياض للمتغيرات العشوائي والتي نقدمها في النقاط الآتية :

  - $E(a) = a$

♦ يمكن أن نرمز للتوقع الرياضي بـ μ_x .

- $E(aX+b)=aE(X)+b$
- $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$
- $E(X*Y)=E(X)*E(Y)$
- $E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i)^2\times P(X=x_i)\right] \vee E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(x)^2.f(x)\right]dx$
- $E(g(x_i))=\sum_{i=1}^{n}\left[g(x_i)\times P(X=x_i)\right] \vee E(g(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[g(x).f(x)\right]dx$

2-4. التباين : يشرح مدى تشتت قيم المتغير العشوائي حول توقعها الرياضي، ويعرف أيضا بالعزم المركزي من الدرجة الثانية، ويرمز للتباين بالرمز $V(x)$، كما أن العلاقة التي يحسب بها التباين لا تختلف من حيث الصيغة فيما إذا كان المتغير العشوائي منقطع أو مستمر، وعليه فإن تكتب كما يلي :

$$V(x)=\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i)^2\times P(X=x_i)\right]$$

وبالإعتماد على الصيغة الرياضية للتوقع الرياضي فإنه يمكن حساب التباين بالعلاقة الأتية :

$$V(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$$

وبالإعتماد على أيضا على علاقة العزوم(M_i)، فإن الصيغة الرياضية لحساب التباين تأخذ الشكل الأتي :

$$V(x)=M_2-M_1{}^2$$

- **خواص التباين :** من أجل توضيح أهمية خواص التباين، فإننا نفرض أنه لدينا المتغيرين العشوائيين X و Y بشرط أنهما مستقلين عن بعضهما البعض، بالإضافة إلى الثابت a، وبالتالي فإنه لدينا الخواص الآتية ؛
  - $V(a)=0 \quad \backslash a\text{:constant}$
  - $V(X+a)=V(X)$
  - $V(aX)=a^2.V(X)$
  - $V(aX+b)=V(aX)+V(b)=a^2.V(X)$
  - $V(X\pm Y)=V(X)\pm V(Y)$

3-4. الانحراف المعياري : يقصد به المتوسط التربيعي للانحرافات عن التوقع الرياضي لقيم المتغير العشوائي، ويرمز له بالرمز $\sigma(x)$، ويحسب بإدخال الجذر على مقدار التباين، لهذا يأخذ الصيغة المختصرة كالأتي :

$$\sigma(x)=\sqrt{V(x)}$$

وبالإعتماد على العلاقة العامة التي تأخذ الصيغة الآتية :

$$\sigma(x)=\sqrt{E(x^2)-[E(x)]^2}$$

ونجد من أهم خواص الانحراف المعياري العبارة الآتية :

$$\sigma(aX+b)=\sqrt{V(aX+b)}=\sqrt{a^2.V(X)}=a.\sigma(X)$$

سلسلة تمارين الفصل

تمرين رقم 01 :

في التجربة عشوائية لرمي قطعة نقود متزنة مرتين متتاليتين، أوجد مجموعة القيم الممكنة للمتغيرات العشوائية التالية :

1. المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصور الظاهرة في السطح العلوي؛
2. المتغير العشوائي Y الذي يمثل مربع عدد الصور ؛
3. المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الصور مطروحا منه عدد الكتابات؛

بفرض أن التجربة تمت برمي زهرة نرد مرتين متتاليتين، حدد المتغير العشوائي وفق الحالات الأتية؛

4. المتغير العشوائي 'X الذي يمثل عدد مرات ظهور الرقم 3 ؛
5. المتغير العشوائي 'Y الذي يمثل الفرق بين العددين الظاهرين .

تمرين رقم 02 :

بين فيما إذا كانت الجداول التالية تعبر عن التوزيع الاحتمالي منقطع أم لا؛

الحالة الأولى

X	-2	-1	0	1	2
f(x)	-1/9	-3/12	1/12	3/12	1/12

الحالة الثاني

X	0	1	2	3
f(x)	1/8	3/8	4/8	1/8

الحالة الثالث

X	10	11	12
f(x)	1/5	6/10	1/5

تمرين رقم 03 :

ليكن لدينا الجدول الأتي الذي يمثل توزيعا احتماليا متقطعا للمتغير العشوائي X على النحو الأتي :

X	0	1	2	3
f(x)	1/8	3/8	k	1/8

المطلوب : أجب على ما يلي؛

1. أوجد قيمة الثابت k التي تحقق التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ؟
2. أحسب التوقع الرياضي $E(x)$ والانحراف المعياري $\delta(x)$ ؟
3. أحسب التوقع الرياضي للمتغير العشوائي Y ثم Z و M، حيث أن :

$$M = X * Y \quad ; \qquad Z = X + Y \qquad ; \qquad Y = 2X + 1$$

تمرين رقم 04 :

يحتوى صندوق على 10 كرات، مرقمة من 01 إلى 10، فإذا تم سحب كريتين في أن واحد بطريقة عشوائية، وبفرض أننا سنحصل على ربح قدره 500دج إذا كانت الكرة المسحوبة تحمل رقم أقل من أو يساوي 3، ونحصل على ربح قدره 1000دج إذا كانت الكرة المسحوبة تحمل رقم محصور ما بين 4 و 8، بينما نخسر 250 دج إذا كانت الكرة المسحوبة تحمل رقم أكبر من 8 .

إذا كان المتغير العشوائي X يمثل الناتج النقدي لعملية السحب .

المطلوب : أوجد قانون (التوزيع) الاحتمال ؟ مثل بيانيا التوزيع الاحتمال للمتغير العشوائي X ؛

تمرين رقم 05 :

عند إلقاء ثلاثة قطع نقدية متزنة، وباعتبار أن المتغير العشوائي X يمثل عدد الصور (F) التي نحصل عليها، والمطلوب :

1. أوجد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي ؟
2. أوجد دالة التوزيع التراكمي $F(x)$؟ ثم تمثيلها بيانيا ؟
3. أحسب الاحتمالات التالية : $P(0{,}4 < X < 2{,}6)$، $P(X = 2)$، $P(0 \le X < 2)$؛ $P(X \ge 3)$؛

تمرين رقم 06 :

في إطار تحسين كفاءة عمال الشركة الوطنية للكهرباء و الغاز SONELGAZ، أعلنت وكالة غارداية عن فتح مجال الترشح للعمال الراغبين في التكوين لثلاثة مناصب فقط، فتقدم بطلب التكوين أربعة (04) عمال و ستة (06) عاملات، وعند الإختيار وجد أن جميع المترشحين لهم نفس المؤهل و الخبرة، فقررت اللجنة إتباع طريقة الإختيار العشوائية .

المطلوب : حدد ما يلي ؛

1. التوزيع الاحتمالي لعدد العاملات المختارات ؟
2. أحسب متوسط عدد العاملات المختارات $E(x)$ ؟ ثم الإنحراف المعياري $\delta(x)$ ؟

تمرين رقم 07 :

في مسابقة التوظيف لعدد من المناصب، يمر المتسابقين بثلاثة إختبارات متسلسلة (مطابقة الملف لشروط المنصب المطلوب، إمتحان كتابي، إمتحان شفوي)، وبالنظر إلى عدد المترشحين فإن احتمال النجاح في الإختبار هو 0,75، فإذا اعتبرنا المتغير العشوائي (X) عدد الإختبارات التي يمكن للمترشح النجاح بها للفوز بالمنصب .

المطلوب : أجب على ما يلي؛

1. حدد قانون الاحتمال للمتغير العشوائي (X) ؟
2. التعبير عن التوزيع الاحتمالي بالصيغة الرياضية لدالة الاحتمال $F(x)$ ؟
3. أحسب التوقع الرياضي $E(x)$ ؛ التباين $V(x)$ والإنحراف المعياري $\delta(x)$ ؟

تمرين رقم 08 :

لتكن لدينا دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي المستمر X كما يلي ؛

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{6} & -3 \le X \le 3 \\ 0 & Other\ Wise \end{cases}$$

1. أرسم دالة كثافة الاحتمال لهذا المتغير ؛
2. أوجد الاحتمالات التالية : $P(X=0)$; $P(-1,5<X<2,5)$; $P(-1<X\le 1)$; $P(X<2)$

تمرين رقم 09 :

يعبر المتغير العشوائي X عن الزمن الذي يستغرقه الزبون عند شباك البريد لتلقيه الخدمة، فإذا تم التعبير عنها بالدالة الاحتمالي ة التالية :

$$f(x)=\begin{cases} kX & 1\le X\le 3 \\ \\ 0 & Other\ Wise \end{cases}$$

1. أوجد قيمة k حتى تكون f(x) دالة كثافة احتمالية للمتغير X؛
2. أوجد $P(1<X<2)$
3. مثل بيانيا هذه الدالة ؛
4. أكتب دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ لهذا المتغير .

تمرين رقم 10 :

إذا كانت X متغيرا عشوائيا، ودالة كثافة الاحتمال له تأخذ الصيغة التالية؛

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x & 0\le X\le 2 \\ 0 & Other\ Wise \end{cases}$$

المطلوب : حدد ما يلي؛

1. أرسم دالة كثافة الاحتمال لهذا المتغير ؛
2. أحسب التوقع الرياضي $E(x)$
3. الإنحراف المعياري$\delta(x)$ ؛
4. أوجد الاحتمالات التالية :

$$P(X<1);\quad P(X\ge 1);\quad P(1<X<2);\quad P(X=1).$$

تمرين رقم 11 :

يمثل المتغير العشوائي المستمر X حجم الطلب على أحد منتجات الشركة، بحيث يتم التعبير عن إقبال المستهلكين وفقا لمراحل حياة هذا المنتج وذلك المعرف بالدالة الاحتمالي ة التالية :

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}(x-1) & 1\le X<2 \\ \frac{1}{2} & 2\le X<3 \\ 2-\frac{x}{2} & 3\le X<4 \\ 0 & Other\ Wise\ \ (x\notin[1\quad 4[) \end{cases}$$

المطلوب : أجب على ما يلي؛

1. بين أن f(x) دالة كثافة احتمالية ؟
2. أوجد $P(X \le 2)$ ، $P(X \le 2{,}5)$ ، $P(3{,}5 < X < 10)$ ؟
3. أرسم دالة كثافة احتمالية f(x) ؟ ماذا تلاحظ ؟
4. أحسب التوقع الرياضي والإنحراف المعياري ؟ فسر القيم المتحصل عليها إقتصاديا؟
5. أوجد دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ لهذا المتغير .

تمرين رقم 12 :

لتكن لدينا دالة الكثافة الاحتمالي ة f(x) المعبر عنها بالصورة التالية :

$$f(x)=\begin{cases} -kX & -2 < X < 0 \\ kX & 0 \le X < 2 \\ 0 & Other \quad Wise \quad \left(x \notin \left]-2 \quad 2\right[\right) \end{cases}$$

المطلوب : أوجد ما يلي ؛

1. قيمة الثابت K ؟
2. دالة التراكمية F(x) ؟
3. احتمال $P(-1{,}2 < X < 1{,}5)$ ؟

الحلول النمودجية لسلسلة التمارين

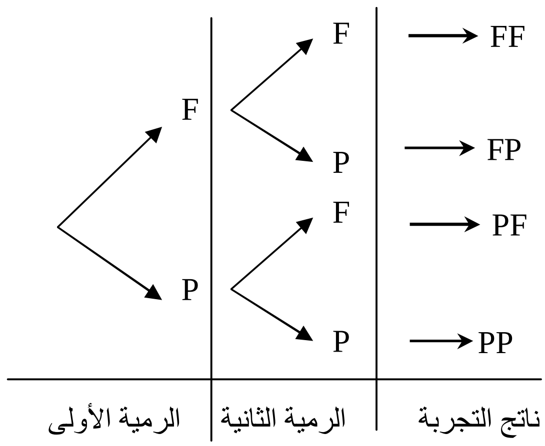
تمرين رقم 01 :

تحديد قيم المتغير العشوائية في التجربتين العشوائيتين التاليتين

أولا- تجربة رمي قطعة نقود متزنة مرتين متتاليتين .

قبل تحديد الحالات الممكنة للمتغير العشوائي، نقوم بايجاد فضاء العينة للتجربة، وذلك كمايلي؛

لنرمز لظهور الصورة بالرمز F وللكتابة بالرمز P، وبالتالي فن النتائج الممكنة تتمثل في F أو P، لهذا فإن فضاء العينة هو :



ومنه فإن فضاء العينة هو :

$$\Omega = \{(PP);(PF);(FP);(FF)\}$$

1. المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصور الظاهرة في السطح العلوي؛

X : يمثل عدد مرات ظهور الصورة على السطح العلوي، ويتم التعبير عن المتغير العشوائي كدالة في الجدول الأتي؛

نقطة العينة	PP	PF	FP	FF
قيمة المتغير العشوائي	0	1	1	2

ومنه فإن المتغير العشوائي (X) يأخذ القيم الآتية : $X = \{0;1;2\}$

2. المتغير العشوائي Y الذي يمثل مربع عدد الصور؛

Y : يمثل مربع عدد مرات ظهور الصورة، ويتم التعبير عن المتغير العشوائي كدالة في الجدول الأتي؛

نقطة العينة	PP	PF	FP	FF
قيمة المتغير العشوائي	0	1	1	4

ومنه فإن المتغير العشوائي (Y) يأخذ القيم الأتية : $Y=\{0;1;4\}$

3. المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الصور مطروحا منه عدد الكتابات؛

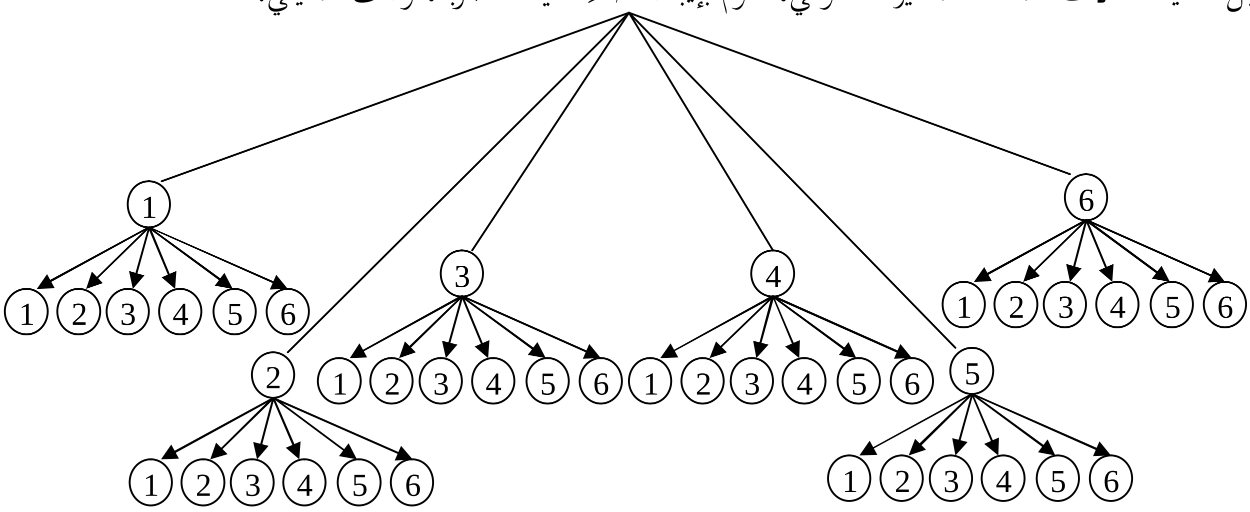
Z : يمثل مربع عدد مرات ظهور الصورة مطروح منها عدد الكتابات، ويتم التعبير عن المتغير العشوائي كدالة في الجدول الأتي؛

نقطة العينة	PP	PF	FP	FF
قيمة المتغير العشوائي	2-	0	0	2

ومنه فإن المتغير العشوائي (Z) يأخذ القيم الأتية : $Z=\{-2;0;2\}$

ثانيا- تجربة رمي زهرة نرد مرتين متتاليتين .

قبل تحديد الحالات الممكنة للمتغير العشوائي، نقوم بإيجاد فضاء العينة للتجربة، وذلك كمايلي؛



ومنه فإنه يعبر عن فضاء العينة كما يلي :

$$\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}\times\{1;2;3;4;5;6\}$$
$$=\left\{\begin{array}{l}(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6),(2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),(2;6),\\(3;1),(3;2),(3;3),(3;4),(3;5),(3;6),(4;1),(4;2),(4;3),(4;4),(4;5),(4;6),\\(5;1),(5;2),(5;3),(5;4),(5;5),(5;6),(6;1),(6;2),(6;3),(6;4),(6;5),(6;6)\end{array}\right\}$$

4. المتغير العشوائي 'X الذي يمثل عدد مرات ظهور الرقم 3 ؛

'X : يمثل عدد مرات ظهور الرقم 3، ومنه فإن المتغير العشوائي ('X) يأخذ القيم الأتية :

$$X'=\{0;1;2;3\}$$

5. المتغير العشوائي 'Y الذي يمثل الفرق بين العددين الظاهرين .

'Y : يمثل الفرق بين العددين الظاهرين، ويتم التعبير عن المتغير العشوائي كدالة في الجدول الأتي؛

نتيجة الرمية الأولى							
6	5	4	3	2	1		
$5- = (6-1)$	$4- = (5-1)$	$3- = (4-1)$	$2- = (3-1)$	$1- = (2-1)$	$0 = (1-1)$	1	نتيجة الرمية الثانية
$4- = (6-2)$	$3- = (5-2)$	$2- = (4-2)$	$1- = (3-2)$	$0 = (2-2)$	$1 = (1-2)$	2	
$3- = (6-3)$	$2- = (5-3)$	$1- = (4-3)$	$0 = (3-3)$	$1 = (2-3)$	$2 = (1-3)$	3	
$2- = (6-4)$	$1- = (5-4)$	$0 = (4-4)$	$1 = (3-4)$	$2 = (2-4)$	$3 = (1-4)$	4	
$1- = (6-5)$	$0 = (5-5)$	$1 = (4-5)$	$2 = (3-5)$	$3 = (2-5)$	$4 = (1-5)$	5	
$0 = (6-6)$	$1 = (5-6)$	$2 = (4-6)$	$3 = (3-6)$	$4 = (2-6)$	$5 = (1-6)$	6	

ومنه فإن المتغير العشوائي ('Y) يأخذ القيم الأتية :

$$X=\{-5;-4;-3;-2;-1\,;0\,;1\,;\,2\,;\,3\,;4;5\}$$

تمرين رقم 02 :

نقول عن جدول أنه يعبر عن التوزيع الاحتمالي منقطع، إذا تحققت الخواص الأتية ؛

- قيم المتغير العشوائي تأخذ قيم حقيقية $X \in R$
- احتمال قيمة المتغير العشوائي تكون موجبة : $P(X=x_i)\geq 0$
- احتمال قيم المتغير العشوائي تكون محصور بين الصفر و الواحد : $1\geq f(X)\geq 0$
- مجموع القيم الاحتمال لقيم المتغير العشوائي تساوي الواحد الصحيح : $\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)=1$

1. دراسة حالات جداول التوزيع الاحتمالي

الحالة الأولى

X	-2	-1	0	1	2
f(x)	-1/9	-3/12	1/12	3/12	1/12

نلاحظ من الجدول بأن هناك قيمة احتمالية سالبة، $P(X=-2)<0$ & $P(X=-1)<0$ ، مما يعنى أن الجدول لا يمثل قانون الاحتمال .

الحالة الثاني

X	0	1	2	3
f(x)	1/8	3/8	4/8	1/8

نلاحظ من الجدول بأن مجموع القيم الاحتمالية للمتغير العشوائي تتجاوز الواحد الصحيح، $\sum_{i=1}^{4} P(X = x_i) = \frac{9}{8} > 1$ ، مما يعنى أن الجدول لا يمثل قانون الاحتمال .

الحالة الثالث

X	10	11	12
f(x)	1/5	6/10	1/5

نلاحظ من الجدول بأن خواص التوزيع الاحتمالي محققة ($X \in R$ ، $1 \geq P(X = x_i) \geq 0$ ،$\sum_{i=1}^{3} P(X = x_i) = 1$)، مما يعنى أن الجدول يمثل قانون الاحتمال .

تمرين رقم 03 :

ليكن لدينا الجدول الأتي الذي يمثل توزيعا احتماليا متقطعا للمتغير العشوائي X على النحو الأتي :

X	0	1	2	3
f(x)	1/8	3/8	k	1/8

1. إيجاد قيمة الثابت k التي تحقق التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

$$\sum_{i=1}^{4} P(X = x_i) = 1 \Rightarrow P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$$

بتعويض قيم الاحتمال نحصل على النتيجة التالية :

$$\left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{3}{8}\right) + k + \left(\frac{1}{8}\right) = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{8}$$

بما أن $1 > k > 0$ ، فإن الجدول يعبر عن قانون الاحتمال .

2. أحسب التوقع الرياضي $E(x)$ والتباين$V(x)$: تعطى الصيغة الإحصائية لتوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي (X) بالشكل الأتي؛

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} [(x_i) \times P(X = x_i)] \quad \& \quad V(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i)^2 \times P(X = x_i)\right] = E(x^2) - [E(x)]^2$$

- **الطريقة المباشرة (الجدولية) :** يتم ذلك على الجدول الأتي؛

i	1	2	3	4	المجموع
x_i	0	1	2	3	-
$P(x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1
$[(x_i)\times P(x_i)]$	0	3/8	6/8	3/8	12/8
$[(x_i)^2\times P(x_i)]$	0	3/8	12/8	9/8	24/8

ومنه فإن قيمة التوقع الرياضي للمتغير العشوائي (X) يقدر بـ :1,5، أما التباين فيقدر بـ : 0,75 .

- **الطريقة الحسابية :** بالتعويض في علاقة حساب المقياسين نحصل على النتيجة التالية ؛

*التوقع الرياضي $E(x)$:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n}[(x_i)\times P(X=x_i)]\mapsto E(x)=(0)\times\left(\frac{1}{8}\right)+(1)\times\left(\frac{3}{8}\right)+(2)\times\left(\frac{3}{8}\right)+(3)\times\left(\frac{1}{8}\right)$$
$$\Rightarrow E(x)=1,5$$

*التباين $V(x)$:

$$V(x)=E(x^2)-[E(x)]^2\mapsto V(x)=\left[(0)^2\times\left(\frac{1}{8}\right)+(1)^2\times\left(\frac{3}{8}\right)+(2)^2\times\left(\frac{3}{8}\right)+(3)^2\times\left(\frac{1}{8}\right)\right]-(1,5)^2$$
$$V(x)=0,75$$

3. أحسب التوقع الرياضي للمتغيرات العشوائية Y ثم Z و M :

- **التوقع الرياضي للمتغير العشوائي Y :** تم تعريف هذا المتغير بالصيغة التالية ؛

$$Y=2X+1$$

لدينا من خواص التوقع الرياضي للقيمة الثابتة العبارة الأتي :

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

ومنه فإن ؛

$$E(Y)=E(2X+1)\mapsto E(Y)=2E(X)+1\Rightarrow E(Y)=2(1,5)+1$$
$$E(Y)=4$$

- **التوقع الرياضي للمتغير العشوائي Z :** تم تعريف هذا المتغير بالصيغة التالية ؛

$$Z=X+Y$$

لدينا من خواص التوقع الرياضي لجمع توقعين العبارة الأتي :

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

ومنه فإن ؛

$$E(Z)=(1,5)+(4)\Rightarrow E(Z)=5,5$$

- **التوقع الرياضي للمتغير العشوائي M** : تم تعريف هذا المتغير بالصيغة التالية ؛

$$M = X * Y$$

لدينا من خواص التوقع الرياضي جداء توقعين العبارة الأتي :

$$E(X * Y) = E(X) * E(Y)$$

ومنه فإن ؛

$$E(M) = (1,5) * (4) \Rightarrow E(M) = 6$$

تمرين رقم 04 :

يحتوى صندوق على 10 كرات، مرقمة من 01 إلى 10، فإذا تم سحب كريتين في أن واحد بطريقة عشوائية، وبفرض أننا سنحصل على ربح قدره 500دج إذا كانت الكرة المسحوبة تحمل رقم أقل من أو يساوي 3، ونحصل على ربح قدره 1000دج إذا كانت الكرة المسحوبة تحمل رقم محصور ما بين 4 و 8، بينما نخسر 250 دج إذا كانت الكرة المسحوبة تحمل رقم أكبر من 8 .

إذا كان المتغير العشوائي X يمثل الناتج النقدي لعملية السحب .

1. إيجاد قانون (التوزيع) الاحتمال :

$$A = \{1 ; 2 ; 3\} \Rightarrow X^* = 500\,DA$$

$$B = \{4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\} \Rightarrow X^* = 1000\,DA$$

$$C = \{9 ; 10\} \Rightarrow X^* = (-250)\,DA$$

تحديد عدد الحالات الممكنة حسابيا، وذلك على النحو الأتي : بما أن العملية مرتبطة بإختيار جزء من الكل، والترتيب غير مهم بينما يمكن تكرار العنصر، فإن المقياس المناسب هو التوفيقة مع التكرار (K_n^r)، والتي تعطى بالشكل الأتي؛

$$K_n^r = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!}$$

$$\left.\begin{array}{l} n = 3 \\ r = 2 \end{array}\right\} \mapsto K_3^2 = \frac{(3+2-1)!}{(3-1)!\,2!} = \frac{4!}{2! \times 2!} \Rightarrow K_3^2 = 6$$

ومنه فإن المجموعة تأخذ الشكل الأتي:

$$N = \{(AA);(AB);(AC);(BB);(BC);(CC)\}$$

وبتقدير قيمة مجموع الكرتين المسحوبتين المعبر عن قيم المتغير العشوائي يأخذ الشكل الأتي؛

الحالات الممكنة	AA	AB	AC	BB	BC	CC
المتغير العشوائي (x)	1000	1500	250	2000	750	(500-)

وبناء عليه فإن المتغير العشوائي يأخذ الشكل الأتي؛

$$X = \{-500; 250; 750; 1000; 1500; 2000\}$$

- حساب القيمة الاحتمالية لحالات المتغير العشوائي على النحو الأتي ؛

*عدد الحالات الممكنة :

$$Card(\Omega) = C_{10}^{2} \Rightarrow Card(\Omega) = \frac{10!}{(10-2)!2!} = 45$$

1-1. احتمال الحصول على كرتين مجموعهما يعادل خسارة تقدر بـ : 500 دج.

لدينا عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين مجموعهما يعادل خسارة تقدر بـ : 500 دج :

$$X(CC) = (-500) \mapsto card(CC) = C_2^2 \Rightarrow card(CC) = 1$$

ومنه فإن قيمة الاحتمال تقدر بـ :

$$P(CC) = \frac{Card(CC)}{Card(\Omega)} \mapsto P(CC) = \frac{1}{45}$$

2-1. احتمال الحصول على كرتين مجموعهما يعادل ربح يقدر بـ : 250 دج.

لدينا عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين مجموعهما يعادل ربح يقدر بـ : 250 دج

$$X(AC) = 250 \mapsto card(AC) = C_3^1 \times C_2^1 \Rightarrow card(AC) = 6$$

ومنه فإن قيمة الاحتمال تقدر بـ :

$$P(AC) = \frac{6}{45}$$

3-1. احتمال الحصول على كرتين مجموعهما يعادل ربح يقدر بـ : 750 دج.

لدينا عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين مجموعهما يعادل ربح يقدر بـ : 750 دج :

$$X(BC) = 750 \mapsto card(BC) = C_5^1 \times C_2^1 \Rightarrow card(BC) = 10$$

ومنه فإن قيمة الاحتمال تقدر بـ :

$$P(BC) = \frac{10}{45}$$

4-1. احتمال الحصول على كرتين مجموعهما يعادل ربح يقدر بـ : 1000 دج.

لدينا عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين مجموعهما يعادل ربح يقدر بـ : 1000 دج

$$X(AA) = 1000 \mapsto card(AA) = C_3^2 \Rightarrow card(AA) = 3$$

ومنه فإن قيمة الاحتمال تقدر بـ :

$$P(AA) = \frac{3}{45}$$

5-1. احتمال الحصول على كرتين مجموعهما يعادل ربح يقدر بـ : 1500 دج.

لدينا عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين مجموعهما يعادل ربح يقدر بـ : 1500 دج

$$X(AB)=1500 \mapsto card(AB)=C_3^1 \times C_5^1 \Rightarrow card(AB)=15$$

ومنه فإن قيمة الاحتمال تقدر بـ :

$$P(AB)=\frac{15}{45}$$

6-1. احتمال الحصول على كرتين مجموعهما يعادل ربح يقدر بـ : 2000 دج.

لدينا عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين مجموعهما يعادل ربح يقدر بـ : 2000 دج

$$X(BB)=2000 \mapsto card(BB)=C_5^2 \Rightarrow card(BB)=5$$

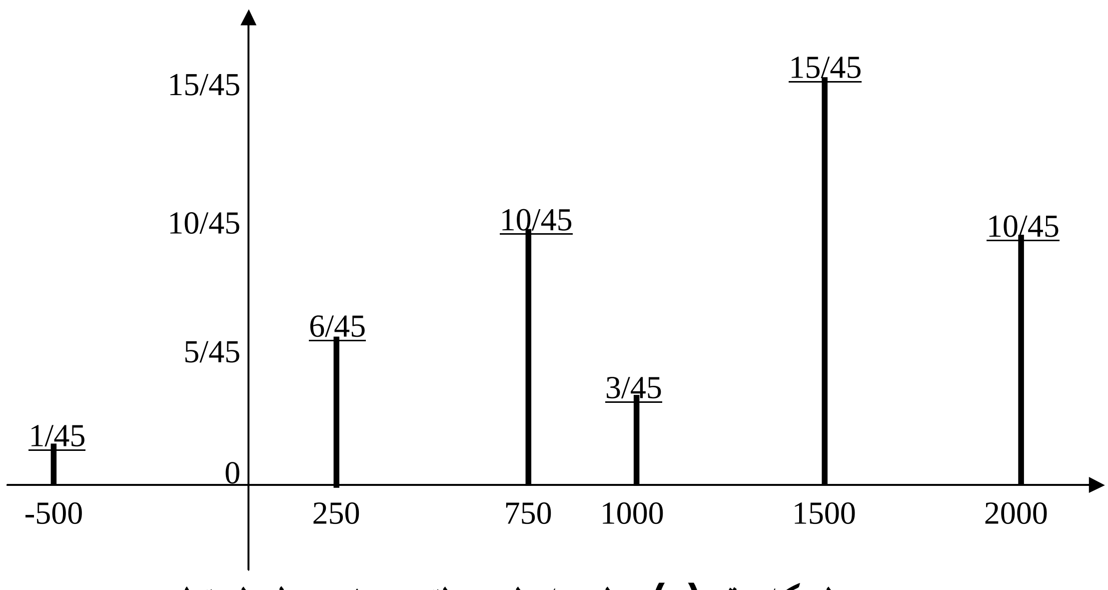
ومنه فإن قيمة الاحتمال تقدر بـ :

$$P(AC)=\frac{10}{45}$$

ويتم تحديد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) وفق الصورة الآتية :

X	-500	250	750	1000	1500	2000
Card(x)	1	6	10	3	15	10
f(x)	1/45	6/45	10/45	3/45	15/45	10/45

2. تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X : يأخذ قانون الاحتمال المنقطع للمتغير العشوائي (X) الشكل الأتي؛



الشكل رقم (..) : التمثيل البياني لقانون الاحتمال المنقطع

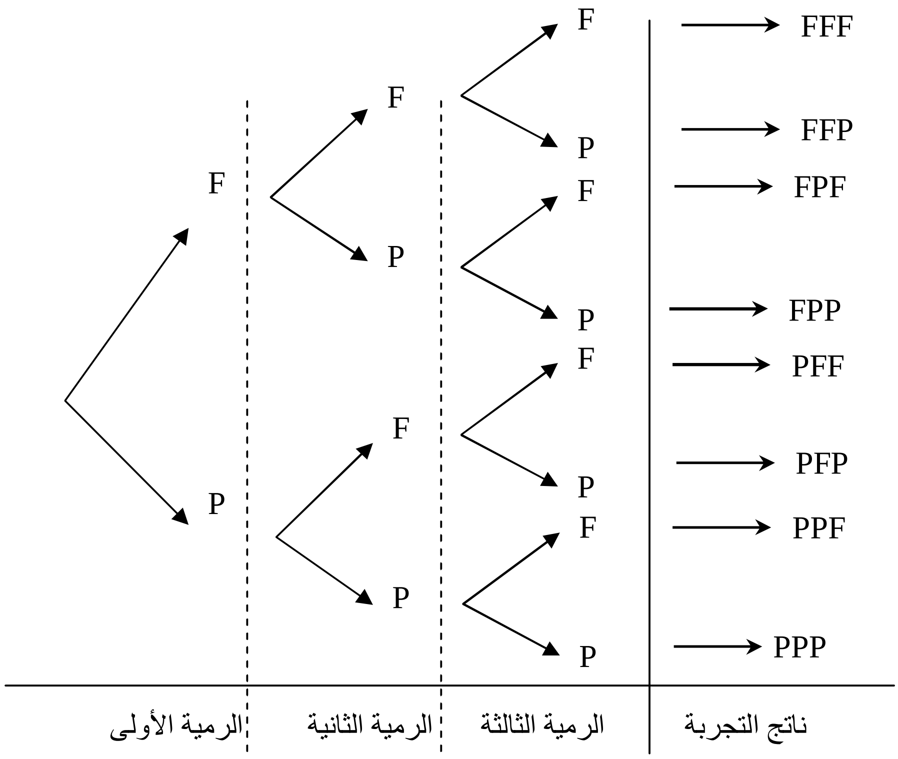
تمرين رقم 05 :

التجربة تتمثل في إلقاء ثلاثة قطع نقدية متزنة .

X المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد الصور (F) التي نحصل عليها .

1. أوجد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي : يتم تحديد قانون الاحتمال للمتغير العشوائي (X) وفق الخطوات الآتية :

- **فضاء العينة** : لنرمز لظهور الصورة بالرمز F وللكتابة بالرمز P، وبالتالي فإن النتائج الممكنة تتمثل في F أو P لكل رمية، لهذا فإن شكل شجرة الحالات الممكنة يأخذ الصورة الآتية :



ومنه فإن فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود في الهواء ثلاثة مرات كمايلي :

لدينا عدد الحالات الممكنة :

$$N_{\Omega} = 2^{(3)} \Rightarrow N_{\Omega} = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

والذي يتم التعبير عنها بالشكل الأتي :

$$\Omega = \{(FFF);(FFP);(FPF);(FPP);(PFF);(PFP);(PPF);(PPP)\}$$

- **تحديد المتغير العشوائي (X) :**

$$X = \{0\ ;1\ ;2\ ;3\}$$

- **قانون الاحتمال :** يأخذ جدول التوزيع الاحتمالي الشكل الأتي؛

قيمة المتغير X	الحالات الملائمة	الاحتمال f(x)
0	$\{(PPP)\}$	1/8
1	$\{(FPP);(PFP);(PPF)\}$	3/8
2	$\{(FFP);(FPF);(PFF)\}$	3/8
3	$\{(FFF)\}$	1/8

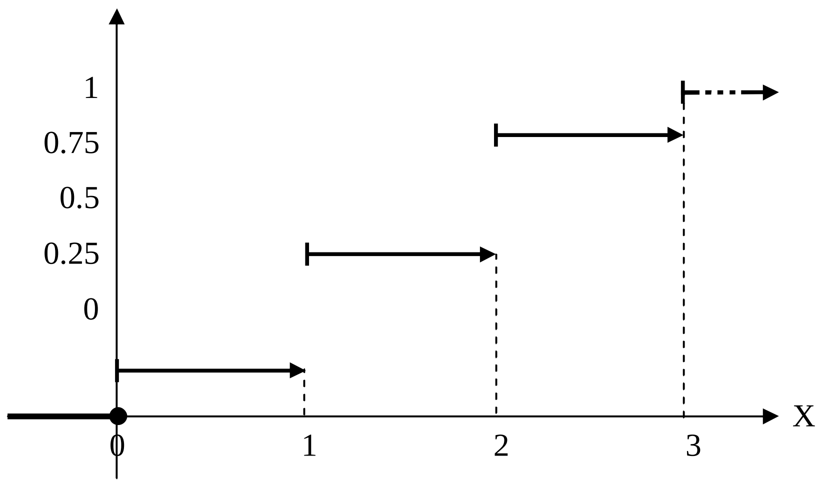
2. تحديد دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ **:** يمكن التعبير عن القيم الاحتمالية التراكمية وفق الجدول الأتي؛

x	0	1	2	3
التراكم الاحتمالي F(x)	1/8	4/8	7/8	1

وبناءا عليه فإن **<u>دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ تأخذ الشكل الأتي؛</u>**

$$F(X)=\begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{8} & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8} & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

- <u>تمثيل دالة التوزيع التراكمي $F(x)$:</u>



التمثيل البياني لدالة التراكمية F(x)

3. إيجاد الاحتمالات:

- **قيمة احتمال** $(X \geq 3)$ ؛

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) \Rightarrow P(X \geq 3) = \frac{1}{8}$$

- **قيمة احتمال** $(0 \leq X < 2)$ ؛

$$P(0 \leq X < 2) = P(0 \leq X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \Rightarrow P(0 \leq X < 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

- **قيمة احتمال** $(X = 2)$ ؛

$$P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

- **قيمة احتمال** $(0,4 < X < 2,6)$ ؛

$$P(0,4 < X < 2,6) = P(1 \leq X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) \Rightarrow P(0,4 < X < 2,6) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$$

تمرين رقم 06 :

لدينا عدد المترشحين للتكوين هو 10، منهم 6 عاملات، $N = 10 \mapsto (F = 6 \; ; \; H = 4)$

- عدد المناصب 3 مناصب، $k = 3$.

وبالتالي فإن عدد حالات إختيار ثلاثة عمال من ضمن المترشحين هو :

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!3!} \Leftrightarrow C_{10}^{3} = 120$$

1. التوزيع الاحتمالي لعدد العاملات المختارات : يتم تحديد قانون الاحتمال كمايلي؛

- **المتغير العشوائي (X) :** يمثل المتغير العشوائي عدد العاملات المختارات، لهذا فقد يتم إختيار ثلاثة أو إثنين أو واحدة فقط، كما يمكن عدم إختيار ولا عاملة، وبالتالي فغن المتغير العشوائي لهذه الدراسة يأخذ الشكل الأتي؛

$$X = \{0 \; ; 1 \; ; 2 \; ; 3\}$$

- **قيم الاحتمال :** يتم حسابها على النحو الأتي :

جدول قانون الاحتمال

X	0	1	2	3	المجموع
N(x)	$C_6^0 \times C_4^3 = 4$	$C_6^1 \times C_4^2 = 36$	$C_6^2 \times C_4^1 = 60$	$C_6^3 \times C_4^0 = 20$	$C_{10}^3 = 120$
$P(X)$	$\left(\frac{4}{120}\right)$	$\left(\frac{36}{120}\right)$	$\left(\frac{60}{120}\right)$	$\left(\frac{20}{120}\right)$	1

2. حساب متوسط عدد العاملات المختارات $E(x)$ والإنحراف المعياري $\delta(x)$: يمكن إيجاد قيمة الأمل الرياضي والإنحراف المعياري بالطريقة المباشرة كما هو مبين في الجدول الأتي ؛

i	1	2	3	4	المجموع
x_i	0	1	2	3	
$P(x_i)$	$\left(\frac{4}{120}\right)$	$\left(\frac{36}{120}\right)$	$\left(\frac{60}{120}\right)$	$\left(\frac{20}{120}\right)$	1
$(x_i)\times P(x_i)$	0	$\frac{36}{120}$	$\frac{120}{120}=1$	$\frac{60}{120}=0{,}5$	$\frac{216}{120}=1{,}8=E(X)$
$[x_i-E(X)]^2$	3,24	0,64	0,04	1,44	-
$P(x_i)\times[x_i-E(X)]^2$	0,108	0,192	0,02	0,24	$0{,}56=V(X)$
$(x_i)^2\times P(x_i)$	0	$\left(\frac{36}{120}\right)$	$\left(\frac{240}{120}\right)$	$\left(\frac{180}{120}\right)$	$\frac{456}{120}=3{,}8=E(X^2)$

$$V(x)=E(x^2)-[E(x)]^2 \mapsto V(x)=(3{,}8)-(1{,}8)^2$$
$$V(x)=0{,}56$$
$$\delta(x)=\sqrt{V(x)} \Rightarrow \delta(x)=\sqrt{0{,}56}=0{,}748$$

ومنه فإنه من المتوقع أن يتم إختيار عاملتين $E(X)\cong 2$ للتكوين من إجمالي المترشحين، كما أن هذا التوقع يمكن أن يبتعد بـ 0,748 أي بما يعادل عاملة واحدة فقط، عن العاملات المختارات للتكوين .

تمرين رقم 07 :

في مسابقة التوظيف لعدد من المناصب، يمر المتسابقين بثلاثة إختبارات متسلسلة (مطابقة الملف لشروط المنصب المطلوب، إمتحان كتابي، إمتحان شفوي)، فإننا نعبر عن الأحداث التالية :

A : حدث قبول ملف المتسابق، $P(A)$ احتمال قبول ملف المتسابق؛

B : حدث النجاح في الإمتحان الكتابي، $P(B)$ احتمال النجاح في الإمتحان الكتابي؛

C : حدث النجاح في الإمتحان الشفوي، $P(C)$ احتمال النجاح في الإمتحان الشفوي.

وبما أن احتمال النجاح في أي إختبار هو 0,75، فإننا نعبر عن ذلك بالصيغة التالية :

$$P(A)=P(B)=P(C)=0{,}75$$

1. تحديد قانون الاحتمال للمتغير العشوائي (X)

أولا- تحديد المتغير العشوائي (X) : بما أن المترشح يجب أن يجتاز الإمتحان الأول حتى يمر إلى الإمتحان الموالي، ثم الإمتحان الذي يليه، فإن المتغير العشوائي يأخذ القيم التالية :

الحالة الأولى $(X=0)$: إذا كان ملف المتسابق غير مقبول$(\overline{A})$.

الحالة الثانية $(X=1)$: إذا كان ملف المتسابق مقبول (A)ولم ينجح في الإمتحان الكتابي $(\overline{B})$، والذي يمكن التعبير عنه بـ $(A\cap\overline{B})$؛

الحالة الثالثة $(X=2)$: إذا كان ملف المتسابق مقبول (A)ونجح في الإمتحان الكتابي (B) ولكنه لم ينجح في الإمتحان الشفوي $(\overline{C})$، وعليه يمكن التعبير عن هذه الحالة بـ $(A\cap B\cap \overline{C})$؛

الحالة الرابعة $(X=3)$: إذا كان ملف المتسابق مقبول (A)ونجح في الإمتحان الكتابي (B) وأيضا ناجح في الإمتحان الشفوي (C)، وعليه يمكن التعبير عن هذه الحالة بـ $(A\cap B\cap C)$.

وبناءا على ما سبق فإن قيم المتغير العشوائي (X) تأخذ الشكل الأتي :

$$X=\{0\,;1\,;2\,;3\}$$

ثانيا- جدول التوزيع الاحتمالي : يعبر عنه بالشكل الأتي؛

X	0	1	2	3	المجموع
$P(X)$	$P(\overline{A})$	$P(A)\times P(\overline{B})$	$P(A)\times P(B)\times P(\overline{C})$	$P(A)\times P(B)\times P(C)$	-
	$(1-0{,}75)=0{,}25$	$(0{,}75)(0{,}25)=0{,}1875$	$(0{,}75)^2(0{,}25)=0{,}141$	$(0{,}75)^3=0{,}422$	1

2. التعبير عن التوزيع الاحتمالي بالصيغة الرياضية لدالة الاحتمال $F(x)$ **: يمكن التعبير عن دالة الاحتمال التراكمية وفق الجدول الأتي؛**

3	2	1	0	x
1	0,5785	0,4375	0,25	F(x) التراكم الاحتمالي

وبناءا عليه فإن دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ **تأخذ الشكل الأتي؛**

$$F(X)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0{,}25 & 0\le x<1 \\ 0{,}4375 & 1\le x<2 \\ 0{,}5785 & 2\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}$$

3. حساب التوقع الرياضي $E(x)$؛ **التباين** $V(x)$ **والإنحراف المعياري** $\delta(x)$، يتم حساب هذه المقاييس بالإعتماد على الصيغة الإحصائية لكل منها وذلك على النحو الأتي :

3-1. التوقع الرياضي $E(x)$ **:** يعطى بالعلاقة التالية؛

$$E(x)=\sum_{i=1}^{4}[(x_i)\times P(X=x_i)]$$

بالتعويض نحصل على النتيجة الأتية :

$$E(x)=(0)\times(0{,}25)+(1)\times(0{,}1875)+(2)\times(0{,}141)+(3)\times(0{,}422)$$
$$\Rightarrow E(x)=1{,}736$$

2-3. التباين $V(x)$: يعطى بالعلاقة التالية؛

$$V(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$$

بالتعويض نحصل على النتيجة الأتية :

$$V(x)=\left[(0)^2\times(0{,}25)+(1)^2\times(0{,}1875)+(2)^2\times(0{,}141)+(3)^2\times(0{,}422)\right]-(1{,}736)^2$$
$$\Rightarrow V(x)=1{,}536$$

2-3. التباين $\delta(x)$: يعطى بالعلاقة التالية؛

$$\delta(x)=\sqrt{V(x)}$$

بالتعويض نحصل على النتيجة الآتية :

$$\delta(x)=\sqrt{1{,}536}\Rightarrow\delta(x)=1{,}239$$

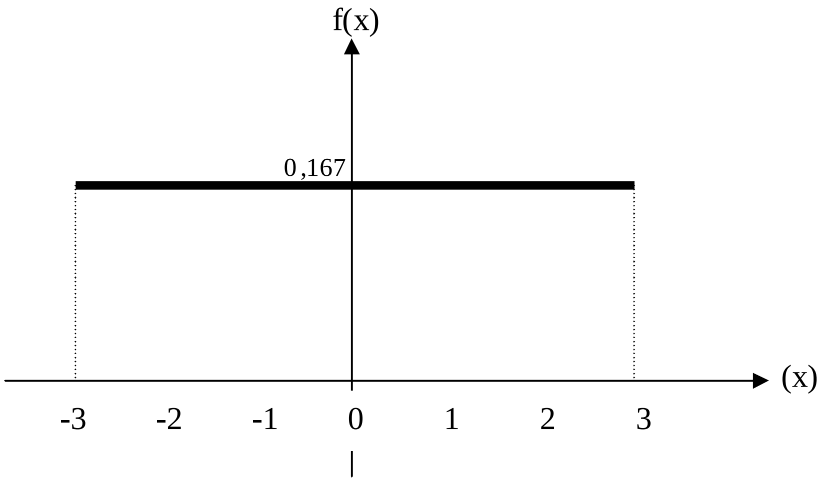
وبناءا عليه فإنه من المتوقع أن يقبل ملف المتسابق، وأن ينجح في الامتحان الكتابي بـ 50%، و يتحقق ذلك بانحراف معياري يقدر بـ1,239 عن ما هو متوقع .

تمرين رقم 08 :

لتكن لدينا دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي المستمر X كما يلي ؛

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6} & -3\le X\le 3\\ 0 & Other\ Wise\end{cases}$$

1. أرسم دالة كثافة الاحتمال لهذا المتغير : تأخذ دالة كثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي (X) الشكل الأتي؛



2. أوجد الاحتمالات التالية :

يتم إيجاد القيم الاحتمالية على النحو الأتي؛

2-1. قيم احتمال $(X=0)$: بما أن احتمال القيمة الثابتة للمتغير المستمر تكون معدومة مهما تكن قيمة هذا الثابت، فإن؛

$$1)\ P(X=0)=0$$

2-2. قيم احتمال $(-1,5<X<2,5)$:

$$2)\ P(-1,5<X<2,5)=\int_{-1,5}^{2,5}\left(\frac{1}{6}\right)dx \Leftrightarrow P(-1,5<X<2,5)=\frac{1}{6}[x]_{-1,5}^{2,5} \Rightarrow P(-1,5<X<2,5)=\frac{2}{3}$$

3-2. قيم احتمال $(-1,5<X<2,5)$:

$$3)\ P(-1<X\le 1)=\frac{1}{6}[x]_{-1}^{1}=\frac{1}{6}[1-(-1)] \Rightarrow P(-1<X\le 1)=\frac{1}{3}$$

4-2. قيم احتمال $(X<2)$:

$$4)\ P(X<2)=\int_{-\infty}^{2}\left(\frac{1}{6}\right)dx \Leftrightarrow P(X<2)=\int_{-\infty}^{-3}\left(\frac{1}{6}\right)dx+\int_{-3}^{2}\left(\frac{1}{6}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow P(X<2)=0+\frac{1}{6}[x]_{-3}^{2}=\frac{1}{6}[2-(-3)] \Rightarrow P(X<2)=\frac{5}{6}$$

يمكن التأكد من ناتج الاحتمال، بإستخدام الاحتمال المعاكس وذلك على النحو الأتي :

$$P(X<2)=1-P(X\ge 2)=1-\int_{2}^{3}\left(\frac{1}{6}\right)dx \Leftrightarrow P(X<2)=1-\frac{1}{6}[x]_{2}^{3}$$

$$\Leftrightarrow P(X<2)=1-\frac{1}{6}[3-(2)] \Rightarrow P(X<2)=\frac{5}{6}$$

تمرين رقم 09 :

يعبر المتغير العشوائي X عن الزمن الذي يستغرقه الزبون عند شباك البريد لتلقيه الخدمة، فإذا تم التعبير عنها بالدالة الاحتمالي ة التالية :

$$f(x)=\begin{cases} kX & 1\le X\le 3 \\ \\ 0 & \text{Other Wise} \end{cases}$$

1. إيجاد قيمة k التي تحقق f(x) دالة كثافة احتمالية للمتغير X؛

لدينا f(x) دالة كثافة احتمالية، إذا تحققت الصيغة الأتية :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

بالتعويض نحصل على الأتي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(kx)dx=\int_{-\infty}^{1}(kx)dx+\int_{1}^{3}(kx)dx+\int_{3}^{+\infty}(kx)dx=1$$

$$0+\left[k\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_1^3+0=1 \Rightarrow \frac{k}{2}\left(3^2-1^2\right)=1 \Leftrightarrow k=\frac{1}{4}$$

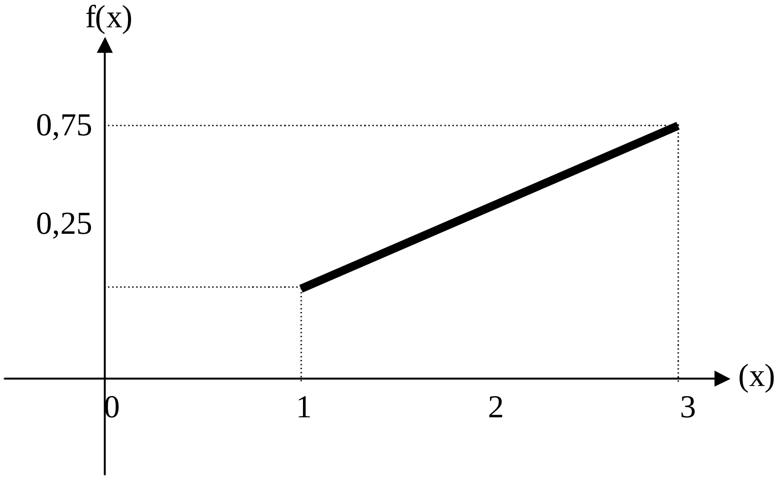
ومنه فإن f(X) دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي X، والتي تأخذ الشكل الأتي :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}X & 1\le X\le 3\\ \\ 0 & x\notin[1\,;\,3]\end{cases}$$

2. إيجاد قيمة الاحتمال $(1<X<2)$

$$P(1<X<2)=\int_1^2\left(\frac{1}{4}x\right)dx\Leftrightarrow P(1<X<2)=\left(\frac{1}{4}\right)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2\Rightarrow P(1<X<2)=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}(2-1)\right)=\frac{1}{8}$$

3. تمثيل دالة كثافة الاحتمالية $f(x)$ ؛



التمثيل البياني لدالة كثافة الاحتمالية $f(x)$

4. صياغة دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ **لهذا للمتغير العشوائي (X)**

$$F(x)=P(X\le x_i)=\int_{-\infty}^{x}f(u)du=\int_{-\infty}^{0}f(u)du+\int_0^x f(u)du$$

$$F(x)=0+\int_0^x\left(\frac{1}{4}u\right)du=\frac{1}{4}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^x\Leftrightarrow F(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)=\left(\frac{1}{8}x^2\right)$$

ومنه فإنه يمكن كتابة دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ على النحو الأتي؛

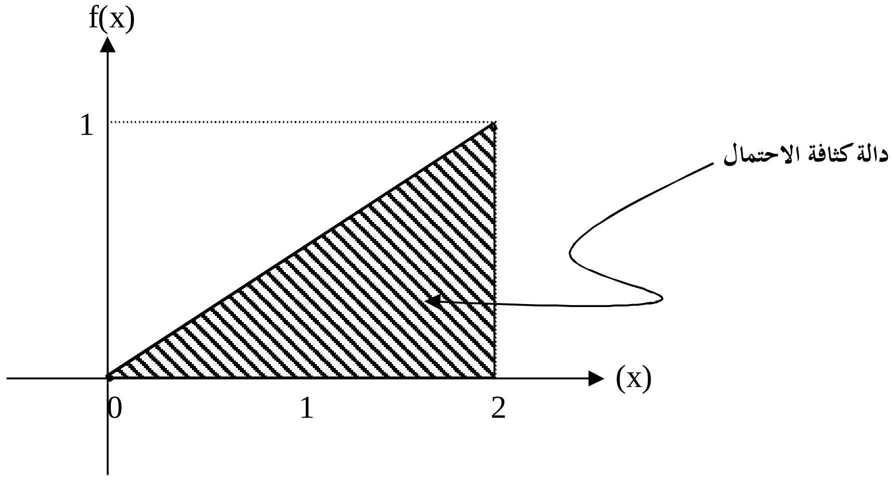
$$F(x)=\begin{cases}0 & X<0\\ \frac{1}{8}x^2 & 0\le X<3\\ 1 & X\ge 3\end{cases}$$

تمرين رقم 10 :

لدينا X متغيرا عشوائيا، ودالة كثافة الاحتمال له تأخذ الصيغة التالية؛

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0\le X\le 2\\ 0 & Other\ Wise\end{cases}$$

1. تمثيل دالة كثافة الاحتمال



2. إيجاد قيمة التوقع الرياضي $E(x)$: تعطى علاقة حساب التوقع الرياضي بالصيغة التالية؛

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x.f(x)]dx$$

بالتعويض نحصل على النتيجة التالية :

$$E(x)=\int_{-\infty}^{0}[x.f(x)]dx+\int_{0}^{2}[x.f(x)]dx+\int_{2}^{+\infty}[x.f(x)]dx \Leftrightarrow E(x)=0+\int_{0}^{2}(x)\left(\frac{1}{2}x\right)dx+0$$

$$E(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 \Rightarrow E(x)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

ومنه فإن قيمة التوقع الرياضي تقدر بـ : 1,33 .

3. الإنحراف المعياري $\delta(x)$: تعطى علاقة حساب الإنحراف المعياري بالصيغة التالية؛

$$\left.\begin{array}{l}\delta(x)=\sqrt{V(x)}\\ V(x)=E(x^2)-[E(x)]^2\end{array}\right\}\Rightarrow \delta(x)=\sqrt{E(x^2)-[E(x)]^2}$$

$$\delta(x)=\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}[x^2.f(x)]dx-[E(x)]^2}$$

ومنه لدينا :

$$E(x^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x^2.f(x)\right]dx \Leftrightarrow E(x^2)=0+\int_{0}^{2}\left[x^2.f(x)\right]dx+0$$

$$E(x^2)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 \Rightarrow E(x^2)=2$$

بالتعويض نحصل على النتيجة التالية :

$$\delta(x)=\sqrt{E(x^2)-[E(x)]^2}\mapsto \delta(x)=\sqrt{(2)-\left(\frac{4}{3}\right)^2}\Rightarrow \delta(x)=\sqrt{\frac{2}{9}}=0,471$$

ومنه فإن قيمة الانحراف المعياري تقدر بـ : 0,471 .

4. إيجاد القيم الاحتمالات

1-4. قيمة احتمال $(X=1)$: بما أن احتمال القيمة الثابتة في المتغيرات العشوائي المستمرة يكون معدوم مهما تكن قيمة هذا الثابت، فإن ؛

$$P(X=1)=0$$

2-4. قيمة احتمال $(1<X<2)$

$$P(1<X<2)=\int_1^2\left(\frac{1}{2}x\right)dx \Leftrightarrow P(1<X<2)=\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 \Rightarrow P(1<X<2)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4-1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

3-4. قيمة احتمال $(X<1)$

$$P(X<1)=\int_{-\infty}^{1}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$

بالتعويض نحصل على النتيجة التالية :

$$P(X<1)=0+\frac{1}{2}\int_0^1(x)dx \Leftrightarrow P(X<1)=\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \Rightarrow P(X<1)=\frac{1}{4}$$

4-4. قيمة احتمال $(X\geq 1)$

$$P(X\geq 1)=\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^{+\infty}f(x)dx \Leftrightarrow P(X\geq 1)=\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2+0 \Rightarrow P(X\geq 1)=\frac{3}{4}$$

يمكن الحصول على نفس النتيجة، بالإعتماد على طريقة الاحتمال المتمم، حيث أن القاعدة تنص على أنه :

$$P(X\geq a)=1-P(X<a)$$

والاعتماد على هذه الصيغة نحصل على النتيجة الأتية :

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1)\mapsto P(X\geq 1)=\left(1-\frac{1}{4}\right)\Rightarrow P(X\geq 1)=\frac{3}{4}$$

تمرين رقم 11 :

لدينا دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي المستمر X الذي يعبر عن حجم الطلب لأحد منتجات الشركة، بالصيغة الآتية :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x-1) & 1\le X<2\\ \frac{1}{2} & 2\le X<3\\ 2-\frac{x}{2} & 3\le X<4\\ 0 & Other\ \ Wise\ \ (x\notin[1\ \ 4[)\end{cases}$$

1. إثبات بأن f(x) دالة كثافة احتمالية : نقوم عن f(x) أنها دالة كثافة احتمالية إذا تحققت الصيغة الآتية؛

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

ومنه فإن؛

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1\Rightarrow\int_{-\infty}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{4} f(x)dx+\int_{4}^{+\infty} f(x)dx=1$$

بالتعويض نحصل على النتيجة التالية :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1\Rightarrow 0+\int_{1}^{2}\frac{1}{2}(x-1)dx+\int_{2}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)dx+\int_{3}^{4}\left(2-\frac{x}{2}\right)dx+0=1$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right]_1^2+\frac{1}{2}[(x)]_2^3+\left[\left(2x-\frac{x^2}{4}\right)\right]_3^4=1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=1$$

بما أن نتيجة التكاملات الجزئية مساوية للواحد الصحيح، فهذا يعنى أن الدالة f(x) تعبر عن دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي X .

2. إيجاد قيمة الاحتمال

2-1. قيمة احتمال $(X\le 2{,}5)$؛

$$P(X\le 2{,}5)=\int_{-\infty}^{2,5} f(x)dx\Rightarrow P(X\le 2{,}5)=\int_{-\infty}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{2}\frac{1}{2}(x-1)dx+\int_{2}^{2,5}\frac{1}{2}(x-1)dx$$

بالتعويض نحصل على النتيجة التالية :

$$P(X\le 2{,}5)=0+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right]_1^2+\frac{1}{2}[(x)]_2^{2,5}\Leftrightarrow P(X\le 2{,}5)=0+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0{,}5$$

2-2. قيمة احتمال $(X<2)$؛

$$P(X<2)=\int_{-\infty}^{2} f(x)dx\Rightarrow P(X\le 2)=\int_{-\infty}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{2}\frac{1}{2}(x-1)dx$$

بالتعويض نحصل على النتيجة التالية :

$$P(X<2)=0+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right]_1^2 \Leftrightarrow P(X\leq 2{,}5)=0+\frac{1}{4}=0{,}25$$

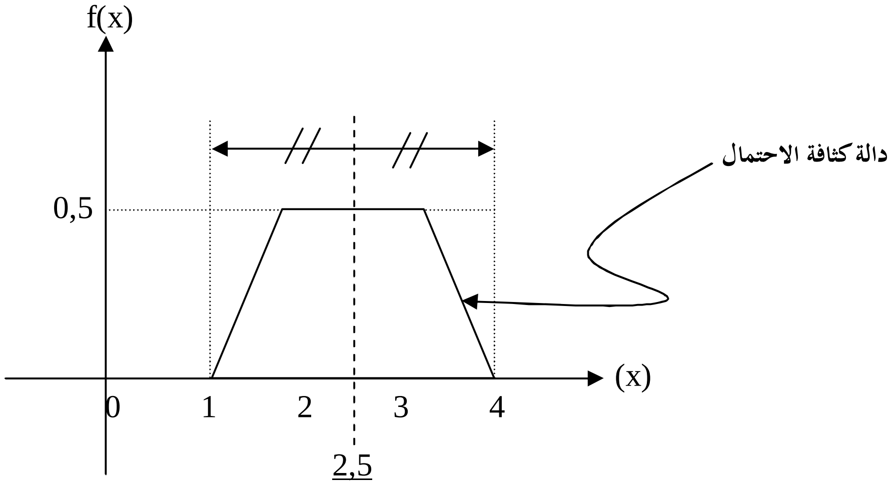
2-3. قيمة احتمال $(3{,}5<X<10)$ ؛

$$P(3{,}5<X<10)=\int_{3,5}^{10} f(x)dx \Rightarrow P(3{,}5<X<10)=\int_{3,5}^{4}\left(2-\frac{x}{2}\right)dx+\int_{4}^{10} f(x)dx$$

بالتعويض نحصل على النتيجة التالية :

$$P(3{,}5<X<10)=\left[\left(2x-\frac{x^2}{4}\right)\right]_{3,5}^{4}+0 \Leftrightarrow P(3{,}5<X<10)=0{,}0625$$

- **رسم دالة كثافة احتمالية f(x) :** يتم التعبير عن دالة كثافة الاحتمال بالشكل الأتي ؛



نلاحظ بأن القيمة 2,5 للمتغير العشوائي (X) تمثل نقطة التناظر لدالة كثافة الاحتمالية، لذلك وجد أن قيمة احتمال $(X\leq 2{,}5)$ تعادل نصف مساحة دالة الكثافة الاحتمالية التي تساوي الواحد الصحيح .

3. حساب قيمة التوقع الرياضي والإنحراف المعياري

1-3. التوقع الرياضي (الأمل الرياضي) : تعطى علاقة حساب التوقع الرياضي بالصيغة التالية؛

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x.f(x)]dx$$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{1}[x.f(x)]dx+\int_{1}^{2}[x.f(x)]dx+\int_{2}^{3}[x.f(x)]dx+\int_{3}^{4}[x.f(x)]dx+\int_{4}^{+\infty}[x.f(x)]dx$$

بالتعويض نحصل على النتيجة التالية :

$$E(x)=0+\int_{1}^{2}\left[x.\left(\frac{1}{2}(x-1)\right)\right]dx+\int_{2}^{3}\left[x.\left(\frac{1}{2}\right)\right]dx+\int_{3}^{4}\left[x.\left(2-\frac{x}{2}\right)\right]dx+0$$

$$E(x)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\right]_1^2+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_2^3+\left[\left(x^2-\frac{x^3}{6}\right)\right]_3^4 \Rightarrow E(x)=\left(\frac{5}{12}+\frac{5}{4}+\frac{5}{6}\right)=2{,}5$$

ومنه فإن قيمة التوقع الرياضي تقدر بـ : 2,5 .

3-2. الإنحراف المعياري $\delta(x)$: تعطى علاقة حساب الإنحراف المعياري بالصيغة التالية؛

$$\delta(x)=\sqrt{E(x^2)-[E(x)]^2}$$

ومنه لدينا :

$$E(x^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x^2.f(x)]dx \Leftrightarrow E(x^2)=\int_{-\infty}^{1}[x^2.f(x)]dx+\int_{1}^{2}[x^2.f(x)]dx+\int_{2}^{3}[x^2.f(x)]dx+\int_{3}^{4}[x^2.f(x)]dx+\int_{4}^{+\infty}[x^2.f(x)]dx$$

$$E(x^2)=0+\int_{1}^{2}\left[x^2.\left(\frac{1}{2}(x-1)\right)\right]dx+\int_{2}^{3}\left[x^2.\left(\frac{1}{2}\right)\right]dx+\int_{3}^{4}\left[x^2.\left(2-\frac{x}{2}\right)\right]dx+0$$

$$E(x^2)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right)\right]_1^2+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_2^3+\left[\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{8}\right)\right]_3^4 \Rightarrow E(x^2)=6{,}667$$

بالتعويض نحصل على النتيجة التالية :

$$\delta(x)=\sqrt{E(x^2)-[E(x)]^2}\mapsto\delta(x)=\sqrt{(6{,}667)-(2{,}5)^2}\Rightarrow\delta(x)=\sqrt{0{,}416}=0{,}645$$

ومنه فإن قيمة الانحراف المعياري تقدر بـ : 0,645 .

تشير قيمتي التوقع الرايضي والإنحراف المعياري، على أنه من المتوقع أن يرتفع حجم الطلب على منتجات الشركة بـ2,5 وحدة، وذلك بتشتت عن هذا التوقع بـ 0,645 .

4. صياغة دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ **للمتغير العشوائي (X) .**

$$F(x)=P(X\le x_i)=\int_{-\infty}^{x}f(u)du$$

- **إذا كان** $x\in]-\infty\,;\,1[$: بما أن هذا المجال خارج مجال تعريف المتغير العشوائي فإنه يساوي الصفر، أي :

$$x\in]-\infty\,;\,1[\Rightarrow F(x)=0$$

- **إذا كان** $x\in[1\,;\,2[$: تحسب القيمة التراكمية ضمن هذا المجال على النحو الأتي؛

$$x\in[1\,;\,2[\Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)du=\int_{-\infty}^{1}(0)du+\int_{1}^{x}\left(\frac{1}{2}(u-1)\right)du$$

$$F(x)=0+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u^2}{2}-u\right)\right]_1^x\Leftrightarrow F(x)=0+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x+1\right)\Rightarrow F(x)=\frac{1}{4}(x^2-2x+1)=\frac{1}{4}(x-1)^2$$

$$x\in[1\,;\,2[\Rightarrow F(x)=\frac{1}{4}(x^2-2x+1)=\frac{1}{4}(x-1)^2$$

- **إذا كان** $x\in[2\,;\,3[$: تحسب القيمة التراكمية ضمن هذا المجال على النحو الأتي؛

$$x\in[2\,;\,3[\Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)du=\int_{-\infty}^{2}f(u)du+\int_{2}^{x}\left(\frac{1}{2}\right)du$$

$$F(x)=\left[\frac{1}{4}(x-1)^2\right]_*^2+\frac{1}{2}[(u)]_2^x \Leftrightarrow F(x)=\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}(x-2)\Rightarrow F(x)=\frac{1}{4}(1+2x-4)=\frac{1}{4}(2x-3)$$

$$x\in[\,2\;;\;3\,[\Rightarrow F(x)=\frac{1}{4}(1+2x-4)=\frac{1}{4}(2x-3)$$

- **إذا كان** $x\in[\,3\;;\;4\,[$: تحسب القيمة التراكمية ضمن هذا المجال على النحو الأتي؛

$$x\in[\,3\;;\;4\,[\Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)du=\int_{-\infty}^{3}f(u)du+\int_{3}^{x}\left(2-\frac{u}{2}\right)du$$

$$F(x)=\left[\frac{1}{4}(2x-3)\right]_*^3+\left[\left(2u-\frac{u^2}{4}\right)\right]_3^x \Leftrightarrow F(x)=\left(\frac{3}{4}\right)+\left(2x-\frac{x^2}{4}-6+\frac{9}{4}\right)\Rightarrow F(x)=\frac{1}{4}\left(8x-x^2-12\right)$$

$$x\in[\,3\;;\;4\,[\Rightarrow F(x)=\frac{1}{4}\left(8x-x^2-12\right)$$

- **إذا كان** $x\in[\,4\;;\;+\infty\,[$: تحسب القيمة التراكمية ضمن هذا المجال على النحو الأتي؛

$$x\in[\,4\;;\;+\infty\,[\mapsto x\geq 4\Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)du=\int_{-\infty}^{4}f(u)du+\int_{4}^{+\infty}(0)du$$

$$F(x)=\left[\frac{1}{4}\left(8x-x^2-12\right)\right]_*^4+0\Leftrightarrow F(x)=1$$

$$x\in[\,4\;;\;+\infty\,[\Rightarrow F(x)=1$$

ومنه فإنه يتم كتابة دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ على النحو الأتي؛

$$F(x)=\begin{cases}0 & X<1\\ \frac{1}{4}(x-1)^2 & 1\leq X<2\\ \frac{2x-3}{4} & 2\leq X<3\\ 2x-\frac{x^2}{4}-3 & 3\leq X<4\\ 1 & X\geq 4\end{cases}$$

تمرين رقم 12 :

لتكن لدينا دالة الكثافة الاحتمالية f(X) المعبر عنها بالصورة التالية :

$$f(x)=\begin{cases}-kX & -2<X<0\\ kX & 0\leq X<2\\ 0 & Other\ \ Wise\ \ (x\notin]-2\quad 2[)\end{cases}$$

1. قيمة الثابت K : تكون قيمة الثابت k إذا كانت f(X) تعبر عن دالة كثافة احتمالية كما يلي ؛

1-1. الطريقة الجبرية : تعطى بالعلاقة التالية؛

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{-2} f(x)dx + \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

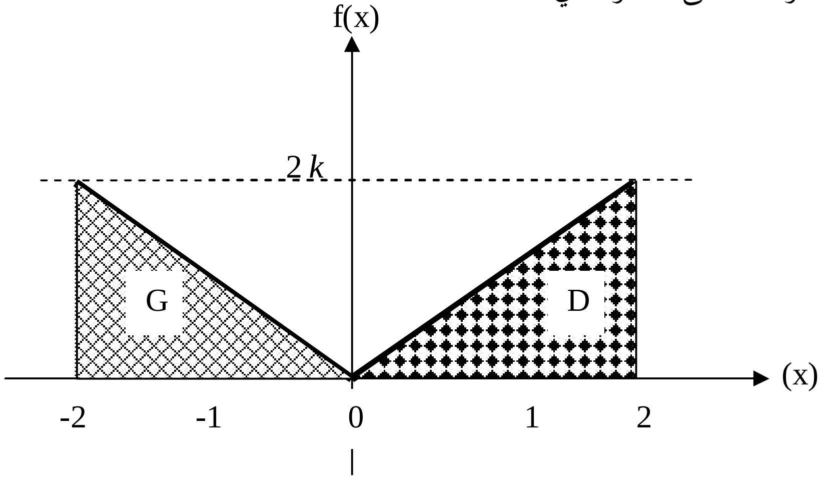
بالتعويض نحصل على النتيجة التالية :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow 0 + \int_{-2}^{0}(-kx)dx + \int_{0}^{2}(kx)dx + 0 = 1$$

$$(-k)\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_{-2}^{0} + k\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_{0}^{2} = 1 \Leftrightarrow (-k)(-2) + k(2) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

ومنه فإن قيمة الثابت k هي : 0,25 .

2-1. الطريقة الهندسية : يتم تحديد قيمة الثابت التي تحقق f(x) دالة كثافة احتمالية، بالمساحة رسم الدالة ضمن مجال تعريفها، وذلك على النحو الأتي ؛



ومنه فإن قيمة دالة الكثافة الاحتمالية تعبر عن مجموع مساحة المثلثين (G) و(D) .

- علاقة حساب مساحة المثلث (S): تمثل مساحة المثلث نصف جداء إرتفاع المثلث (H) في قاعدته (B)، والذي يعطى بالصيغة الأتية :

$$S = \frac{1}{2}(H)(B)$$

- <u>مساحة المثلث G</u> : لدينا إرتفاع المثلث بـ : $(H = 2k)$وقاعدته بـ $(B = 2)$، وبالتالي فإن مساحته تقدر بـ :

$$S(G) = \frac{1}{2}(2k)(2) \Rightarrow S(G) = 2k$$

- <u>مساحة المثلث D</u> : لدينا إرتفاع المثلث بـ : $(H = 2k)$وقاعدته بـ $(B = 2)$، وبالتالي فإن مساحته تقدر بـ :

$$S(D) = \frac{1}{2}(2k)(2) \Rightarrow S(D) = 2k$$

إذا كانت f(X) دالة كثافة احتمالية فإن مساحة المثلثين يجب أن تساوي الواحد الصحيح، وبالتالي فإن قيمة الثابت k تقدر كما يلي ؛

$$S(G)+S(D)=1 \Leftrightarrow 2k+2k=1 \Rightarrow k=\frac{1}{4}$$

أي أن قيمة الثابت k تقدر بـ 0,25، وهي ذات النتيجة المتحصل عليها في الطريقة الجبرية، وبالتالي فإن دالة كثافة الاحتمال f(X) تأخذ الصورة التالية :

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{4}X & -2<X<0 \\ \frac{1}{4}X & 0\le X<2 \\ 0 & Other \quad Wise \quad (x\notin]-2 \quad 2[) \end{cases}$$

2. دالة التراكمية F(X) : يتم التعبير عن دالة التوزيع التراكمي كما يلي؛

$$F(x)=P(X\le x_i)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

- إذا كان $x\in]-\infty \; ; \; -2[$: بما أن هذا المجال خارج مجال تعريف دالة كثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي (X) فإنها تكون معدومة في هذا المجال، أي :

$$x\in]-\infty \; ; \; 1[\Rightarrow F(x)=0$$

- إذا كان $x\in [-2 \; ; \; 0[$: تحسب القيمة التراكمية ضمن هذا المجال على النحو الأتي؛

$$x\in [-2 \; ; \; 0[\Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du=\int_{-\infty}^{-2}(0)du+\int_{-2}^{x}\left(-\frac{1}{4}u\right)du$$

$$F(x)=0+\left(-\frac{1}{4}\right)\left[\left(\frac{u^2}{2}\right)\right]_{-2}^{x} \Leftrightarrow F(x)=\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(x^2-4\right)\Rightarrow F(x)=\left(-\frac{1}{8}\right)\left(x^2-4\right)$$

- إذا كان $x\in [0 \; ; \; 2[$: تحسب القيمة التراكمية ضمن هذا المجال على النحو الأتي؛

$$x\in [0 \; ; \; 2[\Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du=\int_{-\infty}^{0} f(u)du+\int_{0}^{x}\left(\frac{1}{4}u\right)du$$

$$F(x)=\left[\left(-\frac{1}{8}\right)\left(x^2-4\right)\right]_{*}^{0}+\frac{1}{4}\left[\left(\frac{u^2}{2}\right)\right]_{0}^{x} \Leftrightarrow F(x)=\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(x)^2 \Rightarrow F(x)=\frac{x^2+4}{8}$$

- إذا كان $x\in [2 \; ; \; +\infty[$: تحسب القيمة التراكمية ضمن هذا المجال على النحو الأتي؛

$$x\in [2 \; ; \; +\infty[\mapsto x\ge 2\Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du=\int_{-\infty}^{2} f(u)du+\int_{2}^{+\infty}(0)du$$

$$F(x)=\left[\frac{x^2+4}{8}\right]_*^2+0 \Leftrightarrow F(x)=1$$

ومنه فإنه يتم كتابة دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ على النحو الأتي؛

$$F(x)=\begin{cases} 0 & X<-2 \\ \left(-\frac{1}{8}\right)\left(x^2-4\right) & -2\leq X<0 \\ \frac{x^2+4}{8} & 0\leq X<2 \\ 1 & X\geq 2 \end{cases}$$

3 . إيجاد قيمة احتمال $(-1,2<X<1,5)$

$$P(-1,2<X<1,5)=\int_{-1.32}^{1,5}\left(-\frac{1}{4}x\right)dx \Leftrightarrow P(-1,2<X<1,5)=\int_{-1.32}^{0}\left(-\frac{1}{4}x\right)dx+\int_{0}^{1,5}\left(\frac{1}{4}x\right)dx$$

$$P(-1,2<X<1,5)=\left(-\frac{1}{4}\right)\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1,32}^{0}+\left(\frac{1}{4}\right)\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1,5} \Rightarrow P(-1,2<X<1,5)=0,2178+0,28125\approx 0,5$$

الفصل الثالث : التوزيعات الإحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل

أهداف الفصل؛

بعد إتمام الطالب(ة) لهذا الفصل سيكون باستطاعته أن :

- التعرف على مختلف قوانين التوزيع الاحتمالي لمتغير العشوائي المنفصل؛
- التمييز بين قوانين التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منقطع أحادي التجربة (ت.منتظم&ت.برنولي) ؛
- التمييز بين قوانين التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منقطع متعدد المحاولات ثنائية أو متعددة الحدود؛
- تحديد قوانين التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منقطع متعدد المحاولات المشروط بوحدة زمنية أو منطقة؛
- التمييز بين قوانين التوزيع الاحتمالي للتجارب المستقلة والتجارب غير المستقلة عن بعضها البعض؛
- تحديد قانون التوزيع الإحتمال الملائم للتجارب العشوائية المرتبطة بوقوع الحدث أول مرة أو بعدد مرات محدد بعد عدة محاولات في التجربة العشوائية المستقلة.

المحاور المستهدفة؛

بغرض تحقيق أهداف هذا الفصل، فإننا سوف نتطرق إلى المحاور الأساسية المتمثلة فيمايلي:

- التوزيع المنتظم المنفصل؛
- التوزيع البرنولي؛
- التوزيع الثنائي الحدين و المتعدد (كثير الحدود)؛
- التوزيع البواسوني ؛
- التوزيع الهندسي ؛
- التوزيع فوق الهندسي (الهندسي الزائد)؛
- التوزيع الثنائي السالب
- سلسلة تمارين مع حلول نموذجية.

المدى الزمني للفصل ؛

سيتم تغطية محتوى هذا الفصل وفق المتطلب الزمني الأتي :

- حصة محاضرة : ثلاثة ساعات (محاضرتين)؛
- حصة أعمال موجهة : ثلاثة ساعات (حصتين).

الفصل الثالث

التوزيعات الإحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل

تعد عملية التوصيف الدقيق للتجارب العشوائية أمر بالغ الأهمية لا سيم عند التعامل مع ظروف متماثل، حيث تم وضع قوانين التوزيع الاحتمالي حتى تسرع عملية الوصول إلى نتائج، والتي نجد منها التوزيعات التي تعتمد على نفس قيمة الاحتمال مثل التوزيع المنتظم، والتوزيع الذي يأخذ فيه المتغير العشوائي قيمتين فقط كالتوزيع البرنولي، وهناك من يتطلب تحقق حدثين الأصلي والنافي مثل توزيع التنائي، وهناك من يعتمد على تكرار التجربة إلى غاية الحصول على أو نتيجة، ولدينا أيضا التوزيع الذي يطبق في حالة الاعتماد على البعد الزمني أو المكاني في تقدير القيمة الاحتمالية .

1. خواص التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل

فيما يلي أبرز الصيغ التي تبسط حساب مختلف القوانين الاحتمالية للمتغير العشوائي، وذلك على النحو الأتي :

- $$P(X \le k) = \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) = P(x_1 = 0) + P(x_2 = 1) + \ldots + P(x_k = n)$$
- $P(X < k) = P(X \le k-1)$
- $P(X > k) = P(X \ge k+1) = 1 - P(X \le k)$
- $P(X = A) = P(X \le A) - P(X \le A-1)$
- $P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a-1)$
- $P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$
- $P(a < X < b) = P(X \le b-1) - P(X \le a)$

2. التوزيع المنتظم المنفصل

يتم الاعتماد على هذا التوزيع عند ما تكون الاحتمالات المقابلة لقيم المتغير العشوائي متساوي، لهذا يعبر عنها بالصيغة الرياضية الأتي :

$$X \sim Unif\left(\frac{1}{n}\right)$$

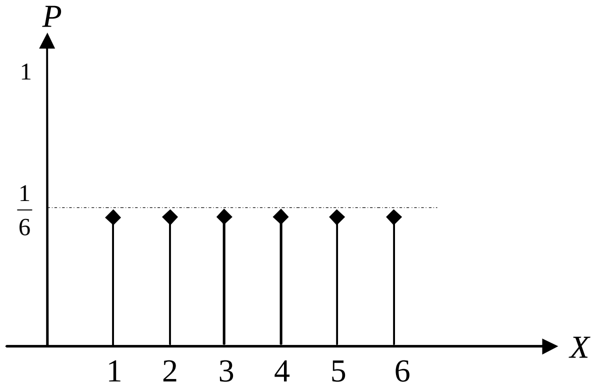
$$X \sim Unif\left(\frac{1}{n}\right) \mapsto P(X=k)=\frac{1}{n}$$

- **كتابة قانون التوزيع الاحتمالي :** بما أن زهرة النرد متجانسة وبها ستة أوجه، فإن القانون الاحتمالي يكتب كمايلي؛

$$P(X=k)=\frac{1}{6} \qquad 1 \le k \le 6$$

x_i	1	2	3	4	5	6	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

ويأخذ التوزيع الاحتمالي الشكل البياني الأتي؛



التمثيل البياني لقانون الاحتمال في تجربة إلقاء زهرة نرد مرة واحدة

- **خصائص القانون الإحتمالي للتوزيع المنتظم :** تتمثل المميزات الاحصائية للتوزيع المنتظم فيما يلي :
  - **التوقع الرياضي :**

$$E(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

  - **التباين :**

$$V(X)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)^2}{n}$$

  - **الانحراف المعياري :**

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)^2}{n}}$$

3. التوزيع البرنولي

إذا كان لدينا المتغير العشوائي (X) يأخذ إحدى القيمتين إما الصفر (0) أو الواحد الصحيح (1)، فهذا فإننا نقول بأن المتغير يتبع التوزيع البرنولي، وفق الصيغة الأتية :

$$X \sim B(P)$$

- **قانون الاحتمال بيانيا :** بما أن المعطيات تتعلق بحدث وحيد، وله احتمالين متنافيين (الفوز في السباق أو عدم الفوز)، فإن التوزيع الاحتمالي الملائم هو توزيع برنولي، والذي يعرف كمايلي :

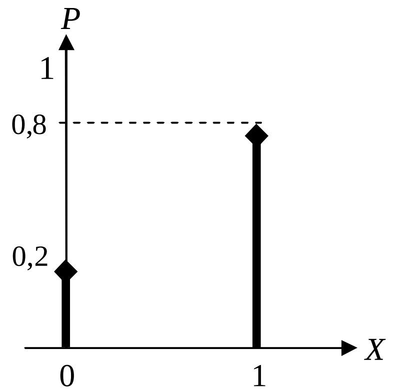
$$X \sim B(P) \mapsto X = \{0\ , 1\}$$

ومنه فإن قيم الاحتمال للمتغير العشوائي تأخذ الشكل الأتي؛

$$P(X = 1) = P(succe)$$
$$P(X = 0) = P(echec) \Rightarrow P(X = 0) = 1 - P$$

ويأخذ قانون الاحتمال البرنولي الشكل الأتي :

x_i	0	1	المجموع
$P(X = x_i)$	1-P	P	**1**



- **خصائص القانون الإحتمالي :** تتمثل المميزات الاحصائية للتوزيع البرنولي فيما يلي :

  - **التوقع الرياضي :**

$$E(X) = P(succe)$$

  - **التباين :**

$$V(X) = P.(1 - P)$$
$$= E(X).(1 - P)$$

  - **الانحراف المعياري :**

$$\sigma(X) = \sqrt{p.q}$$

3. التوزيع الثنائي الحدين

يعتبر أكثر التوزيعات الاحتمالية إستخدام في المتغير العشوائي المنقطع، حيث يتطلب توفير الشروط الأتي :

- تؤول كل محاولة إلى نتيجة واحدة من بين نتيجتين متنافيتين (نعم أو لا، يصيب أو لا يصيب، ......)؛
- يتم تنفيذ التجربة n مرة وفي نفس الظروف، على أن يتحقق خلالها حدث معين (k) من المرات ($0 \le k \le n$)؛
- نتيجة كل محاولة مستقلة عن نتائج المحاولات الأخرى، وبالتالي فإن إحتمال التحقق الحدث المطلوب يساوي حاصل ضرب إحتمالات مختلف الحالات المحققة ؛
- ثبات إحتمال التحقيق مهما تعددت المحاولات .

ويتم التعبير عن قانون التوزيع الثنائي كما يلي :

$$X \sim B_i(n;P)$$

$$X \sim B_i(n;P) \mapsto P(X=k) = C_n^k p^k q^{(n-k)} \quad ou \quad P(X=k) = \left(\frac{n!}{(n-k)!k!}\right)\left[p^k q^{(n-k)}\right]$$

- **خصائص القانون الإحتمالي**

  - **التوقع الرياضي :** بتطبيق علاقة التوقع الراضي نحصل على النتيجة التالية؛

$$E(X) = nP$$

  - **التباين :**

$$V(X) = npq$$
$$= E(X).(1-P)$$

  - **الانحراف المعياري :**

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}$$

- **حالة خاصة :** بفرض أن المتغير العشوائي W يعبر عن مجموع قيم المتغيرين العشوائيين المتكاملين (X) & (X') بنفس القيمة الإحتمالية $(P_x = P_{x'})$، فإن القانون يعرف كمايلي؛

$$W = X + X' \sim B_i(n_x + n_{x'};\ P)$$

وبناءا عليه فإن المميزات الإحصائية تأخذ الصيغ الآتية؛

- **التوقع الرياضي لـ W :**

$$E(W) = E(X + X') \Rightarrow E(W) = (n_W)(P)$$

- **التباين لـ W :**

$$V(W) = V(X + X') \Rightarrow V(W) = (n_W.p.q)$$

- **الانحراف المعياري لـ W :** تمثل الجدر التربيعي للتباين،وتحسب كمايلي؛

$$\sigma(W) = \sqrt{V(X + X')} = \sqrt{(n_W.p.q)}$$

4. التوزيع البواسوني

إذا كان المتغي العشوائي يعتمد على عنصر الزمان أو المكان في تحديد القيمة الاحتمالية، فإن التوزيع الاحتمالي المناسب هو التوزيع البواسوني الذي يعرف بالصيغة الأتية :

$$X \sim P(\lambda)$$

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)$$

التوزيع التراكمي للقانون بواسوني

$$P(X \le m) = \sum_{k=0}^{m}\left[e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)\right]$$

خصائص القانون الإحتمالي

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

- **قانون بواسون كتقريب لثنائي الحد** : يتم الاعتماد على قانون ثنائي الحد كتقريب لتحديد القيمة الاحمالية للمتيغير إذا حدث أن القيمة الاحتمالية كبيرة، ويتم تعريف التقريب بالصيغة الأتية :

$$X \sim P(n.p)$$

بما أن إحتمال الوحدة التالفة (P) صغير جدا، وأن حجم الطلبية (n) كبير، فإننا نقوم بتقريب توزيع ثاني الحد إلى توزيع بواسوني، وبالتالي نعرفه على النحو الأتي :

$$\left.\begin{array}{l}(P\ or\ q) \le 0{,}1 \\ \\ n \ge 30\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = nP$$

هناك شرط ثالث يتعلق بقيمة لامدا (λ) المستخرجة، والتي يجب أن لا تتجاوز الحد الأقصى 15 ($nP \le 15$)، وفي حال تم ذلك فإنه يتم اللجوء إلى تقريب التوزيع البواسوني بالتوزيع الطبيعي المعياري، بوضع ($\mu = \lambda$) و ($\sigma = \sqrt{\lambda}$) كما سوف نوضحه في الفصل المقبل .

$$\lambda > 15 \Rightarrow P(X \le x) = F_{Poission}(x;\lambda)$$
$$= \phi\left(\frac{x + 0{,}5 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

5. التوزيع الهندسي

وضع هذا التوزيع ليتجاوز عن شرط استقلالية الاحداث عن بعضها البعض، لذلك فعدما لا يتحقق هذا الشرط فإن التوزيع المناسب للمتغير العشوائي يصبح التوزيع الهندسي، والتي يكتب بالصيغة الأتية :

$$X \sim Geam(P)$$

$$P(X=k)=p.q^{(k-1)}$$

- **خصائص القانون الإحتمالي**
- **التوقع الرياضي :** بتطبيق علاقة التوقع الراضي نحصل على النتيجة التالية؛

$$E(X)=\frac{1}{P}$$

- **التباين :**

$$V(X)=\frac{1-P}{P^2}$$

- **الانحراف المعياري**

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{1-P}{P^2}}$$

6. التوزيع فوق الهندسي (الهندسي الزائد)

يعتبر أنسب التوزيعات الملائمة عندما لا تتحقق الصفتين الملازمتين لتوزيع ثنائي الحد والمتمثلتين في استقلال المحاولات (التكرارات) وكذلك ثبات احتمال الحدث الذي تهتم بدراسته (النجاح مثلا)، فعند عدم تحققهما يصبح من الضروري الاعتماد على هذا التوزيع، والذي يأخذ الصيغة التالية :

$$P(X=k)=\frac{C_m^k.C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}$$

ويعرف بالاختصار الأتي؛

$$X \sim H.G(n;N-m)$$

- **خصائص القانون الإحتمالي**
- **التوقع الرياضي :** بتطبيق علاقة التوقع الراضي نحصل على النتيجة التالية؛

$$E(X)=n\left(\frac{m}{N}\right)$$

- **التباين :**

$$V(X)=n\left(\frac{m}{N}\right)\left(\frac{N-m}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

- **الانحراف المعياري**

$$\sigma(X)=\sqrt{n\left(\frac{m}{N}\right)\left(\frac{N-m}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

- **تقريب توزيع فوق الهندسي بالتوزيع الثنائي الحد :** يعرف بالاختصار الأتي؛

$$X \sim H.G(n; N-m) \mapsto X \sim B_i\left(n; \frac{m}{N}\right)$$

عندما تكون N و m كبيرين، بالإضافة إلى كون نسبة عدد الوحدات المسحوبة بدون إرجاع إلى حجم المجتمع (N) صغير جدا، فإن تقريب ثنائي الحد بواسطة التوزيع فوق الهندسي يعتبر أكثر جدوى، وذلك بوضع قيمة الإحتمال كمايلي ؛

$$\boxed{\frac{n}{N} \le 0{,}1 \Rightarrow P = \frac{m}{N}}$$

تقترب نتيجة التوزيع الثنائي عند السحب مع الإرجاع من نتيجة التوزيع فوق الهندسي عند السحب بدون إرجاع (في أن واحد) عندما يكون حجم المجتمع (N) كبير جدا مقارنة بعدد الوحدات المسحوبة (n)، وبناءا عليه فإن المميزات الإحصائية للتوزيع تأخذ الشكل الأتي؛

$$E(X) = n\left(\frac{m}{N}\right) = n.P \quad et \quad V(X) = n.p.q\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

7. التوزيع الثنائي السالب

يعتبر من التوزيعات الاحتمالية المعممة لتوزيع ثنائي الحد، حيث يستخدم في التجارب التي تعتمد على تكرار التجربة إلى غاية الحصول على الحدث المراد تحقيقه في التجربة، ويتم كتابته بالصيغة الأتي :

$$X \sim B.N(n; r; P)$$

$$X \sim B.N(n; r; P) \mapsto P(X = n) = C_{n-1}^{n-r} P^r (1-P)^{n-r}$$

خصائص القانون الإحتمالي

- **التوقع الرياضي :** بتطبيق علاقة التوقع الراضي نحصل على النتيجة التالية؛

$$E(X) = \frac{r}{P}$$

- **التباين :**

$$V(X) = \frac{r(1-P)}{P^2}$$

- **الانحراف المعياري**

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{r(1-P)}{P^2}}$$

سلسلة تمارين الفصل

تمرين رقم 01 :

حدد طبيعة قانون التوزيع الاحتمالي الموافق للحالات المدروسة التالية، مع التعليل :

1. يتم مراقبة المصابيح غير الصالحة في مصنع المصابيح الكهربائية لشركة Philips، ضمن الإنتاج اليومي الذي يضم 1000 مصباح كهربائي من نوع LED؛
2. إجابة طالب(ة) على أسئلة ورقة الامتحان في مقياس الاحصاء 02 ؛
3. إجابة طالب(ة) على السؤال الشفوي للأستاذ أثناء المحاضرة ؛
4. يتلقى مستقبل المكالمات في قسم الشرطة بولاية ورقلة متوسط 10 مكالمات في الساعة الواحدة (60 دقيقة)؛
5. رمي زهرة نرد مرة واحدة ، وندون النتيجة الظاهرة على الوجه العلوي؛
6. في مسابقة البكالوريا لعام 2017، تمكن مترشح حر من اجتياز المسابقة في شعبة إقتصاد وتسيير لأول مرة بعد 06 محاولات؛
7. سجل في قرعة الحج لعام 2018 ببلدية غارداية 600 مواطن، من بينهم 180 أمرآة، علما أن نصيب هذه البلدية من رخص الحج لهذا العام هو 50 رخصة فقط؛
8. في لعبة الفيديو "الصياد البري" تمنح للاعب 10 طلقات، بحيث يجب عليه أن يصيب ثلاثة طيور حتى ينتقل إلى المرحلة الموالية في اللعبة؛
9. وصل عدد أستاذة جامعة غارداية إلى معدل 10 أساتذة من مصف الأستاذية (محاضر "أ" أو أستاذ التعليم العالي) بكل كلية؛
10. يوجد في أحدى دوائر ولاية ورقلة 30000 ساكن يحتاجون إلى التطعيم (اللقاح) ضد الحصبة، مع العلم أن احتمال أن يكون التطعيم له تأثير مضاد على تلقيح الشخص هو 0,0001 .

تمرين رقم 02 :

في تجربة إلقاء زهرة نرد متجانسة مرة واحدة، وبفرض أن الرامي يهتم بالرقم الذي يظهر على الوجه العلوي .

1. أكتب القانون الاحتمالي ؟ ثم مثله بيانيا ؟
2. ما احتمال أن يظهر رقم أقل من 5 ؟
3. ما احتمال أن يظهر رقم أكبر من 3 ؟
4. أحسب التوقع الرياضي والإنحراف المعياري ؟

تمرين رقم 03 :

سيشارك العداء الجزائري توفيق مخلوفي في أولمبياد طوكيو 2020، في إختصاص 1500 متر، باعتباره الإختصاص الذي حقق فيه 8 ميداليات من أصل 10 مشاركات .

المطلوب : أجب على ما يلي؛

1. ماهو احتمال أن يفوز بميدالية في هذا السباق ؟
2. مثل قانون الاحتمال بيانيا ؟
3. ما هو توقع أن يفوز في هذا السباق ؟ وما هو تباين هذا الفوز ؟

تمرين رقم 04 :

في تجربة عشوائية لرمي زهرة نرد 24 مرة، ونعرف المتغير العشوائي (X) بظهور الرقم 3 على الوجه العلوي .

المطلوب : أحسب مايلي؛

1. احتمال الحصول على الرقم ثمانية (08) مرات بالضبط ؟
2. احتمال عدم ظهور الرقم المحدد ؟
3. احتمال الحصول على الرقم سبعة (07) مرات على الأكثر ؟ ثم تأكد من قيمة الاحتمال وفق جدول التوزيع التراكمي؟
4. احتمال الحصول على الرقم ثمانية (08) مرات على الأقل ؟
5. ماهو توقع عدد مرات الحصول على الرقم المحدد، وما قيمة الإنحراف المعياري المقابل له ؟
6. إعتمادا على جداول التوزيع الثنائي، تأكد من نتائج قيم الاحتمال للأسئلة الأربعة الأولى ؟

تمرين رقم 05 :

إذا كان المتغير العشوائي (X) يتبع توزيع ثنائي الحدين، علما أن P=0,7، وفق الجدول التوزيع الاحتمالي الأتي؛

X	0	1	2	3	المجموع
$P(x_i)$	0,027	0,189	0,441	0,343	1

المطلوب : أجب على ما يلي؛

1. أحسب التوقع الرياضي و التباين لهذا التوزيع ؟
2. تأكد من النتائج، بالإعتماد على خصائص الاحصائية لتوزيع ثنائي الحدين ؟
3. بفرض أن المتغير العشوائي 'X، المعرف بالخصائص التالية : $X' \sim B(5;\, 0{,}7)$

فإذا علمت بأن المتغير العشوائي Z يعرف بالصيغة التالية :

$$Z = X + X'$$

- أوجد التوقع الرياضي و الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي Z ؟

تمرين رقم 06 :

تقدم طالب(ة) لامتحان كتابي يضم 10 أسئلة، ذات الإجابة التحديدية لأربعة خيارات (التأشير على الإجابة الصحيحة من ضمن الخيارات المقترحة) في كل سؤال، بحيث يحصل على نقطتين لكل إجابة صحيحة .

المطلوب : إذا كان الطالب قد أجاب على جميع الأسئلة، أوجد قم الاحتمال التالية ؛

1. احتمال أن يحصل الطالب على علامة 10 في هذا الامتحان ؟
2. احتمال أن يجيب على خمسة(05) أسئلة على الأكثر ؟
3. احتمال أن يجيب على خمسة (05) أسئلة على الأقل ؟
4. احتمال أن يجيب ما بين 03 و 05 أسئلة ؟
5. احتمال أن يجيب على أكثر من سؤال واحد (01) وأقل من ستة (06) أسئلة ؟
6. احتمال أن يجيب على أكثر من سؤال واحد (01) وأقل من أو يساوي ستة (06) أسئلة ؟
7. احتمال أن يأخذ العلامة صفر في هذا الإمتحان ؟
8. احتمال أن يحصل على أول إجابة صحيحة في الإجابة الرابعة ؟
9. تأكد من نتائج قيم الاحتمال بالإعتماد على جداول التوزيع التراكمي الثنائي ؟

تمرين رقم 07 :

في تجربة إلقاء زهرة نرد 10 مرات متتالية، أدرس الحالات الأتية؛

1. إذا كانت متناظرة، ما إحتمال ظهور الرقم 1 أربع مرات، والرقم 2 مرتين، والرقم 3 مرتين، والرقم 4 و5 مرة واحدة، وعدم ظهور الرقم 6 ؟
2. بفرض أن زهرة النرد غير متزنة، بحيث يتكرر الرقم 6 ثلاثة مرات، والرقم 3 مرتين، والرقم 2 مرة واحدة، فما احتمال الحصول على الرقم 6 خمسة مرات، والرقم 3 مرتين، والرقم 2 ثلاثة مرات ؟

تمرين رقم 08 :

عبر الطريق الوطني رقم 01، وضمن الخط الرابط بين ولايتي الأغواط وغارداية، تحدث حوادث سير بمعدل 04 حوادث في الشهر.

المطلوب : أدرس احتمالات الأحداث الآتية؛

1. احتمال أن يحدث نفس عدد الحوادث في الشهر المقبل ؟
2. احتمال عدم حدوث ولا حادث في الشهر القادم ؟

3. إحتمال أن تقع 6 حوادث على الأكثر في الشهر ؟

4. إحتمال أن يحدث ما بين 4 و6 حوادث في الشهر ؟

5. بالإعتماد على جدول توزيع البواسوني التراكمي، أوجد قيم الإحتمالات التالية :

$$P(1<X<5);\quad P(1<X\leq 4);\quad P(X=4);\quad P(X\geq 4);\quad P(2\leq X\leq 4)$$

تمرين رقم 09 :

صرح مزارع يملك قطعة أرض فلاحيت يخصصها لغرس القمح، بأنه يصطاد بمعدل فأرين (02) في كل واحد هكتار، والمطلوب أدرس الحالات التالية؛

1. ما إحتمال أن يكون هناك فأر واحد فقط في كل واحد هكتار ؟
2. ما إحتمال أن لا يكون هناك فأر في حقل القمح ؟
3. ما إحتمال أن يكون هناك أكثر من فأر واحد على الأقل في كل واحد هكتار ؟
4. ما إحتمال أن يكون هناك 5 فإران على الأكثر في كل واحد هكتار ؟
5. أكتب قانون الإحتمال لهذا المزارع المعبر عن إحتمال عدد الفأران في كل واحد هكتار ؟
6. أوجد الخصائص الإحصائية لهذا التوزيع الإحتمالي؟

تمرين رقم 10 :

يقوم مجمع الحليب لملبنة صنديل بضاية بن ضحوة في ولاية غارداية بإنتاج 3000 كيس من حليب البقر يوميا، فإذا علمت أن هناك إحتمال ان يكون كيس متقوب أو تالف في الإنتاج اليومي هو 0,005 .

فإذا تم التعاقد من أحد المتاجر على توفير طلبية يومية تضم 100 كيس، فأجب على مايلي؛

1. إحتمال أن تحتوى هذ الطلبية على كيسين تالفين فقط ؟
2. إحتمال أن لا تكون هناك وحدة تالفة في الطلبية ؟
3. إذا تم دراسة إمكانية رفع طلبية المتجر اليومية وفق الحالات التالية 200، 300، 400، 500 ثم إلى 1000 أو 2000؛ فما إحتمال أن تكون هناك وحديتين فقط تالفة ضمن هذه الحالات ؟ (لخص ذلك في جدول).

تمرين رقم 11 :

يصوب صياد على طائر الحجل مجموعة من الطلقات، فإذا كان من المتوقع أن يصيب أول طائر في المحاولة الرابعة، فأجب على مايلي؛

1. احتمال أن يصيب الطائر في الطلقة الثانية ؟
2. أكتب القانون الاحتمالي ؟
3. أحسب التباين والإنحراف المعياري لطلاقات الصياد على طائر الحجل ؟

تمرين رقم 12 :

يحتوى صندوق على 10 كرات منهم 6 كرات بيضاء، يتم سحب بطريقة عشوائية 3 كرات في أن واحد (سحب بدون إرجاع)، والمطلوب أحسب الاحتمالات التالية :

1. أن تكون أحد الكرات بيضاء ؟
2. أن تكون كرة بيضاء على الأقل ؟
3. أن تكون كرة غير بيضاء ؟
4. أحسب التوقع الرياضي والإنحراف المعياري لهذه التجربة ؟

تمرين رقم 13 :

يضم فوج في السنة أولى جدع مشترك بكلية العلوم الإقتصادية، التجارية وعلوم التسيير 30 طالب منهم 10 طلاب حاصلين على بكالوريا شعبة علوم، فإذا قرر أستاذ مقياس المحاسبة 01، إختيار ثلاثة (3) طلاب بطريقة عشوائية من الفوج لتكليفهم بتحضير حل تمرين معين من السلسلة للحصة المقبلة، و**المطلوب** : أوجد قيم الاحتمالات التالية ؛

1. احتمال أن يكون أحد الطلاب حاصل على بكالوريا شعبة علوم؟
2. احتمال أن يكون طالب على الأقل حاصل على بكالوريا شعبة علوم؟
3. احتمال أن يكون ولا طالب حاصل على بكالوريا شعبة علوم؟
4. احتمال أن يكون الطلاب المختارين حاصل على بكالوريا شعبة علوم؟
5. أحسب التوقع الرياضي والإنحراف المعياري لإختيار طلاب حاصل على بكالوريا شعبة علوم ؟
6. بفرض أن مجموع الطلاب الحاصلين على بكالوريا علوم في الدفعة هو 60 طالب من أصل 800 طالب لهذه السنة، فما احتمال إختيار ثلاثة طلاب بطريقة عشوائية لإستجوابهم عن صعوبات المقياس (إختيار في أن واحد)؟

تمرين رقم 14 :

يحتوى صندوق على 12 كرات تحمل أرقام متسلسلة : من 1 إلى 12 ، وعند القيام بعملية السحب بطريقة عشوائية نهتم بالحصول على كرة تحمل رقم يقبل القسمة على 4 ، وبالتالي نعرف المتغير العشوائي (X) عدد محاولات السحب اللازمة للحصول على ثلاثة كرات،

والمطلوب : أجب على مايلي؛

1. تحديد التوزيع الاحتمالي لـ X ؟
2. ما احتمال الحصول على 03 الكرات التي تحقق أرقامها القسمة على 4، عند عدد محاولات السحب ثالثة (03) ؟
3. ما احتمال الحصول على 03 الكرات التي تحقق أرقامها القسمة على 4، عند عدد محاولات السحب العاشرة (10) ؟
4. ما احتمال الحصول على 03 الكرات التي تحقق أرقامها القسمة على 4، عند عدد محاولات السحب الخمسة عشر (15) ؟
5. ما احتمال الحصول على 03 الكرات التي تحقق أرقامها القسمة على 4، عند عدد محاولات السحب لا يتجاوز 10 ؟
6. ما احتمال الحصول على 03 كرات تحقق أرقامها القسمة على 4، عند إحدى عشرة محاولة على الأقل ؟
7. أحسب الخصائص الإحصائية لهذه التجربة ؟

الحلول النمودجية لسلسلة التمارين

تمرين رقم 01 :

يتم تحديد طبيعة قانون التوزيع الاحتمالي الموافق للحالات المشار إليها في هذا التمرين على النحو المبين في الجدول الأتي؛

الرقم	الحالات المدروسة	نوع التوزيع	التعليل
01	يتم مراقبة المصابيح غير الصالحة في مصنع المصابيح الكهربائية لشركة Philips، ضمن الإنتاج اليومي الذي يضم 1000 مصباح كهربائي من نوع LED	القانون الثنائي الحد $X \sim B_i(n;P)$	- نتيجة التجربة ثنائية (المصباح صالح أو غير صالح) - تعدد التجربة (المصابيح)؛ - احتمال التحقق ثابت من عملية إلى أخرى (احتمال أن يكون المصباح غير صالح)؛ - النتائج مستقلة(مراقبة مصباح مستقلة عن المصباح الأخر)
02	إجابة طالب(ة) على أسئلة ورقة الامتحان في مقياس الإحصاء 02	القانون الثنائي الحد $X \sim B_i(n;P)$	- تعدد الأسئلة؛ - النتيجة ثنائية، إما إجابة صحيحة أو إجابة خاطئة؛ - احتمال الاجابة الصحيحة ثابت في كل سؤال؛ - الإجابة الصحيحة لسؤال مستقل عن إجابة السؤال الأخر.
03	إجابة طالب(ة) على السؤال الشفوي للأستاذ أثناء المحاضرة	قانون برنولي $X \sim B(P)$	- التجربة واحدة فقط (سؤال واحد) - النتيجة ثنائية، إما إجابة صحيحة أو إجابة خاطئة؛
04	يتلقى مستقبل المكالمات في قسم الشرطة بولاية الجلفة متوسط 10 مكالمات في الساعة الواحدة (60 دقيقة)	قانون بواسون $X \sim P(\lambda)$	إرتباط الحدث بعنصر الزمن : متوسط عدد المكالمات في الساعة الواحدة .
05	رمي زهرة نرد مرة واحدة ، وندون النتيجة الظاهرة على الوجه العلوي	القانون المنتظم $X \sim Unif\left(\frac{1}{n}\right)$	- التجربة واحدة فقط (رمية واحدة) - احتمالات الحالات الممكنة للوجه الظاهر متساوية (6/1)
06	في مسابقة البكالوريا لعام 2017، تمكن مترشح حر من اجتياز المسابقة في شعبة إقتصاد وتسيير لأول مرة بعد 06 محاولات	قانون التوزيع الهندسي $X \sim Geam(P)$	- تعدد المحاولات؛ - إستقلالية التجارب؛ - الاهتمام بتحقق الحدث لأول مرة؛

07	سجل في قرعة الحج لعام 2018 ببلدية غارداية 600 مواطن، من بينهم 180 أمرآة، علما أن نصيب هذه البلدية من رخص الحج لهذا العام هو 50 رخصة فقط	قانون التوزيع فوق الهندسي $X \sim H.G(n;N-m)$	- عدم إستقلالية التجارب (سحب بدون إرجاع) .
08	في لعبة الفيديو "الصياد البري" تمنح للاعب 10 طلقات، بحيث يجب عليه أن يصيب ثلاثة طيور حتى ينتقل إلى المرحلة الموالية في اللعبة	قانون التوزيع الثنائي السالب $X \sim B.N(n;r;P)$	تعدد المحاولات؛ تكرار المحاولات حتى تحقيق العدد اللازم لحدث معين.
09	وصل عدد أستاذة جامعة غارداية إلى معدل 10 أساتذة من مصف الأستاذية (محاضر "أ" أو أستاذ التعليم العالي) بكل كلية .	قانون بواسون $X \sim P(\lambda)$	إرتباط الحدث بعنصر المكان : متوسط عدد الأساتذة من مصف الأستاذية في الكلية.
10	يوجد في أحدى دوائر ولاية ورقلة 30000 ساكن يحتاجون إلى التطعيم (اللقاح) ضد الحصبة، مع العلم أن احتمال أن يكون التطعيم له تأثير مضاد على تلقيح الشخص هو 0,0001	قانون بواسون كتقريب لتنائي الحد $X \sim P(n.p)$	- تعدد السكان، وأن عددهم كبير جدا؛ - احتمال أن يكون التطعيم له تأثير مضاد ثابت لكل شخص، و هو احتمال صغير جدا ؛ - النتيجة ثنائية، إما أن يكون للقاح تأثير مضاد أو لا يكون له تأثير ؛ - إستقلالية تأثير اللقاح من شخص إلى أخر؛ - بما أن n كبيرة و P صغيرة، فإننا سنعتمد على معامل بواسون لمتوسط الأشخاص الذين لهم تأثير مضاد للقاح : $\lambda = nP = (30000)(0{,}0001) = 3$

تمرين رقم 02 :

بما أن الرامي يهتم بنتيجة التجربة العشوائية، المقابلة لرمية واحدة، فإن التوزيع المناسب لهذه التجربة هو القانون المنتظم، والذي يكتب كما يلي؛

$$X \sim Unif\left(\frac{1}{n}\right) \mapsto P(X=k) = \frac{1}{n}$$

ويعرف المتغير العشوائي لهذه التجربة كمايلي :

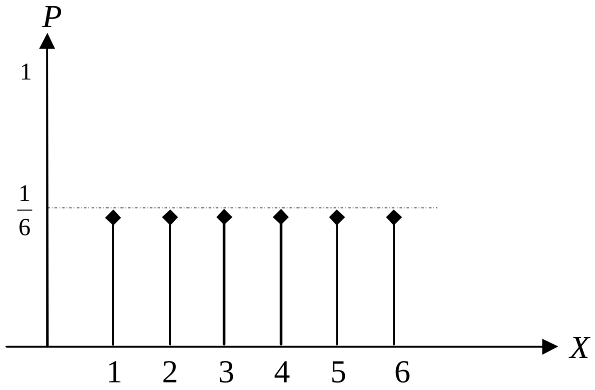
$$X = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$$

1. كتابة قانون التوزيع الاحتمالي : بما أن زهرة النرد متجانسة وبها ستة أوجه، فإن القانون الاحتمالي يكتب كمايلي؛

$$P(X=k)=\frac{1}{6} \qquad 1\le k\le 6$$

x_i	1	2	3	4	5	6	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

ويأخذ التوزيع الاحتمالي الشكل البياني الأتي؛



التمثيل البياني لقانون الاحتمال في تجربة إلقاء زهرة نرد مرة واحدة

2. حساب احتمال أن يكون الرقم الظاهر أقل من 3 : يتم حساب هذا الاحتمال كمايلي؛

$$P(X<3)=\sum_{i=1}^{2}P_i \Leftrightarrow P(X\le 2)=\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{6}$$

3. حساب احتمال أن يظهر رقم أكبر من 4 : يتم حساب هذا الاحتمال كمايلي؛

$$P(X>4)=\sum_{i=5}^{n=6}P_i \Leftrightarrow P(X\ge 5)=\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{6}$$

4. حساب قيمة التوقع الرياضي والإنحراف المعياري : بالإعتماد على الصيغ الإحصائية نحصل على النتيجة التالية؛

- **التوقع الرياضي :**

$$E(X)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}x_i \mapsto E(X)=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)\Rightarrow E(X)=\frac{1}{6}\left(\frac{6.(6+1)}{2}\right)=3{,}5$$

- **التباين :**

$$V(X)=\frac{\sum_{i=1}^{6}\left(x_i-\overline{X}\right)^2}{6}\mapsto V(X)=\frac{(1-3{,}5)^2+(2-3{,}5)^2+(3-3{,}5)^2+(4-3{,}5)^2+(5-3{,}5)^2+(6-3{,}5)^2}{6}$$

$$\Rightarrow V(X)=\frac{17{,}5}{6}=2{,}917$$

- **الانحراف المعياري :**

$$\sigma(X)=\sqrt{2{,}917}\Rightarrow\sigma(X)=1{,}708$$

تمرين رقم 03 :

1. احتمال الفوز في السباق : لدينا عدد السباقات التي فاز بها توفيق مخلوفي في إختصاص 1500 متر، هي 8 من أصل 10 مشاركات، وبالتالي فإن احتمال أن يفوز في هذه الدورة يقدر بـ :

$$P(succe)=\frac{Card(succe)}{Card(N)}\Rightarrow P(succe)=\frac{8}{10}=0{,}8$$

2. تمثل قانون الاحتمال بيانيا : بما أن المعطيات تتعلق بحدث وحيد، وله احتمالين متنافيين (الفوز في السباق أو عدم الفوز)، فإن التوزيع الاحتمالي الملائم هو توزيع برنولي، والذي يعرف كمايلي :

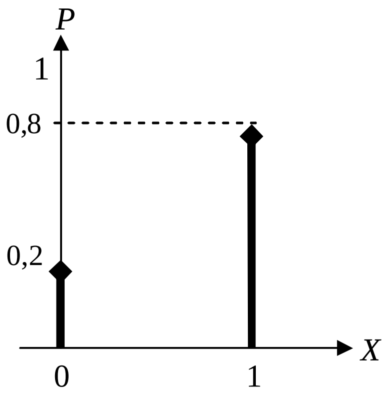
$$X\sim B(P)\mapsto X=\{0\ ,\ 1\}$$

ومنه فإن قيم الاحتمال للمتغير العشوائي تأخذ الشكل الأتي؛

$$P(X=1)=P(succe)=0{,}8$$
$$P(X=0)=P(echec)\Rightarrow P(X=0)=1-P=0{,}2$$

ويأخذ قانون الاحتمال البرنولي الشكل الأتي :

x_i	0	1	المجموع
$P(X=x_i)$	0,2	0,8	**1**



3. حساب توقع فوز مخلوفي في أولمبياد طوكيو 2020 في إختصاص 1500 متر : بالإعتماد على الصيغ الإحصائية للتوقع وفق قانون برنوللي و الذي يأخذ الشكل الأتي؛

- **التوقع الرياضي :**

$$E(X)=P(succe)=0{,}8$$

ومنه فإنه من المتوقع أن يفوز في هذا التظاهرة الرياضية بـ 80% .

- **التباين :**

$$V(X)=p.q\mapsto V(X)=(0{,}8).(0{,}2)\Rightarrow V(X)=0{,}16$$

وبالاعتماد على قيمة التباين، فإنه من التوقع أن يتغير احتمال الفوز بـ 16%، بمعنى قد يرتفع احتمال الفوز إلى 96%، كما قد ينخفض إلى 64% .

تمرين رقم 04 :

لدينا من معطيات التمرين البيانات التالية :

- عدد مرات تكرار التجربة (n) : 24 مرة، أي أن $n = 24$ ؛
- احتمال ظهور الرقم المحدد (3) على الوجه العلوي في كل رمية :

$$P = \frac{card(x)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

- احتمال عدم ظهور الرقم (3) على الوجه العلوي في كل رمية :

$$q = \frac{card(x')}{Card(\Omega)} = \frac{5}{6}$$

بما أن معطيات التجربة تتعلق بعدة تجارب، وأنها تحتمل نتيجتين متنافيتين (ظهور الرقم 3 على الوجه العلوي، أو عدم ظهر الرقم)، كما أن نتيجة كل تجربة مستقلة عن التجربة الأخرى (غير مرتبطة)، أيضا احتمال تحقق الحدث (ظهور الرقم 3 في الوجه العلوي) ثابت في كل رمية، فإن التوزيع الاحتمالي الملائم هو التوزيع ثنائي الحد، والذي يعطى بالصيغة التالية :

$$X \sim B_i(n;P) \mapsto P(X=k) = C_n^k p^k q^{(n-k)} \quad ou \quad P(X=k) = \left(\frac{n!}{(n-k)!k!}\right)\left[p^k q^{(n-k)}\right]$$

1. احتمال الحصول على الرقم ثمانية (08) مرات بالضبط : يعنى أن k=8، وبالتعويض في علاقة توزيع تنائي الحد نحصل على قيمة الاحتمال التالية :

$$P(X=8) = \left(\frac{24!}{(24-8)!8!}\right)\left[\left(\frac{1}{6}\right)^8\left(\frac{5}{6}\right)^{(24-8)}\right] \Rightarrow P(X=8) = 0{,}024$$

2. احتمال عدم ظهور الرقم المحدد : يعنى بأن k=0، وبالتعويض في علاقة توزيع تنائي الحد نحصل على قيمة الاحتمال التالية :

$$P(X=0) = \left(\frac{24!}{(24-0)!0!}\right)\left[\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{(24-0)}\right] \Rightarrow P(X=0) = 0{,}0126$$

3. احتمال الحصول على الرقم سبعة (07) مرات على الأكثر : مما يعنى أنه يمكن أن يظهر 7 مرات أو 6 أو ...أو عدم ظهور الرقم، ويتم التعبير عنه بالمتراجحة ضمن الاحتمال كالأتي :

$$P(X \le 7) = \sum_{i=0}^{7} P(X=i)$$

ومنه يتم تقدير الاحتمالات كمايلي؛

$$i=0 \Rightarrow P(X=0) = 0{,}0126 \qquad i=4 \Rightarrow P(X=4) = 0{,}2139$$

$$i=1 \Rightarrow P(X=1) = 0{,}0604 \qquad i=5 \Rightarrow P(X=5) = 0{,}1711$$

$$i=2 \Rightarrow P(X=2) = 0{,}1389 \qquad i=6 \Rightarrow P(X=6) = 0{,}1084$$

$$i=3 \Rightarrow P(X=3)=0{,}2037 \qquad i=7 \Rightarrow P(X=7)=0{,}0557$$

وبناءا على هذه القيم فإن :

$$P(X \leq 7)=[0{,}0126+0{,}0604+0{,}1389+0{,}2037+0{,}2139+0{,}1711+0{,}1084+0{,}0557]$$
$$P(X \leq 7)=0{,}9647$$

يمكن الحصول على نفس لنتيجة بالإعتماد على الجداول التراكمية لتوزيع ثنائي الحد، وذلك على النحو الأتي :

$$\left.\begin{matrix} P=0{,}15 \Rightarrow P(X \leq 7)=0{,}9745 \\ P=0{,}2 \Rightarrow P(X \leq 7)=0{,}8909 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow MinP \Rightarrow P(X \leq 7)=0{,}9745$$

4. احتمال الحصول على الرقم، ثمانية (08) مرات على الأقل : ما يعنى أن الظهور المطلوب لرقم هو ثمانية مرات، أو تسعة أو ...أو يجب أن يظهر في كل التجارب (20 مرة)، ويتم التعبير عنه بالمتراجحة ضمن الاحتمال كالأتي :

$$P(X \geq 8)=\sum_{i=8}^{20} P(X=i)$$

ويستفاد من اجابة السؤال السابق في هذا الحل، وذلك بالاعتماد على الاحتمال المكمل، والذي تأخذ صياغته الشكل الأتي؛

$$P(X \geq 8)=1-P(X<8) \Leftrightarrow P(X \geq 8)=1-P(X \leq 7)$$

لدينا :

$$P(X \leq 7)=0{,}9647$$

ومنه فإن؛

$$P(X \geq 8)=1-P(X \leq 7) \mapsto P(X \geq 8)=(1-0{,}9647)=0{,}0353$$

5. حساب التوقع لعدد مرات الحصول على الرقم المحدد، وقيمة الإنحراف المعياري المقابل له : يتم حساب المميزات العددية لهذه التجربة كمايلي؛

5-1. التوقع الرياضي : بتطبيق علاقة التوقع الراضي نحصل على النتيجة التالية؛

$$E(X)=nP \mapsto E(X)=(24)\left(\frac{1}{6}\right) \Rightarrow E(X)=4$$

أي أنه من المتوقع أن يظهر الرقم 3 عند تكرار تجربة رمي زهرة النرد 24 مرة هو ظهور الرقم على الوجه العلوي 4 مرات.

5-2. الانحراف المعياري : بتطبيق علاقة الإنحراف المعياري نحصل على النتيجة التالية؛

$$\sigma(X)=\sqrt{npq} \mapsto \sigma(X)=\sqrt{(24)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)} \Rightarrow \sigma(X)=1{,}826$$

مدى تشتت قيمة توقع عدد مرات ظهر الرقم 3 على الوجه العلوي هو 1,826، تقريبا مرتين زيادة أو نقصان .

تمرين رقم 05 :

أولا- حساب التوقع والتباين : يتم حساب الإحصائيتين بتطبيق العلاقة التالية ؛

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}[x_i.P(x_i)] \quad et \quad V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

وبالإعتماد على طريقة الحساب ألجدولي المباشرة، نحصل على النتائج الآتية :

X	0	1	2	3	المجموع
$P(x_i)$	0,027	0,189	0,441	0,343	1
$x_i.P(x_i)$	0	0,189	0,882	1,029	$E(X)=2,1$
$(x_i)^2.P(x_i)$	0	0,189	1,764	3,087	$E(X^2)=5,04$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 \mapsto V(X)=(5,04)-(2,1)^2 \Rightarrow V(X)=0,63$$

وبناءا عليه فإن المميزات الإحصائية لهذا التوزيع تأخذ القيم التالية :

$$E(X)=2,1 \quad et \quad V(X)=0,63$$

ثانيا- تأكيد النتائج وفق خصائص التوزيع : لدينا خصائص التوزيع كمايلي؛

$$E(X)=nP \mapsto E(X)=(3)(0,7)$$

$$V(X)=nP(1-P) \mapsto V(X)=(3)(0,7)(1-0,7) \Rightarrow V(X)=0,63$$

نلاحظ تطابق النتائج، سواء بالإعتماد على الصيغ الحسابية للتوقع الرياضي و التباين وفق المتغير العشوائي أو بالإعتماد على المميزات الإحصائية لتوزيع ثنائي الحد .

ثالثا- حساب التوقع الرياضي و الإنحراف المعياري للمتغير Z : بما أن المتغير العشوائي Z يمثل مجموع المتغيرين العشوائيين X و'X اللذين لهما نفس قيمة احتمال تحقق الحدث، فإن الخصائص الإحصائية لـ Z تأخذ الشكل الأتي؛

$$X \sim B(3;\ 0,7) \quad et \quad X' \sim B(5;\ 0,7)$$

وبناءا عليه فإن المتغير العشوائي Z يعرف كمايلي :

$$Z = X + X' \sim B(n_x + n_{x'};\ P) \Leftrightarrow Z \sim B(8\ ;\ 0,7)$$

- **التوقع الرياضي لـ Z :** لدينا العبارة التالية؛

$$E(Z)=E(X+X') \mapsto E(Z)=(n_z)(P) \Leftrightarrow E(Z)=(8)(0,7) \Rightarrow E(Z)=5,6$$

- **قيمة التباين لـ Z** : لدينا الصيغة المعبر عنها كمايلي؛

$$V(Z)=V(X+X')\mapsto V(Z)=(n_z.p.q)\Leftrightarrow V(Z)=(8)(0{,}7)(1-0{,}7)\Rightarrow V(Z)=1{,}68$$

- **الانحراف المعياري لـ Z** : تمثل الجدر التربيعي للتباين،وتحسب كمايلي؛

$$\sigma(Z)\sqrt{V(X+X')}=\sqrt{(n_z.p.q)}\Leftrightarrow \sigma(Z)=\sqrt{1{,}68}\Rightarrow \sigma(Z)=1{,}296$$

تمرين رقم 06 :

لدينا من معطيات التمرين البيانات التالية :

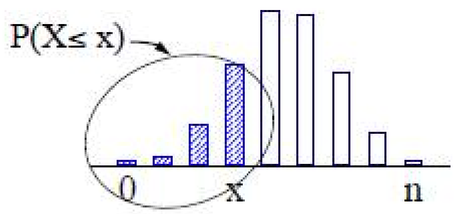
- عدد مرات تكرار التجربة (n) : 10 أسئلة، أي أن $n=10$ ؛
- احتمال الإجابة الصحيحة على السؤال :

$$P=\frac{card(x)}{Card(\Omega)}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

بما أن معطيات التجربة تتعلق بعدة تجارب، وأنها تحتمل نتيجتين متنافيتين (إجابة صحيحة، أو أن تكون إجابته خاطئة)، كما أن نتيجة كل تجربة مستقلة عن التجربة الأخرى (غير مرتبطة)، أيضا احتمال تحقق الحدث ثابت في كل سؤال، فإن التوزيع الاحتمالي الملائم هو التوزيع ثنائي الحد، والذي يعطى بالصيغة التالية :

$$P(X=k)=C_{10}^{k}(0{,}25)^{k}(0{,}75)^{(10-k)}$$

وبما أن الإجابة تعتمد على جداول التوزيع، فإننا نأخذ مقطع من الملحق رقم (03) لتوزيع الثنائي المتعلق بدالة التراكم الاحتمالي لهذا التوزيع عند حجم عينة 10 : n=10، وذلك على النحو الأتي* ؛

$F(x)=P(X\le x_i)=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{n!}{(n-x_i)!x_i!}P^{x_i}(1-P)^{n-x_i}\right)$ x_i =**k** : le nombre d'occurrences parmi **n**	

* يمكن الإعتماد على الرابط، كبديل لجدول توزيع ثنائي الحد كمايلي : http://stattrek.com/online-calculator/binomial.aspx

n = 10

k	p = 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
1	0,9139	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
2	0,9885	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
3	0,9990	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
4	0,9999	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
5	1,0000	0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

1. حساب احتمال أن يحصل الطالب على علامة 10 في هذا الامتحان : يحصل الطالب على علامة 10 إذا أجاب على خمسة (5) أسئلة، وبناءا عليه فإن الاحتمال يحسب كما يلي ؛

$$P(X=5)=C_{10}^{5}(0,25)^{5}(0,75)^{(10-5)} \mapsto P(X=5)=\frac{10!}{(10-5)!5!}(0,25)^{5}(0,75)^{(5)}$$

$$\Rightarrow P(X=5)=0,0584$$

وبالإعتماد على جدول التوزيع التراكمي، لدينا مايلي :

$$P(X=5)=P(X\leq 5)-P(X\leq 4)\Leftrightarrow P(X=5)=0,9803-0,9219$$

$$\Rightarrow P(X=5)=0,0584$$

بمعنى، أن هناك احتمال 5,84% أن يحصل هذا الطالب على علامة 10 في هذا الإمتحان .

2. حساب احتمال أن يجيب على خمسة(05) أسئلة على الأكثر : يتم التعبير عن هذا الاحتمال بالصيغة التالية؛

$$P(X\leq 5)=P(X=5)+P(X=4)+P(X=3)+P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)$$

$$P(X\leq 5)=\sum_{i=0}^{5}\left[\frac{10!}{(10-i)!i!}(0,25)^{i}(0,75)^{(10-i)}\right]\Rightarrow P(X\leq 5)=0,9803$$

وبالإعتماد على جدول التوزيع التراكمي عند حجم عينة n=10،و k=5 باحتمال P=0,25، لدينا النتيجة التالية :

$$P(X\leq 5)=0,9803$$

3. حساب احتمال أن يجيب على خمسة (05) أسئلة على الأقل : يتم التعبير عن هذا الاحتمال بالصيغة التالية؛

$$P(X \geq 5) = P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$$

$$P(X \geq 5) = \sum_{i=5}^{10}\left[\frac{10!}{(10-i)!\,i!}(0{,}25)^{i}(0{,}75)^{(10-i)}\right] \Rightarrow P(X \geq 5) = 0{,}0781$$

وبالإعتماد على جدول التوزيع التراكمي، وفق متمم الاحتمال كمايلي؛

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) \Rightarrow P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$$

لدينا من جدول قيم التراكم الاحتمالي للعدد 4 بـ : 0,9219 ($P(X \leq 4) = 0{,}9219$)، وبالتعويض في الصيغة السابقة نحصل على النتيجة التالية ؛

$$P(X \geq 5) = 1 - 0{,}9219 \Rightarrow P(X \geq 5) = 0{,}0781$$

هذا يعني بأن هناك احتمال 7,81% أن يجيب على خمسة (05) أسئلة على الأقل في هذا الامتحان .

4. احتمال أن يجيب ما بين 03 و 05 أسئلة : يتم التعبير عن هذا الاحتمال بالصيغة التالية؛

$$P(3 \leq X \leq 5) = P(X=5)+P(X=4)+P(X=3)$$

$$P(3 \leq X \leq 5) = \sum_{i=3}^{5}\left[\frac{10!}{(10-i)!\,i!}(0{,}25)^{i}(0{,}75)^{(10-i)}\right]$$

$$\Rightarrow P(3 \leq X \leq 5) = 0{,}0584 + 0{,}146 + 0{,}2503 = 0{,}4547$$

وبالإعتماد على جدول التوزيع التراكمي، يتم التعبير عنها بالصيغة التالية؛

$$P(3 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 2)$$

لدينا من جدول قيم التراكم الاحتمالي القيم التالية :

$$\left.\begin{array}{l} P(X \leq 5) = 0{,}9803 \\ P(X \leq 2) = 0{,}5256 \end{array}\right\} \Leftrightarrow P(3 \leq X \leq 5) = 0{,}9803 - 0{,}5256 \Rightarrow P(3 \leq X \leq 5) = 0{,}4547$$

ومنه، فإن هناك احتمال 45,47% أن يجيب على ما بين 03 و 05 أسئلة في هذا الامتحان .

5. احتمال أن يجيب على أكثر من سؤال واحد (01) وأقل من ستة (06) أسئلة : يتم التعبير عن هذا الاحتمال بالصيغة التالية؛

$$P(1 < X < 6) = P(2 \leq X \leq 5) = P(X=5)+P(X=4)+P(X=3)+P(X=2)$$

$$\Rightarrow P(1 < X < 6) = 0{,}0584 + 0{,}146 + 0{,}2503 + 0{,}2816 = 0{,}736$$

وبالإعتماد على جدول التوزيع التراكمي، يتم التعبير عنها بالصيغة التالية؛

$$P(1 < X < 6) = P(2 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 1)$$

لدينا من جدول قيم التراكم الاحتمالي القيم التالية :

$$\left.\begin{array}{l}P(X \le 5)=0{,}9803\\ P(X \le 1)=0{,}244\end{array}\right\}\Leftrightarrow P(1< X <6)=0{,}9803-0{,}244 \Rightarrow P(1< X <6)=0{,}7363$$

ومنه، فإن هناك احتمال 73,63% أن يجيب على أكثر من سؤال واحد (01) وأقل من ستة (06) أسئلة في هذا الامتحان .

6. احتمال أن يجيب على أكثر من سؤال واحد (01) وأقل من أو يساوي ستة (06) أسئلة : يتم التعبير عن هذا الاحتمال بالصيغة التالية؛

$$P(1< X \le 6)=P(2\le X \le 6)=P(X=6)+P(X=5)+P(X=4)+P(X=3)+P(X=2)$$

$$\Rightarrow P(1< X \le 6)=0{,}0162+0{,}0584+0{,}146+0{,}2503+0{,}2816=0{,}7525$$

وبالإعتماد على جدول التوزيع التراكمي، يتم التعبير عنها بالصيغة التالية؛

$$P(1< X \le 6)=P(2\le X \le 6)=P(X \le 6)-P(X \le 1)$$

لدينا من جدول قيم التراكم الاحتمالي القيم التالية :

$$\left.\begin{array}{l}P(X \le 6)=0{,}9965\\ P(X \le 1)=0{,}244\end{array}\right\}\Leftrightarrow P(1< X \le 6)=0{,}9965-0{,}244 \Rightarrow P(1< X \le 6)=0{,}7525$$

ومنه، فإن هناك احتمال 75,25% أن يجيب على أكثر من سؤال واحد (01) وأقل من أو يساوي ستة (06) أسئلة في هذا الامتحان .

7. احتمال أن يأخذ العلامة صفر في هذا الامتحان : يحصل الطالب على علامة 00 إذا لم يجب إجابة صحيحة على جميع الأسئلة، وبناءا عليه فإن الاحتمال يحسب كما يلي ؛

$$P(X=0)=C_{10}^{0}(0{,}25)^{0}(0{,}75)^{10} \mapsto P(X=0)=\frac{10!}{(10-0)!0!}(0{,}25)^{0}(0{,}75)^{10}$$

$$\Rightarrow P(X=0)=0{,}0563$$

وبالإعتماد على جدول التوزيع التراكمي، فإنها تقابل القيمة الأولى عند الاحتمال P=0,25، لأنه ليس قبلها قيمة احتمالية أخرى؛

$$\Rightarrow P(X=0)=0{,}0563$$

بمعنى، أن هناك احتمال 5,63% أن يحصل هذا الطالب على علامة 00 في هذا الامتحان .

8. احتمال أن يجيب أول إجابة صحيحة في السؤال الرابعة : نلاحظ بأن بعدد عدد من المحاولات في الإجابة على أسئلة هذا الإمتحان، لم يتمكن الطالب في الإجابة الصحيحة إلا في المحاولة الرابعة، لهذا فإن توزيع الاحتمال المناسب هو التوزيع الهندسي، ويحسب هذا الاحتمال كما يلي؛

$$X \sim Geam(P) \mapsto P(X=k)=p.q^{(k-1)}$$

بما أن أول محاولة صحيحة كانت عند المحاولة الرابعة، فإن : k=4 ، وبالتالي؛

$$P(X=4)=(0{,}25).(0{,}75)^{(4-1)} \Rightarrow P(X=4)=0{,}1055$$

بمعنى، أن هناك احتمال 10,55% أن تكون أول إجابة صحيحة لهذا الطالب عند السؤال الرابع في هذا الامتحان .

تمرين رقم 07 :

لدينا من معطيات التمرين البيانات التالية :

- عدد مرات تكرار التجربة (n) : إلقاء زهرة نرد 10 مرات، أي أن $n=10$ ؛
- احتمال الأحداث، تختلف باختلاف الحالة المدروسة، والتي تشتمل على أكثر من حدثين في كل منها.

$$P_i=\frac{card(x_i)}{Card(\Omega)}=\frac{n_i}{6}$$

بما أن معطيات التجربة تتعلق بعدة تجارب، وأنها تحتمل أكثر من نتيجتين متنافيتين (ظهور أرقام أوجه مكعب نرد)، كما أن نتيجة كل تجربة مستقلة عن التجربة الأخرى (غير مرتبطة)، أيضا احتمال تحقق الحدث ثابت في كل رمية، فإن التوزيع الاحتمالي الملائم هو التوزيع المتعدد الحدود*، والذي يعطى بالصيغة التالية :

$$P(n_1,n_2,...,n_k)=\left[\frac{n!}{n_1!n_2!...,n_k!}\right].P_1^{n_1}.P_2^{n_2}.....P_k^{n_k}$$

اولا- دراسة التجربة إذا كانت متناظرة : بما أن زهرة النرد متناظرة فهذا يعنى أن احتمال ظهور كل رقم متساوية، ويقدر بـ :

$$n_i=1\Rightarrow P_i=\frac{card(x_i)}{Card(\Omega)}=\frac{1}{6} \quad \backslash\, i=1,2,3,4,5,6.$$

وبناءا عليه، فإنه يتم تحديد إحتمال ظهور الرقم 1 أربع مرات، والرقم 2 مرتين، والرقم 3 مرتين، والرقم 4 و5 مرة واحدة، وعدم ظهور الرقم 6، كما يلي؛

$$\left.\begin{matrix} k(1)=n_1=4 \\ k(2)=n_2=2 \\ k(3)=n_3=2 \\ k(4)=n_4=1 \\ k(5)=n_5=1 \\ k(6)=n_6=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P(n_1,n_2,...,n_6)=\left[\frac{n!}{n_1!n_2!...,n_6!}\right].P_1^{n_1}.P_2^{n_2}.....P_6^{n_6}$$

بالتعويض نحصل على النتيجة الأتية؛

* يمكن الإعتماد على الرابط، كبديل لجدول توزيع ثنائي الحد كمايلي : http://stattrek.com/online-calculator/multinomial.aspx

$$P(4,2,2,1,1)=\left[\frac{10!}{4!\,2!\,2!\,1!\,1!}\right]\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1$$
$$=\left[\frac{10!}{4!\,2!\,2!\,1!\,1!}\right]\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{10}=0,000625$$

هذا يعني بأن هناك إحتمال 0,0625% أن نحصل على الرقم 1 أربع مرات، والرقم 2 مرتين، والرقم 3 مرتين، والرقم 4 و5 مرة واحدة، وعدم ظهور الرقم 6، ، إذا كانت زهرة النرد متزنة .

ثانيا- دراسة التجربة إذا كانت زهرة النرد غير متزنة : بما أن زهرة النرد غير متزنة، فهذا يعنى أن احتمال ظهور رقم يختلف عن ظهور رقم أخر على أساس عدد التكرارات، وبناءا عليه فإن إحتمال كل وجه يحدد كما يلي؛

$$x_1=6\Rightarrow P_1=\frac{card(x_1)}{Card(\Omega)}=\frac{3}{6}$$
$$x_2=3\Rightarrow P_2=\frac{card(x_2)}{Card(\Omega)}=\frac{2}{6}$$
$$x_3=2\Rightarrow P_3=\frac{card(x_3)}{Card(\Omega)}=\frac{1}{6}$$

وبناءا عليه، فإنه يتم تحديد احتمال الحصول على الرقم 6 خمسة مرات، والرقم 3 مرتين، والرقم 2 ثلاثة مرات، كما يلي؛

$$\left.\begin{array}{l}k(6)=n_1=5\\ k(3)=n_2=2\\ k(2)=n_3=3\end{array}\right\}\Rightarrow P(5,2,3)=\left[\frac{10!}{5!\,2!\,3!}\right]\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3$$

ومنه فإن القيمة الاحتمال تقدر بـ :

$$P(5,2,3)=0,041$$

هذا يعني بأن هناك إحتمال 4,1% أن نحصل على الرقم 6 خمسة مرات، والرقم 3 مرتين، والرقم 2 ثلاثة مرات، إذا كانت زهرة النرد غير متزنة وفق تكرار الرقم 6 ثلاثة مرات، والرقم 3 مرتين، والرقم 2 مرة واحدة .

تمرين رقم 08 :

لدينا من معطيات الحالة المدروسة، معدل الحوادث الشهري بـ 4 : $\lambda = 4$ ، وبالتالي فإن الاحتمال مرتبط بوحدة مقارنة زمنية، مما يعنى أن التوزيع الإحتمالي المناسب هو التوزيع البواسوني الذي يعرف كمايلي* :

$$X \sim P(\lambda) \mapsto P(X = k) = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^k}{k!}\right)$$

ووفقا لهذه التجربة، فإن كتابة قانون الاحتمال لتوزيع البواسوني يأخذ الشكل الأتي :

$$P(X = k) = e^{-4}\left(\frac{4^k}{k!}\right)$$

1. حساب احتمال أن يحدث نفس عدد الحوادث في الشهر المقبل : نظرا لأن عدد الحوادث في الشهر الماضي كانت 4 حوادث، فإننا في هذا الحالة ندرس إحتمال تكرار نفس عدد الحوادث في الشهر المقبل، والذي يتم التعبير عنه بالصيغة التالية:

$$P(X = 4) = e^{-4}\left(\frac{4^4}{4!}\right) \Rightarrow P(X = 4) = 0{,}1954$$

2. حساب احتمال عدم حدوث ولا حادث في الشهر القادم : يتم حساب إحتمال عدم وقوع حادث في الشهر القادم عبر الطريق الوطني الرابط بين ولايتي غارداية والأغواط كمايلي؛

$$P(X = 0) = e^{-4}\left(\frac{4^0}{0!}\right) \Rightarrow P(X = 0) = 0{,}0183$$

هناك إحتمال ضعيف جدا يقدر بـ 1,83% أن لا يقع حادث في الشهر المقبل.

3. إحتمال أن تقع 6 حوادث على الأكثر في الشهر : يتم تقدير إحتمال أن تكون هناك 6 حوادث على الأكثر كمايلي؛

$$P(X \le 6) = P(X = 6) + P(X = 5) + P(X = 4) + P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)$$

وبالاعتماد كتابة قانون الاحتمال لتوزيع البواسوني يأخذ الشكل الأتي :

$$P(X \le 6) = \sum_{k=0}^{6}\left[e^{-4}\left(\frac{4^k}{k!}\right)\right] \Rightarrow P(X \le 6) = 0{,}8893$$

نلاحظ بأن هناك إحتمال 88,93% أن يكون عدد الحوادث في الشهر المقبل 6 حوادث على الأكثر.

* يمكن الإعتماد على الرابط، كبديل لجدول التوزيع البواسوني كالأتي : http://stattrek.com/online-calculator/poisson.aspx

4. إحتمال أن يحدث ما بين 4 و6 حوادث في الشهر : يتم حساب قيمة الإحتمال بين عدد 4 حوادث كحد أدنى و6 حوادث كحد أقصى، وفق الصيغة التالية؛

$$P(4 \le X \le 6) = P(X=6) + P(X=5) + P(X=4) \Leftrightarrow P(4 \le X \le 6) = \sum_{k=4}^{6}\left[e^{-4}\left(\frac{4^k}{k!}\right)\right]$$

$$\Rightarrow P(4 \le X \le 6) = 0{,}1954 + 0{,}1563 + 0{,}1042 = 0{,}4559$$

هناك إحتمال 45,59% أن يكون عدد الحوادث ما بين أربعة وستة حوادث الشهر المقبل .

5. تحديد قيم الإحتمال للأحداث الأتية : لدينا من جدول التوزيع البواسوني التراكمي الذي يأخذ الشكل الأتي؛

x \ μ	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,2231	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,5578	0,4060	0,1991	0,0916	0,0404	0,0174	0,0073	0,0030	0,0012	0,0005
2	0,8088	0,6767	0,4232	0,2381	0,1247	0,0620	0,0296	0,0138	0,0062	0,0028
3	0,9344	0,8571	0,6472	0,4335	0,2650	0,1512	0,0818	0,0424	0,0212	0,0103
4	0,9814	0,9473	0,8153	0,6288	0,4405	0,2851	0,1730	0,0996	0,0550	0,0293
5	0,9955	0,9834	0,9161	0,7851	0,6160	0,4457	0,3007	0,1912	0,1157	0,0671
6	0,9991	0,9955	0,9665	0,8893	0,7622	0,6063	0,4497	0,3134	0,2068	0,1301
7	0,9998	0,9989	0,9881	0,9489	0,8666	0,7440	0,5987	0,4530	0,3239	0,2202
8	1,0000	0,9998	0,9962	0,9786	0,9319	0,8472	0,7291	0,5925	0,4557	0,3328
9	1,0000	1,0000	0,9989	0,9919	0,9682	0,9161	0,8305	0,7166	0,5874	0,4579
10	1,0000	1,0000	0,9997	0,9972	0,9863	0,9574	0,9015	0,8159	0,7060	0,5830

- قيم إحتمال $P(2 \le X \le 4)$ ؛

$$P(2 \le X \le 4) = P(X \le 4) - P(X \le 1)$$

لدينا من جدول التوزيع البواسوني التراكمي القيم التالية :

$$\left.\begin{matrix} P(X \le 4) = 0{,}6288 \\ P(X \le 1) = 0{,}0916 \end{matrix}\right\} \mapsto P(1 \le X \le 4) = 0{,}5373$$

- قيم إحتمال $P(X \ge 4)$ ؛

$$P(X \ge 4) = 1 - P(X \le 3)$$

لدينا من جدول التوزيع البواسوني التراكمي القيم :

$$P(X \le 3) = 0{,}4335$$

ومنه فإن :

$$P(X \ge 4) = 1 - 0{,}4335 \Rightarrow P(X \ge 4) = 0{,}5665$$

- قيم إحتمال $P(X = 4)$ ؛

$$P(X=4)=P(X\leq 4)-P(X\leq 3)$$

لدينا من جدول التوزيع البواسوني التراكمي القيم التالية :

$$\left.\begin{array}{l}P(X\leq 4)=0{,}6288\\ P(X\leq 3)=0{,}4335\end{array}\right\}\mapsto P(X=4)=0{,}6288-0{,}4335=0{,}1954$$

- قيم إحتمال $P(1<X\leq 4)$ ؛

$$P(1<X\leq 4)=P(X\leq 4)-P(X\leq 1)$$

لدينا من جدول التوزيع البواسوني التراكمي القيم التالية :

$$\left.\begin{array}{l}P(X\leq 4)=0{,}6288\\ P(X\leq 1)=0{,}0916\end{array}\right\}\mapsto P(1<X\leq 4)=0{,}6288-0{,}0916=0{,}5372$$

- قيم إحتمال $P(1<X<5)$ ؛

$$P(1<X<5)=P(1<X\leq 4)$$

ومنه فإن القيمة الإحتمالية تقدر بـ :

$$\begin{aligned}P(1<X<5)&=P(X\leq 4)-P(X\leq 1)\\&=0{,}5372\end{aligned}$$

تمرين رقم 09 :

لدينا من معطيات المزارع بأن هناك فأرين في كل واحد هكتار، مما يعني بأن : $\lambda=2$ ، وبالتالي فإن الاحتمال مرتبط بوحدة مقارنة مكانية، مما يعنى أن التوزيع الإحتمالي المناسب هو التوزيع البواسوني الذي يعرف كمايلي :

$$X\sim P(\lambda)\mapsto P(X=k)=e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^{k}}{k!}\right)$$

ووفقا لبيانات هذا المزارع، فإن كتابة قانون الاحتمال لتوزيع البواسوني يأخذ الشكل الأتي :

$$P(X=k)=e^{-2}\left(\frac{2^{k}}{k!}\right)$$

1. **حساب احتمال أن يكون هناك فأر واحد فقط في كل واحد هكتار :** يتم التعبير عن إحتمال وجود فأر واحد فقط كمايلي؛

$$P(X=1)=e^{-2}\left(\frac{2^{1}}{1!}\right)\Rightarrow P(X=1)=0{,}2707$$

2. حساب احتمال أن لا يكون هناك فأر في حقل القمح : يقدر إحتمال عدم وجود فأر في الحقل كمايلي؛

$$P(X=0)=e^{-2}\left(\frac{2^{0}}{0!}\right)\Rightarrow P(X=0)=0{,}1353$$

3. حساب احتمال أن يكون هناك فأر واحد على الأقل في كل واحد هكتار : إن إحتمال وجود فأر واحد على الأقل يعبر عنه بالمتراجحة الإحتمالية التالية :

$$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+\ldots+P(X=n)$$

وبالإعتماد على متمم الإحتمال نحصل على النتيجة التالية :

$$P(X\geq 1)=1-P(X\leq 0)$$

لدينا من السؤال السابق قيمة الإحتمال الصفري ($P(X=0)=0{,}1353$)، وبالتالي فإن ؛

$$P(X\geq 1)=[1-P(X\leq 0)]\Leftrightarrow P(X\geq 1)=1-0{,}1353\Rightarrow P(X\geq 1)=0{,}8647$$

4. حساب احتمال أن يكون هناك 5 فأران على الأكثر في كل واحد هكتار : يتم التعبير عن هذا الإحتمال بالصيغة التالية؛

$$P(X\leq 5)=P(X=5)+P(X=4)+P(X=3)+P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)$$

وبالاعتماد على كتابة قانون الاحتمال لتوزيع البواسوني يأخذ الشكل الأتي :

$$P(X\leq 5)=\sum_{k=0}^{5}\left[e^{-4}\left(\frac{4^{k}}{k!}\right)\right]\Rightarrow P(X\leq 5)=0{,}9834$$

5. كتابة قانون الإحتمال : يتم التعبير عن إحتمال عدد الفأران في كل واحد هكتار وفق جدول التوزيع الإحتمالى الأتي؛

x_i	0	1	2	3	4	5	…	k
$P(X=x_i)$	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361	…	$e^{-2}\left(\frac{2^{k}}{k!}\right)$
$F(x_i)$	0,1353	0,406	0,6767	0,8571	0,9473	0,9834	…	1

6. تحديد الخصائص الإحصائية : نعرف أن المميزات الإحصائية لتوزيع بواسوني تتمثل في قيمة متوسط وقوع حدث معين تبعا لوحدة زمنية أو منطقة محددة، وبالتالي فإن التوقع الرياضي و التباين يقدر ب :

$$E(X)=V(X)=\lambda=2$$

أي أن توقع عدد الفأران والتباين في الحقل يعبر عن وجود فأرين في كل واحد هكتار.

تمرين رقم 10 :

لدينا من معطيات مجمع الحليب البيانات التالية :

- حجم الإنتاج اليومي : N=3000؛
- إحتمال وجود كيس متقوب أو تالف في الإنتاج اليومي : P=0,005؛
- حجم الطلبية اليومية من الإنتاج اليومي تقدر بـ : n=100 .

بما أن إحتمال الوحدة التالفة (P) صغير جدا، وأن حجم الطلبية (n) كبير، فإننا نقوم بتقريب توزيع ثاني الحد إلى توزيع بواسوني، وبالتالي نعرفه على النحو الأتي :

$$\lambda = nP \mapsto \lambda = (100)(0,005)$$
$$\Rightarrow \lambda = 0,5$$

وعليه يأخذ التوزيع الإحتمالي الشكل الأتي؛

$$P(X=k)=\begin{cases} e^{-0,5}\left(\dfrac{0,5^{k}}{k!}\right) & \backslash\, k=0,1,2,\dots,\infty \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

1. حساب إحتمال أن تحتوى هذ الطلبية على كيس واحدة فقط تالفة : يتم تقدر إحتمال أن تحتوى الطلبية على كيس واحد فقط تالف كما يلي؛

$$P(X=2)=e^{-0,5}\left(\frac{0,5^{2}}{2!}\right) \Rightarrow P(X=2)=0,0758$$

2. حساب إحتمال أن لا يكون هناك كيس تالفة في الطلبية : يتم حساب إحتمال أن لا تحتوى الطلبية على كيس تالف كما يلي؛

$$P(X=0)=e^{-0,5}\left(\frac{0,5^{0}}{0!}\right) \Rightarrow P(X=0)=0,6065$$

3. دراسة حالات الرفع من طلبية المتجر اليومية : يتم المقارنة بين نتائج إحتمال الوحدات التالفة وفق التوزيعين الإحتماليين : ثنائي الحد و البواسوني كتقريب لثنائي الحد على النحو المبين في الجدول التالي؛

حجم الطلبية (n)	إحتمال الكيس التألف (P)	معدل التألف اليومي (λ)	قيمة الإحتمال وفق توزيع ثنائي الحد $X \sim B_i(n;P)$	قيمة الإحتمال وفق توزيع البواسوني $X \sim P(\lambda)$
100		0,5	0,0757	0,0758
200		1	0,1844	0,1839
300		1,5	0,2517	0,251
400	0,005	2	0,2713	0,2707
500		2,5	0,2569	0,2565
1000		5	0,0839	0,0842
2000		10	0,0022	0,0022

نلاحظ بأن نتائج قيم الإحتمال لتوزيع البواسوني كتقريب لتوزيع ثنائي الحد متساوية، مما يعنى أنه يفضل الإعتماد على توزيع بواسوني عندما تكون حجم العينة (n) كبير جدا، وإحتمال تحقق الوحدات (P) صغير جدا .

تمرين رقم 11 :

لدينا بأنه من المتوقع إصابة أول طائر الحجل في المحاولة الرابعة، مما يعنى بأن التوزيع الاحتمالي المناسب هو التوزيع الهندسي الذي يستخدم لهذا الغرض (تحديد احتمال تحقق الحدث المرغوب فيه لأول مرة)،

$$X \sim Geam(P) \mapsto P(X=k)=P(1-P)^{k-1}$$

ويعطى التوقع الرياضي لهذا التوزيع بالصيغة التالية :

$$E(X)=\frac{1}{P}$$

وبما أن الصياد أستطاع إصابة الهدف في الطلقة الرابعة، فهذا يعنى بأن احتمال إصابته لطائر هو :

$$E(X)=4=\frac{1}{P} \Rightarrow P=\frac{1}{4}=0,25$$

1. حساب احتمال أن يصيب الطائر في الطلقة الثانية : بتعويض في صيغة تعريف التوزيع الهندسي برتبة الطلقة، نحصل على قيمة الاحتمال المقابل لها، والمقدرة بـ :

$$P(X=2)=P(1-P)^{k-1} \mapsto P(X=2)=(0,25)(1-0,25)^{2-1} \Rightarrow P(X=2)=0,1875$$

2. أكتب القانون الاحتمالي : يتم تعريف المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد الطلقات لإصابة الصياد لطائر الحجل في أول مرة، على النحو الأتي :

$$X = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ;....; n\}$$

وبما أن التوزيع يعرف كما يلي :

$$P(X = k) = (0,25)(0,75)^{k-1}$$

فإن قيم الاحتمال المقابلة للمتغير العشوائي تأخذ الشكل الأتي :

$$P(X = 1) = (0,25)(0,75)^{1-1} \Rightarrow P(X = 1) = P = 0,25$$

$$P(X = 2) = (0,25)(0,75)^{2-1} \Rightarrow P(X = 2) = 0,1875$$

$$P(X = 3) = (0,25)(0,75)^{3-1} \Rightarrow P(X = 3) = 0,141$$

$$P(X = 4) = (0,25)(0,75)^{4-1} \Rightarrow P(X = 4) = 0,105$$

. . . .

$$P(X = n) = (0,25)(0,75)^{n-1}$$

وبناءا عليه فإن قانون الاحتمال لهذا الصياد سيأخذ الشكل المبين في الجدول الأتي ؛

x_i	0	1	2	3	4	…	n
$P(X = x_i)$	ليس لها معنى	P=0,25	0,1875	0,141	0,105	…	$(0,25)(1-0,25)^{n-1}$

3. حساب التباين والإنحراف المعياري لطلاقات الصياد على طائر الحجل : تعطى علاقة حساب التباين والإنحراف المعياري لتوزيع الهندسي كمايلي؛

$$V(X) = \frac{1-P}{P^2} \quad et \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{1-P}{P^2}}$$

وبتعويض في العلاقة نحصل على قيمتي التباين و الإنحراف المعياري لطلاقات الصياد على طائر الحجل كما يلي:

$$V(X) = \frac{1-P}{P^2} \mapsto V(X) = \left[\frac{1-0,25}{(0,25)^2}\right] \Rightarrow V(X) = 12$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1-P}{P^2}} \mapsto \sigma(X) = \sqrt{\left[\frac{1-0,25}{(0,25)^2}\right]} \Rightarrow \sigma(X) = 3,464$$

نلاحظ بأن إنحراف إصابة طائر الحجل هو 3,464.

تمرين رقم 12 :

من معطيات التمرين، نلاحظ بأن الأحداث غير مستقلة لأن السحب يتم بدون إرجاع، وبالتالي فإن التوزيع الاحتمالي المناسب هو التوزيع فوق الهندسي، و الذي يعرف بالصيغة التالية *:

$$X \sim H.G(n;N-m) \mapsto P(X=k)=\frac{C_m^k.C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}$$

حيث أن:

عدد مجموع الكرات في الصندوق N=10؛

وعدد الكرات التي نهتم بها في عملية السحب هو : m=6؛

أما عدد الكرات المسحوب بدون إرجاع بطريقة عشوائية : سحب ثلاثة كرات في أن واحدn=3 .

وبناءا عليه فإن القانون الاحتمالي يعرف كما يلي ؛

$$P(X=k)=\frac{C_6^k.C_{10-6}^{3-k}}{C_{10}^3} \Leftrightarrow P(X=k)=\frac{C_6^k.C_4^{3-k}}{120}$$

1. أن تكون أحد الكرات بيضاء : يتم التعبير عنها بالصيغة التالية؛

$$P(X=1)=\frac{C_6^1.C_4^2}{120} \Rightarrow P(X=1)=\frac{36}{120}=0{,}3$$

2. أن تكون كرة بيضاء على الأقل : يتم التعبير عنها بالصيغة الأتية؛

$$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) \Leftrightarrow P(X\geq 1)=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{C_6^k.C_4^{3-k}}{120}\right)$$

$$P(X\geq 1)=\left(\frac{C_6^1.C_4^2}{120}\right)+\left(\frac{C_6^2.C_4^1}{120}\right)+\left(\frac{C_6^3.C_4^0}{120}\right) \Rightarrow P(X\geq 1)=\frac{36+60+20}{120}=0{,}9667$$

وبإستخدام الاحتمال المتمم،نحصل على النتيجة التالية :

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1) \Leftrightarrow P(X\geq 1)=1-P(X=0)$$

$$P(X\geq 1)=1-\left(\frac{4}{120}\right) \Rightarrow P(X\geq 1)=0{,}9667$$

3. أن تكون كرة غير بيضاء : تعنى بأن تكون كرة واحدة فقط غير بيضاء ($\overline{X}$) والباقي الكرتين تحمل لون أبيض، وهذا ما يعبر عنه بالصيغة الأتية؛

$$P(\overline{X}=1)=P(X=2)=\left(\frac{C_6^2.C_4^1}{120}\right) \Rightarrow P(X=2)=\frac{60}{120}=0{,}5$$

4. حساب التوقع الرياضي والإنحراف المعياري : بالإعتماد على العلاقة الإحصائية لحساب التوقع و الإنحراف المعياري وذلك على النحو الأتي؛

* يمكن الإعتماد على الرابط، كبديل لجدول توزيع فوق الهندسي كالأتي http://stattrek.com/online-calculator/hypergeometric.aspx

4-1. التوقع الرياضي : يعطى بالعلاقة التالية ؛

$$E(X)=n\left(\frac{m}{N}\right)\mapsto E(X)=3\left(\frac{6}{10}\right)\Rightarrow E(X)=1{,}8$$

ومنه فإنه من المتوقع أن يتم سحب بطريقة عشوائية كرتين بيضاء من أصل ثلاثة كرات مسحوبة .

4-2. التباين والانحراف المعياري : تعطى بالعلاقة التالية ؛

$$V(X)=n\left(\frac{m}{N}\right)\left(\frac{N-m}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

بالتعويض نحصل على النتيجة التالية :

$$V(X)=3\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{10-6}{10}\right)\left(\frac{10-3}{10-1}\right)\Rightarrow V(X)=\frac{504}{900}=0{,}56$$

ومنه فإن قيمة الإنحراف المعياري تقدر ب :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}\mapsto \sigma(X)=\sqrt{0{,}56}=0{,}748$$

ومنه فإنه من المتوقع أن تتشتت نتيجة التجربة عن قيمة توقعها الرياضي ب 0,748 .

تمرين رقم 13 :

بما أن عملية إختيار الطلبة الثلاثة تتم في أن واحد فهذا يعني بأن الأحداث غير مستقلة، وبالتالي فإن التوزيع الاحتمالي المناسب هو التوزيع فوق الهندسي، والذي يعرف بالصيغة التالية :

$$X \sim H.G(n;N-m)\mapsto P(X=k)=\frac{C_m^k.C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}$$

حيث أن:

عدد الطلاب في الفوج : N=30؛

عدد طلبة عنصر الإهتمام (الطلاب الحاصلين على بكالوريا شعبة علوم) في عملية السحب هو : m=10؛

عدد الطلبة المراد إختيارهم بطريقة عشوائية وفي أن واحد : ثلاثة طلاب n=3 .

وبناءا عليه فإن القانون الاحتمالي يعرف كما يلي ؛

$$P(X=k)=\frac{C_{10}^k.C_{30-10}^{3-k}}{C_{30}^3}\Leftrightarrow P(X=k)=\frac{C_{10}^k.C_{20}^{3-k}}{4060}$$

1. احتمال أن يكون أحد الطلاب حاصل على بكالوريا شعبة علوم: يتم التعبير عنها بالصيغة التالية؛

$$P(X=1)=\frac{C_{10}^1.C_{20}^2}{4060}\Rightarrow P(X=1)=\left(\frac{10\times 190}{4060}\right)=0{,}468$$

2. احتمال أن يكون طالب على الأقل حاصل على بكالوريا شعبة علوم : يتم التعبير عنها بالصيغة الأتية؛

$$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\Leftrightarrow P(X\geq 1)=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{C_{10}^{k}.C_{20}^{3-k}}{4060}\right)$$

$$P(X\geq 1)=\left(\frac{C_{10}^{1}.C_{20}^{2}}{4060}\right)+\left(\frac{C_{10}^{2}.C_{20}^{1}}{4060}\right)+\left(\frac{C_{10}^{3}.C_{20}^{0}}{4060}\right)\Rightarrow P(X\geq 1)=\left(\frac{1900+900+120}{4060}\right)=0,7192$$

- وبإستخدام الاحتمال المتمم، نحصل على النتيجة التالية :

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1)\Leftrightarrow P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\left(\frac{C_{10}^{0}.C_{20}^{3}}{4060}\right)$$

$$P(X\geq 1)=1-\left(\frac{1140}{4060}\right)\Rightarrow P(X\geq 1)=0,7192$$

3. احتمال أن يكون ولا طالب حاصل على بكالوريا شعبة علوم : تعني أن يكون الطلاب الثلاثة المختارين غير حاصلين على بكالوريا شعبة علوم، وهذا ما يتم التعبير عنه بالصيغة الآتية؛

$$P(\overline{X}=3)=P(X=0)=\left(\frac{C_{10}^{0}.C_{20}^{3}}{4060}\right)\Rightarrow P(X=0)=\frac{1140}{4060}=0,2808$$

- وبإستخدام الاحتمال المتمم، نحصل على النتيجة التالية :

$$P(\overline{X}=3)=P(X=0)=1-P(X\geq 1)\Leftrightarrow P(X=0)=1-\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{C_{10}^{k}.C_{20}^{3-k}}{4060}\right)$$

$$P(X=0)=1-\left(\frac{1900+900+120}{4060}\right)\Rightarrow P(X=0)=0,2808$$

4. احتمال أن يكون الطلاب المختارين حاصل على بكالوريا شعبة علوم : تعني أن الطلاب الثلاثة المختارين حاصلين على بكالوريا شعبة علوم، وهذا ما يتم التعبير عنه بالصيغة الآتية؛

$$P(X=3)=\left(\frac{C_{10}^{3}.C_{20}^{0}}{4060}\right)\Rightarrow P(X=3)=\frac{120}{4060}=0,0296$$

5. حساب التوقع الرياضي والإنحراف المعياري لإختيار طلاب حاصل على بكالوريا شعبة علوم:

بالإعتماد على العلاقة الإحصائية لحساب التوقع و الإنحراف المعياري وذلك على النحو الأتي؛

4-1. التوقع الرياضي : يعطى بالعلاقة التالية ؛

$$E(X)=n\left(\frac{m}{N}\right)\mapsto E(X)=3\left(\frac{10}{30}\right)\Rightarrow E(X)=1$$

ومنه فإنه من المتوقع أن يتم إختيار طالب واحد حاصل على بكالوريا شعبة علوم طبيعة و حياة بطريقة عشوائية من أصل 10 طلاب في الفوج .

4-2. التباين والانحراف المعياري : تعطى بالعلاقة التالية ؛

$$V(X)=n\left(\frac{m}{N}\right)\left(\frac{N-m}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

بالتعويض نحصل على النتيجة التالية :

$$V(X)=3\left(\frac{10}{30}\right)\left(\frac{30-10}{30}\right)\left(\frac{30-3}{30-1}\right)\Rightarrow V(X)=\frac{16200}{26100}=0{,}621$$

ومنه فإن قيمة الإنحراف المعياري تقدر بـ :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}\mapsto \sigma(X)=\sqrt{0{,}621}=0{,}7878$$

ومنه فإنه من المتوقع أن تتشتت نتيجة التجربة عن قيمة توقعها الرياضي بـ 0,7878 .

6. احتمال إختيار ثلاثة طلاب بطريقة عشوائية في أن واحد(إختيار بدون إرجاع): لدينا عدد الطلاب في الدفعة : N=800، منهم 60 طالب حاصل على بكالوريا شعبة علوم : m=60، وسيتم إختيار ثلاثة طلاب بطريقة عشوائية : n=3.

بما أن عملية الإختيار تتم في أن واحد، فهذا يعني أن الاحداث غير مستقلة عن بعضها البعض، بحيث أن احتمال إختيار طالب يؤثر على احتمال إختيار الطالب الذي بعده، لهذا فإن التوزيع الاحتمالي المناسب هو التوزيع فوق الهندسي، والذي يعرف بالصيغة التالية :

$$X \sim H.G(3;800-60)\mapsto P(X=k)=\frac{C_{60}^{k}.C_{800-60}^{3-k}}{C_{800}^{3}}$$

ويأخذ قانون الاحتمال الشكل الأتي؛

x_i	**0**	**1**	**2**	**3**	**المجموع**
$P(X=x_i)$	0,7912	0,193	0,0154	0,0004	1

تمرين رقم 14 :

لدينا من التجربة العشوائية المعطيات الآتية ؛

- عدد الكرات في الصندوق : N=12؛
- عدد الكرات اللازمة لتحقيق الهدف من التجربة : r=3، باحتمال يقدر بـ :

A: يمثل حدث الحصول على كرة تقبل القسمة على العدد 4، والتي تأخذ المجموعة التالية ؛

$$A=\{\,4\,;8\,;12\,\}$$

ومنه فإن احتمال سحب كرة تحمل رقم قابل للقسمة على العدد 4، هو :

$$P(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}\mapsto P(A)=\frac{3}{12}=0{,}25$$

1. تحديد التوزيع الاحتمالي لـ X : بما أنه في التجربة نهتم بعدد محاولات السحب من الصندوق للحصول على ثلاثة كرات تحمل رقم يقبل القسمة على العدد 4، فإن التوزيع هو التوزيع الثنائي السالب، والذي يعرف كمايلي*؛

$$X \sim B.N(n;r;P)\mapsto P(X=n)=C_{n-1}^{n-r}P^{r}(1-P)^{n-r}$$

* يمكن الإعتماد على الرابط، كبديل لجدول توزيع الثنائي السالب كالأتي http://stattrek.com/online-calculator/negative-binomial.aspx

ويتم كتابة قانون الاحتمال المناسب لهذه التجربة كما يلي :

$$P(X=n)=C_{n-1}^{n-3}(0{,}25)^3(0{,}75)^{n-3}$$

ويتم تبسيط العبارة : C_{n-1}^{n-3} ، على النحو الأتي؛

$$C_{n-1}^{n-3}=\frac{(n-1)!}{(n-3)!2!}\Leftrightarrow C_{n-1}^{n-3}=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!2!}\Rightarrow C_{n-1}^{n-3}=\frac{n^2-3n+2}{2}$$

وبناءا عليه فإن قانون التوزيع الاحتمالي يأخذ الصيغة التالية :

$$P(X=n)=\left(\frac{n^2-3n+2}{2}\right)(0{,}25)^3(0{,}75)^{n-3}$$

2. احتمال الحصول على ثلاثة كرات تحقق أرقامها القسمة على 4، عند عدد محاولات السحب 03 :

يتم تحديد قيمة الاحتمال عند 03 محاولات بالصيغة التالية :

$$n=3\mapsto P(X=3)=\left(\frac{3^2-3(3)+2}{2}\right)(0{,}25)^3(0{,}75)^{3-3}\Rightarrow P(X=3)=(0{,}25)^3=0{,}0156$$

3. احتمال الحصول على ثلاثة كرات تحقق أرقامها القسمة على 4، عند عدد محاولات السحب 10 :

يتم تحديد قيمة الاحتمال عند 10 محاولات بالصيغة التالية :

$$n=10\mapsto P(X=10)=\left(\frac{10^2-3(10)+2}{2}\right)(0{,}25)^3(0{,}75)^{10-3}\Rightarrow P(X=10)=0{,}0751$$

4. احتمال الحصول على ثلاثة كرات تحقق أرقامها القسمة على 4، عند عدد محاولات السحب 15 :

يتم تحديد قيمة الاحتمال عند 15 محاولة بالصيغة التالية :

$$n=15\mapsto P(X=15)=\left(\frac{15^2-3(15)+2}{2}\right)(0{,}25)^3(0{,}75)^{15-3}\Rightarrow P(X=15)=0{,}045$$

5. احتمال الحصول على ثلاثة كرات تحقق أرقامها القسمة على 4، عند عدد محاولات لا يتجاوز 10 :

يتم تحديد قيمة الاحتمال عند عدد محاولات لا يتعدى 10 محاولات بصيغة المتراجحة الاحتمالية التالية :

$$P(X\le 10)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$$

وبالإعتماد على الصيغة الرياضية للقانون الإحتمالي، نحصل على النتيجة التالية :

$$P(X\le 10)=\sum_{n=3}^{10}\left[\left(\frac{n^2-3n+2}{2}\right)(0{,}25)^3(0{,}75)^{n-3}\right]$$
$$=(0{,}0156+0{,}035+0{,}0527+0{,}0659+0{,}0742+0{,}0779+0{,}0779+0{,}0751)$$
$$\Rightarrow P(X\le 10)=0{,}4744$$

6. احتمال الحصول على ثلاثة كرات تحقق أرقامها القسمة على 4، عند إحدى عشرة محاولة على الأقل: يتم تحديد قيمة الاحتمال عند 11 محاولة على الأقل، أي أكثر من عشرة محاولات بصيغة المتراجحة الاحتمالية التالية :

$$P(X\ge 11)=P(X=11)+P(X=12)+\ldots+P(X=n)$$

وبما أن الحد الأقصى للمحاولات غير معروف، فإننا نعتمد في إيجاد قيمة الإحتمال على المتمم، والذي يكتب كمايلي :

$$P(X \geq 11) = P(X < 11) \Leftrightarrow P(X < 11) = 1 - P(X \leq 10) \Rightarrow P(X \geq 11) = 1 - (0,4744) = 0,5256$$

ومنه فإن إحتمال الحصول على ثلاثة كرات تحقق أرقامها القسمة على 4، عند إحدى عشرة محاولة على الأقل يقدر بـ 52,56% .

7. حساب الخصائص الإحصائية لتجربة : يتم حساب التوقع الرياضي وكذلك التباين والإنحراف المعياري لهذا التوزيع كما يلي؛

- **التوقع الرياضي :** تعطى علاقة حساب التوقع لتوزيع الثنائي السالب كمايلي؛

$$E(X) = \frac{r}{P}$$

وبتعويض في العلاقة نحصل على قيمة التوقع كمايلي :

$$E(X) = \frac{r}{P} \mapsto E(X) = \left[\frac{3}{0,25}\right] = 12$$

من المتوقع أن يتحقق الحصول على ثلاثة كرات أرقامها تقبل القسمة على 4، عند 12 محاولة .

- **التباين والانحراف المعياري :** تعطى علاقة حساب التباين والإنحراف المعياري لتوزيع الثنائي السالب كمايلي؛

$$V(X) = \frac{r(1-P)}{P^2} \quad et \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{r(1-P)}{P^2}}$$

وبتعويض في العلاقة نحصل على قيمتي التباين و الإنحراف المعياري لهذه التجربة كما يلي:

$$V(X) = \frac{r(1-P)}{P^2} \mapsto V(X) = \left[\frac{3(1-0,25)}{(0,25)^2}\right] \Rightarrow V(X) = 36$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{r(1-P)}{P^2}} \mapsto \sigma(X) = \sqrt{\left[\frac{3(1-0,25)}{(0,25)^2}\right]} \Rightarrow \sigma(X) = 6$$

نلاحظ بأن إنحراف تحقق قيمة التوقع بأن يتحقق الحصول على كرات أرقامها تقبل القسمة على العدد 4، يكون في مدى 6 محاولات، بمعنى ممكن أن يرتفع عدد المحاولات إلى 18 محاولة كما يمكن أن ينخفض إلى 6 محاولات متوقعة فقط .

الفصل الرابع : التوزيعات الإحتمالية للمتغير العشوائي المتصل

أهداف الفصل؛

بعد إتمام الطالب(ة) لهذا الفصل سيكون باستطاعته أن :

- التعرف على مختلف التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل؛
- التحكم في المتغير العشوائي التابع للتوزيع الطبيعي، وكيفية تحويل المتغير إلى متغير معياري؛
- كيفية تقريب التوزيع الطبيعي ببعض قوانين الاحتمال لمتغير عشوائي منقطع.

المحاور المستهدفة؛

بغرض تحقيق أهداف هذا الفصل، فإننا سوف نتطرق إلى المحاور الأساسية المتمثلة فيمايلي:

- التوزيع الطبيعي العام؛
- التوزيع الطبيعي المعياري (القياسي)؛
- تقريبات التوزيعات المنفصلة بالتوزيع الطبيعي (ثنائي الحد، البواسوني وفوق الهندسي)
- توزيع ستودنت
- توزيع كاي مربع
- توزيع فيشر
- التوزيع المنتظم loi uniform
- توزيع غاما
- التوزيع الأسي
- توزيع بيتا
- توزيع وايبول & رايلي $(\alpha = \beta = 2)$
- سلسلة تمارين مع حلول نموذجية.

المدى الزمني للفصل ؛

سيتم تغطية محتوى هذا الفصل وفق المتطلب الزمني الأتي :

- حصة محاضرة : أربع ساعات ونصف (ثلاثة محاضرات)؛
- حصة أعمال موجهة : أربع ساعات ونصف (ثلاثة حصص).

الفصل الرابع

التوزيعات الإحتمالية للمتغير العشوائي المتصل

إستكمالا للتوزيعات الاحتمالية التي يتم بواسطتها التعرف على احتمالية تحقق حدث معين وفق متطلبات أساسية على أساسية يتم الاعتماد على القانون المناسب، حيث نجد التوزيع المنتظ للمتغير المستمر، التوزيع الطبيعي والطبيعي المعياري، تويع فيشر، سيودنت وكذلك التوزيع كاي مربع اللامعلمي، إلى جانب التوزيعات التعتمد على زمن تحقق الحدث المراد دراسته أو ميعرف بتوزيعات المعاملات الاحتمالية كتوزيع بيتا وغاما وريتلي .

وفي هذا الفصل الأخير سيتم التطرق بالتفصيل إلى هذه التوزيعات التي تناسب المتغير العشوائي المستمر، كما بينا ذلك في الفصلين الأول والثاني.

1. التوزيع المنتظم loi uniform

- **دالة كثافة الإحتمال** : تعطى دالة كثافة الإحتمال لتوزيع المنتظم بالصيغة التالية :

$$f(X)=\frac{1}{b-a} \qquad a \le x \le b$$

- **دالة التوزيع التراكمي**: تعطى هذه الدالة بالصيغة التالية :

$$F(X)=P(X \le x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \Rightarrow x \in [a - b] \\ 1 & x>b \end{cases}$$

الخصائص الإحصائية للتوزيع

- **التوقع الرياضي** : بتطبيق علاقة التوقع الرياضي نحصل على النتيجة التالية؛

$$E(X)=\frac{b+a}{2}$$

- **التباين والانحراف المعياري**:

$$V(X)=\frac{(b+a)^2}{12} \quad et \quad \sigma(X)=\sqrt{\frac{(b+a)^2}{12}}$$

2. التوزيع الطبيعي : يعتبر من أهم التوزيعات الاحصائية المتصلة،كونه يعتبر التوزيع الملائم لكثير الظواهر الطبيعة، مثل الأطوال، الأوزان، الدخل، إلى غير ذلك، بحيث تأخذ الصيغة العامة لكثافة الاحتمال الشكل الأتي :

$$f(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty \le X \le +\infty$$

$$X \sim N(\mu;\sigma)$$
$$P(X \le x)=P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

يمكن الإعتماد على القيمة الإحتمالية في تحديد عدد العناصر، وفق لمعياري معين (أقل من $(X \le x)$ ، أكبرمن $(X \ge x)$أو يعادل $(X = x)$)، وذلك وفق الصيغة التي تشير إلى تحديد عدد الأفراد الأقل من أو يساوي k، كمايلي؛

$$N_{(X\le k)}=N.P(X \le k)\Rightarrow N_{(X\le k)}=N.\varphi(k)$$

3. التوزيع الطبيعي المعياري

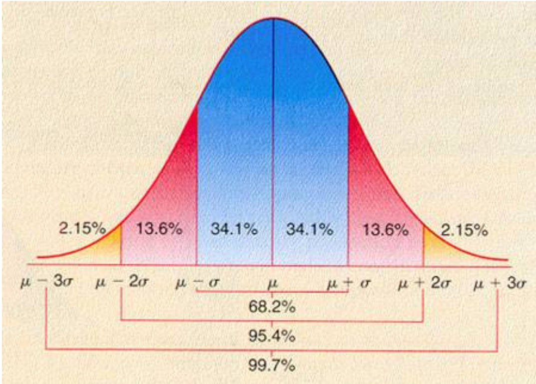
نعرف المتغير العشوائي (X) الذي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري بوسط حسابي معدوم وإنحراف معياري يساوي الواحد الصحيح، أي أن* ؛

$$X \sim N(0;1)$$

- $P(Z < x)=\varphi(x)$
- $P(Z > x)=1-P(Z \le x)$ $\quad =1-\varphi(x)$
- $P(Z \ge 0)=P(Z \le 0)=\varphi(0)=0{,}5$
- $P(Z > -\infty)=P(Z < +\infty)=\varphi(\pm\infty)=1$
- $P(Z \ge 0)=P(Z \le 0)=\varphi(0)=0{,}5$
- $P(a < Z < b)=\varphi(b)-\varphi(a)$
- $P(-a < Z)=\varphi(a)$
- $P(Z \le -b)=\varphi(-b)=1-\varphi(b)$
- $P(-a < Z < -b)=\varphi(a)-\varphi(b)$
- $P(-a < Z < 0)=\varphi(a)-0{,}5 \quad et \quad P(0 < Z < b)=\varphi(b)-0{,}5$
- $P(-a < Z < b)=\varphi(b)+\varphi(a)-1$

تحديد المدى الزمني الذي يكمل فيه 95% من الطلاب إمتحانهم :يتم تحديد هذا المدى بالإعتماد على شكل الأتي؛

* يمكن الإعتماد على الرابط، كبديل لجدول التوزيع الطبيعي كمايلي : http://stattrek.com/online-calculator/normal.aspx



نلاحظ بأن المدى الذي يقع ضمنه تقريبا 95% من الطلاب يكون بتغير ضعف الإنحراف المعياري عن الوسط الحسابي $(\mu \pm 2\sigma)$، والذي يتم تحديده على كما يلي؛

$$[\ \mu-2\sigma\ ;\ \mu+2\sigma\ ] \Rightarrow \begin{cases} \mu+2\sigma=60+2(10)=80 \\ \\ \mu-2\sigma=60-2(10)=40 \end{cases}$$

ومنه فإن؛

$$95\% \in [\ \mu-2\sigma\ ;\ \mu+2\sigma\ ]=[\,40\ ;\ 80\,]$$

هناك 95% من الطلاب المعنيين بالامتحان يقع المدى الزمني الذي يكمل فيه ما بين 40 دقيقة و80 دقيقة .

4. تقريبات التوزيعات المنفصلة بالتوزيع الطبيعي (ثنائي الحد & البواسوني والتوزيع فوق الهندسي)

1- تقريب التوزيع الثنائي بواسطة التوزيع الطبيعي

يعتمد تقريب التوزيع الطبيعي المعياري للتوزيع الثنائي على قانون لابلاس ونظرية الحدود، بالإعتماد على القيمة المتوقعة والتباين عندما تؤول n إلى ما لانهاية $(n \mapsto \infty)$، وذلك وفق الكتابة التالية؛

$$B_i(n;P) \sim N\left(\mu=nP\ ;\ \sigma=\sqrt{npq}\right)$$

وبناءا عليه فإن توزيع المتغير العشوائي المعياري يأخذ الصيغة التالية :

$$\left.\begin{array}{l} n \geq 30 \\ n.P > 15 \\ npq > 5 \end{array}\right\} \Rightarrow Z=\frac{x-(n.P)}{\sqrt{npq}}$$

ومنه فإن الوسط الحسابي و الإنحراف المعياري لهذه الدراسة تحسب كمايلي؛

$$P(X \leq x)=P\left(Z \leq \frac{x-(n.P)}{\sqrt{npq}}\right)$$

وبما أن قيم المتغير العشوائي التي تتبع التوزيع الثنائي منقطع وأن التوزيع الطبيعي يتبعه المتغير العشوائي المستمر، لهذا يجب القيام بإستعمال معامل التصحيح للإستمرارية وذلك بإضافة نصف (0,5) إلى طرف الأيمن $(x+0,5)$ وطرح نصف من الطرف الأيسر $(x-0,5)$ لقيم المتغير العشوائي (x)، بالإعتماد على الصيغة التالية؛

$$P(X \le x) = f_B(X \le x+0,5)$$
$$= F_B(x;n,P) \cong \phi\left(\frac{x+0,5-(n.P)}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P(X < x) = P(X \le x-1)$$
$$= f_B(X \le x-1+0,5) = f_B(X \le x-0,5)$$
$$= F_B(x;n,P) \cong \phi\left(\frac{x-0,5-(n.P)}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P(X = x) = P(X \le x) - P(X < x)$$
$$= F_B(x;n,P) \cong \phi\left(\frac{x+0,5-(n.P)}{\sqrt{npq}}\right) - \phi\left(\frac{x-0,5-(n.P)}{\sqrt{npq}}\right)$$

2- تقريب التوزيع البواسوني بواسطة التوزيع الطبيعي

يتم إشتقاق توزيع بواسون من $\lambda = nP$ مع التوزيع الثنائي، والذي يتم تقريبه بواسطة التوزيع الطبيعي مرة أخرى بواسطة التوزيع البواسوني بالإعتماد على التوزيع$P(\lambda)$ عندما يتحقق وأن يتجاوز الحد الأقصى 15 $(nP \le 15)$، وفي حال تم ذلك فإنه يتم اللجوء إلى تقريب التوزيع البواسوني بالتوزيع الطبيعي المعياري، بوضع $(\mu = \lambda)$ و $(\sigma = \sqrt{\lambda})$ كما سوف نوضحه في الفصل المقبل .

$$\lambda > 15 \Rightarrow P(X \le x) = F_{Poission}(x;\lambda)$$
$$= \phi\left(\frac{x+0,5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

وأيضا في الحالتين الآتيتين؛

$$P(X < x) = F_{Poission}(x;\lambda) \cong \phi\left(\frac{x-0,5-(n.P)}{\sqrt{npq}}\right)$$
$$P(X = x) = F_{Poission}(x;\lambda) \cong \phi\left(\frac{x+0,5-(n.P)}{\sqrt{npq}}\right) - \phi\left(\frac{x-0,5-(n.P)}{\sqrt{npq}}\right)$$

3- تقريب التوزيع التوزيع فوق الهندسي بواسطة التوزيع الطبيعي

يتم تقريب توزيع فوق الهندسي لمتغير عشوائي منقطع، عندما يتعلق السحب أو إختيار مفردات العينة بدون إرجاع، بالتوزيع الطبيعي للمتغيرات المستمرة، وذلك وفق الصيغة الأتية ؛

$$H.G(n;N-m)\sim N\left(\mu=n\left(\frac{m}{N}\right)\ ;\ \sigma=\sqrt{n\left(\frac{m}{N}\right)\left(1-\frac{m}{N}\right)}\right)$$

وبناءا عليه فإن توزيع المتغير العشوائي المعياري يأخذ الصيغة التالية :

$$\left.\begin{array}{c}\left(\frac{n}{N}\right)\le 0{,}1\ or\ \left(\frac{n}{m}\right)\le 0{,}05\\ \wedge\\ n.\left(\frac{m}{N}\right)\ge 5\ or\ n.\left(1-\frac{m}{N}\right)\ge 5\end{array}\right\}\Rightarrow Z=\frac{x-n.\left(\frac{m}{N}\right)}{\sqrt{n\left(\frac{m}{N}\right)\left(1-\frac{m}{N}\right)}}$$

ومنه فإن الوسط الحسابي و الإنحراف المعياري لهذه الدراسة تحسب كمايلي؛

$$P(X\le x)=P\left(Z\le\frac{x-n.\left(\frac{m}{N}\right)}{\sqrt{n\left(\frac{m}{N}\right)\left(1-\frac{m}{N}\right)}}\right)$$

وبما أن قيم المتغير العشوائي التي تتبع التوزيع فوق الهندسي منقطع وأن التوزيع الطبيعي يتبعه متغير عشوائي مستمر، لهذا يجب القيام بإستعمال معامل التصحيح للإستمرارية، وفق نفس الطريقة لتقريب توزيعات المنقطعة بالتوزيع الطبيعي.

$$P(X\le x)=\phi\left(\frac{x+0{,}5-n.\left(\frac{m}{N}\right)}{\sqrt{n\left(\frac{m}{N}\right)\left(1-\frac{m}{N}\right)}}\right)\qquad P(X<x)=\phi\left(\frac{x-0{,}5-n.\left(\frac{m}{N}\right)}{\sqrt{n\left(\frac{m}{N}\right)\left(1-\frac{m}{N}\right)}}\right)$$

$$P(X=x)=\phi\left(\frac{x+0{,}5-n.\left(\frac{m}{N}\right)}{\sqrt{n\left(\frac{m}{N}\right)\left(1-\frac{m}{N}\right)}}\right)-\phi\left(\frac{x+0{,}5-n.\left(\frac{m}{N}\right)}{\sqrt{n\left(\frac{m}{N}\right)\left(1-\frac{m}{N}\right)}}\right)$$

5. التوزيع الأسي

يتم التعبير عن دالة كثافة الإحتمال المعبرة عن الزمن وفق الصيغة التالية :

$$f(x)=\lambda.e^{-\lambda.x}\quad ;\quad 0<X<\infty$$

كما يتم التعبير عن الدالة التراكمية بالصورة التالية :

$$F(x)=P(X\le x)=\left[1-e^{-\lambda.x}\right]$$

- **التوقع الرياضي :** بتطبيق علاقة التوقع الراضي نحصل على النتيجة التالية؛

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

- **التباين والانحراف المعياري:**

$$V(x)=\frac{1}{\lambda^2} \quad et \quad \sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}$$

6. توزيع ستودنت

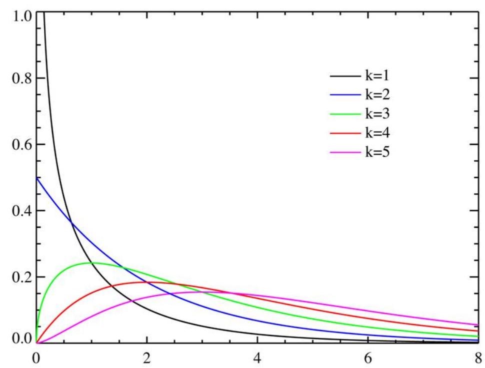
نعرف المتغير العشوائي (X) الذي يتبع توزيع ستودنت (t) بدرجات حرية (v)، حيث تأخذ قيم احتمال مختلفة حسب درجة الحرية، كما هو مبين في الجدول الأتي*؛

$$t_{(\alpha;v)}=-t_{(1-\alpha;v)}$$
$$P\left(T\geq t_{(v)}\right)=P\left(T\leq -t_{(v)}\right)=\alpha$$
$$P\left(T\leq t_{(v)}\right)=P\left(T\geq -t_{(v)}\right)=1-\alpha$$
$$P\left(t_{(\alpha;v)}\leq T\leq t_{(\alpha';v)}\right)=F_{t_{(\alpha;v)}}-F_{t_{(\alpha';v)}}$$
$$t_{(\alpha;v)}=t_{(v)}\Rightarrow\begin{cases}P\left(T\leq -t_{(v)}\right)=P\left(T\geq t_{(v)}\right)=\alpha\\ P\left(T\leq t_{(v)}\right)=P\left(T\geq -t_{(v)}\right)=1-\alpha\end{cases}$$

7. توزيع كاي مربع

نعرف المتغير العشوائي (X) الذي يتبع توزيع كاي مربع (χ^2) بدرجات حرية (v)، حيث تأخذ قيم احتمال مختلفة حسب درجة الحرية، كما هو مبين في الجدول الأتي*؛

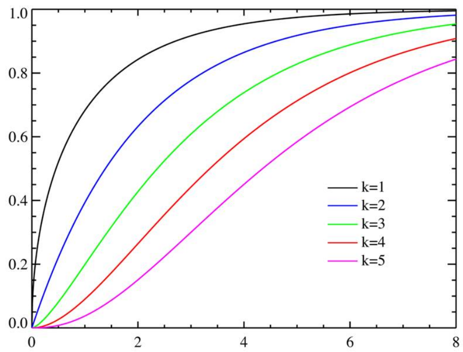
$$P\left(\chi^2\geq\chi^2_{(v;\alpha)}\right)=F_{\chi^2}\left(\chi^2_{(v;\alpha)}\right)=\alpha$$
$$P\left(\chi^2<\chi^2_{(v;\alpha)}\right)=1-F_{\chi^2}\left(\chi^2_{(v;\alpha)}\right)=1-\alpha$$
$$P\left(a<\chi^2<b\right)=F_{\chi^2}(a)-F_{\chi^2}(b)=\alpha$$



* يمكن الإعتماد على الرابط، كبديل لجدول توزيع ستودنت كمايلي : http://stattrek.com/online-calculator/t-distribution.aspx

* يمكن الإعتماد على الرابط، كبديل لجدول توزيع كاي مربع كمايلي : http://stattrek.com/online-calculator/chi-square.aspx

الشكل رقم (02) : دالة الكثافة الإحتمالية لتوزيع كاي مربع



الشكل رقم (02) : دالة التوزيع التراكمي لتوزيع كاي مربع

8. توزيع فيشر

نعرف المتغير العشوائي (X) الذي يتبع توزيع (F) بدرجات حرية درجات حرية $(v_1;v_2)$، حيث تأخذ قيم احتمال مختلفة حسب درجتي الحرية*.

$$F_{(1-\alpha\,;v_2;v_1)} = \phi_{F_{(v_1;v_2)}} = 1-\alpha$$

$$F_{(\alpha\,;v_1;v_2)} = \frac{1}{F_{(1-\alpha\,;v_2;v_1)}}$$

$$P\left(T \geq F_{(v_1;v_2)}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(F \leq F_{(v_1;v_2)}\right) = \alpha$$

$$P\left(F_{(\alpha\,;v_1;v_2)} \leq F \leq F_{(\alpha\,;v'_1;v'_2)}\right) = \phi_{F_{(\alpha\,;v'_1;v'_2)}} - \phi_{F_{(\alpha\,;v_1;v_2)}}$$

- **العلاقة بين التوزيعات وتوزيع فيشر :** فيما يلي بيان العلاقة الثنائية بين توزيع فيشر وبعض التوزيعات الأخرى كمايلي؛

- العلاقة بين قيم توزيع F ومربع توزيع t عديم الإتجاه، عند درجة حرية البسط $(v_1=1)$ وبدرجات حرية المقام مختلفة عند مستوى معنوية (α) .

مما سبق نستنتج بأن العلاقة بين توزيع F وتوزيع ستودنت t تأخذ الصيغة الأتية :

$$\boxed{F_{(1-\alpha\,;1;v_2)} = \left[t_{\left(1-\frac{\alpha}{2};v\right)}\right]^2}$$

* يمكن الإعتماد على الرابط، كبديل لجدول توزيع كاي مربع كمايلي : http://stattrek.com/online-calculator/f-distribution.aspx

- العلاقة بين قيم توزيع F و نسبة توزيع χ^2 إلى درجة الحرية $\left(\frac{\chi^2}{v}\right)$، وذلك عند درجة حرية المقام لانهائي $(v_2=\infty)$ وبدرجات حرية البسط مختلفة عند مستوى معنوية (α) .

مما سبق نستنتج بأن العلاقة بين توزيع F وتوزيع χ^2 تأخذ الصيغة الأتية :

$$\boxed{F_{(1-\alpha\,;v_1\,;\infty)}=\frac{\chi^2_{(1-\alpha\,;v)}}{v}}$$

- العلاقة بين قيم توزيع F و مربع التوزيع الطبيعي غير المتجه $(Z_{\frac{\alpha}{2}})$ عند درجة حرية البسط $(v_1=1)$ ودرجة حرية المقام لانهائية $(v_2=\infty)$ عند مختلف مستويات المعنوية .

مما سبق نستنتج بأن العلاقة بين توزيع F والتوزيع الطبيعي Z، تأخذ الصيغة الأتية :

$$\boxed{F_{(1-\alpha\,;1\,;\infty)}=Z^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}$$

9. توزيع غاما : يعد التوزيع المناسب للتوزيعات التي تعتمد على عنصر الزمن ، خاصة عند تقدير دالة المعولية (الثبات) أو دالة البقاء، مثل المدة الزمنية المستغرقة لفحص مريض أو عطب في ألة، أو كالفترة الزمنية لبقاء إنسان على قيد الحياة بعض الاصابة بمرض خطير، أو كالفترة الزمنية بين وصول حافلتين متتاليتين لأحد المحطات، لهذا يشترط أن تكون القيم التي يأخدها المتغير العشوائي موجبة.

وبناءا عليه فإنه يعرف المتغير العشوائي المتصل (X) وفق لتوزيع قاما بدالة التوزيع الإحتمالي لتوزيع قاما بالإعتماد على الشكل العام الذي يأخذ الصورة التالية؛

$$f(x)=\frac{1}{(\beta^{\alpha})(\Gamma\alpha)}X^{(\alpha-1)}e^{\left(-\frac{X}{\beta}\right)}\qquad ;X\geq 0$$

ويعبر إختصار عن توزيع بيتا بالصيغة الأتية :

$$X\sim G(\alpha\,;\,\beta)$$

حيث أن؛

$(\alpha\,;\beta)$: تعبران عن معلمات توزيع قاما (دائما موجبين)

$\Gamma\alpha$: تمثل دالة قاما .

ملاحظة01 : عندما تكون قيمة المعلمة $(\alpha=1)$ فإن توزيع قاما يتحول إلى التوزيع الأسي، والتي تعتبر حالة خاصة من توزيع قاما،

$$\alpha = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{(\beta^1)(\Gamma 1)} X^{(1-1)} e^{\left(-\frac{X}{\beta}\right)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\beta} e^{\left(-\frac{X}{\beta}\right)}$$

ملاحظة02 : عندما تكون قيمة المعلمتين $\left(\alpha = \frac{n}{2} \& \beta = 2\right)$ فإن توزيع قاما يتحول إلى توزيع كاي مربع بدرجة حرية (n)، والتي تعتبر حالة خاصة من توزيع قاما، والمعرفة بالمعادلة الأتية؛

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \frac{n}{2} \\ \beta = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\left(2^{\frac{n}{2}}\right)\left(\Gamma_{\frac{n}{2}}\right)} X^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} e^{\left(-\frac{X}{2}\right)}$$

- قيم دالة غاما : أهم قيم دالة قاما نوجزها فيمايلي ؛

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = \sqrt{3{,}143}$$

$$(\Gamma 2) = 1$$

$$(\Gamma 3) = (3-1)! = 2$$

$$(\Gamma \mathrm{n}) = (n-1)! = (n-1)(n-1) \times \ldots \times (3) \times (2)$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad ;\forall n \neq 0$$

$$\Gamma(n) = \infty \ \Rightarrow \ n \leq 0$$

$$\Gamma(-n) = \frac{\Gamma(1-n)}{(-n)}$$

$$\Gamma(P)\Gamma(1-P) = \frac{\pi}{\sin(P.\pi)} \quad ;0 < P < 1$$

$$\begin{aligned} b)\ \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{15}{8}\right)\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$c)\ \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$=-2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=-2\sqrt{\pi}$$

لدينا الجزء الثاني من قيم دالة قاما، على النحو الأتي؛

$$a')\ \frac{\Gamma 5}{\Gamma 3}=\frac{(5-1)!}{(3-1)!}$$
$$=\frac{4!}{2!}=12$$
$$b')\ \frac{\Gamma\left(8/3\right)}{\Gamma\left(2/3\right)}=\frac{5/3\,\Gamma\left(5/3\right)}{\Gamma\left(2/3\right)}$$
$$=\frac{\left(5/3\right)\left(2/3\right)\Gamma\left(2/3\right)}{\Gamma\left(2/3\right)}$$
$$=\left(5/3\right)\left(2/3\right)=\frac{10}{9}$$
$$c')\ \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)}=\pi.\sqrt{2}$$

يتم حساب القيم بالاعتماد على العلاقة دالة قاما التي تأخذ الصورة الآتية؛

$$\int_0^{\infty} x^{(\alpha-1)}.e^{-x}dx=\Gamma\alpha$$

وتسهيلا لعملية الحساب، سنضع :

$$\boxed{x^k.e^{-x}\Rightarrow\alpha=k+1}$$

ومنه فإن قيم دالة بيتا للحالات المدروسة تكون كمايلي؛

$$a'')\ \int_0^{\infty} x^5.e^{-x}dx=\Gamma(5+1)$$
$$=\Gamma(6)$$
$$=5!=120$$

$$b'')\ \int_0^{\infty} x^{5/2}.e^{-x}dx = \Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)$$
$$= \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{15}{8}\right)\sqrt{\pi}$$

$$c'')\ \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^{1/2}}dx = \int_0^{\infty} x^{(-1/2)}e^{-x}dx$$
$$= \Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)$$
$$= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

2. قيم الدالة بيتا بدلالة الدالة قاما : يتم حساب القيم بالاعتماد على الصيغة المشتركة لدالة بيتا مع دالة قاما و التي تأخذ الصورة الآتية؛

$$B(\alpha\ ;\ \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

ومنه فإن قيم دالة بيتا للحالات المدروسة تكون كما يلي؛

$$a)\ B(4;5) = \frac{\Gamma(4)\Gamma(5)}{\Gamma(4+5)} = \frac{3!\times 4!}{8!} = \frac{144}{40320} \Rightarrow B(4;7) = 0{,}003571$$

$$b)\ B(5;4) = \frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(5+4)}$$
$$= \frac{4!\times 3!}{8!}$$
$$= \frac{144}{40320} = 0{,}003571 \Rightarrow B(5;4) = B(4;5)$$

وبناءا عليه، نستنتج بأن؛

$$\boxed{B(\alpha\,;\beta) = B(\beta\,;\alpha)}$$

$$c)\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\ ;\ 2\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+2\right)} = \frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).(2-1)!}{\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\left(\frac{15}{8}\right)\sqrt{\pi}} = \left(\frac{3}{2}\right).\left(\frac{8}{15}\right) = \frac{4}{5}$$

$$d)\ \Gamma(3\ ;\ n) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(n)}{\Gamma(3+n)} = \frac{(3-1)!(n-1)!}{(3+n-1)!} = \frac{2.(n-1)!}{(2+n)(1+n)(n)(n-1)!} = \frac{2}{(2+n)(1+n)(n)} = \frac{2}{n^3+3n^2+2n}$$

3. قيم دالة بيتا : يتم حساب القيم بالاعتماد على العلاقة دالة بيتا التي تأخذ الصورة الآتية؛

$$B(\alpha\ ;\ \beta)=\int_0^1 x^{(\alpha-1)}.(1-x)^{(\beta-1)}dx$$

وتسهيلا لعملية التقدير، فإننا نعتبر :

$$\int_0^1 x^{(\alpha-1)}.(1-x)^{(\beta-1)}dx \mapsto \begin{cases} x^k \Rightarrow \alpha = k+1 \\ (1-x)^m \Rightarrow \beta = m+1 \end{cases}$$

ومنه فإن قيم دالة بيتا للحالات المدروسة تكون كمايلي؛

$$a)\ \int_0^1 x^3.(1-x)dx = B((3+1)\ ;\ (1+1))$$

$$= B(4\ ;\ 2) = \frac{\Gamma(4)\Gamma(2)}{\Gamma(4+2)}$$

$$b)\ \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{x^{1/2}}\right]dx = B\left(\left(-\frac{1}{2}+1\right)\ ;\ (2+1)\right)$$

$$= B\left(\frac{1}{2}\ ;\ 3\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+3\right)}$$

دالة كثافة إحتمالية : نقول عن دالة أنها دالة كثافة إحتمالية إذا تحقق الشرطين الأتيين :

$$f(x)\geq 0 \qquad \& \qquad F(x)=1 \Rightarrow \int_0^{\infty} f(x)dx = 1$$

إيجاد دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع : يتم التعبير عن دالة التوزيع التراكمي لتوزيع قاما بالشكل الأتي؛

$$F(X)=P(X\leq x)\Rightarrow F(X)=\int_0^x f(x)dx$$

$$=\frac{1}{(\beta^{\alpha})(\Gamma\alpha)}\int_0^x X^{(\alpha-1)}e^{\left(-\frac{X}{\beta}\right)}dx$$

- **التوقع الرياضي :** بتطبيق علاقة التوقع الراضي نحصل على النتيجة التالية؛

$$\mathrm{E(X)} = \alpha.\beta$$

- **التباين والانحراف المعياري:**

$$\mathrm{V(X)} = \alpha(\beta)^2 \ \ et\ \ \sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\alpha(\beta)^2}$$

10. توزيع بيتا : يعتبر من أهم التوزيعات الاحصائية المسخدمة في دراسة سلوك بعض المتغيرات العشوائية، كدراسة نسبة الأمطار أو الرطوبة أو دراسة دراسة الاعتماد على ألة أو جهاز معين، فإذا تم تعريف المتغير العشوائي المتصل (X) فإن التوزيع وفق توزيع بيتا شكل دالة التوزيع الإحتمالي على النحو الأتي :

$$f(x)=\frac{\overline{)\alpha+\beta}}{(\Gamma\alpha)(\Gamma\beta)}x^{(\alpha-1)}(1-x)^{(\beta-1)};\quad 0\le x\le 1$$

ويعبر إختصار عن توزيع بيتا بالصيغة الأتية :

$$X\sim B(\alpha\ ;\ \beta)$$

دالة كثافة إحتمالية : نقول عن دالة أنها دالة كثافة إحتمالية إذا تحقق الشرطين الأتيين :

$$f(x)\ge 0\qquad \&\qquad F(x)=1\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=1$$

إيجاد دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع : يتم التعبير عن دالة التوزيع التراكمي لتوزيع بيتا بالشكل الأتي؛

$$F(X)=P(X\le x)\Rightarrow F(X)=\int_0^x f(x)dx$$

$$=\frac{\overline{)\alpha+\beta}}{\Gamma\alpha.\Gamma\beta}\int_0^x\left[X^{(\alpha-1)}(1-X)^{(\beta-1)}\right]dx$$

- **التوقع الرياضي :** بتطبيق علاقة التوقع الراضي نحصل على النتيجة التالية؛

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

- **التباين والانحراف المعياري:**

$$\mathrm{V}(\mathrm{X})=\frac{\alpha.\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}\quad et\quad \sigma(\mathrm{X})=\sqrt{\frac{\alpha.\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}}$$

11. توزيع وايبول & رايلي ($\beta=2$) : تأخذ دالة التوزيع الإحتمالي لتوزيع وايبول الصيغة الدالة المبينة على النحو الأتي؛

$$f(x)=\frac{\beta.x^{(\beta-1)}}{\theta^\beta}e^{\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta\right]};\quad 0\le x\le\infty\ et\ \beta>0$$

وفي حالة معلمتين (معلمة القياس θ و **معلمة الإزاحة** α) تأخذ دالة التوزيع الكثافة الإحتمالية الصورة الأتية؛

$$f(x)=\frac{\beta.(x-\alpha)^{(\beta-1)}}{\theta^\beta}e^{-\left(\frac{x-\alpha}{\theta}\right)^\beta}\ ;\quad 0\le x\le\infty\ et\ \alpha,\beta>0$$

دالة التوزيع التراكمية لتوزيع ويبل الصورة التالية؛

$$F(x)=P(X\leq x)\Rightarrow F(x)=\int_{0}^{x}f(x)dx=1-e^{-\left(\frac{x-\alpha}{\theta}\right)^{\beta}}$$

- **التوقع الرياضي :** بتطبيق علاقة التوقع الراضي نحصل على النتيجة التالية؛

$$E(X)=\theta\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)$$

- **التباين والانحراف المعياري:**

$$V(X)=\theta^{2}\left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^{2}\right]\quad et\quad \sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

توزيع ريلي : يعد توزيع ريلي حالة خاصة من توزيع ويبل عندما تكون معلمة الشكل $(\beta=2)$، والذي تم اقتراحه من طرف العالم الإنجليزي **Lord Rayleigh**، ويستخدم في التحليلات المفردة وفي تحليلات الخطأ لمختلف الأنظمة، كما يعد نموذج جيد لتعبير عن الفشل في الحياة، كما يستخدم في دراسة ظاهرة سرعة الرياح وارتفاع الأمواج البحرية في المحيطات ومعرفة قوة الإشارات اللاسلكية في ساعات الذروة للاتصالات، وتأخذ الدالة الاحتمالية لتوزيع ذو المعلمة الواحدة (معلمة القياس) الصيغة التالية :

$$f(x)=\frac{2x}{\theta}e^{\left(-\frac{x^{2}}{\theta}\right)};\quad 0\leq x\leq\infty$$

حيث أن (θ) تمثل معلمة القياس .

بالنسبة لدالة التوزيع التراكمي (التجميعية)، تأخذ الصيغة الآتية؛

$$F(x)=1-e^{\left(-\frac{x^{2}}{\theta}\right)}$$

أما في حالة توزيع رايلي ذو معلمتين (معلمة القياس θ و معلمة الإزاحة α) الذي يسمح بالتطبيق على المكائن والمعدات ذات معدل فشل متغير مع الزمن، وأيضا إذا كان وقت الفشل يبدأ من زمن معين (α) وليس من الصفر، إذ أن المعلمة (α) تمثل مدة العمر المضمون وتستخدم هذا المعلمة لوصف مدة الضمان أو المدة التي لا تحدث فيها أعطال ابتدائية.

وبناءا عليه فإن دالة التوزيع التراكمية لتوزيع رايلي بمعلمتين $(\alpha;\theta)$ تأخذ الصيغة الآتية؛

$$f(x;\alpha,\theta)=\frac{(x-\alpha)}{\theta^{2}}e^{\left(-\frac{(x-\alpha)^{2}}{2\theta^{2}}\right)};\quad 0\leq x\leq\infty\ et\ \beta>0$$

$$F(x;\alpha,\theta)=P(X\leq x)\Rightarrow F(x;\alpha,\theta)=\int_{\alpha}^{\infty}f(x)dx=1-e^{\left(-\frac{(x-\alpha)^{2}}{2\theta^{2}}\right)}$$

سلسلة تمارين الفصل

تمرين رقم 01 :

تنطلق حافلة النقل الجامعي من الموقف الرئيسي (A) كل 45 دقيقة بشكل منتظم خلال أيام الدراسة بالجامعة، وذلك ابتدءا من الساعة السابعة (7:00) صباحا إلى غاية الخامسة (17:00) مساءا.

المطلوب : أوجد ما يلي ؛

1. دالة الكثافة الإحتمالية التي تعبر عن زمن بقاء الحافلة في الموقف ؟ وأكتب دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي (X)؟
2. ما هو إحتمال أن تنطلق الحافلة خلال 10دقائق الأخير على الأقل ؟
3. ما هو إحتمال أن تنطلق الحافلة خلال 15 دقائق الأخيرة ؟
4. أحسب القيمة المتوقعة والإنحراف المعياري لإنطلاق الحافلة من الموقف الرئيسي (A) بإتجاه موقف الجامعة ؟

تمرين رقم 02 :

ليكن لدينا المتغير العشوائي (X) الذي يمثل عدد السنوات التي يقضيها الطالب بالجامعة للحصول على شهادة الليسانس، فإذا علمت بأن قيمة المعلمتين (α) و(β) تتبع توزيع قاما بالمقدار يعادل 2، أي أن : $[\alpha = \beta = 2]$ ، فالمطلوب الإجابة على الآتي:

1. أحسب قيم قاما للحالات التالية : $\left(\Gamma_{\frac{1}{2}}\right)$، $(\Gamma 2)$، $(\Gamma 3)$، (Γn)؟
2. أوجد دالة التوزيع الإحتمالي ؟ بين أنها دالة كثافة إحتمالية ؟
3. أوجد دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع ؟
4. ما إحتمال أن يبقى الطالب 5 سنوات على الأكثر في الجامعة للحصول على شهادة الليسانس ؟
5. ما إحتمال أن يكون عدد السنوات التي يقضيها الطالب بالجامعة للحصول على شهادة الليسانس ما بين 3 و5 سنوات ؟
6. أحسب عدد السنوات المتوقع أن يقضيها الطالب للحصول على شهادة الليسانس، وما مقدار التباين والانحراف المعياري المقابل لها ؟

تمرين رقم 03 :

إذا علمت أن الفترة الزمنية اللازمة لإنهاء خدمة العميل في بنك التنمية المحلية تتبع التوزيع الأسي بمتوسط 5 دقائق ، فأوجد مايلي؛

1. دالة كثافة الإحتمال التي تعبر عن الفترة الزمنية اللازمة لإنهاء خدمة العميل ؟
2. إحتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من 4 دقائق (4دقائق على الأكثر) ؟
3. ما إحتمال أن يتم إنهاء خدمة العميل ما بين دقيقتين(02) و أربع (04) دقائق ؟
4. أحسب التباين و الإنحراف المعياري ؟

تمرين رقم 04 :

ليكن لدينا المتغير العشوائي (X) الذي يعبر عن نسبة الإنتاج التالف في مصنع الأحذية، فإذا علمت بأن قيمة المعلمتين (α) و(β) تتبع توزيع بيتا بالمقدرين 3 و2 على التوالي، أي أن : $[\alpha = 3\ ;\ \beta = 2]$ ، فأجب على ما يلي :

1. أحسب القيم : $(\Gamma 1)$، $(\Gamma 2)$، $(\Gamma 3)$، $(\Gamma 5)$؟
2. أوجد دالة التوزيع الإحتمالي ؟ بين أنها دالة كثافة إحتمالية ؟
3. أوجد دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع ؟
4. ما إحتمال أن تكون نسبة الإنتاج التالف لا تتجاوز 25% ؟
5. ما إحتمال أن تكون نسبة الإنتاج التالف 10% على الأقل؟
6. أحسب النسبة المتوقعة للإنتاج التالف في مصنع الأحذية، ثم التباين والانحراف المعياري المقابل لذلك ؟

تمرين رقم 05 :

في تجربة لاختبار مدى فعالية مبيد حشرات جديد، فقد تم وضع مجموعة من الحشرات المختلفة داخل إطار زجاجي مغلق وشفاف، ثم تم رشها بكمية من هذا المبيد، فكانت قيم المعلمتين(θ) و(β) تتبع توزيع ويبل بمقدار $\theta = 10 \,\&\, \beta = 2$ ، والمطلوب الإجابة على ما يلي :

1. أكتب دالتي التوزيع الإحتمالي والدالة التجميعية (التراكمية) لهذا التوزيع ؟
2. ما إحتمال بقاء الحشرات على قيد الحياة أكثر من 20 دقيقة ؟
3. ما إحتمال بقاء الحشرات على قيد الحياة 15 دقيقة على الأكثر ؟
4. ما هي المدة الزمنية اللازمة للقضاء على 95% من مجموعة الحشرات عينة التجربة بعد رش المبيد عليها؟
5. أحسب المدة المتوقعة لبقاء الحشرات على قيد الحياة بعد إستعمال المبيد، وما هي قيمة التباين و الإنحراف المعياري المقابل لها ؟

تمرين رقم 06 :

1. أحسب قيم دالة قاما الآتية ؛

$a)\ \Gamma 5$

$b)\ \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$

$c)\ \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$

$d)\ 6\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$

$e)\ \Gamma(-10)$

$a')\ \frac{\Gamma 4}{\Gamma 3}$

$b')\ \frac{\Gamma\left(8/3\right)}{\Gamma\left(2/3\right)}$

$c')\ \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$

$$a'')\ \int_0^\infty x^5.e^{-x}dx\ ;\quad b'')\ \int_0^\infty x^{5/2}.e^{-x}dx\ ;\quad c'')\ \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^{1/2}}dx$$

2. أحسب قيم الدالة بيتا بدلالة الدالة قاما للحالات الآتية؛

$$a)\ B(4;5);\quad b)\ B(5;4);\quad c)\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\ ;\ 2\right);\quad d)\ \Gamma(3\ ;\ n)$$

3. أحسب قيم الدالة بيتا للحالات الآتية؛

$$a)\ \int_0^1 x^3.(1-x)dx\ ;\qquad b)\ \int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{x^{1/2}}\right]dx$$

تمرين رقم 07 :

ليكن لدينا المتغير العشوائي (X) الذي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، أي بوسط حسابي معدوم وبإنحراف معياري يساوي الواحد الصحيح، و المطلوب حساب قيم الإحتمال للحالات الأتية؛

$a)\ P(Z<1{,}64)$

$b)\ P(Z\geq 2{,}17)$

$c)\ P(0{,}46<Z<2)$

$d)\ P(0\leq Z<1{,}96)$

$a')\ P(Z\geq -1{,}96)$

$b')\ P(-2{,}58<Z\leq 1{,}75)$

$c')\ P(-2{,}58<Z\leq -1{,}44)$

$d')\ P(-1{,}8<Z\leq 0)$

تمرين رقم 08 :

كانت نتائج 500 طالب (سنة أولى جذع مشترك) في امتحان مقياس الإحصاء (II) للسنة الماضية، إذ بلغ متوسط علاماتهم 12 من 20، وذلك بإنحراف عن الوسط الحسابي كان بنقطتين فقط .

المطلوب : أوجد مايلي؛

1. عدد الطلبة الحاصلين على علامة تعادل أو تفوق 10 ؟
2. إحتمال أن تكون علامات طلبة هذه السنة في المقياس تعادل أو تفوق 12 من 20 ؟
3. إحتمال أن تكون علامات طلبة هذه السنة في المقياس أقل من 10 ؟
4. إحتمال أن تكون علامات طلبة هذه السنة في المقياس ما بين 10 و 15 ؟ حدد عدد الطلبة المحتمل أن يحصلوا على هذه العلامات لهذه السنة إذا علمت بأن عدد المعنيين بإمتحان مقياس الإحصاء (II) هم 820 طالب(ة)؟

تمرين رقم 09 :

أثناء تحضير أستاذ لإمتحان السداسي الثاني في مقياس الإقتصاد الجزئي، وجد بأن متوسط الوقت الذي يكفي الطلاب لإكمال امتحانهم نهائيا هو 60 دقيقه، بإنحراف عن متوسط هذه المدة يقدر بـ 10 دقيقة .

المطلوب : أجب على ما يلي؛

1. ما إحتمال أن يكمل الطلاب امتحانهم بين 60 و 75 دقيقة ؟
2. ما إحتمال أن يكمل الطلاب امتحانهم في أقل من 90 دقيقه ؟
3. ما إحتمال أن يكمل الطلاب امتحانهم في وقت يزيد على 45 دقيقه ؟
4. إذا كان عدد الطلاب المعنيين بالإمتحان هو 800 طالب، فأوجد عدد الطلاب الذين من المحتمل أن يكملوا امتحانهم في وقت لا يزيد عن 90 دقيقة ؟
5. ما هو الوقت الذي يكمل فيه 97,5% من الطلاب إمتحانهم ؟
6. ما هو المدى الزمني الذي يكمل فيه 95% من الطلاب إمتحانهم ؟

تمرين رقم 10 :

أظهرت نتائج دراسة مسحية على عينة من عملاء البنوك التجارية الجزائرية، بأن هناك 55% من العملاء أبدوا رضاهم عن جودة الخدمات التي تقدم إليهم .

فإذا أعاد باحث دراسة نفس المجتمع بعد فترة زمنية، وأخذ عينة تتكون من 200 عميل، فما هو إحتمال؛

1. أن يكون 120 عميل من عينة الدراسة راضين على جودة الخدمات التي تقدمها البنوك التجارية ؟
2. أن يكون 100 عميل على الأقل من عينة الدراسة راضين على جودة الخدمات التي تقدمها البنوك التجارية ؟
3. أن يكون 125 عميل على الأكثر من عينة الدراسة راضين على جودة الخدمات التي تقدمها البنوك التجارية ؟

4. أن يكون هناك ما بين 100 و 120 عميل من عينة الدراسة راضين على جودة الخدمات التي تقدمها البنوك التجارية ؟

تمرين رقم 11 :

أظهرت كميرا المراقبة في أحد محطات البنزين، بأن هناك متوسط 20 سيارة في الساعة الواحد تدخل المحطة لتزود بالوقود.

والمطلوب : أوجد قيم الاحتمالات الآتية؛

1. احتمال أن تتزود 15 سيارة بالضبط في الساعة الواحدة ؟
2. احتمال أن تتزود 26 سيارة على الأكثر في الساعة الواحدة ؟
3. احتمال أن تتزود 18 سيارة على الأقل في الساعة الواحدة ؟
4. احتمال أن تتزود ما بين 10 و 15 سيارة في الساعة الواحدة ؟
5. بفرض أن متوسط عدد السيارات التي تدخل المحطة لتزود بالوقود هو 100 سيارة في اليوم، فإذا كان هناك إحتمال 0,25 أن تطلب خدمة التزود بالديزل (المازوت)، فما إحتمال أن تتزود 20 سيارة بالضبط من الديزل في هذه المحطة خلال اليوم؟

تمرين رقم 12 :

ليكن لدينا المتغير العشوائي (Y) الذي يتبع توزيع ستودنت (t) بدرجة حرية 8 ($v=8$)، والمطلوب دراسة الحالات الآتية؛

1. أوجد القيم الحرجة (قيمة t) للحالات الآتية :

$$a)\ t_{(0,05;8)}\ ;\quad b)\ t_{(0,1;8)}\ ;\quad c)\ t_{(0,95;8)}$$

2. أوجد القيم الإحتمالية (α) وفق الحالات الأتية؛

$a)\ t_{(\alpha;8)} = 1{,}108$

$b)\ t_{(1-\alpha;10)} = 0{,}879$

$c)\ t_{(\alpha;8)} = -1{,}86$

$d)\ P\left(1{,}064 \le t_{(\alpha;20)} \le 1{,}725\right)$

تمرين رقم 13 :

ليكن لدينا المتغير العشوائي (X) الذي يتبع توزيع كاي مربع (χ^2) بدرجة حرية 10 ($v=10$)، والمطلوب دراسة الحالات الآتية؛

1. أوجد قيم الاحتمال الأتية :

$$a)\ P\left(\chi^2 \geq 3{,}25\right);\quad b)\ P\left(\chi^2 \leq 6{,}74\right);\quad c)\ P\left(2{,}56 \leq \chi^2 \leq 3{,}94\right);\quad d)\ P\left(\chi^2 = 3{,}94\right)$$

2. حدد قيم المتغير العشوائي(X) عند حالات قيم الإحتمال الأتية؛

$$a)\ P\left(\chi^2_{(10)} \geq x\right)=0{,}25;\quad b)\ P\left(\chi^2_{(10)} \leq x\right)=0{,}25;\quad c)\ P\left(\chi^2_{(16)} > x\right)=0{,}9;\quad d)\ P\left(\chi^2_{(20)} < x\right)=0{,}05$$

3. حدد بيانيا قيم الإحتمال للمتغير العشوائي (X) وفق الحالات التي تتبع توزيع كاي مربع كما يلي؛

- إحتمال المتغير العشوائي (X) عندما تفوق قيمته 15,99، وذلك عند درجة حرية 10 ؟
- إحتمال المتغير العشوائي (X) عندما لا تتجاوز قيمته 6,74، عند درجة حرية 10 ؟

تمرين رقم 14 :

ليكن لدينا المتغير العشوائي (X) الذي يتبع توزيع فيشر (F) عند درجات حرية ($v_1;v_2$)، والمطلوب دراسة الحالات الآتية؛

1. أوجد قيمة التوزيع F عند درجة حرية البسط ($v_1=7$) وبدرجة حرية المقام ($v_2=10$) عند مستوى معنوية 99% ؟

2. أوجد قيمة التوزيع F (القيم الحرجة) للحالات الآتية :

$$a)\ F_{(0{,}95;12;8)};\quad b)\ F_{(0{,}95;10;10)};\quad c)\ F_{(0{,}01;10;6)};\quad d)\ F_{(0{,}05;25;4)}$$

3. أوجد قيم التوزيعين F وt عند درجة حرية البسط ($v_1=1$) وبدرجات حرية المقام 10، 12 و20 ($v_2=10;v'_2=12\,\&\,v''_2=20$) عند مستوى معنوية 5%($\alpha=0{,}05$)، إذا علمت بأن توزيع (t) غير محدد الإتجاه ($\frac{\alpha}{2}$)؟ ماذا تستنتج بعد تربيع قيمة توزيع t (القيمة الحرجة لـ t) ؟

4. أوجد قيم التوزيعين (F) و χ^2 عند درجة حرية البسط 4، 5، 12 ($v_1=4;v'_1=5\,\&\,v''_1=12$) وبدرجات حرية المقام لانهائي($v_2=\infty$) عند مستوى معنوية 5% ؟ ماذا تستنتج بعد حساب نسبة قيمة توزيع χ^2 إلى درجة الحرية المقابلة لها ؟

5. أوجد قيم التوزيعين $\left(Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ غير المتجه و (F) عند درجة حرية البسط ($v_1=1$) وبدرجات حرية المقام لانهائي ($v_2=\infty$) عند مستويات المعنوية 1%، 5%، 10% ؟ ماذا تستنتج بعد تربيع قيمة توزيع Z (القيمة الحرجة لـ $Z_{\frac{\alpha}{2}}$) ؟

الحلول النموذجية لسلسلة التمارين

تمرين رقم 01 :

نعرف المتغير العشوائي (X) زمن بقاء الحافلة في الموقف الرئيسي (A) بالدقيقة، قبل إنطلاقها بإتجاه موقف الجامعة.

1. كتابة دالة كثافة الإحتمال ودالة التوزيع التراكمي : يتم صياغة الدوال على النحو الأتي؛

1-1. دالة كثافة الإحتمال : تعطى دالة كثافة الإحتمال لتوزيع المنتظم بالصيغة التالية :

$$f(X)=\frac{1}{b-a} \qquad a\leq x\leq b$$

بما أن المدة الزمنية التي تبقي بها الحافلة في الموقف محددة بالمجال $[0 \ - \ 45]$ ، **فإن دالة كثافة الإحتمال تأخذ الصورة التالية :**

$$f(X)=\frac{1}{45-0}=\frac{1}{45} \qquad 0\leq x\leq 45$$

2-1. دالة التوزيع التراكمي: تعطى هذه الدالة بالصيغة التالية :

$$F(X)=P(X\leq x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\leq x\leq b \Rightarrow x\in[a \ - \ b] \\ 1 & x>b \end{cases}$$

وبتعويض المدى الزمني لبقاء الحافلة في الموقف الرئيسي (A)، **فإن دالة التوزيع التراكمي تأخذ الصورة التالية :**

$$F(X)=\frac{x-0}{45-0}=\frac{x}{45}$$

وبناءا عليه، فإن شكل دالة التوزيع التراكمي تأخذ الصورة التالية :

$$F(X)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{x}{45} & 0\leq x\leq 45 \\ 1 & x>45 \end{cases}$$

2. إحتمال أن تنطلق الحافلة خلال 10دقائق الأخير على الأقل : إذا توقع إن تنطلق الحافلة خلال 10 دقائق الأخيرة، فهذا يعنى أن الإحتمال يكتب كمايلي ؛

$$P(X>(45-10))=1-P(X\leq 35)$$

$$P(X>35)=1-F(35)\Rightarrow P(X>35)=1-\left(\frac{35}{45}\right)=0{,}22$$

ومنه فإن هناك إحتمال 22,22% أن تنطلق الحافلة خلال 10دقائق الأخيرة، أي ما بين (35د و45د).

3. إحتمال أن تنطلق الحافلة خلال 15 دقائق الأخيرة : يشير ذلك إلى أن الزمن المتوقع لإنطلاق الحافلة من الموقف يكون ما بين 30د و 45د، وهو ما يعبر عنه بالإحتمال التالي ؛

$$P(30 < X \le 45) = P(X \le 45) - P(X \le 30)$$

$$P(30 < X \le 45) = F(45) - F(30) \Rightarrow P(30 < X \le 45) = \left(\frac{45}{45}\right) - \left(\frac{30}{45}\right) = 0{,}33$$

ومنه فإن هناك إحتمال 33,33% أن تنطلق الحافلة خلال 15دقائق الأخيرة، أي ما بين (30د و45د).

4. أحسب القيمة المتوقعة والإنحراف المعياري لإنطلاق الحافلة من الموقف الرئيسي (A) بإتجاه موقف الجامعة : يتم حساب هذين المقياسين بالإعتماد على الصيغتين الأتيتين للتوزيع المنتظم كمايلي؛

- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \frac{b+a}{2} \mapsto E(X) = \frac{45+0}{2} = 22{,}5\,\text{minute}$$

- التباين والإنحراف المعياري :

$$V(X) = \frac{(b+a)^2}{12} \mapsto V(X) = \frac{(45+0)^2}{12} = 168{,}75\,\text{minute}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{168{,}75} \Rightarrow \sigma(X) = 13\,\text{minute}$$

تمرين رقم 02 :

نعرف المتغير العشوائي (X) الذي يمثل عدد السنوات التي يقضيها الطالب بالجامعة للحصول على شهادة الليسانس، والذي يتبع توزيع قاما، الذي يعرف كمايلي :

$$X \sim G(\alpha\ ;\ \beta) \mapsto X \sim G(2\ ;\ 2)$$

1. حساب قيمة قاما للحالات الأتية : يتم ذلك على النحو التالي؛

$$\left(\Gamma_{\frac{1}{2}}\right) = \pi = 3{,}143$$

$$(\Gamma 2) = 1$$

$$(\Gamma 3) = (3-1)! = 2$$

$$(\Gamma \text{n}) = (n-1)! = (n-1)(n-1) \times \ldots \times (3) \times (2)$$

2.إيجاد دالة التوزيع الإحتمالي: يتم كتابة دالة التوزيع الإحتمالي لتوزيع قاما بالإعتماد على الشكل العام الذي يأخذ الصورة التالية؛

$$f(x) = \frac{1}{(\beta^{\alpha})(\Gamma\alpha)} X^{(\alpha-1)} e^{\left(-\frac{X}{\beta}\right)} \quad ; X \ge 0$$

وبما أن قيمة المعلمتين متساويتين وتعادل 2، $[\alpha = \beta = 2]$ فإن الدالة تأخذ الصورة التالية؛

$$f(x)=\frac{1}{(2^2)(\Gamma 2)}X^{(2-1)}e^{\left(-\frac{X}{2}\right)}$$
$$=\frac{X}{4}e^{\left(-\frac{X}{2}\right)}$$

2-2. إثبات أنها دالة كثافة إحتمالية : نقول عن دالة أنها دالة كثافة إحتمالية إذا تحقق الشرطين الأتيين :

$$f(x)\geq 0 \quad \& \quad \int_0^\infty f(x)dx=1$$

ويتم إثبات ذلك كمايلي:

$$\int_0^\infty f(x)dx=\int_0^\infty \frac{X}{4}e^{\left(-\frac{X}{2}\right)}dx$$

نلاحظ بأن شكل دالة التكامل تتكون من جداء دالتين u وv، لهذا سوف نعتمد على قاعدة التكامل بالتجزئة وذلك وفق العلاقة التالية :

$$\int udv=uv-\int vdu$$

وبوضع تجزئة الدالة الأصلية على النحو الأتي :

$$\begin{cases} u=\dfrac{X}{4} & dv=\int e^{\left(-\frac{X}{2}\right)}dx \\ du=\dfrac{1}{4} & v=\dfrac{e^{\left(-\frac{X}{2}\right)}}{\left(-\frac{1}{2}\right)}=-2e^{\left(-\frac{X}{2}\right)} \end{cases}$$

وبتطبيق قاعدة التكامل بالتجزئة نحصل على النتيجة التالية :

$$\int_0^\infty f(x)dx=\int_0^\infty \frac{X}{4}e^{\left(-\frac{X}{2}\right)}dx$$
$$=\left[\frac{-2x}{4}e^{\left(-\frac{X}{2}\right)}\right]_0^\infty-\int_0^\infty \frac{-2}{4}e^{\left(-\frac{X}{2}\right)}dx$$
$$=\left[\frac{-x}{2}e^{\left(-\frac{X}{2}\right)}\right]_0^\infty-\int_0^\infty \frac{-1}{2}e^{\left(-\frac{X}{2}\right)}dx$$

لدينا من خصائص الدالة الأسية أنه :

$$\left[\ e^{\infty}=0\ \&\ e^{0}=1\ \right]$$

وبالتالي فإن الدالة تأخذ الصورة الأتية :

$$\int_{0}^{\infty} f(x)dx = 0+\frac{1}{2}\left[-2e^{\left(-\frac{X}{2}\right)}\right]_{0}^{\infty}$$

$$=0+\frac{1}{2}\left(0-(-2)\right)$$

$$=1$$

ومنه فإن الدالة $f(x)$ تمثل دالة كثافة احتمالية.

3. إيجاد دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع : يتم التعبير عن دالة التوزيع التراكمي لتوزيع قاما بالشكل الأتي؛

$$F(X)=P(X\le x)\Rightarrow F(X)=\int_{0}^{x} f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{x}\frac{X}{4}e^{\left(-\frac{X}{2}\right)}dx$$

$$=\left[-\frac{x}{2}e^{\left(-\frac{x}{2}\right)}\right]_{0}^{x}-\left[e^{\left(-\frac{x}{2}\right)}\right]_{0}^{x}$$

$$=\left[e^{\left(-\frac{x}{2}\right)}.\left(\left(-\frac{x}{2}\right)-1\right)\right]_{0}^{x}$$

ومنه فإن دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع تأخذ الصورة التالية :

$$P(X\le x)=\left[-e^{\left(-\frac{x}{2}\right)}.\left(\frac{1}{2}x+1\right)\right]_{0}^{x}$$

4. إحتمال أن يبقى الطالب 5 سنوات على الأكثر في الجامعة للحصول على شهادة الليسانس : يتم التعبير عن هذا الاحتمال بالصيغة التالية؛

$$x=5\mapsto P(X\le 5)=F(5)$$

وبالإعتماد على دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع نحصل على قيمة إحتمال أن يبقى الطالب 5 سنوات على الأكثر كمايلي؛

$$P(X \leq 5) = \left[-e^{\left(-\frac{x}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \right]_0^5$$

$$= \left(-e^{\left(-\frac{5}{2}\right)} \cdot \left(\frac{5}{2} + 1\right)\right) - \left(-e^{\left(-\frac{0}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2}(0) + 1\right)\right)$$

$$= (-0{,}2873) - (-1)$$

$$= 0{,}7127$$

ومنه فإن هناك إحتمال 71,27% في أن يبقى الطالب 5 سنوات على الأكثر في الجامعة للحصول على شهادة الليسانس.

5. إحتمال أن يكون عدد السنوات التي يقضيها الطالب بالجامعة للحصول على شهادة الليسانس ما بين 3 و5 سنوات

: يتم التعبير عن هذا الاحتمال بالصيغة التالية؛

$$3 \leq x \leq 5 \mapsto P(3 \leq X \leq 5) = F(5) - F(3)$$

وبالإعتماد على دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع فإننا سنحصل على قيمة الإحتمال التالية ؛

$$P(3 \leq X \leq 5) = \left[-e^{\left(-\frac{x}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \right]_3^5$$

$$= \left(-e^{\left(-\frac{5}{2}\right)} \cdot \left(\frac{5}{2} + 1\right)\right) - \left(-e^{\left(-\frac{3}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2}(3) + 1\right)\right)$$

$$= (-0{,}2873) - (-0{,}5578)$$

$$= 0{,}2705$$

ومنه فإن هناك إحتمال 27,05% في أن يبقى الطالب عدد سنوات ما بين 3 و5 سنوات في الجامعة للحصول على شهادة الليسانس.

6. حساب عدد السنوات المتوقع أن يقضيها الطالب للحصول على شهادة الليسانس، وما مقدار التباين والانحراف المعياري المقابل لها : يتم حساب هذه الخصائص كمايلي؛

- <u>التوقع الرياضي</u> :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \alpha \times \beta \mapsto \mathrm{E}(\mathrm{X}) = (2)(2)$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}(\mathrm{X}) = 4\,years$$

بمعنى أنه من المتوقع أن يبقى هذا الطالب في الجامعة مدة أربعة سنوات للحصول على شهادة الليسانس.

- التباين :

$$V(X) = \alpha(\beta)^2 \mapsto V(X) = (2)(2)^2$$

$$\Rightarrow V(X) = 8 years$$

- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \mapsto \sigma(X) = \sqrt{8}$$

$$\Rightarrow \sigma(X) = 2,828 \cong 3 years$$

تمرين رقم 03 :

نعرف المتغير العشوائي (X) بالفترة الزمنية اللازمة لإنهاء خدمة العميل بالدقيقة، وذلك ضمن المدى الزمني $0 < X < \infty$.

1. كتابة دالة كثافة الإحتمال التي تعبر عن الفترة الزمنية اللازمة لإنهاء خدمة العميل : لدينا من معطيات الحالة المدروسة بأن متوسط إنهاء الخدمة في بنك التنمية المحلية BDL هو 5 دقائق، أي أن :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5} = 0,2$$

ومنه تصبح قيمة λ هي : 0,2 .

وبناءا عليه فإن دالة كثافة الإحتمال المعبرة عن الزمن تأخذ الصيغة التالية :

$$f(x) = \lambda.e^{-\lambda.x}$$

بتعويض القيم نحصل على الدالة التالية :

$$f(x) = 0,2e^{(-0,2x)} \; ; \quad 0 < X < \infty$$

كما يتم التعبير عن الدالة التراكمية بالصورة التالية :

$$F(x) = P(X \leq x) = \left[1 - e^{-\lambda.x}\right] \Leftrightarrow F(x) = 1 - e^{-0,2.x}$$

2. حساب إحتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من 4 دقائق (4دقائق على الأكثر) : يتم التعبير عن هذا الاحتمال بالصيغة التالية؛

$$x = 4 \mapsto P(X \leq 4) = \left[1 - e^{(-0,2)(4)}\right] \Rightarrow P(X \leq 4) = 0,551$$

ومنه فإن هناك إحتمال 55,1% أن يتم إنهاء خدمة العميل في أقل من 4 دقائق .

3. حساب إحتمال أن يتم إنهاء خدمة العميل ما بين دقيقتين(02) و أربع (04) دقائق : يتم التعبير عن هذا الاحتمال بالصيغة التالية؛

$$
\begin{aligned}
P(2 \le X \le 4) &= P(X \le 4) - P(X < 2) \\
&= F(4) - F(2) \\
&= \left[1 - e^{(-0,2)(4)}\right] - \left[1 - e^{(-0,2)(2)}\right] \\
&= e^{(-0,4)} - e^{(-0,8)} \\
&= 0,670 - 0,449 \\
&= 0,221
\end{aligned}
$$

ومنه فإن هناك إحتمال 22,1% أن يتم إنهاء خدمة العميل ما بين دقيقتين(02) و أربع (04) دقائق .

4. حساب التباين و الإنحراف المعياري : بالإعتماد على الصيغة الرياضية لتباين لمتغير عشوائي يتبع التوزيع الأسي وذلك على النحو الأتي :

$$
V(x) = \frac{1}{\lambda^2} \mapsto V(x) = \frac{1}{(0,2)^2}
$$
$$
\Rightarrow V(x) = 25 \,\text{minute}
$$

وبالتالي فإن مقدار الانحراف المعياري لزمن إنهاء خدمة العميل بالدقيقة، هو :

$$
\sigma(x) = \sqrt{V(x)} \Rightarrow \sigma(x) = \sqrt{25} = 5 \,\text{minute}
$$

تمرين رقم 04 :

نعرف المتغير العشوائي (X) الذي يعبر عن نسبة الإنتاج التالف في مصنع الأحذية، والذي يتبع توزيع بيتا، الذي يعرف كمايلي :

$$
X \sim B(\alpha\,;\,\beta) \mapsto X \sim B(3\,;\,2)
$$

1. حساب قيم دالة كاما للحالات التالية : لدينا الصيغة العامة لدالة كاما كما يلي :

$$
\Gamma n = (n-1)!
$$

وبالإعتماد على هذه الصيغة فإن؛

$$
\begin{aligned}
\Gamma 1 &= (1-1)! = 1 \\
\Gamma 2 &= (2-1)! = 1 \\
\Gamma 3 &= (3-1)! = 2 \\
\Gamma 5 &= (5-1)! = 24
\end{aligned}
$$

2. كتابة دالة التوزيع الإحتمالي : بالإعتماد على التي تأخذ الصورة التالية ؛

$$
f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(\Gamma\alpha)(\Gamma\beta)} x^{(\alpha-1)}(1-x)^{(\beta-1)}; \quad 0 < x < 1
$$

وبتعويض قيم معلمتي هذا التوزيع نحصل على الدالة الإحتمالية التالية :

$$
f(x) = \frac{\Gamma(3+2)}{(\Gamma 3)(\Gamma 2)} x^{(3-1)}(1-x)^{(2-1)} \Leftrightarrow f(x) = 12x^2(1-x)
$$

❖ لإثبات أن دالة التوزيع الإحتمالي لهذا التوزيع تمثل دالة كثافة إحتمالية، يجب تحقق الخاصيتين التاليتين :

$$f(x) \geq 0 \quad \& \quad \int_0^1 f(x)dx = 1$$

ويتم إثبات ذلك كمايلي:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^1 \left[12x^2(1-x)\right]dx \\
&= 12\int_0^1 \left[x^2 - x^3\right]dx \\
&= 12\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 \\
&= 12\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\
&= 12\left(\frac{4-3}{12}\right) \Rightarrow f(x)dx = 1
\end{aligned}$$

ومنه فإن دالة التوزيع الإحتمالي تمثل دالة كثافة إحتمالية .

2. إيجاد دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع : يتم التعبير عن دالة التوزيع التراكمي لتوزيع بيتا بالشكل الأتي؛

$$\begin{aligned}
F(X) = P(X \leq x) \Rightarrow F(X) &= \int_0^x f(x)dx \\
&= \frac{\overline{)\alpha+\beta}}{\Gamma\alpha.\Gamma\beta}\int_0^x \left[X^{(\alpha-1)}(1-X)^{(\beta-1)}\right]dx \\
&= 12\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^x
\end{aligned}$$

ومنه فإن دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع تأخذ الصورة التالية :

$$P(X \leq x) = \left[4x^3 - 3x^4\right]_0^x$$

3. حساب إحتمال أن تكون نسبة الإنتاج التالف لا تتجاوز 25% : بما أن المطلوب حساب إحتمال أن تكون نسبة الإنتاج التالف 25% على الأكثر، وبالاعتماد على دالة التوزيع التراكمي عند هذه النسبة فإن الصيغة تأخذ الشكل الأتي؛

$$
\begin{aligned}
P(X \le 0{,}25) &= \left[4x^3 - 3x^4\right]_0^{0{,}25} \\
&= \left[4(0{,}25)^3 - 3(0{,}25)^4\right] \\
&= 0{,}0625 - 0{,}0117 \\
&= 0{,}051
\end{aligned}
$$

وهذا يعنى بأن هناك إحتمال 5,1% بأن تكون نسبة الإنتاج التالف 25% على الأكثر .

4. حساب إحتمال أن تكون نسبة الإنتاج التالف 10% على الأقل : يتم التعبير عن هذا الإحتمال بالصيغة التالية؛

$$
\begin{aligned}
P(X \ge 0{,}1) &= 1 - P(X < 0{,}1) \\
&= 1 - \left[4x^3 - 3x^4\right]_0^{0{,}1} \\
&= 1 - \left[4(0{,}1)^3 - 3(0{,}1)^4\right] \\
&= 1 - (0{,}004 - 0{,}0003) \\
&= 0{,}9963
\end{aligned}
$$

وهذا يعنى بأن هناك إحتمال 99,63% بأن تكون نسبة الإنتاج التالف 10% على الأقل.

5. حساب الخصائص الإحصائية للتوزيع : يتم تقدير النسبة المتوقعة للإنتاج التالف في مصنع الأحذية، وكذلك التباين والانحراف المعياري المقابل لها، بالإعتماد على الصيغ التالية؛

- التوقع الرياضي :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \mapsto \mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{3}{3+2} \Rightarrow \mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

- التباين :

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \frac{\alpha.\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \mapsto \mathrm{V}(\mathrm{X}) = \frac{(3)(2)}{(3+2)^2(3+2+1)} \Rightarrow \mathrm{V}(\mathrm{X}) = \frac{6}{150} = 0{,}04$$

- الانحراف المعياري :

$$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})} \Rightarrow \sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{0{,}04} = 0{,}2$$

تمرين رقم 05 :

ليكن لدينا المتغير العشوائي (X) الذي يعبر عن الزمن بقاء الحشرات على قيد الحياة عينة التجربة بعد رش المبيد عليها، وذلك عند قيم المعلمتين(θ) و(β) التي تتبع توزيع ويبل بمقدار $\theta = 10 \,\&\, \beta = 2$ ، فأجب على ما يلي :

1.أكتب دالتي التوزيع الإحتمالي والدالة التجميعية (التراكمية) لهذا التوزيع : يتم التعبير عن هذين الدالتين على النحو الأتي؛

1-1. دالة التوزيع الإحتمالي : بالإعتماد على الصيغة الدالة المبينة على النحو الأتي؛

$$f(x)=\frac{\beta.x^{(\beta-1)}}{\theta^{\beta}}e^{\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}\right]};\quad 0\le x\le\infty$$

بتعويض المعلمتين $[\ \theta=10\ ;\ \beta=2\ ]$، نحصل على الدالة المعبرة عن التوزيع الإحتمالي كمايلي؛

$$f(x)=\frac{2x^{(2-1)}}{10^{2}}e^{\left[-\left(\frac{x}{10}\right)^{2}\right]}$$
$$=0,02x.e^{-0,01x^{2}}$$

1-2. الدالة التراكمية : بالإعتماد على الصيغة الدالة المبينة على النحو الأتي؛

$$F(x)=1-e^{\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}\right]}$$

وبتعويض قيمة المعلمتين، نحصل على الدالة التراكمية كمايلي؛

$$F(x)=1-e^{\left[-\left(\frac{x}{10}\right)^{2}\right]}$$
$$=1-e^{-0,01x^{2}}$$

2. حساب إحتمال بقاء الحشرات على قيد الحياة أكثر من 20 دقيقة : بالإعتماد على دالة التراكمية، فإن إحتمال بقاء الحشرات أكثر من 20 دقيقة $(x=20)$، يحسب كما يلي؛

$$P(X>20)=1-F(20)$$
$$=1-\left(1-e^{-0,01(20)^{2}}\right)$$
$$=0,0183$$

ومنه فإن هناك إحتمال 1,83% أن تبقى الحشرات عينة التجربة على قيد الحياة أكثر من 20 دقيقة .

3. حساب إحتمال بقاء الحشرات على قيد الحياة 15 دقيقة على الأكثر: بالإعتماد على دالة التراكمية، فإن إحتمال بقاء الحشرات أكثر من 15 دقيقة $(x=15)$، يحسب كما يلي؛

$$P(X\le 15)=F(15)$$
$$=1-e^{-0,01(15)^{2}}$$
$$=0,8946$$

ومنه فإن هناك إحتمال 89,46% أن تبقى الحشرات عينة التجربة على قيد الحياة 15 دقيقة على الأكثر .

4.تحديد المدة الزمنية اللازمة للقضاء على 95% من مجموعة الحشرات عينة التجربة بعد رش المبيد عليها : بالإعتماد على دالة التوزيع التراكمي، فإن المدة الزمنية المناسبة للقضاء على 95% من الحشرات عينة التجربة تتمثل فيما يلي؛

$$\left.\begin{array}{l}F(X)=0{,}95\\ F(X)=1-e^{-0{,}01x^2}\end{array}\right\}\Rightarrow 1-e^{-0{,}01x^2}=0{,}95$$

$$e^{-0{,}01x^2}=0{,}05$$
$$\left(-0{,}01x^2\right)=\left(-2{,}996\right)$$
$$-0{,}01x^2=-2{,}996$$
$$x^2=\sqrt{299{,}6}$$
$$x=17{,}3\,\text{minute}$$

بمعنى أنه يتطلب للقضاء على 95% من مجمع الحشرات مدة زمنية لا تتجاوز 17 دقيقة .

5. حساب المدة المتوقعة لبقاء الحشرات على قيد الحياة بعد إستعمال المبيد : يتم حساب القيمة المتوقعة بتطبيق الصيغة التالية؛

$$E(X)=\theta\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)$$

بالتعويض نحصل على القيمة المتوقع التالية؛

$$\begin{aligned}E(X)&=10\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\\&=10\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\frac{1}{2}\\&=5\sqrt{\pi}\\&=5(3{,}142)\\&=15{,}7\cong 16\text{minute}\end{aligned}$$

من المتوقع أن يتم القضاء على جميع الحشرات عينة التجربة في 16 دقيقة بعد رش المبيد عليها.

❖ **التباين :** يتم حساب تباين زمن القضاء على الحشرات عينة التجربة، بتطبيق الصيغة التالية؛

$$V(X)=\theta^2\left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)^2\right]$$

بالتعويض نحصل على قيمة التباين كمايلي؛

$$V(X)=10^2\left[\left(\frac{2}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{2}+1\right)^2\right]$$
$$=100\left[\Gamma 2-\Gamma^2\frac{3}{2}\right]$$
$$=100\left[1!-\Gamma^2\frac{3}{2}\right]\sqrt{\pi}$$
$$=100\left[1-\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^2\right]$$
$$=100\left(1-\frac{3,142}{4}\right)$$
$$=25$$

من المتوقع أن يتم القضاء على جميع الحشرات عينة التجربة في 16 دقيقة بعد رش المبيد عليها.

❖ **الإنحراف المعياري** : بحساب حاصل الجذر التربيعي للتباين نحصل على القيمة التالية؛

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}\Rightarrow\sigma(X)=\sqrt{25}=5$$

ومنه فإنه يمكن أن يتغير زمن القضاء على الحشرات عينة التجربة بـ 5 دقائق على الزمن المتوقع، بمعنى أنه سيكون ضمن المجال الأتي؛

$$[11\text{minute}\ ;\ 21\text{minute}]$$

تمرين رقم 06 :

1. حساب قيم دالة قاما : الصيغة الأساسية لحساب قيم دالة قاما، تعتمد على القواعد الآتية؛

$$*\ \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)\quad;\forall n\neq 0$$
$$**\ \Gamma(n)=(n-1)!$$
$$***\ \Gamma(n)=\infty\ \Rightarrow\ n\leq 0$$
$$****\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$
$$*****\ \Gamma(-n)=\frac{\Gamma(1-n)}{(-n)}$$
$$******\ \Gamma(P)\Gamma(1-P)=\frac{\pi}{\sin(P.\pi)}\quad;0<P<1$$

ومنه فإن قيم دالة قاما للحالات المدروسة، تكون على النحو الأتي؛

$$a)\ \Gamma 5=(5-1)!$$
$$=4!=24$$

$$b)\ \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)$$
$$=\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)$$
$$=\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)$$
$$=\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{15}{8}\right)\sqrt{\pi}$$

$$c)\ \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$=-2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=-2\sqrt{\pi}$$

$$d)\ 6\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=6\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)$$
$$=6\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=3\sqrt{\pi}$$

$$e)\ \Gamma(-10)=\infty$$

لدينا الجزء الثاني من قيم دالة قاما، على النحو الأتي؛

$$a')\ \frac{\Gamma 5}{\Gamma 3}=\frac{(5-1)!}{(3-1)!}$$
$$=\frac{4!}{2!}=12$$

$$b')\ \frac{\Gamma\left(8/3\right)}{\Gamma\left(2/3\right)}=\frac{5/3\,\Gamma\left(5/3\right)}{\Gamma\left(2/3\right)}$$

$$=\frac{\left(5/3\right)\left(2/3\right)\Gamma\left(2/3\right)}{\Gamma\left(2/3\right)}$$

$$=\left(5/3\right)\left(2/3\right)=\frac{10}{9}$$

$$c')\ \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)}=\pi.\sqrt{2}$$

الجزء الثالث : يتم حساب القيم بالاعتماد على العلاقة دالة قاما التي تأخذ الصورة الآتية؛

$$\int_0^{\infty} x^{(\alpha-1)}.e^{-x}dx=\Gamma\alpha$$

وتسهيلا لعملية الحساب، سنضع :

$$\boxed{x^k.e^{-x}\Rightarrow\alpha=k+1}$$

ومنه فإن قيم دالة بيتا للحالات المدروسة تكون كمايلي؛

$$a'')\ \int_0^{\infty} x^5.e^{-x}dx=\Gamma(5+1)$$

$$=\Gamma(6)$$

$$=5!=120$$

$$b'')\ \int_0^{\infty} x^{5/2}.e^{-x}dx=\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)$$

$$=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{15}{8}\right)\sqrt{\pi}$$

$$c'')\ \int_0^{\infty}\frac{e^{-x}}{x^{1/2}}dx=\int_0^{\infty}x^{\left(-1/2\right)}e^{-x}dx$$

$$=\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)$$

$$=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

2. قيم الدالة بيتا بدلالة الدالة قاما : يتم حساب القيم بالاعتماد على الصيغة المشتركة لدالة بيتا مع دالة قاما و التي تأخذ الصورة الآتية؛

$$B(\alpha\ ;\ \beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

ومنه فإن قيم دالة بيتا للحالات المدروسة تكون كما يلي؛

$$a)\quad B(4;5)=\frac{\Gamma(4)\Gamma(5)}{\Gamma(4+5)}$$

$$=\frac{3!\times 4!}{8!}$$

$$=\frac{144}{40320}\Rightarrow B(4;7)=0{,}003571$$

$$b)\quad B(5;4)=\frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(5+4)}$$

$$=\frac{4!\times 3!}{8!}$$

$$=\frac{144}{40320}=0{,}003571\Rightarrow B(5;4)=B(4;5)$$

وبناءا عليه، نستنتج بأن؛

$$\boxed{B(\alpha\,;\beta)=B(\beta\,;\alpha)}$$

$$c)\quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\ ;\ 2\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+2\right)}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).(2-1)!}{\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\left(\frac{15}{8}\right)\sqrt{\pi}}$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right).\left(\frac{8}{15}\right)=\frac{4}{5}$$

$$d)\quad \Gamma(3\ ;\ n)=\frac{\Gamma(3)\Gamma(n)}{\Gamma(3+n)}$$

$$=\frac{(3-1)!(n-1)!}{(3+n-1)!}$$

$$=\frac{2.(n-1)!}{(2+n)(1+n)(n)(n-1)!}$$

$$=\frac{2}{(2+n)(1+n)(n)}=\frac{2}{n^3+3n^2+2n}$$

3. قيم دالة بيتا : يتم حساب القيم بالاعتماد على العلاقة دالة بيتا التي تأخذ الصورة الآتية؛

$$B(\alpha\ ;\ \beta)=\int_0^1 x^{(\alpha-1)}.(1-x)^{(\beta-1)}dx$$

وتسهيلا لعملية التقدير، فإننا نعتبر :

$$\int_0^1 x^{(\alpha-1)}.(1-x)^{(\beta-1)}dx \mapsto \begin{cases} x^k \Rightarrow \alpha = k+1 \\ (1-x)^m \Rightarrow \beta = m+1 \end{cases}$$

ومنه فإن قيم دالة بيتا للحالات المدروسة تكون كمايلي؛

$$a)\ \int_0^1 x^3.(1-x)dx = B((3+1)\ ;\ (1+1))$$
$$= B(4\ ;\ 2) = \frac{\Gamma(4)\Gamma(2)}{\Gamma(4+2)}$$

$$b)\ \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{x^{1/2}}\right]dx = B\left(\left(-\frac{1}{2}+1\right);\ (2+1)\right)$$
$$= B\left(\frac{1}{2}\ ;\ 3\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+3\right)}$$

تمرين رقم 07 :

نعرف المتغير العشوائي (X) الذي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري بوسط حسابي معدوم وإنحراف معياري يساوي الواحد الصحيح، أي أن* ؛

$$X \sim N(0;1)$$

- **قيم** $P(Z<1{,}64)$ **:** بالإعتماد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري، فإن قيمة الإحتمال المقابلة للقيمة الحرجة (قيمة توزيع Z) تقدر بـ :

$$a)\ P(Z<1{,}64)=\varphi(1{,}64)$$
$$=0{,}9495$$

- **قيم** $P(Z \geq 2{,}17)$ **:** بالإعتماد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري، فإن قيمة الإحتمال المقابلة للقيمة الحرجة (قيمة توزيع Z) تقدر بـ :

$$b)\ P(Z \geq 2{,}17)=1-P(Z<2{,}17)$$
$$=1-\varphi(2{,}17)$$
$$=1-(0{,}985)$$
$$=0{,}015$$

* يمكن الإعتماد على الرابط، كبديل لجدول التوزيع الطبيعي كمايلي : http://stattrek.com/online-calculator/normal.aspx

- **قيم** $P(0,46 < Z < 2)$ **:** بالإعتماد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري، فإن قيمة الإحتمال المقابلة للقيمة الحرجة (قيمة توزيع Z) تقدر بـ :

$$c)\ P(0,46 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < 0,46)$$
$$= \varphi(2) - \varphi(0,46)$$
$$= (0,9772) - (0,6772)$$
$$= 0,3$$

- **قيم** $P(0 < Z < 1,96)$ **:** بالإعتماد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري، فإن قيمة الإحتمال المقابلة للقيمة الحرجة (قيمة توزيع Z) تقدر بـ :

$$d)\ P(0 \le Z < 1,96) = P(Z < 1,96) - P(Z \le 0)$$
$$= \varphi(1,96) - \varphi(0)$$
$$= (0,975) - (0,5)$$
$$= 0,475$$

- **قيم** $P(Z \ge -1,96)$ **:** بالإعتماد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري، فإن قيمة الإحتمال المقابلة للقيمة الحرجة (قيمة توزيع Z) تقدر بـ :

$$a')\ P(Z \ge -1,96) = 1 - P(Z < -1,96)$$
$$= 1 - \varphi(-1,96)$$
$$= 1 - [1 - \varphi(1,96)]$$
$$= \varphi(1,96)$$
$$= 0,975$$

- **قيم** $P(-2,58 < Z \le 1,75)$ **:** بالإعتماد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري، فإن قيمة الإحتمال المقابلة للقيمة الحرجة (قيمة توزيع Z) تقدر بـ :

$$b')\ P(-2,58 < Z \le 1,75) = P(Z < 1,75) - P(Z < -2,58)$$
$$= \varphi(1,75) - \varphi(-2,58)$$
$$= \varphi(1,75) - [1 - \varphi(2,58)]$$
$$= \varphi(1,75) + \varphi(2,58) - 1$$
$$= (0,9599) + (0,9951) - 1$$
$$= 0,955$$

- **قيم** $P(-2,58 < Z \le -1,44)$ **:** بالإعتماد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري، فإن قيمة الإحتمال المقابلة للقيمة الحرجة (قيمة توزيع Z) تقدر بـ :

$$c')\ P(-2,58 < Z \le -1,44) = P(Z < -1,44) - P(Z < -2,58)$$
$$= \varphi(-1,44) - \varphi(-2,58)$$
$$= [1 - \varphi(1,44)] - [1 - \varphi(2,58)]$$
$$= \varphi(2,58) - \varphi(1,44)$$
$$= (0,9951) - (0,9251)$$
$$= 0,07$$

- قيم $P(-1{,}8 < Z \leq 0)$ **:** بالإعتماد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري، فإن قيمة الإحتمال المقابلة للقيمة الحرجة (قيمة توزيع Z) تقدر بـ :

$$
\begin{aligned}
d')\ \ P(-1{,}8 < Z \leq 0) &= P(Z \leq 0) - P(Z < -1{,}8) \\
&= \varphi(0) - \varphi(-1{,}8) \\
&= \varphi(0) - [1 - \varphi(1{,}8)] \\
&= \varphi(0) + \varphi(1{,}8) - 1 \\
&= (0{,}5) + (0{,}9641) - 1 \\
&= 0{,}4641
\end{aligned}
$$

تمرين رقم 08 :

لدينا من التمرين المعطيات التالية :

$$N = 500\ ; \qquad \mu = 12{,}5\ ; \qquad \sigma = 2$$

1. حساب عدد الطلبة الذين تحصلوا على علامة تعادل أو تفوق 10 : يعتمد تحديد عدد طلبة السنة الماضية الذين تحصلوا على علامة تعادل أو تفوق 10، على حساب القيمة الإحتمالية المقابلة لهذه العلامة، وذلك على النحو الأتي؛

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 10) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{10-12{,}5}{2}\right) \\
&= P(Z \geq -1{,}25) \\
&= 1 - P(Z < -1{,}25) \\
&= 1 - \varphi(-1{,}25) \\
&= 1 - [1 - \varphi(1{,}25)] \\
&= \varphi(1{,}25) \\
&= 0{,}8944
\end{aligned}
$$

بالإعتماد على القيمة الإحتمالية، فإن عدد الطلاب الذين تحصلوا على علامة تعادل أو تفوق 10، هم :

$$
\begin{aligned}
N_{(X\geq 12)} = N.P(X \geq 10) \Rightarrow N_{(X\geq 12)} &= (500)(0{,}8944) \\
&= 447\ Student
\end{aligned}
$$

2. إحتمال أن تكون علامات طلبة هذه السنة في المقياس تعادل أو تفوق 12,5 : يتم حسابه وفق الصيغة الأتية؛

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 12{,}5) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{12{,}5-12{,}5}{2}\right) \\
&= P(Z \geq 0) \\
&= \varphi(0) \\
&= 0{,}5
\end{aligned}
$$

يتبين من النتائج بأنه من المحتمل أن يحصل (50%)نصف طلبة هذه السنة على علامة تعادل أو تفوق 12,5 في إمتحان مقياس الإحصاء (II) بالسداسي الثاني .

3. إحتمال أن تكون علامات طلبة هذه السنة في المقياس أقل من 10 : يتم تحديد قيمة الإحتمال بالإعتماد على الصيغة الآتية؛

$$\begin{aligned}
P(X<10) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{10-12{,}5}{2}\right)\\
&= P(Z<-1{,}25)\\
&= \varphi(-1{,}25)\\
&= 1-\varphi(1{,}25)\\
&= 1-(0{,}8944)\\
&= 0{,}1056
\end{aligned}$$

يتبين من النتائج بأن هناك احتمال 10,56% من طلبة هذه السنة على ستكون علاماتهم أقل من 10 في امتحان مقياس الإحصاء (II) بالسداسي الثاني .

4. احتمال أن تكون علامات طلبة هذه السنة في المقياس ما بين 10 و 15 : يتم التعبير عن هذا الاحتمال بالصيغة التالية؛

$$\begin{aligned}
P(10\le X\le 15) &= P(X\le 15)-P(X\le 10)\\
&= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{15-12{,}5}{2}\right)-P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{10-12{,}5}{2}\right)\\
&= P(Z\le 1{,}25)-P(Z\le -1{,}25)\\
&= \varphi(1{,}25)-\varphi(-1{,}25)\\
&= \varphi(1{,}25)-[1-\varphi(1{,}25)]\\
&= 2\varphi(1{,}25)-1\\
&= 2(0{,}8944)-1\\
&= 0{,}7888
\end{aligned}$$

يتبين من النتائج بأن هناك احتمال 78,88% من طلبة هذه السنة ستكون علاماتهم في امتحان مقياس الإحصاء (II) بالسداسي الثاني محصورة ما بين 10 و 15 نقطة من 20.

بالإعتماد على القيمة الإحتمالية، فإن عدد الطلاب الذين من المحتمل أن يحصلوا على علامات، ما بين 10 و 15 نقطة من 20، لهذه السنة في امتحان مقياس الإحصاء (II) بالسداسي الثاني، هم :

$$\begin{aligned}
N'_{(10\le X\le 15)} = N'.P(10\le X\le 15) \Rightarrow N'_{(10\le X\le 15)} &= (820)(0{,}7888)\\
&\cong 647\ \textit{Student}
\end{aligned}$$

بمعنى، أنه من المحتمل أن يحصل 647 طالب من أصل 820، على علامة ما بين 10 و15 في مقياس الإحصاء (II) بالسداسي الثاني .

تمرين رقم 09 :

لدينا من التمرين المعطيات التالية :

$$\mu = 60\,\text{minute} \; ; \qquad \sigma = 10\,\text{minute}$$

1. حساب إحتمال أن يكمل الطلاب امتحانهم بين 60 و 75 دقيقة : يتم حساب نسبة الطلاب الذين من المحتمل أن يكملوا إمتحانهم ما بين 60 و75 دقيقة وفق الصيغة الإحتمالية التالية؛

$$\begin{aligned} P(60 \le X \le 75) &= P(X \le 75) - P(X \le 60) \\ &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{75-60}{10}\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{60-60}{10}\right) \\ &= P(Z \le 1{,}5) - P(Z \le 0) \\ &= \varphi(1{,}5) - \varphi(0) \\ &= (0{,}9332) - (0{,}5) \\ &= 0{,}4332 \end{aligned}$$

وبناءا عليه، فإن هناك إحتمال إكمال الطلاب لإمتحانهم في فترة زمنية تتراوح ما بين ساعة (60د) وساعة وربع (75د) بنسبة 43,32 % .

2. حساب إحتمال أن يكمل الطلاب امتحانهم في أقل من 90 دقيقة : يتم حساب نسبة الطلاب الذين من المحتمل أن يكملوا إمتحانهم في أقل من 90 دقيقة، وفق الصيغة الإحتمالية التالية؛

$$\begin{aligned} P(X < 90) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{90-60}{10}\right) \\ &= P(Z < 3) \\ &= \varphi(3) \\ &= 0{,}9986 \end{aligned}$$

نلاحظ بأن هناك نسبة 99,86% في أن يكمل الطلاب إمتحانهم في مدة زمنية أقل من ساعة ونصف (90د) .

3. حساب إحتمال أن يكمل الطلاب امتحانهم في وقت يزيد على 45 دقيقة : يتم حساب نسبة الطلاب الذين من المحتمل أن يكملوا إمتحانهم في وقت يزيد على 45 دقيقة، وفق الصيغة الإحتمالية التالية؛

$$\begin{aligned} P(X > 45) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{45-60}{10}\right) \\ &= P(Z > -1{,}5) \\ &= 1 - P(Z \le -1{,}5) \\ &= 1 - \varphi(-1{,}5) \\ &= 1 - [1 - \varphi(1{,}5)] \\ &= \varphi(1{,}5) \\ &= 0{,}9332 \end{aligned}$$

نلاحظ بأن هناك نسبة 93,32% في أن يكمل الطلاب إمتحانهم في وقت يزيد على ساعة إلا ربع (45د) .

4. عدد الطلاب الذين من المحتمل أن يكملوا امتحانهم في وقت لا يزيد عن 90 دقيقة : بما أن عدد الطلاب المعنيين بالإمتحان هو 800 طالب، ولدينا نسبة الذين من المحتمل أن يكملوا إمتحانهم في أقل من 90دقيقة، والمقدرة بـ 99,86%، فإن عدد الطلاب الموافق لهذه المعطيات يحدد بـ :

$$N_{(X\leq 12)} = N.P(X \leq 90) \Rightarrow N_{(X\leq 12)} = (800)(0,9986)$$
$$= 799\, Student$$

وبالتالي فهناك 799 طالب من المحتمل أن يكملوا إمتحانهم في الوقت المخصص لهم (90د)، وعليه فإنه يمكن أن يكون طالب واحد فقط قد يحتاج إلى وقت إضافي لإتمام الإمتحان.

5. تحديد الوقت الذي يمكن 97,5% من الطلاب إتمام إمتحانهم : يتم تحديد الوقت المناسب لإتمام 97,5% من الطلاب المعنيين بالإمتحان، بالإعتماد على الصيغة الإحتمالية التالية؛

$$P(X \leq x) = 0,975 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{x-60}{10}\right) = 0,975$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري ، لدينا قيمة التوزيع Z (القيمة الحرجة) المقابلة للإحتمال 0,975 ، هو :

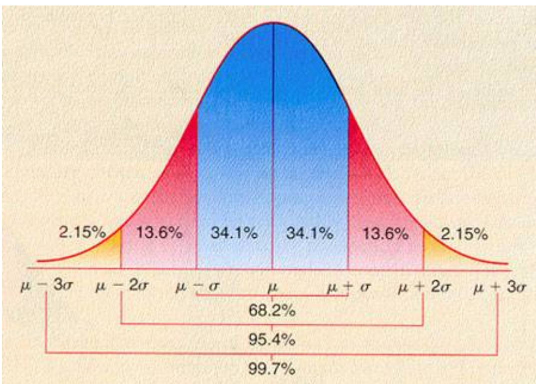
$$Z_{0,975} = 1,96$$

ومنه فإن؛

$$\frac{x-60}{10} = 1,96 \Rightarrow x - 60 = 19,6$$
$$x = 79,6 \cong 80\ \text{minute}$$

وبناءا عليه، فإن الوقت المناسب لإتمام 97,5% من الطلاب المعنيين بالإمتحان (780 طالب)، يقدر بـ 80 دقيقة، على أن تتم النسبة المتبقية (2,5%) الإمتحان أي ما يعادل 20 طالب في زمن يفوق ذلك .

6. تحديد المدى الزمني الذي يكمل فيه 95% من الطلاب إمتحانهم : يتم تحديد هذا المدى بالإعتماد على شكل الأتي؛



نلاحظ بأن المدى الذي يقع ضمنه تقريبا 95% من الطلاب يكون بتغير ضعف الإنحراف المعياري عن الوسط الحسابي $(\mu \pm 2\sigma)$، والذي يتم تحديده على كما يلي؛

$$[\ \mu - 2\sigma\ ;\ \mu + 2\sigma\ ] \Rightarrow \begin{cases} \mu + 2\sigma = 60 + 2(10) = 80 \\ \\ \mu - 2\sigma = 60 - 2(10) = 40 \end{cases}$$

ومنه فإن؛

$$95\% \in [\ \mu - 2\sigma\ ;\ \mu + 2\sigma\ ] = [\ 40\ ;\ 80\ ]$$

هناك 95% من الطلاب المعنيين بالامتحان يقع المدى الزمني الذي يكمل فيه ما بين 40 دقيقة و80 دقيقة .

تمرين رقم 10 :

لدينا من التمرين المعطيات الأتية؛

$$P = 0{,}55\ ;\ \ q = 0{,}45; \qquad n = 200$$

نلاحظ بأن ؛

$$n.P = (200)(0{,}55) \geq 5$$

وبناءا عليه، فإنه يصبح الإعتماد على التوزيع الطبيعي المعياري كتقريب للتوزيع الثنائي، وذلك وفق الكتابة التالية؛

$$B_i(n = 200; P = 0{,}55) \sim N\left(\mu = nP\ ;\ \sigma = \sqrt{npq}\right)$$

ومنه فإن الوسط الحسابي و الإنحراف المعياري لهذه الدراسة تحسب كمايلي؛

$$\begin{aligned} \mu &= nP \\ &= 200(0{,}55) \\ &= 110 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \sigma &= \sqrt{npq} \\ &= \sqrt{200(0{,}55)(0{,}45)} \\ &= 7{,}04 \end{aligned}$$

1. حساب إحتمال أن يكون 120 عميل من عينة الدراسة راضين على جودة الخدمات التي تقدمها البنوك التجارية :

$$\begin{aligned} P(X = 120) &= P\left(Z \leq \frac{120{,}5 - 110}{7{,}04}\right) - P\left(Z \leq \frac{119{,}5 - 110}{7{,}04}\right) \\ &= \varphi(1{,}49) - \varphi(1{,}35) \\ &= (0{,}9319) - (0{,}9115) \\ &= 0{,}0204 \end{aligned}$$

تبين النتائج بأن هناك نسبة 2,04% في أن يكون 120 عميل بالضبط راضين عن جودة الخدمات التي تقدمها البنوك التجارية الجزائرية .

2. حساب إحتمال أن يكون 100 عميل على الأقل من عينة الدراسة راضين على جودة الخدمات التي تقدمها البنوك التجارية :

$$\begin{aligned} P(X \geq 100) &= 1 - P(X < 100) \\ &= 1 - P\left(Z < \frac{99,5 - 110}{7,04}\right) \\ &= 1 - \varphi(-1,49) \\ &= 1 - [1 - \varphi(1,49)] \\ &= 0,9319 \end{aligned}$$

تبين النتائج بأن هناك نسبة 93,19% في أن يكون 100 عميل على الأقل من عينة الدراسة راضين على جودة الخدمات التي تقدمها البنوك التجارية الجزائرية .

3. حساب إحتمال أن يكون 125 عميل على الأكثر من عينة الدراسة راضين على جودة الخدمات التي تقدمها البنوك التجارية :

$$\begin{aligned} P(X \leq 125) &= P\left(Z \leq \frac{125,5 - 110}{7,04}\right) \\ &= \varphi(2,202) \\ &= 0,9861 \end{aligned}$$

تبين النتائج بأن هناك نسبة 98,61% في أن يكون 125 عميل على الأكثر من عينة الدراسة راضين على جودة الخدمات التي تقدمها البنوك التجارية الجزائرية .

4. حساب إحتمال أن يكون هناك ما بين 100 و 120 عميل من عينة الدراسة راضين على جودة الخدمات التي تقدمها البنوك التجارية ؟

$$\begin{aligned} P(100 \leq X \leq 120) &= P(X \leq 120) - P(X \leq 100) \\ &= P\left(Z \leq \frac{120,5 - 110}{7,04}\right) - P\left(Z \leq \frac{100,5 - 110}{7,04}\right) \\ &= \varphi(1,49) - \varphi(-1,35) \\ &= \varphi(1,49) - [1 - \varphi(1,35)] \\ &= (0,9319) + (0,9115) - 1 \\ &= 0,8434 \end{aligned}$$

تبين النتائج بأن هناك نسبة 84,34% في أن يكون هناك ما بين 100 و 120 عميل من عينة الدراسة راضين على جودة الخدمات التي تقدمها البنوك التجارية الجزائرية .

تمرين رقم 11 :

لدينا من معطيات التمرين بأن متوسط الحدث يرتبط بوحدة زمنية تتمثل في عدد السيارات التي تتزود بالوقود في الساعة، مما يعنى أن قانون الإحتمال المناسب هو قانون بواسوني مع $\lambda = 20$.

لكن بما أن هذا المتوسط (المعدل) كبير جدا (أكبر من 15وحدة)، فإنه يفضل تقريبه بالتوزيع الطبيعي المعياري بالإعتماد على الصيغة الأتية؛

$$B(\lambda = 20) \sim N\left(\mu = \lambda \ ; \ \sigma = \sqrt{\lambda}\right)$$
$$B(\lambda = 20) \sim N\left(\mu = nP \ ; \ \sigma = \sqrt{npq}\right)$$

نلاحظ بأن ؛

$$n.P = (200)(0,55) \geq 5$$

وبناءا عليه، فإنه يصبح الإعتماد على التوزيع الطبيعي المعياري كتقريب للتوزيع الثنائي، وذلك وفق الكتابة التالية، بالاعتماد على الوسط الحسابي والإنحراف المعياري لهذه الدراسة تحسب كمايلي؛

$$\mu = \lambda = 20; \quad \sigma = \sqrt{20} = 4,472$$

1. حساب احتمال أن تتزود 15 سيارة بالضبط في الساعة الواحدة :

$$\begin{aligned} P(X = 15) &= P\left(Z \leq \frac{15,5 - 20}{4,472}\right) - P\left(Z \leq \frac{14,5 - 20}{4,472}\right) \\ &= \varphi(-1,01) - \varphi(-1,23) \\ &= [1 - \varphi(1,01)] - [1 - \varphi(1,23)] \\ &= \varphi(1,23) - \varphi(1,01) \\ &= (0,8907) - (0,8438) \\ &= 0,0469 \end{aligned}$$

تشير النتائج بأن هناك نسبة 4,69% من أن 15 سيارة بالضبط تتزود بالوقود في الساعة الواحدة بهذه المحطة .

2. حساب احتمال أن تتزود 26 سيارة على الأكثر في الساعة الواحدة :

$$\begin{aligned} P(X \leq 26) &= P\left(Z \leq \frac{26,5 - 20}{4,472}\right) \\ &= \varphi(1,45) \\ &= 0,9265 \end{aligned}$$

تشير النتائج بأن هناك نسبة 92,65% من أن 26 سيارة على الأكثر تتزود بالوقود في الساعة الواحدة بهذه المحطة .

3. حساب احتمال أن تتزود 18 سيارة على الأقل في الساعة الواحدة:

$$\begin{aligned}P(X \geq 18) &= 1 - P(X < 18)\\ &= 1 - P\left(Z < \frac{17{,}5 - 20}{4{,}472}\right)\\ &= 1 - \varphi(-0{,}56)\\ &= 1 - [1 - \varphi(0{,}56)]\\ &= 0{,}7123\end{aligned}$$

تشير النتائج بأن هناك نسبة 71,23% من أن 18 سيارة على الأقل تتزود بالوقود في الساعة الواحدة بهذه المحطة .

4. حساب احتمال أن تتزود ما بين 18 و 26 سيارة في الساعة الواحدة:

$$\begin{aligned}P(18 \leq X \leq 26) &= P(X \leq 26) - P(X \leq 18)\\ &= P\left(Z \leq \frac{26{,}5 - 20}{4{,}472}\right) - P\left(Z \leq \frac{18{,}5 - 20}{4{,}472}\right)\\ &= \varphi(1{,}45) - \varphi(-0{,}34)\\ &= \varphi(1{,}45) - [1 - \varphi(0{,}34)]\\ &= \varphi(1{,}45) + \varphi(0{,}34) - 1\\ &= (0{,}9265) + (0{,}6331) - 1\\ &= 0{,}5596\end{aligned}$$

تشير النتائج بأن هناك نسبة 55,96% من أن ما بين 18 و 26 سيارة تتزود بالوقود في الساعة الواحدة بهذه المحطة.

5. حساب احتمال أن تتزود 30 سيارة بالضبط من الديزل في هذه المحطة خلال اليوم : بما أن متوسط عدد السيارات التي تدخل المحطة كبير جدا (أكبر من 15وحدة)، فإنه سيتم اللجوء إلى تقريب القانون البواسوني بالتوزيع الطبيعي المعياري، وذلك وفق الكتابة الآتية؛

$$B(\lambda = 20) \sim N\left(\mu = nP \ ; \ \sigma = \sqrt{npq}\right)$$

ومنه فإن الوسط الحسابي والإنحراف المعياري لهذه الدراسة تحسب كما يلي؛

$$\mu = \lambda = (100)(0{,}25) \Rightarrow \mu = 25$$

$$\sigma = \sqrt{(100)(0{,}25)(0{,}75)} \Rightarrow \sigma = 4{,}33$$

وبناءا عليه فإن يتم حساب إحتمال أن تتزود 30 سيارة بالضبط من وقود الديزل في هذه المحطة خلال اليوم كمايلي؛

$$P(X=25)=P\left(Z\le\frac{30,5-25}{4,33}\right)-P\left(Z\le\frac{29,5-25}{4,33}\right)$$
$$=\varphi(1,27)-\varphi(1,04)$$
$$=(0,898)-(0,8508)$$
$$=0,0472$$

تشير النتائج بأن هناك نسبة 4,72% من أن 30 سيارة بالضبط تتزود بوقود الديزل خلال اليوم بهذه المحطة.

تمرين رقم 12 :

نعرف المتغير العشوائي (X) الذي يتبع توزيع ستودنت (t) بدرجات حرية (v)، حيث تأخذ قيم احتمال مختلفة حسب درجة الحرية، كما هو مبين في الجدول الأتي*؛

t Table

cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$	$t_{.9995}$
one-tail	0.50	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
two-tails	1.00	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850

$$t_{(\alpha;v)}=-t_{(1-\alpha;v)}$$
$$P\left(T\ge t_{(v)}\right)=P\left(T\le -t_{(v)}\right)=\alpha$$
$$P\left(T\le t_{(v)}\right)=P\left(T\ge -t_{(v)}\right)=1-\alpha$$
$$P\left(t_{(\alpha;v)}\le T\le t_{(\alpha';v)}\right)=F_{t_{(\alpha;v)}}-F_{t_{(\alpha';v)}}$$

1. تحديد القيم الحرجة (قيمة t) وفق الحالات الآتية :

- **قيم** $t_{(0,05;8)}$ **:** بتحديد تقاطع قيمة الصف $(v=8)$ مع قيمة العمود $(\alpha=0,05)$ نجد بأن؛

* يمكن الإعتماد على الرابط، كبديل لجدول توزيع ستودنت كمايلي : http://stattrek.com/online-calculator/t-distribution.aspx

$$t_{(0,05;8)} = 1{,}86 \Rightarrow \begin{cases} P(T \le -1{,}86) = P(T \ge 1{,}86) = 0{,}05 \\ P(T \le 1{,}86) = P(T \ge -1{,}86) = 0{,}95 \end{cases}$$

- قيم $t_{(0,1;8)}$: بتحديد تقاطع قيمة الصف $(v=8)$ مع قيمة العمود$(\alpha=0{,}1)$ نجد بأن ؛

$$t_{(0,1;8)} = 1{,}397$$

- قيم $t_{(0,95;8)}$: عندما تتجاوز قيمة الإحتمال 0,5 $(\alpha > 0{,}5)$، فإننا نلجأ إلى خاصية التوزيع كمايلي؛

$$t_{(\alpha;v)} = -t_{(1-\alpha;v)}$$

وبالتالي فإن القيمة الحرجة تكون في الجانب السالب، على النحو الأتي؛

$$t_{(0,95;8)} = -t_{(0,05;8)}$$

ثم بتحديد تقاطع قيمة الصف $(v=8)$ مع قيمة العمود$(\alpha=0{,}05)$ نجد بأن ؛

$$-t_{(0,05;8)} = 1{,}86 \Leftrightarrow t_{(0,05;8)} = (-1{,}86)$$

2. تحديد القيم الاحتمالية (α) وفق الحالات الآتية؛

- **قيم** $t_{(\alpha;8)} = 1{,}108$**:** بالبحث عن قيمة (t) تعادل1,108 ضمن صف درجة الحرية$(v=8)$، ثم إجراء الإسقاط العكسي (نحو الأعلى) فإننا نحصل على القيمة الإحتمالية التالية ؛

$$t_{(\alpha;8)} = 1{,}108 \Rightarrow \alpha = 0{,}15$$

وبناءا عليه، فإن هناك احتمال 15% أن يأخذ المتغير العشوائي (X) عند درجة حرية 8، قيم أكبر من 1,108، أي أن : $P(t_{(8)} > 1{,}108) = 0{,}15$.

- **قيم** $t_{(1-\alpha;10)} = 0{,}879$ **:** بالبحث عن قيمة (t) تعادل0,879 ضمن صف درجة الحرية$(v=10)$، ثم إجراء الإسقاط العكسي (نحو الأعلى) فإننا نحصل على القيمة الإحتمالية التالية ؛

$$t_{(1-\alpha;10)} = 0{,}879 \Rightarrow 1-\alpha = 0{,}2$$
$$\alpha = 1-0{,}2$$
$$\alpha = 0{,}8$$

وبناءا عليه، فإن هناك احتمال 80% أن يأخذ المتغير العشوائي (X) عند درجة حرية 8، قيم أكبر من 1,108، أي أن : $P(t_{(8)} > 1{,}108) = 0{,}15$.

- **قيم** $t_{(\alpha;8)} = -1{,}86$ **:** بما أن إشارة القيمة الحرجة سالبة، فإننا نقوم بإيجاد القيمة المقابلة لها في الجانب الموجب، وذلك بتحويلها إلى القيمة الأتية ؛

$$t_{(\alpha;8)} = -1{,}86 \Leftrightarrow t_{(1-\alpha;8)} = 1{,}86$$

ثم بالبحث عن قيمة (t) تعادل 1,86 ضمن صف درجة الحرية$(v=8)$، ثم إجراء الإسقاط العكسي (نحو الأعلى) فإننا نحصل على القيمة الإحتمالية التالية ؛

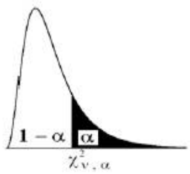
$$t_{(1-\alpha;8)} = 1{,}86 \Rightarrow 1-\alpha = 0{,}05$$
$$\alpha = 1-0{,}05$$
$$\alpha = 0{,}95$$

- **قيم** $P\left(1{,}064 \le t_{(\alpha;20)} \le 1{,}725\right)$ **:** بما أن القيمة الإحتمالية محصورة بين قيمتين حرجتين فإننا نقوم بتحديدها على النحو الأتي؛

$$P\left(1{,}064 \le t_{(\alpha;20)} \le 1{,}725\right) = F_{t_{(\alpha_1;20)}}(1{,}064) - F_{t_{(\alpha_2;20)}}(1{,}725)$$
$$= (0{,}15) - (0{,}05)$$
$$= 0{,}1$$

تمرين رقم 13 :

نعرف المتغير العشوائي (X) الذي يتبع توزيع كاي مربع (χ^2) بدرجات حرية (v)، حيث تأخذ قيم احتمال مختلفة حسب درجة الحرية، كما هو مبين في الجدول الأتي[*]؛



Percentage Points of the χ^2 Distribution; $\chi^2_{v,\alpha}$
$P(\chi^2 > \chi^2_{v,\alpha}) = \alpha$

	α														
v	0.001	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1	10.83	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.45	0.10	0.02					
2	13.82	10.60	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.58	0.21	0.10	0.05	0.02	0.01	
3	16.27	12.84	11.34	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.58	0.35	0.22	0.11	0.07	0.02
4	18.47	14.86	13.28	11.14	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.71	0.48	0.30	0.21	0.09
5	20.52	16.75	15.09	12.83	11.07	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.83	0.55	0.41	0.21
6	22.46	18.55	16.81	14.45	12.59	10.64	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.87	0.68	0.38
7	24.32	20.28	18.48	16.01	14.07	12.02	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.99	0.60
8	26.12	21.95	20.09	17.53	15.51	13.36	10.22	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34	0.86
9	27.88	23.59	21.67	19.02	16.92	14.68	11.39	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73	1.15
10	29.59	25.19	23.21	20.48	18.31	15.99	12.55	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16	1.48
11	31.26	26.76	24.72	21.92	19.68	17.28	13.70	10.34	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60	1.83
12	32.91	28.30	26.22	23.34	21.03	18.55	14.85	11.34	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07	2.21
13	34.53	29.82	27.69	24.74	22.36	19.81	15.98	12.34	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57	2.62
14	36.12	31.32	29.14	26.12	23.68	21.06	17.12	13.34	10.17	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07	3.04
15	37.70	32.80	30.58	27.49	25.00	22.31	18.25	14.34	11.04	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60	3.48
16	39.25	34.27	32.00	28.85	26.30	23.54	19.37	15.34	11.91	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14	3.94
17	40.79	35.72	33.41	30.19	27.59	24.77	20.49	16.34	12.79	10.09	8.67	7.56	6.41	5.70	4.42
18	42.31	37.16	34.81	31.53	28.87	25.99	21.60	17.34	13.68	10.86	9.39	8.23	7.01	6.26	4.90
19	43.82	38.58	36.19	32.85	30.14	27.20	22.72	18.34	14.56	11.65	10.12	8.91	7.63	6.84	5.41
20	45.31	40.00	37.57	34.17	31.41	28.41	23.83	19.34	15.45	12.44	10.85	9.59	8.26	7.43	5.92

الجدول رقم (01) : مقطع من جدول توزيع مربع كاي

1. تحديد قيم الإحتمال للحالات المدروسة عند درجة الحرية 10 $(v=10)$ **:** بالإعتماد على جدول توزيع مربع كاي، فإن قيم الإحتمال تأخذ القيم الأتية؛

- قيم $P\left(\chi^2_{(10)} \ge 3{,}25\right)$ ؛

[*] يمكن الإعتماد على الرابط، كبديل لجدول توزيع كاي مربع كمايلي : http://stattrek.com/online-calculator/chi-square.aspx

$$1.\ P\left(\chi^2_{(10)} \geq 3{,}25\right) = F_{\chi^2_{(10)}}(3{,}25)$$
$$= 0{,}975$$

- قيم $P\left(\chi^2 \leq 6{,}74\right)$ ؛

$$2.\ P\left(\chi^2_{(10)} \leq 6{,}74\right) = 1 - P\left(\chi^2_{(10)} > 6{,}74\right)$$
$$= 1 - F_{\chi^2_{(10)}}(6{,}74)$$
$$= 1 - 0{,}75$$
$$= 0{,}25$$

- قيم $P\left(2{,}56 \leq \chi^2 \leq 4{,}87\right)$ ؛

$$3.\ P\left(2{,}56 \leq \chi^2_{(10)} \leq 3{,}94\right) = F_{\chi^2_{(10)}}(2{,}56) - F_{\chi^2_{(10)}}(3{,}94)$$
$$= (0{,}99) - (0{,}95)$$
$$= 0{,}05$$

- قيم $P\left(\chi^2 = 3{,}94\right)$ ؛

"القاعدة أن قيم إحتمال المتغير العشوائي المتصل، تكون معدومة مهما تكون قيمة هذا المتغير، $P\left(\chi^2 = x\right) = 0$ "

حدد قيم المتغير العشوائي(X) عند حالات قيم الإحتمال الأتية

2. تحديد قيم المتغير العشوائي(X) للحالات المدروسة عند قيم الاحتمال ودرجات الحرية الآتية :

بالاعتماد على جدول توزيع مربع كاي، فإن المتغير العشوائي سيأخذ القيم الأتية؛

$a)\ P\left(\chi^2_{(10)} \geq x\right) = 0{,}25;\quad b)\ P\left(\chi^2_{(10)} \leq x\right) = 0{,}25;\quad c)\ P\left(\chi^2_{(16)} > x\right) = 0{,}9;\quad d)\ P\left(\chi^2_{(20)} < x\right) = 0{,}05$

- **قيم** $P\left(\chi^2_{(10)} \geq x\right) = 0{,}25$: تقدر قيمة المتغير (X) عند درجة الحرية 10 وبإحتمال 0,25 لتحقق (X) على الأقل كمايلي؛

$$1.\ P\left(\chi^2_{(10)} \geq x\right) = 0{,}25 \Leftrightarrow F_{\chi^2_{(10)}}(x) = 0{,}25$$

ومنه فإن قيم المتغير تحدد بـ :

$$(v = 10;\alpha = 0{,}25) \Rightarrow x = 12{,}55$$

- **قيم** $P\left(\chi^2_{(10)} \leq x\right) = 0{,}25$: تقدر قيمة المتغير (X) عند درجة الحرية 10 وبإحتمال 0,25 لتحقق (X) على الأكثر كمايلي؛

$$2.\ P\left(\chi^2_{(10)} \leq x\right) = 0{,}25 \Leftrightarrow 1 - P\left(\chi^2_{(10)} > x\right) = 0{,}25$$
$$P\left(\chi^2_{(10)} > x\right) = 0{,}75$$
$$F_{\chi^2_{(10)}}(x) = 0{,}75$$

ومنه فإن قيم المتغير تحدد بـ :

$$(v = 10;\alpha = 0{,}75) \Rightarrow x = 6{,}74$$

- **قيم** $P\left(\chi^2_{(16)} > x\right)=0{,}9$: تقدر قيمة المتغير (X) عند درجة الحرية 16 وبإحتمال 0,9 لتحقق (X) على الأقل كمايلي؛

3. $P\left(\chi^2_{(16)} > x\right)=0{,}9 \Leftrightarrow F_{\chi^2_{(16)}}(x)=0{,}9$

ومنه فإن قيم المتغير تحدد بـ :

$$(v=16;\alpha=0{,}9)\Rightarrow x=9{,}31$$

- **قيم** $P\left(\chi^2_{(20)} < x\right)=0{,}05$: تقدر قيمة المتغير (X) عند درجة الحرية 20 وبإحتمال 0,05 لتحقق (X) على الأكثر كمايلي؛

2. $P\left(\chi^2_{(20)} < x\right)=0{,}05 \Leftrightarrow 1-P\left(\chi^2_{(20)} \geq x\right)=0{,}05$

$$P\left(\chi^2_{(20)} \geq x\right)=0{,}95$$

$$F_{\chi^2_{(20)}}(x)=0{,}95$$

ومنه فإن قيم المتغير تحدد بـ :

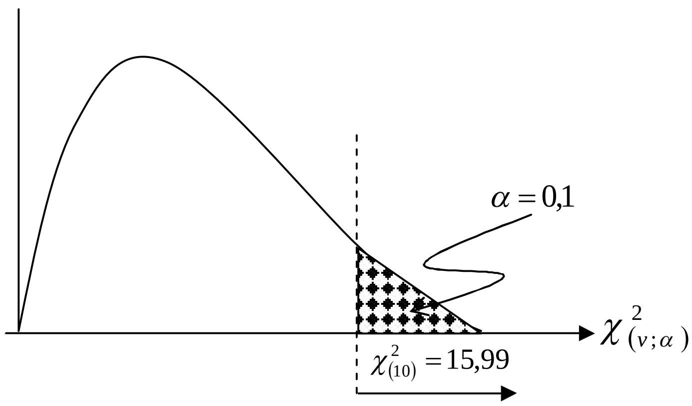
$$(v=10;\alpha=0{,}95)\Rightarrow x=10{,}85$$

3. تحديد القيمة الإحتمالية للمتغير العشوائي وفق الحالات التي تتبع توزيع كاي مربع كما يلي؛

❖ إحتمال المتغير العشوائي (X) عندما تفوق قيمته 15,99، وذلك عند درجة حرية 10، حيث تقدر حسابيا بـ :

$$P\left(\chi^2 > 15{,}99\right)=0{,}1$$

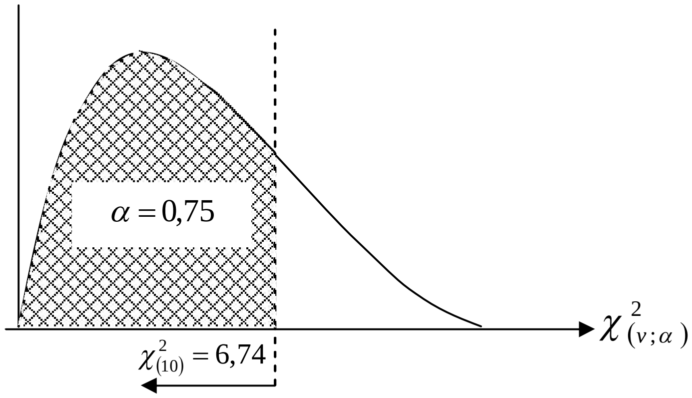
ويتم تحديدها على شكل توزيع كاي مربع كمايلي؛



❖ إحتمال المتغير العشوائي (X) عندما لا تتجاوز قيمته 6,74، عند درجة حرية 10، حيث تقدر حسابيا بـ :

$$P\left(\chi^2 < 6{,}74\right)=0{,}75$$

ويتم تحديدها على شكل توزيع كاي مربع كمايلي؛



تمرين رقم 14 :

نعرف المتغير العشوائي (X) الذي يتبع توزيع (F) بدرجات حرية درجات حرية $(v_1;v_2)$، حيث تأخذ قيم احتمال مختلفة حسب درجتي الحرية*.

$$F_{(\alpha;v_1;v_2)} = \frac{1}{F_{(1-\alpha;v_2;v_1)}}$$
$$P\left(T \geq F_{(v_1;v_2)}\right) = 1-\alpha$$
$$P\left(F \leq F_{(v_1;v_2)}\right) = \alpha$$
$$P\left(F_{(\alpha;v_1;v_2)} \leq F \leq F_{(\alpha;v'_1;v'_2)}\right) = \phi_{F_{(\alpha;v'_1;v'_2)}} - \phi_{F_{(\alpha;v_1;v_2)}}$$

1. تحديد قيم توزيع F (القيمة الحرجة) عند درجة حرية البسط ($v_1 = 7$) وبدرجة حرية المقام ($v_2 = 10$) عند مستوى ثقة 99%: يتم كتابة الصيغة الإحتمالية للتوزيع كمايلي؛

$$F_{(1-\alpha;v_1;v_2)} = F_{(0,99;6;10)}$$

بتحديد تقاطع قيمة العمود الموافقة لدرجة حرية البسط $(v_1=6)$ مع قيمة الصف الموافقة لدرجة حرية المقام $(v_2=10)$ عند مستوى معنوية 1% $(\alpha=0,01)$، ضمن جدول توزيع (F) نجد بأن؛

$$F_{(0,99;6;10)} = 5,39$$

2. تحديد القيم التوزيع F (القيمة الحرجة) وفق الحالات الآتية :

$$a)\ F_{(0,95;12;8)};\quad b)\ F_{(0,95;10;10)};\quad c)\ F_{(0,01;10;6)};\quad d)\ F_{(0,05;25;4)}$$

* يمكن الإعتماد على الرابط، كبديل لجدول توزيع كاي مربع كمايلي : http://stattrek.com/online-calculator/f-distribution.aspx

- قيم $F_{(0,95;12;8)}$ **:** بتحديد تقاطع قيمة العمود الموافقة لدرجة حرية البسط $(v_1=12)$ مع قيمة الصف الموافقة لدرجة حرية المقام $(v_2=8)$ عند مستوى معنوية $(\alpha=0,05)$، من جدول توزيع (F) نجد بأن؛

$$F_{(0,95;12;8)}=3,28$$

- قيم $F_{(0,95;10;10)}$ **:** عندما تكون درجة الحرية للبسط غير متضمنة في جدول التوزيع F، فإننا نلجأ إلى حساب الوسط الحسابي لأقرب القيمتين التي تقع ضمنها درجة الحرية المطلوبة، كما هو الحل في هذه الحالة، فإن جدول توزيع F في الملحق لا يتوفر على درجة حرية البسط تعادل 10 $(v_1=10)$، لذلك سوف نلجأ إلى حساب قيمة التوزيع بالإعتماد على متوسط قيمتي درجة الحرية للبسط بين 8 و12 عند نفس درجة حرية المقام وبمستوى معنوية $(\alpha=0,05)$ كمايلي؛

$$F_{(0,95;10;10)}=\frac{F_{(0,95;8;10)}+F_{(0,95;12;10)}}{2}$$
$$=\frac{3,07+2,91}{2}=2,99$$

- قيم $F_{(0,01;10;6)}$: بما أن القيمة الإحتمالية للتوزيع (المساحة) صغيرة، ولا توجد في جداول توزيع F، فإننا نلجأ إلى قاعدة متممة الإحتمال لتوزيع F التي تأخذ الشكل الأتي؛

$$F_{(\alpha;v_1;v_2)}=\frac{1}{F_{(1-\alpha;v_2;v_1)}}$$

وبالإعتماد على العلاقة نحصل على الشكل الأتي؛

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=0,01\\ v_1=10\\ v_2=6\end{array}\right\}\Rightarrow F_{(0,01;10;6)}=\frac{1}{F_{(0,99;6;10)}}$$
$$=\frac{1}{5,39}$$
$$=0,19$$

- قيم $F_{(0,05;25;4)}$: بالإعتماد على قاعدة متممة الإحتمال لتوزيع F ، نحصل على القيمة الحرجة عند مستوى معنوية 5% وبدرجتي حرية البسط 25 والمقام بـ 4، على النحو الأتي؛

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=0,05\\ v_1=25\\ v_2=4\end{array}\right\}\Rightarrow F_{(0,05;25;4)}=\frac{1}{F_{(0,95;4;25)}}$$

بالإنتقال إلى جدول توزيع F، وبتحديد تقاطع قيمة العمود $(v_1=25)$ مع قيمة الصف $(v_2=4)$ عند مستوى معنوية 5% $(\alpha=0,05)$، ضمن جدول توزيع (F) نجد بأن؛

$$F_{(0,95\,;4;25)} = 2{,}76$$

ومنه فإن القيمة التوزيع تقدر بـ :

$$F_{(0,05\,;25;4)} = \frac{1}{2{,}76} = 0{,}36$$

3. المقارنة بين قيم توزيع F ومربع توزيع t عديم الإتجاه، عند درجة حرية البسط ($v_1 = 1$) وبدرجات حرية المقام 10، 12 و20 عند مستوى معنوية 5% : بحساب القيمة الحرجة لكل توزيع، وذلك بالإستعانة بجداول التوزيع الإحتمالي على النحو الأتي؛

- إذا كانت درجة حرية المقام ($v_2 = 10$) :

$$F_{(1-\alpha\,;1\,;v_2)} = F_{(0,95\,;1;10)} = 4{,}96 \qquad t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\,;v\right)} = t_{(0,975\,;10)} = 2{,}228$$

وعند تربيع القيمة الحرجة لتوزيع (t) نحصل على النتيجة الآتية؛

$$\left[t_{(0,975\,;10)}\right]^2 = (2{,}228)^2 = 4{,}96 = F_{(0,95\,;1;10)}$$

- إذا كانت درجة حرية المقام ($v'_2 = 12$) :

$$F_{(0,95\,;1;12)} = 4{,}75 \qquad t_{(0,975\,;12)} = 2{,}179$$

وعند تربيع القيمة الحرجة لتوزيع (t) نحصل على النتيجة الآتية؛

$$\left[t_{(0,975\,;12)}\right]^2 = (2{,}179)^2 = 4{,}75 = F_{(0,95\,;1;12)}$$

- إذا كانت درجة حرية المقام ($v''_2 = 20$) :

$$F_{(0,95\,;1;20)} = 4{,}35 \qquad t_{(0,975\,;20)} = 2{,}086$$

وعند تربيع القيمة الحرجة لتوزيع (t) نحصل على النتيجة الآتية؛

$$\left[t_{(0,975\,;20)}\right]^2 = (2{,}086)^2 = 4{,}35 = F_{(0,95\,;1;20)}$$

مما سبق نستنتج بأن العلاقة بين توزيع F وتوزيع ستودنت t تأخذ الصيغة الأتية :

$$\boxed{F_{(1-\alpha\,;1\,;v_2)} = \left[t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\,;v\right)}\right]^2}$$

4. المقارنة بين قيم توزيع F و نسبة توزيع χ^2 إلى درجة الحرية $\left(\frac{\chi^2}{v}\right)$، وذلك عند درجة حرية المقام لانهائي $(v_2=\infty)$ وبدرجات حرية البسط التي تأخذ القيم 4، 5، 12 عند مستوى معنوية 5% : بحساب القيمة الحرجة لكل توزيع، وذلك بالإستعانة بجداول التوزيع الإحتمالي على النحو الأتي؛

- إذا كانت درجة حرية البسط $(v_1=4)$:

$$\chi^2_{(1-\alpha\,;v)}=\chi^2_{(0,95;4)}=9,49 \qquad F_{(1-\alpha\,;v_1\,;\infty)}=F_{(0,95\,;4\,;\infty)}=2,37$$

وعند تقدير نسبة القيمة الحرجة لتوزيع (χ^2) إلى درجة الحرية $\left(\frac{\chi^2_{(1-\alpha\,;v)}}{v}\right)$، نحصل على النتيجة الآتية؛

$$\frac{\chi^2_{(0,95;4)}}{4}=\frac{9,49}{4}$$
$$=2,37=F_{(0,95\,;4\,;\infty)}$$

- إذا كانت درجة حرية البسط $(v'_2=5)$:

$$\chi^2_{(0,95;5)}=11,07 \qquad F_{(0,95\,;5\,;\infty)}=2,21$$

وعند تقدير نسبة القيمة الحرجة لتوزيع (χ^2) إلى درجة الحرية، نحصل على النتيجة الآتية؛

$$\frac{\chi^2_{(0,95;5)}}{5}=\frac{11,07}{5}$$
$$=2,21=F_{(0,95\,;5\,;\infty)}$$

- إذا كانت درجة حرية البسط $(v''_2=12)$:

$$\chi^2_{(0,95;12)}=21,03 \qquad F_{(0,95\,;12\,;\infty)}=1,75$$

وعند تقدير نسبة القيمة الحرجة لتوزيع (χ^2) إلى درجة الحرية، نحصل على النتيجة الآتية؛

$$\frac{\chi^2_{(0,95;12)}}{12}=\frac{21,03}{12}$$
$$=1,75=F_{(0,95\,;5\,;\infty)}$$

مما سبق نستنتج بأن العلاقة بين توزيع F وتوزيع χ^2 تأخذ الصيغة الأتية :

$$\boxed{F_{(1-\alpha\,;v_1\,;\infty)}=\frac{\chi^2_{(1-\alpha\,;v)}}{v}}$$

5. المقارنة بين قيم توزيع F و مربع التوزيع الطبيعي غير المتجه ($Z_{\frac{\alpha}{2}}$) عند درجة حرية البسط ($v_1 = 1$) ودرجة حرية المقام لانهائية ($v_2 = \infty$) عند مستويات المعنوية 1%، 5%، 10%: بحساب القيمة الحرجة لكل توزيع، وذلك بالإستعانة بجداول التوزيع الإحتمالي على النحو الأتي؛

- إذا كانت مستوى المعنوية ($\alpha = 0,01$) :

$$Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = Z_{(0,995)} = 2,576 \qquad F_{(1-\alpha\,;1\,;\infty)} = F_{(0,99\,;1\,;\infty)} = 6,64$$

وعند تقدير تربيع القيمة الحرجة لتوزيع $Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ ، نحصل على النتيجة الآتية؛

$$\begin{aligned}\left[Z_{(0,995)}\right]^2 &= (2,576)^2 \\ &= 6,64 = F_{(0,99\,;1\,;\infty)}\end{aligned}$$

- إذا كانت مستوى المعنوية ($\alpha = 0,05$) :

$$Z_{(0,975)} = 1,96 \qquad F_{(0,95\,;1\,;\infty)} = 3,84$$

وعند تقدير تربيع القيمة الحرجة لتوزيع $Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ ، نحصل على النتيجة الآتية؛

$$\begin{aligned}\left[Z_{(0,975)}\right]^2 &= (1,96)^2 \\ &= 3,84 = F_{(0,95\,;1\,;\infty)}\end{aligned}$$

- إذا كانت مستوى المعنوية ($\alpha = 0,1$) :

$$Z_{(0,95)} = 1,645 \qquad F_{(0,9\,;1\,;\infty)} = 2,71$$

وعند تقدير تربيع القيمة الحرجة لتوزيع $Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ ، نحصل على النتيجة الآتية؛

$$\begin{aligned}\left[Z_{(0,95)}\right]^2 &= (1,645)^2 \\ &= 2,71 = F_{(0,90\,;1\,;\infty)}\end{aligned}$$

مما سبق نستنتج بأن العلاقة بين توزيع F والتوزيع الطبيعي Z، تأخذ الصيغة الأتية :

$$\boxed{F_{(1-\alpha\,;1\,;\infty)} = Z^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}$$

قائمة الملاحق

الملحق رقم (01) : ملحق دوال Excel

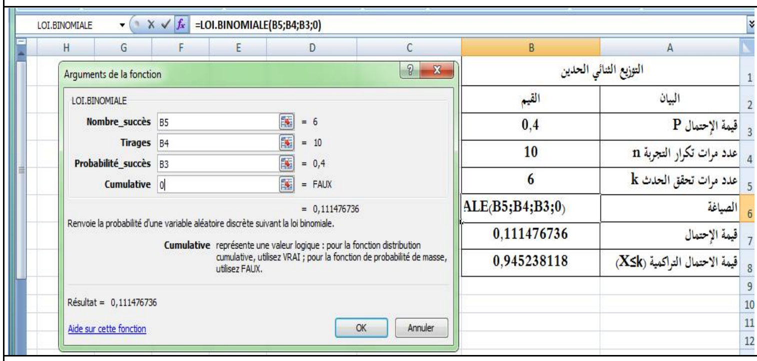
لإستخراج التوزيعات الإحتمالية المنفصلة والمتصلة

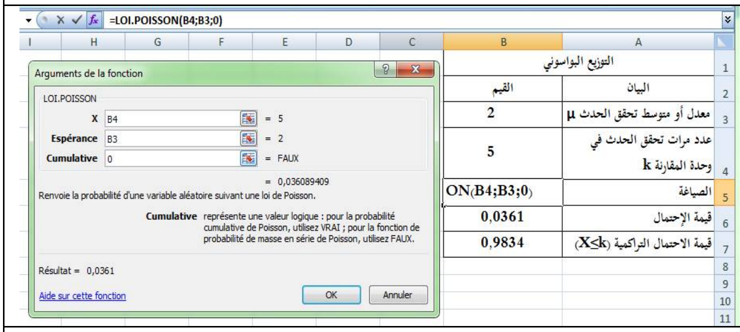
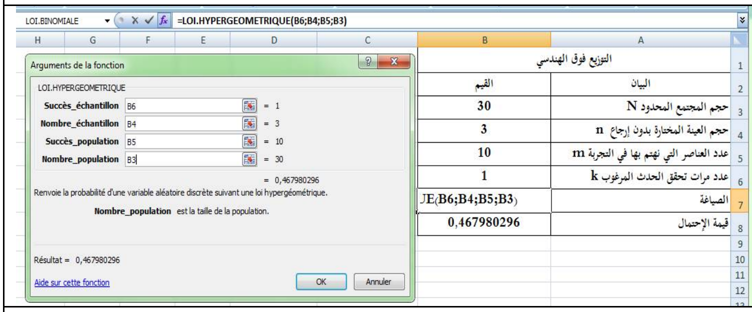
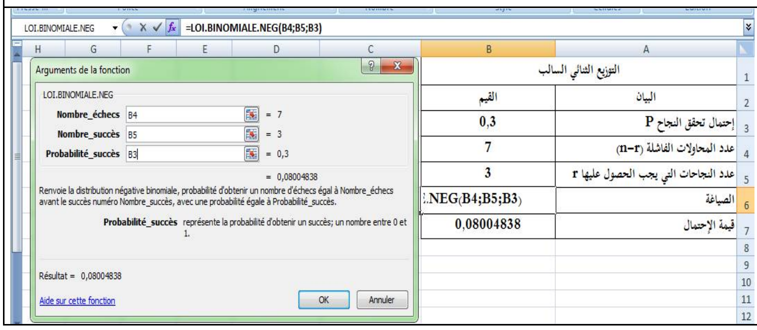
قبل الخوض في الدوال نشير إلى أن هناك نوعين من الصيغ، وذلك وفق للغرض من إستخدام الدالة ، حيث يمكن حساب القيمة الإحتمالية، أو حساب القيم الإحتمالية التراكمية، ونميز بين الصنفين على أساس قيمة خلية cumulative، كمايلي :

- عندما يكون الهدف حساب قيمة الإحتمال $P(X=k)$ ، ففي هذه الحالة نضع القيمة 0 أو نكتب FAUX ; FALSE؛
- عندما يكون الهدف حساب القيم الإحتمالية التراكمية $P(X \le k)$ ، ففي هذه الحالة نضع القيمة 1 أو نكتب VRAI ; TRUE.

وفيما يلي ملخص لدوال الإحصائية على برنامج Excel :

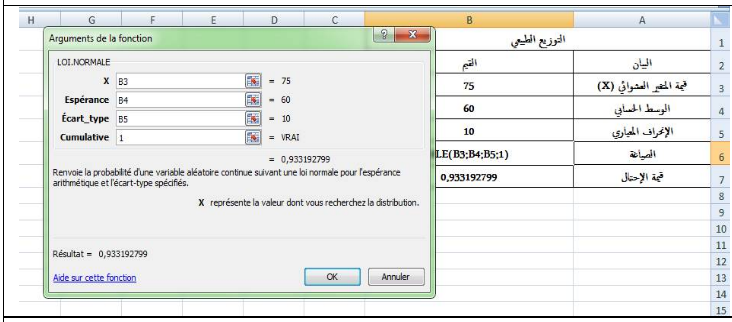
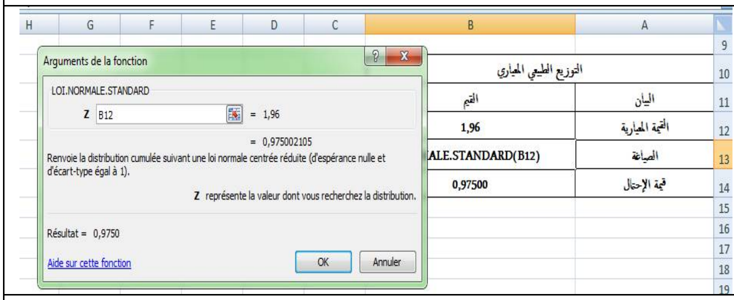
أولا- دوال التوزيعات الإحتمالية المنفصلة

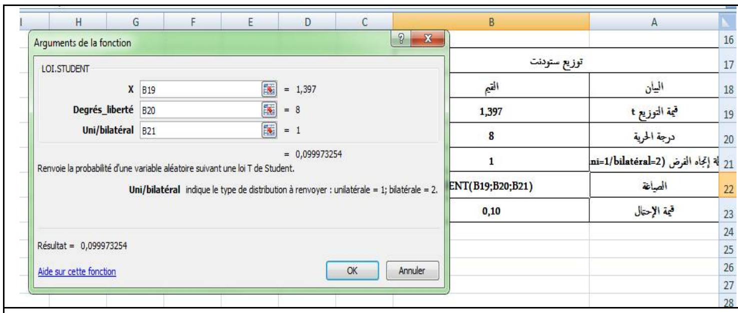
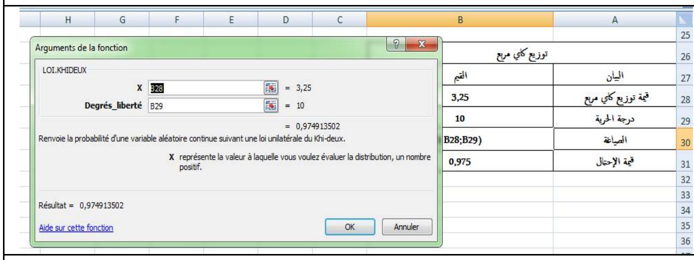
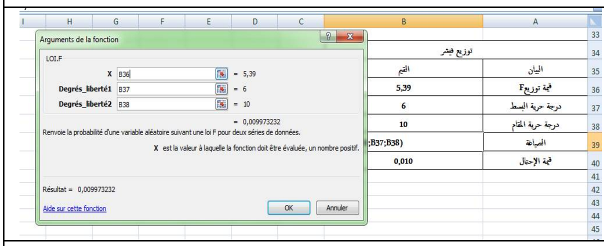
التوزيع	البيان		الصيغة
ثنائي الحدين	الدالة على	Fr	=LOI.BINOMIALE(k,n,P,cumulative)
	Excel	En	=BINOMDIST(k,n,P,cumulative)
	الصيغة الإحصائية للتوزيع		$X \sim B_i(n;P) \mapsto P(X=k)=C_n^k p^k q^{(n-k)}$ ou $P(X=k)=\left(\frac{n!}{(n-k)!k!}\right)\left[p^k q^{(n-k)}\right]$
	مثال		$n=10;\ P=0,4;\ \ k=6$ - قيمة الاحتمال $P(X=6)$ ؟ - قيمة الاحتمال التراكمية $P(X \le 6)$ ؟
	التطبيق على Excel		
التوزيع البواسوني	الدالة على	Fr	= POISSON(X,Espérance,cumulative)
	Excel	En	=POISSON(x,mean,cumulative)
	الصيغة الإحصائية للتوزيع		$P(X=r)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}$
	مثال		$\mu=2;\ \ k=5$

		- قيمة الاحتمال $P(X=5)$ ؟ - قيمة الاحتمال التراكمية $P(X\leq 5)$ ؟
	التطبيق على Excel	
فوق الهندسي	الدالة على Excel — Fr	= LOI.HYPERGEOMETRIQUE(x,n,M,N)
	الدالة على Excel — En	= HYPGEOMDIST(x,n,M,N)
	الصيغة الإحصائية للتوزيع	$P(X=k)=\dfrac{C_m^k . C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}$
	مثال	$N=30; \quad n=3 \quad M=10; \quad k=1$ - قيمة الاحتمال $P(X=1)$ ؟
	التطبيق على Excel	
الثنائي السالب	الدالة على Excel — Fr	=LOI.BINOMIALE.NEG (n,k,P)
	الدالة على Excel — En	=NEGBINOM.DIST(n,k,P)
	الصيغة الإحصائية للتوزيع	$X \sim B.N(n;r;P) \mapsto P(X=n)=C_{n-1}^{n-r}P^r(1-P)^{n-r}$
	مثال	$n=10 \quad P=0,3; \quad k=3$ - قيمة الاحتمال $P(X=10)$ ؟
	التطبيق على Excel	

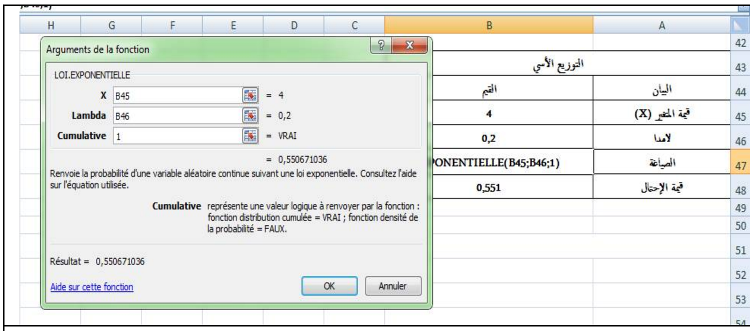
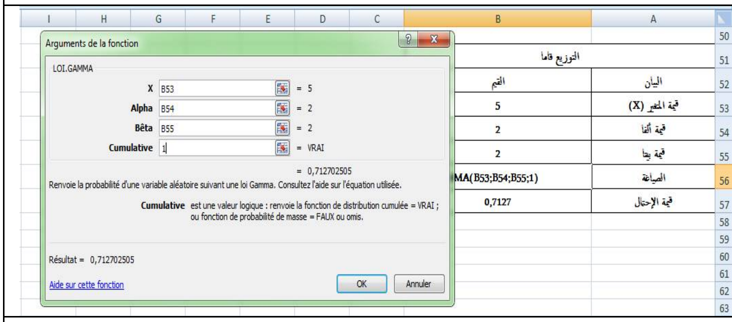
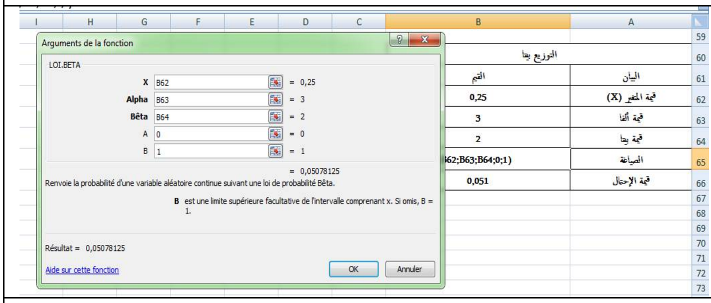
ثانيا- دوال التوزيعات الإحتمالية المتصلة

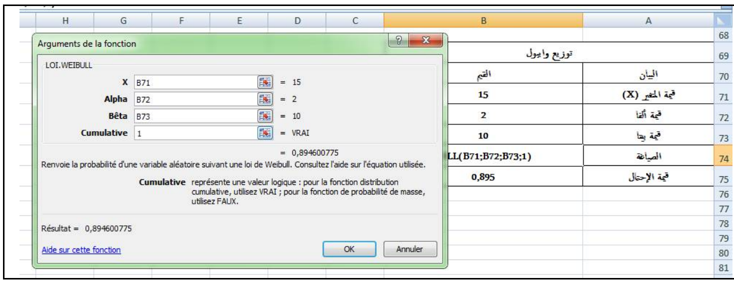
يتم التمييز في التوزيعات الإحتمالية المتصلة بين إيجاد قيمة التوزيع أو ما يصطلح عليه إحصائيا بالقيمة الحرجة، كما يمكن إيجاد القيمة الإحتمالية لتوزيع بمعنى المساحة تحت الشكل، ونظر لأن إهتمامنا منصب على القيم الإحتمالية فإننا سوف نركز على دوال برنامج Excel التي تمكن من حساب ذلك على النحو المبين في الجدول الأتي؛

التوزيع	البيان		الصيغة
التوزيع الطبيعي	الدالة على Excel	Fr	=LOI.NORMALE(x,moyenne,écart_type,cumulative)
		En	=NORMDIST(x,mean,standard_dev,cumulative)
	مثال		$x = 75;\ \mu = 60;\quad \sigma = 10$ - قيمة الاحتمال $P(X \le 75)$ ؟
	التطبيق على Excel		
التوزيع الطبيعي المعياري	الدالة على Excel	Fr	=LOI.NORMALE.STANDARD(z)
		En	= NORM.S.DIST(z,cumulative)
	مثال		$Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = 1{,}96\ ;\ \mu = 0;\quad \sigma = 1$ - قيمة الاحتمال $P(Z \le 1{,}96)$ ؟
			
توزيع ستيودنت	الدالة على Excel	Fr	= LOI.STUDENT(x,deg_liberté,uni/bilatéral)
		En	=TDIST(x,degrees_freedom,tails)
	مثال		$t_{\alpha} = 1{,}397\ ;\ df = 8$ - قيمة الاحتمال $P(T \le 1{,}397)$ ؟

		التطبيق على Excel	
=LOI.KHIDEUX(x,deg_liberté)	**Fr**	الدالة على Excel[1]	توزيع كاي مربع
=CHIDIST(x,degrees_freedom)	**En**		
$\chi_{\alpha}^{2}=3{,}25\,;\ df=10$ - قيمة الاحتمال $P\left(\chi^{2}\geq 3{,}25\right)$ ؟		مثال	
		التطبيق على Excel	
=LOI.F(x,deg_liberté1,deg_liberté2)	**Fr**	الدالة على Excel	توزيع فيشر F
=F.DIST(x,deg_freedom1,deg_freedom2,cumulative)	**En**		
$F_{(v_1\,;v_2)}=5{,}39\,;\ df_1=6;\ df_2=10$ - قيمة الاحتمال $P\left(F\leq 5{,}39\right)$ ؟		مثال	
		التطبيق على Excel	
= LOI.EXPONENTIELLE(x,lambda,cumul)	**Fr**	الدالة على Excel	التوزيع الأسي
=EXPONDIST(x,lambda,cumulative)	**En**		
$X=4\,;\ \lambda=\dfrac{1}{\theta}\Rightarrow\lambda=0{,}2$ - قيمة الاحتمال $P\left(X\leq 4\right)$ ؟		مثال	

[1] برنامج Excel في توزيع كاي مربع يعتمد على الفرضيات المتجهة (unilatéral) ناحية اليمين.

		التطبيق على Excel	
=LOI.GAMMA(x,alpha,bêta,cumul)	Fr	الدالة على Excel	توزيع غاما
=GAMMA.DIST(x,alpha,beta,cumulative)	En		
$X = 5\ ;\ \alpha = 2\ ;\ \beta = 2$ - قيمة الاحتمال $P(X \le 5)$ ؟		مثال	
		التطبيق على Excel	
=LOI.BETA(x;alpha;bêta;[A];[B])	Fr	الدالة على Excel	توزيع بيتا
=BETA.DIST(x,alpha,beta,cumulative,[A],[B])	En		
$X = 0{,}25\ ;\ \alpha = 3\ ;\ \beta = 2$ - قيمة الاحتمال $P(X \le 0{,}25)$ ؟		مثال	
		التطبيق على Excel	
=LOI.WEIBULL(x,alpha,bêta,cumul)	Fr	الدالة على Excel	التوزيع وايبول
= WEIBULL(x,alpha,beta,cumulative)	En		
$W = 15\ ;\ \beta = 2\ ;\ \theta = 10$ - قيمة الاحتمال $P(X \le 15)$ ؟		مثال	

	التطبيق على Excel	

* uni/bilatéral : فإذا كان التوزيع ذو إتجاه (unilatéral) نضع 1، أما إذا كان التوزيع عديم الإتجاه (bilatéral) نضع 2؛

** deg_liberté1 : درجة حرية البسط؛

*** deg_liberté 2 : درجة حرية المقام؛

**** [A] : تمثل الحد الأدني لقيم المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع بيتا، وفي حالة عدم تحديدها سيعتبر ها القيمة (0) تلقائيا؛

*****[B] : تمثل الحد الأعلى لقيم المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع بيتا، وفي حالة عدم تحديدها سيعتبر ها القيمة (1) تلقائيا؛

******cumulative : نضعها بالقيمة (1) لتعبر عن دالة التراكم الإحتمالي (CDF)، أما إذا كانت تتعلق بدالة الكثافة الإحتمالية، فإننا نضع بها القيمة (0) .

الملحق رقم (02) : التوزيع الثنائي

القيمة الإحتمالية لتوزيع

$$P(X=r)=\frac{n!}{(n-r)!r!}P^r(1-P)^{n-r}$$

		p									
N	r	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
1	0	0.9500	0.9000	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000
	1	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000	0.3500	0.4000	0.4500	0.5000
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.0950	0.1800	0.2550	0.3200	0.3750	0.4200	0.4550	0.4800	0.4950	0.5000
	2	0.0025	0.0100	0.0225	0.0400	0.0625	0.0900	0.1225	0.1600	0.2025	0.2500
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.1354	0.2430	0.3251	0.3840	0.4219	0.4410	0.4436	0.4320	0.4084	0.3750
	2	0.0071	0.0270	0.0574	0.0960	0.1406	0.1890	0.2389	0.2880	0.3341	0.3750
	3	0.0001	0.0010	0.0034	0.0080	0.0156	0.0270	0.0429	0.0640	0.0911	0.1250
4	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.1715	0.2916	0.3685	0.4096	0.4219	0.4116	0.3845	0.3456	0.2995	0.2500
	2	0.0135	0.0486	0.0975	0.1536	0.2109	0.2646	0.3105	0.3456	0.3675	0.3750
	3	0.0005	0.0036	0.0115	0.0256	0.0469	0.0756	0.1115	0.1536	0.2005	0.2500
	4	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0039	0.0081	0.0150	0.0256	0.0410	0.0625
5	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.2036	0.3281	0.3915	0.4096	0.3955	0.3602	0.3124	0.2592	0.2059	0.1563
	2	0.0214	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3364	0.3456	0.3369	0.3125
	3	0.0011	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.1811	0.2304	0.2757	0.3125
	4	0.0000	0.0005	0.0022	0.0064	0.0146	0.0284	0.0488	0.0768	0.1128	0.1563
	5	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0024	0.0053	0.0102	0.0185	0.0313
6	0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.2321	0.3543	0.3993	0.3932	0.3560	0.3025	0.2437	0.1866	0.1359	0.0938
	2	0.0305	0.0984	0.1762	0.2458	0.2966	0.3241	0.3280	0.3110	0.2780	0.2344
	3	0.0021	0.0146	0.0415	0.0819	0.1318	0.1852	0.2355	0.2765	0.3032	0.3125
	4	0.0001	0.0012	0.0055	0.0154	0.0330	0.0595	0.0951	0.1382	0.1861	0.2344
	5	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0044	0.0102	0.0205	0.0369	0.0609	0.0938
	6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0018	0.0041	0.0083	0.0156
7	0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.2573	0.3720	0.3960	0.3670	0.3115	0.2471	0.1848	0.1306	0.0872	0.0547
	2	0.0406	0.1240	0.2097	0.2753	0.3115	0.3177	0.2985	0.2613	0.2140	0.1641
	3	0.0036	0.0230	0.0617	0.1147	0.1730	0.2269	0.2679	0.2903	0.2918	0.2734
	4	0.0002	0.0026	0.0109	0.0287	0.0577	0.0972	0.1442	0.1935	0.2388	0.2734
	5	0.0000	0.0002	0.0012	0.0043	0.0115	0.0250	0.0466	0.0774	0.1172	0.1641
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0036	0.0084	0.0172	0.0320	0.0547
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0016	0.0037	0.0078
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.1373	0.0896	0.0548	0.0313
	2	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2965	0.2587	0.2090	0.1569	0.1094
	3	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.2786	0.2787	0.2568	0.2188
	4	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1875	0.2322	0.2627	0.2734
	5	0.0000	0.0004	0.0026	0.0092	0.0231	0.0467	0.0808	0.1239	0.1719	0.2188
	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0038	0.0100	0.0217	0.0413	0.0703	0.1094
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0033	0.0079	0.0164	0.0313
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0017	0.0039

		p									
N	r	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1004	0.0605	0.0339	0.0176
	2	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2162	0.1612	0.1110	0.0703
	3	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2716	0.2508	0.2119	0.1641
	4	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2194	0.2508	0.2600	0.2461
	5	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.1181	0.1672	0.2128	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0424	0.0743	0.1160	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0098	0.0212	0.0407	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0035	0.0083	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0020
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.3151	0.3874	0.3474	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098
	2	0.0746	0.1937	0.2759	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439
	3	0.0105	0.0574	0.1298	0.2013	0.2503	0.2668	0.2522	0.2150	0.1665	0.1172
	4	0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051
	5	0.0001	0.0015	0.0085	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051
	7	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	0.0229	0.0439
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010
11	0	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005
	1	0.3293	0.3835	0.3248	0.2362	0.1549	0.0932	0.0518	0.0266	0.0125	0.0054
	2	0.0867	0.2131	0.2866	0.2953	0.2581	0.1998	0.1395	0.0887	0.0513	0.0269
	3	0.0137	0.0710	0.1517	0.2215	0.2581	0.2568	0.2254	0.1774	0.1259	0.0806
	4	0.0014	0.0158	0.0536	0.1107	0.1721	0.2201	0.2428	0.2365	0.2060	0.1611
	5	0.0001	0.0025	0.0132	0.0388	0.0803	0.1321	0.1830	0.2207	0.2360	0.2256
	6	0.0000	0.0003	0.0023	0.0097	0.0268	0.0566	0.0985	0.1471	0.1931	0.2256
	7	0.0000	0.0000	0.0003	0.0017	0.0064	0.0173	0.0379	0.0701	0.1128	0.1611
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0037	0.0102	0.0234	0.0462	0.0806
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018	0.0052	0.0126	0.0269
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0007	0.0021	0.0054
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0005
12	0	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002
	1	0.3413	0.3766	0.3012	0.2062	0.1267	0.0712	0.0368	0.0174	0.0075	0.0029
	2	0.0988	0.2301	0.2924	0.2835	0.2323	0.1678	0.1088	0.0639	0.0339	0.0161
	3	0.0173	0.0852	0.1720	0.2362	0.2581	0.2397	0.1954	0.1419	0.0923	0.0537
	4	0.0021	0.0213	0.0683	0.1329	0.1936	0.2311	0.2367	0.2128	0.1700	0.1208
	5	0.0002	0.0038	0.0193	0.0532	0.1032	0.1585	0.2039	0.2270	0.2225	0.1934
	6	0.0000	0.0005	0.0040	0.0155	0.0401	0.0792	0.1281	0.1766	0.2124	0.2256
	7	0.0000	0.0000	0.0006	0.0033	0.0115	0.0291	0.0591	0.1009	0.1489	0.1934
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0024	0.0078	0.0199	0.0420	0.0762	0.1208
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0048	0.0125	0.0277	0.0537
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0025	0.0068	0.0161
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0029
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
13	0	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001
	1	0.3512	0.3672	0.2774	0.1787	0.1029	0.0540	0.0259	0.0113	0.0045	0.0016
	2	0.1109	0.2448	0.2937	0.2680	0.2059	0.1388	0.0836	0.0453	0.0220	0.0095
	3	0.0214	0.0997	0.1900	0.2457	0.2517	0.2181	0.1651	0.1107	0.0660	0.0349
	4	0.0028	0.0277	0.0838	0.1535	0.2097	0.2337	0.2222	0.1845	0.1350	0.0873
	5	0.0003	0.0055	0.0266	0.0691	0.1258	0.1803	0.2154	0.2214	0.1989	0.1571
	6	0.0000	0.0008	0.0063	0.0230	0.0559	0.1030	0.1546	0.1968	0.2169	0.2095
	7	0.0000	0.0001	0.0011	0.0058	0.0186	0.0442	0.0833	0.1312	0.1775	0.2095
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0011	0.0047	0.0142	0.0336	0.0656	0.1089	0.1571
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0009	0.0034	0.0101	0.0243	0.0495	0.0873
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0022	0.0065	0.0162	0.0349
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0012	0.0036	0.0095
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

		p									
N	r	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
14	0	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001
	1	0.3593	0.3559	0.2539	0.1539	0.0832	0.0407	0.0181	0.0073	0.0027	0.0009
	2	0.1229	0.2570	0.2912	0.2501	0.1802	0.1134	0.0634	0.0317	0.0141	0.0056
	3	0.0259	0.1142	0.2056	0.2501	0.2402	0.1943	0.1366	0.0845	0.0462	0.0222
	4	0.0037	0.0349	0.0998	0.1720	0.2202	0.2290	0.2022	0.1549	0.1040	0.0611
	5	0.0004	0.0078	0.0352	0.0860	0.1468	0.1963	0.2178	0.2066	0.1701	0.1222
	6	0.0000	0.0013	0.0093	0.0322	0.0734	0.1262	0.1759	0.2066	0.2088	0.1833
	7	0.0000	0.0002	0.0019	0.0092	0.0280	0.0618	0.1082	0.1574	0.1952	0.2095
	8	0.0000	0.0000	0.0003	0.0020	0.0082	0.0232	0.0510	0.0918	0.1398	0.1833
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0066	0.0183	0.0408	0.0762	0.1222
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0014	0.0049	0.0136	0.0312	0.0611
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0033	0.0093	0.0222
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0019	0.0056
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0009
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
15	0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.3658	0.3432	0.2312	0.1319	0.0668	0.0305	0.0126	0.0047	0.0016	0.0005
	2	0.1348	0.2669	0.2856	0.2309	0.1559	0.0916	0.0476	0.0219	0.0090	0.0032
	3	0.0307	0.1285	0.2184	0.2501	0.2252	0.1700	0.1110	0.0634	0.0318	0.0139
	4	0.0049	0.0428	0.1156	0.1876	0.2252	0.2186	0.1792	0.1268	0.0780	0.0417
	5	0.0006	0.0105	0.0449	0.1032	0.1651	0.2061	0.2123	0.1859	0.1404	0.0916
	6	0.0000	0.0019	0.0132	0.0430	0.0917	0.1472	0.1906	0.2066	0.1914	0.1527
	7	0.0000	0.0003	0.0030	0.0138	0.0393	0.0811	0.1319	0.1771	0.2013	0.1964
	8	0.0000	0.0000	0.0005	0.0035	0.0131	0.0348	0.0710	0.1181	0.1647	0.1964
	9	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0034	0.0116	0.0298	0.0612	0.1048	0.1527
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0030	0.0096	0.0245	0.0515	0.0916
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0074	0.0191	0.0417
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0016	0.0052	0.0139
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0032
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
16	0	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000
	1	0.3706	0.3294	0.2097	0.1126	0.0535	0.0228	0.0087	0.0030	0.0009	0.0002
	2	0.1463	0.2745	0.2775	0.2111	0.1336	0.0732	0.0353	0.0150	0.0056	0.0018
	3	0.0359	0.1423	0.2285	0.2463	0.2079	0.1465	0.0888	0.0468	0.0215	0.0085
	4	0.0061	0.0514	0.1311	0.2001	0.2252	0.2040	0.1553	0.1014	0.0572	0.0278
	5	0.0008	0.0137	0.0555	0.1201	0.1802	0.2099	0.2008	0.1623	0.1123	0.0667
	6	0.0001	0.0028	0.0180	0.0550	0.1101	0.1649	0.1982	0.1983	0.1684	0.1222
	7	0.0000	0.0004	0.0045	0.0197	0.0524	0.1010	0.1524	0.1889	0.1969	0.1746
	8	0.0000	0.0001	0.0009	0.0055	0.0197	0.0487	0.0923	0.1417	0.1812	0.1964
	9	0.0000	0.0000	0.0001	0.0012	0.0058	0.0185	0.0442	0.0840	0.1318	0.1746
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0014	0.0056	0.0167	0.0392	0.0755	0.1222
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0049	0.0142	0.0337	0.0667
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0040	0.0115	0.0278
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0029	0.0085
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
17	0	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.3741	0.3150	0.1893	0.0957	0.0426	0.0169	0.0060	0.0019	0.0005	0.0001
	2	0.1575	0.2800	0.2673	0.1914	0.1136	0.0581	0.0260	0.0102	0.0035	0.0010
	3	0.0415	0.1556	0.2359	0.2393	0.1893	0.1245	0.0701	0.0341	0.0144	0.0052
	4	0.0076	0.0605	0.1457	0.2093	0.2209	0.1868	0.1320	0.0796	0.0411	0.0182
	5	0.0010	0.0175	0.0668	0.1361	0.1914	0.2081	0.1849	0.1379	0.0875	0.0472
	6	0.0001	0.0039	0.0236	0.0680	0.1276	0.1784	0.1991	0.1839	0.1432	0.0944
	7	0.0000	0.0007	0.0065	0.0267	0.0668	0.1201	0.1685	0.1927	0.1841	0.1484
	8	0.0000	0.0001	0.0014	0.0084	0.0279	0.0644	0.1134	0.1606	0.1883	0.1855
	9	0.0000	0.0000	0.0003	0.0021	0.0093	0.0276	0.0611	0.1070	0.1540	0.1855
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0025	0.0095	0.0263	0.0571	0.1008	0.1484
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0026	0.0090	0.0242	0.0525	0.0944
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0081	0.0215	0.0472
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0021	0.0068	0.0182
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0016	0.0052

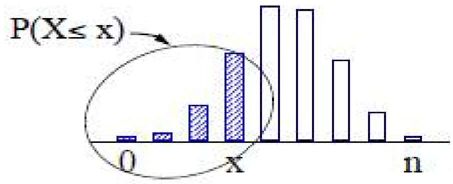
						p					
N	r	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
17	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
18	0	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3763	0.3002	0.1704	0.0811	0.0338	0.0126	0.0042	0.0012	0.0003	0.0001
	2	0.1683	0.2835	0.2556	0.1723	0.0958	0.0458	0.0190	0.0069	0.0022	0.0006
	3	0.0473	0.1680	0.2406	0.2297	0.1704	0.1046	0.0547	0.0246	0.0095	0.0031
	4	0.0093	0.0700	0.1592	0.2153	0.2130	0.1681	0.1104	0.0614	0.0291	0.0117
	5	0.0014	0.0218	0.0787	0.1507	0.1988	0.2017	0.1664	0.1146	0.0666	0.0327
	6	0.0002	0.0052	0.0301	0.0816	0.1436	0.1873	0.1941	0.1655	0.1181	0.0708
	7	0.0000	0.0010	0.0091	0.0350	0.0820	0.1376	0.1792	0.1892	0.1657	0.1214
	8	0.0000	0.0002	0.0022	0.0120	0.0376	0.0811	0.1327	0.1734	0.1864	0.1669
	9	0.0000	0.0000	0.0004	0.0033	0.0139	0.0386	0.0794	0.1284	0.1694	0.1855
	10	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0042	0.0149	0.0385	0.0771	0.1248	0.1669
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0010	0.0046	0.0151	0.0374	0.0742	0.1214
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0047	0.0145	0.0354	0.0708
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0045	0.0134	0.0327
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0039	0.0117
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0031
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
19	0	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3774	0.2852	0.1529	0.0685	0.0268	0.0093	0.0029	0.0008	0.0002	0.0000
	2	0.1787	0.2852	0.2428	0.1540	0.0803	0.0358	0.0138	0.0046	0.0013	0.0003
	3	0.0533	0.1796	0.2428	0.2182	0.1517	0.0869	0.0422	0.0175	0.0062	0.0018
	4	0.0112	0.0798	0.1714	0.2182	0.2023	0.1491	0.0909	0.0467	0.0203	0.0074
	5	0.0018	0.0266	0.0907	0.1636	0.2023	0.1916	0.1468	0.0933	0.0497	0.0222
	6	0.0002	0.0069	0.0374	0.0955	0.1574	0.1916	0.1844	0.1451	0.0949	0.0518
	7	0.0000	0.0014	0.0122	0.0443	0.0974	0.1525	0.1844	0.1797	0.1443	0.0961
	8	0.0000	0.0002	0.0032	0.0166	0.0487	0.0981	0.1489	0.1797	0.1771	0.1442
	9	0.0000	0.0000	0.0007	0.0051	0.0198	0.0514	0.0980	0.1464	0.1771	0.1762
	10	0.0000	0.0000	0.0001	0.0013	0.0066	0.0220	0.0528	0.0976	0.1449	0.1762
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0077	0.0233	0.0532	0.0970	0.1442
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0022	0.0083	0.0237	0.0529	0.0961
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0024	0.0085	0.0233	0.0518
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0082	0.0222
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0022	0.0074
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
20	0	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.3774	0.2702	0.1368	0.0576	0.0211	0.0068	0.0020	0.0005	0.0001	0.0000
	2	0.1887	0.2852	0.2293	0.1369	0.0669	0.0278	0.0100	0.0031	0.0008	0.0002
	3	0.0596	0.1901	0.2428	0.2054	0.1339	0.0716	0.0323	0.0123	0.0040	0.0011
	4	0.0133	0.0898	0.1821	0.2182	0.1897	0.1304	0.0738	0.0350	0.0139	0.0046
	5	0.0022	0.0319	0.1028	0.1746	0.2023	0.1789	0.1272	0.0746	0.0365	0.0148
	6	0.0003	0.0089	0.0454	0.1091	0.1686	0.1916	0.1712	0.1244	0.0746	0.0370
	7	0.0000	0.0020	0.0160	0.0545	0.1124	0.1643	0.1844	0.1659	0.1221	0.0739
	8	0.0000	0.0004	0.0046	0.0222	0.0609	0.1144	0.1614	0.1797	0.1623	0.1201
	9	0.0000	0.0001	0.0011	0.0074	0.0271	0.0654	0.1158	0.1597	0.1771	0.1602
	10	0.0000	0.0000	0.0002	0.0020	0.0099	0.0308	0.0686	0.1171	0.1593	0.1762
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0030	0.0120	0.0336	0.0710	0.1185	0.1602
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0039	0.0136	0.0355	0.0727	0.1201
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0045	0.0146	0.0366	0.0739
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0049	0.0150	0.0370
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0013	0.0049	0.0148
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0013	0.0046
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
	19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

الملحق رقم (03) : التوزيع الثنائي

لدالة التراكم الاحتمالي لتوزيع

$$F(x)=P(X\le x_i)=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{n!}{(n-x_i)!\,x_i!}P^{x_i}(1-P)^{n-x_i}\right)$$

x_i =**k** : le nombre d’occurrences parmi **n**



n = 10

k	p 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
1	0,9139	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
2	0,9885	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
3	0,9990	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
4	0,9999	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
5	1,0000	0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n=20

k	p 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,7358	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0021	0,0005	0,0001	0,0000
2	0,9245	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0121	0,0036	0,0009	0,0002
3	0,9841	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0444	0,0160	0,0049	0,0013
4	0,9974	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,1182	0,0510	0,0189	0,0059
5	0,9997	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,2454	0,1256	0,0553	0,0207
6	1,0000	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,4166	0,2500	0,1299	0,0577
7	1,0000	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,6010	0,4159	0,2520	0,1316
8	1,0000	0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,7624	0,5956	0,4143	0,2517
9	1,0000	1,0000	0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,8782	0,7553	0,5914	0,4119
10	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9961	0,9829	0,9468	0,8725	0,7507	0,5881
11	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9949	0,9804	0,9435	0,8692	0,7483
12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9987	0,9940	0,9790	0,9420	0,8684
13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9935	0,9786	0,9423
14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9936	0,9793
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9941
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987
17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n = 25

k \ p	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,2774	0,0718	0,0172	0,0038	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,6424	0,2712	0,0931	0,0274	0,0070	0,0016	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000
2	0,8729	0,5371	0,2537	0,0982	0,0321	0,0090	0,0021	0,0004	0,0001	0,0000
3	0,9659	0,7636	0,4711	0,2340	0,0962	0,0332	0,0097	0,0024	0,0005	0,0001
4	0,9928	0,9020	0,6821	0,4207	0,2137	0,0905	0,0320	0,0095	0,0023	0,0005
5	0,9988	0,9666	0,8385	0,6167	0,3783	0,1935	0,0826	0,0294	0,0086	0,0020
6	0,9998	0,9905	0,9305	0,7800	0,5611	0,3407	0,1734	0,0736	0,0258	0,0073
7	1,0000	0,9977	0,9745	0,8909	0,7265	0,5118	0,3061	0,1536	0,0639	0,0216
8	1,0000	0,9995	0,9920	0,9532	0,8506	0,6769	0,4668	0,2735	0,1340	0,0539
9	1,0000	0,9999	0,9979	0,9827	0,9287	0,8106	0,6303	0,4246	0,2424	0,1148
10	1,0000	1,0000	0,9995	0,9944	0,9703	0,9022	0,7712	0,5858	0,3843	0,2122
11	1,0000	1,0000	0,9999	0,9985	0,9893	0,9558	0,8746	0,7323	0,5426	0,3450
12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9966	0,9825	0,9396	0,8462	0,6937	0,5000
13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9940	0,9745	0,9222	0,8173	0,6550
14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9982	0,9907	0,9656	0,9040	0,7878
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9971	0,9868	0,9560	0,8852
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9957	0,9826	0,9461
17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9942	0,9784
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9927
19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9980
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995
21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n = 50

k \ p	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,0769	0,0052	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,2794	0,0338	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,5405	0,1117	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,7604	0,2503	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,8964	0,4312	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,9622	0,6161	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,9882	0,7702	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
7	0,9968	0,8779	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000
8	0,9992	0,9421	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0025	0,0002	0,0000	0,0000
9	0,9998	0,9755	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0067	0,0008	0,0001	0,0000
10	1,0000	0,9906	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0160	0,0022	0,0002	0,0000
11	1,0000	0,9968	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0342	0,0057	0,0006	0,0000
12	1,0000	0,9990	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0661	0,0133	0,0018	0,0002
13	1,0000	0,9997	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,1163	0,0280	0,0045	0,0005
14	1,0000	0,9999	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,1878	0,0540	0,0104	0,0013
15	1,0000	1,0000	0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,2801	0,0955	0,0220	0,0033
16	1,0000	1,0000	0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,3889	0,1561	0,0427	0,0077
17	1,0000	1,0000	0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,5060	0,2369	0,0765	0,0164
18	1,0000	1,0000	0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,6216	0,3356	0,1273	0,0325
19	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9861	0,9152	0,7264	0,4465	0,1974	0,0595
20	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9937	0,9522	0,8139	0,5610	0,2862	0,1013
21	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9974	0,9749	0,8813	0,6701	0,3900	0,1611
22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9990	0,9877	0,9290	0,7660	0,5019	0,2399
23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9944	0,9604	0,8438	0,6134	0,3359
24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9976	0,9793	0,9022	0,7160	0,4439
25	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9900	0,9427	0,8034	0,5561
26	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9955	0,9686	0,8721	0,6641
27	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9981	0,9840	0,9220	0,7601
28	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9924	0,9556	0,8389
29	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9966	0,9765	0,8987
30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9986	0,9884	0,9405
31	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9947	0,9675
32	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9978	0,9836
33	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9923
34	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9967
35	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987
36	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995
37	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
38	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

الملحق رقم (04) : التوزيع البواسوني

القيمة الإحتمالية لتوزيع

$$P(X = r) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{r}}{r!}$$

	λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
r	0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
	1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
	2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
	3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
	4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
	5			0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
	6					0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
	7							0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	8										0,0000

	λ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
r	0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
	1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3230	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707
	2	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707
	3	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1804
	4	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902
	5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361
	6	0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120
	7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0027	0,0034
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009
	9			0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
	10						0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	11									0,0000	0,0000

	λ	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
r	0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
	1	0,1083	0,2438	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596	0,1494
	2	0,0053	0,2681	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314	0,2240
	3	0,0000	0,1966	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,2240
	4	0,0000	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,1680
	5	0,0000	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940	0,1008
	6	0,0000	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504
	7	0,0000	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163	0,0188	0,0216
	8	0,0000	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081
	9			0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027
	10						0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008
	11						0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
	12						0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	13									0,0000	0,0000

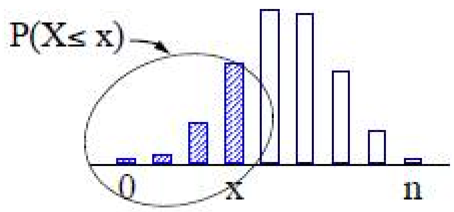
	λ	2,5	3	4	4,5	5	5,5	6	7	8	9
r	0	0,0821	0,0498	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
	1	0,2052	0,1494	0,0733	0,0500	0,0337	0,0225	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
	2	0,2565	0,2240	0,1465	0,1125	0,0842	0,0618	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
	3	0,2138	0,2240	0,1954	0,1687	0,1404	0,1133	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
	4	0,1336	0,1680	0,1954	0,1898	0,1755	0,1558	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337
	5	0,0668	0,1008	0,1563	0,1708	0,1755	0,1714	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
	6	0,0278	0,0504	0,1042	0,1281	0,1462	0,1571	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
	7	0,0099	0,0216	0,0595	0,0824	0,1044	0,1234	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
	8	0,0031	0,0081	0,0298	0,0463	0,0653	0,0849	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
	9	0,0009	0,0027	0,0132	0,0232	0,0363	0,0519	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
	10	0,0002	0,0008	0,0053	0,0104	0,0181	0,0285	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
	11	0,0000	0,0002	0,0019	0,0043	0,0082	0,0143	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
	12		0,0001	0,0006	0,0016	0,0034	0,0065	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728
	13		0,0000	0,0002	0,0006	0,0013	0,0028	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504

الملحق رقم (05) : التوزيع البواسوني

لدالة التراكم الاحتمالي لتوزيع

$$F(x)=P(X\le x_i)=\sum_{i=0}^{n}\left(e^{-\mu}\frac{\mu^{x_i}}{x_i!}\right)$$

x : le nombre d'occurrences parmi **n**

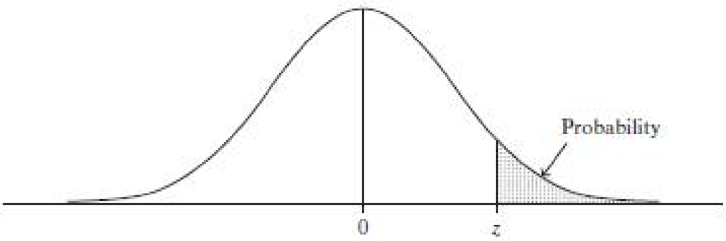


	μ 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
x 0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781	0,8442	0,8088	0,7725	0,7358
2	0,9998	0,9989	0,9964	0,9921	0,9856	0,9769	0,9659	0,9526	0,9371	0,9197
3	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9982	0,9966	0,9942	0,9909	0,9865	0,9810
4	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9977	0,9963
5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994
6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

	μ 1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x 0	0,2231	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,5578	0,4060	0,1991	0,0916	0,0404	0,0174	0,0073	0,0030	0,0012	0,0005
2	0,8088	0,6767	0,4232	0,2381	0,1247	0,0620	0,0296	0,0138	0,0062	0,0028
3	0,9344	0,8571	0,6472	0,4335	0,2650	0,1512	0,0818	0,0424	0,0212	0,0103
4	0,9814	0,9473	0,8153	0,6288	0,4405	0,2851	0,1730	0,0996	0,0550	0,0293
5	0,9955	0,9834	0,9161	0,7851	0,6160	0,4457	0,3007	0,1912	0,1157	0,0671
6	0,9991	0,9955	0,9665	0,8893	0,7622	0,6063	0,4497	0,3134	0,2068	0,1301
7	0,9998	0,9989	0,9881	0,9489	0,8666	0,7440	0,5987	0,4530	0,3239	0,2202
8	1,0000	0,9998	0,9962	0,9786	0,9319	0,8472	0,7291	0,5925	0,4557	0,3328
9	1,0000	1,0000	0,9989	0,9919	0,9682	0,9161	0,8305	0,7166	0,5874	0,4579
10	1,0000	1,0000	0,9997	0,9972	0,9863	0,9574	0,9015	0,8159	0,7060	0,5830
11	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9945	0,9799	0,9467	0,8881	0,8030	0,6968
12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9980	0,9912	0,9730	0,9362	0,8758	0,7916
13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9964	0,9872	0,9658	0,9261	0,8645
14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9986	0,9943	0,9827	0,9585	0,9165
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9976	0,9918	0,9780	0,9513
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9963	0,9889	0,9730
17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9947	0,9857
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9976	0,9928
19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9989	0,9965
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984
21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9993
22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997
23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

جدول القيم الحرجة لتوزيع الطبيعي المعياري (Z)

TABLE A: Normal curve tail probabilities. Standard normal probability in right-hand tail (for negative values of *z*, probabilities are found by symmetry).

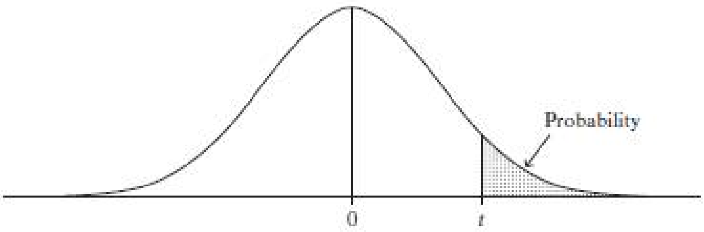


z	Second Decimal Place of z .00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0352	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
3.0	.00135									
3.5	.000233									
4.0	.0000317									
4.5	.00000340									
5.0	.000000287									

Source: R. E. Walpole, *Introduction to Statistics* (New York: Macmillan, 1968).

جدول القيم الحرجة لتوزيع t

TABLE B: *t* Distribution Critical Values

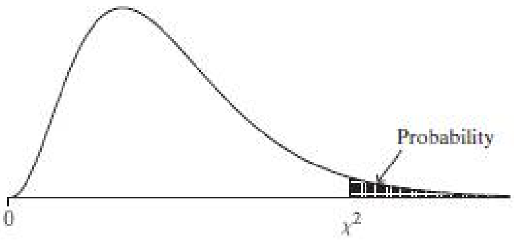


	Confidence Level					
	80%	90%	95%	98%	99%	99.8%
	Right-Tail Probability					
df	$t_{.100}$	$t_{.050}$	$t_{.025}$	$t_{.010}$	$t_{.005}$	$t_{.001}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.611
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.091

Source: "Table of Percentage Points of the *t*-Distribution." Computed by Maxine Merrington, Biometrika, 32 (1941): 300. Reproduced by permission of the Biometrika trustees.

جدول القيم الحرجة لتوزيع χ^2

TABLE C: Chi-Squared Distribution Values for Various Right-Tail Probabilities

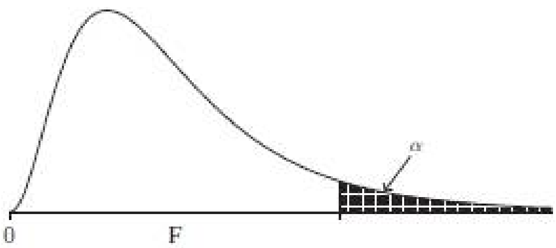


	Right-Tail Probability						
df	0.250	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
1	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.83
2	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	13.82
3	4.11	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	16.27
4	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47
5	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52
6	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46
7	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32
8	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96	26.12
9	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88
10	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59
11	13.70	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76	31.26
12	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91
13	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53
14	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12
15	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70
16	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25
17	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79
18	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31
19	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82
20	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.32
25	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62
30	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70
40	45.62	51.80	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40
50	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66
60	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61
70	77.58	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2	112.3
80	88.13	96.58	101.8	106.6	112.3	116.3	124.8
90	98.65	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	137.2
100	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	149.5

Source: Calculated using *StaTable*, software from Cytel Software, Cambridge, MA.

جدول القيم الحرجة لتوزيع F

TABLE D: *F* Distribution



$\alpha = .05$

df_2 \ df_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	238.9	243.9	249.0	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.37	19.41	19.45	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.84	8.74	8.64	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.04	5.91	5.77	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.82	4.68	4.53	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.15	4.00	3.84	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.73	3.57	3.41	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.44	3.28	3.12	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.23	3.07	2.90	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.07	2.91	2.74	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	2.95	2.79	2.61	2.40
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.85	2.69	2.50	2.30
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.77	2.60	2.42	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.70	2.53	2.35	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.64	2.48	2.29	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.59	2.42	2.24	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.55	2.38	2.19	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.51	2.34	2.15	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.48	2.31	2.11	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.45	2.28	2.08	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.42	2.25	2.05	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.40	2.23	2.03	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.38	2.20	2.00	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.36	2.18	1.98	1.73
25	4.24	3.38	2.99	2.76	2.60	2.49	2.34	2.16	1.96	1.71
26	4.22	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.32	2.15	1.95	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.30	2.13	1.93	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.44	2.29	2.12	1.91	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.54	2.43	2.28	2.10	1.90	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.27	2.09	1.89	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.18	2.00	1.79	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.10	1.92	1.70	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.02	1.83	1.61	1.25
∞	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.09	1.94	1.75	1.52	1.00

Source: From Table V of R. A. Fisher and F. Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, published by Longman Group Ltd., London, 1974. (Previously published by Oliver & Boyd, Edinburgh.) Reprinted by permission of the authors and publishers.

TABLE D: (continued)

$\alpha = .01$

df_2 \ df_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6234	6366
2	98.49	99.01	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.42	99.46	99.50
3	34.12	30.81	29.46	28.71	28.24	27.91	27.49	27.05	26.60	26.12
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.80	14.37	13.93	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.27	9.89	9.47	9.02
6	13.74	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.10	7.72	7.31	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.84	6.47	6.07	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.03	5.67	5.28	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.47	5.11	4.73	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.06	4.71	4.33	3.91
11	9.65	7.20	6.22	5.67	5.32	5.07	4.74	4.40	4.02	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.50	4.16	3.78	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.20	4.86	4.62	4.30	3.96	3.59	3.16
14	8.86	6.51	5.56	5.03	4.69	4.46	4.14	3.80	3.43	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.00	3.67	3.29	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	3.89	3.55	3.18	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.79	3.45	3.08	2.65
18	8.28	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.71	3.37	3.00	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.63	3.30	2.92	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.56	3.23	2.86	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.51	3.17	2.80	2.36
22	7.94	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.45	3.12	2.75	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.41	3.07	2.70	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.36	3.03	2.66	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.32	2.99	2.62	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.29	2.96	2.58	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.26	2.93	2.55	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.23	2.90	2.52	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.20	2.87	2.49	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.17	2.84	2.47	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	2.99	2.66	2.29	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.82	2.50	2.12	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.66	2.34	1.95	1.38
∞	6.64	4.60	3.78	3.32	3.02	2.80	2.51	2.18	1.79	1.00

TABLE D: (continued)

$\alpha = .001$

df_2 \ df_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	405284	500000	540379	562500	576405	585937	598144	610667	623497	636619
2	998.5	999.0	999.2	999.2	999.3	999.3	999.4	999.4	999.5	999.5
3	167.5	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	130.6	128.3	125.9	123.5
4	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.53	49.00	47.41	45.77	44.05
5	47.04	36.61	33.20	31.09	29.75	28.84	27.64	26.42	25.14	23.78
6	35.51	27.00	23.70	21.90	20.81	20.03	19.03	17.99	16.89	15.75
7	29.22	21.69	18.77	17.19	16.21	15.52	14.63	13.71	12.73	11.69
8	25.42	18.49	15.83	14.39	13.49	12.86	12.04	11.19	10.30	9.34
9	22.86	16.39	13.90	12.56	11.71	11.13	10.37	9.57	8.72	7.81
10	21.04	14.91	12.55	11.28	10.48	9.92	9.20	8.45	7.64	6.76
11	19.69	13.81	11.56	10.35	9.58	9.05	8.35	7.63	6.85	6.00
12	18.64	12.97	10.80	9.63	8.89	8.38	7.71	7.00	6.25	5.42
13	17.81	12.31	10.21	9.07	8.35	7.86	7.21	6.52	5.78	4.97
14	17.14	11.78	9.73	8.62	7.92	7.43	6.80	6.13	5.41	4.60
15	16.59	11.34	9.34	8.25	7.57	7.09	6.47	5.81	5.10	4.31
16	16.12	10.97	9.00	7.94	7.27	6.81	6.19	5.55	4.85	4.06
17	15.72	10.66	8.73	7.68	7.02	6.56	5.96	5.32	4.63	3.85
18	15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	5.76	5.13	4.45	3.67
19	15.08	10.16	8.28	7.26	6.61	6.18	5.59	4.97	4.29	3.52
20	14.82	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.44	4.82	4.15	3.38
21	14.59	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.31	4.70	4.03	3.26
22	14.38	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.19	4.58	3.92	3.15
23	14.19	9.47	7.67	6.69	6.08	5.65	5.09	4.48	3.82	3.05
24	14.03	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	4.99	4.39	3.74	2.97
25	13.88	9.22	7.45	6.49	5.88	5.46	4.91	4.31	3.66	2.89
26	13.74	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	4.83	4.24	3.59	2.82
27	13.61	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	4.76	4.17	3.52	2.75
28	13.50	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.69	4.11	3.46	2.70
29	13.39	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.64	4.05	3.41	2.64
30	13.29	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.58	4.00	3.36	2.59
40	12.61	8.25	6.60	5.70	5.13	4.73	4.21	3.64	3.01	2.23
60	11.97	7.76	6.17	5.31	4.76	4.37	3.87	3.31	2.69	1.90
120	11.38	7.31	5.79	4.95	4.42	4.04	3.55	3.02	2.40	1.56
∞	10.83	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.27	2.74	2.13	1.00

قائمة المراجع

قائمة المراجع

1. أحمد فؤاد عطية، عصام أبو القاسم أحمد " **مقدمة في طرق التحليل الاحصائي** " ج01، مطبعة التقوى، مصر، 2006.
2. أمحمد معتوق "**الإحصاء الرياضي والنماذج الإحصائية** " ديوان المطبوعات الجامعية -بن عكنون ، الجزائر، 2007 .
3. بوعبد الله صالح "**محاضرات الإحصاء الرياضي**" مطبوعة دروس مقدمة بكلية العلوم الاقتصادية –جامعة المسيلة، الجزائر، 2006 .
4. حسين ياسين طعمة، إيمان حسين حنوش " **أساليب الاحصاء التطبيقي**" دار صفاء للطباعة والنشر و التوزيع، عمان – الأردن، 2009 .
5. دومنينيك سالفاتور " **الاحصاء والاقتصاد القياسي** " (ترجمة : سعدية حافظ منتصر)، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، القاهرة –مصر، ط6، 2013.
6. عبد الحفيظ مصطفى "**نظرية الاحتمالات : مبادئ وتطبيقات** "ج01، ديوان المطبوعات الجامعية -بن عكنون ، الجزائر، 2008 .
7. عبد الحفيظ مصطفى "**نظرية الاحتمالات : مبادئ وتطبيقات** "ج02، ديوان المطبوعات الجامعية -بن عكنون ، الجزائر، 2008 .
8. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي " **الاحصاء للعلوم الادارية و التطبيقية** " دار الشروق – عمان، الأردن ، 1997 .
9. عبد القادر مطالس " **مبادئ الاحتمالات والاقتصاد القياسي**"، دار النشر الجامعي الجديد –تلمسان ، الجزائر، 2017 .
10. عبد مضحي جبار "**مقدمة في نظريات الإحتمالات** " دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان -الأردن، 2011 .
11. محمد بداوي " **الاحتمالات** " دار هومة للطباعة والنشر التوزيع، الجزائر، 2017 .
12. موساوي عبد النور، بركان يوسف " **الاحصاء 02**" ديوان العلوم للنشر والتوزيع - عنابة، الجزائر، 2009 .
13. خالد زهدي خواجه " **أساسيات الإحتمالات** " منشورات المعهد العربي للتدريب والبحوث الاحصائية، 2003.

14. Khaldi khaled " **Methodes statistiques : Rappels de cours et exercices corrigés**" office des publications universitaires- ben Aknoun,Alger,5eme edition, 2008.
15. B.Oukacha & M.Benmessaoud tillé "**statistiques descriptives et alculs des Probabilites**" , Les Pages Bleues Internationales, Bordj El Kifane – Alger, 2008.
16. B.Verlant, G. Saint-Pierre " **Statistiques & Probabilites** " BERTI editions ,Alger, 2008.
17. M. Henkouche " **Elements de Probabilites et de statistique** " office des publications universitaires- ben Aknoun,Alger, 2005.
18. Teach yourself statistics in site internet : http://stattrek.com/