الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° d'enregistrement

/…../…../…../…../…..

جامعة غرداية

Université de Ghardaïa

كلية العلوم والتكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم : الرياضيات والإعلام الآلي

Département de Mathématiques et Informatiques

Mémoire de fin d'étude, en vue de l'obtention du diplôme

Master

Domaine : Mathématiques et Informatiques

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et application

Thème

Décroissance exponentielle de l'énergie des cordes vibrantes avec viscoélasticité locale

Présenté par :

Hadboune Moussa

Devant le jury composé de:

Brahim MERABET	**M.C.B**	**Université de Ghardaïa**	**Encadrant**
Yacine El HADJ MOUSSA	**M.M.A**	**Université de Ghardaïa**	**Examinateur 1**
Abdellatif LALMI	**M.M.A**	**Université de Ghardaïa**	**Examinateur 2**

Année universitaire : 2021 / 2022

Dédicace

Je dédie ce travail
À mes parents.
À ma femme.
À mes frères.
À mes sœurs
À toute ma famille.
À tous ceux qui m'ont enseigné
À tous mes amis.

Hadboune Moussa
Ghardaia 2022

Remerciement

Je remercier en premier lieu mon dieu **Allah** qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

D'abord je oudrais remarcier mon encadreur M. **Brahim Merabet** , de conférences "B" ou niveau de l'université de Ghardaia , celui que m' proposé de ce sujet et de ma guider tout la préparation de ce mémoire.

Ensuite , Je voudrais aussi remercier les membres de jury .M. **Yacine El Hadj Moussa** que est anseignant assistant "A" à l'université de Ghardaia . Etansi le Monsieur **Abdellatif Lalmi** enseignant assistant "A" de méme université.j'ai grand honneur d'accepter cette invitation .

je souteins mes séncérement remarciement au **D :Abdelouahab Chikh Salah**, pour l'intérêt qu'il m'a porté et sa disponibilité et ses encouragements.

Enfin , il ne faudrais jamais oublier tous les enseignents qui ont m'enseigné de le cycle de premaire jusqu à l'université chaqu un de son nom , en plus ma famille en commancant par mes parents , ma femme , mes fréres et mes soeures .

Je prie mon Dieur qu 'il soit avec nous Merci pour votre écoute.

Hadboune Moussa
Ghardaia 2022

ملخص

ندرس في هذه المذكرة مشكلتين مرتبطتين باضمحلال الطاقة الأولية لبعد واحد لمعادلة الموجة الخطية مع التخميد Kelvin-Voigt بوظائف معامل السلسلة ثم نستبدل نموذج Kelvin-Voigt بنموذج Boltzmann. والسماح بانقطاع خصائص المواد في الواجهات متسارع.

تم إثبات اضمحلال الطاقة في كلتا الحالتين.

وتشير هذه النتائج الجديدة إلى عدم استمرارية المادة يمكن أن تؤثر الخصائص الموجودة في الواجهة و "نوع" التخميد على السلوك النوعي لـ اضمحلال الطاقة.

الكلمات المفتاحية: الاستقرار الأسي ، شبه المجموعة ، اللزوجة المحلية.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions deux problèmes liés à la décroissance de la première énergie de dimension une de l'équation d'onde linéaire avec amortissement de Kelvin-Voigt avec des fonctions de module de corde, puis nous remplaçons le modèle de Kelvin-Voigt par le modèle de Boltzmann. Et permettre l'arrêt accéléré des propriétés des matériaux aux .interfaces

.La décroissance énergétique a été démontrée dans les deux cas

Ces nouveaux résultats indiquent que les propriétés de discontinuité du matériau à l'interface et le "type" d'amortissement peuvent influencer le comportement spécifique de la .décroissance énergétique

Mots clés : Stabilité exponentielle, semi-groupe, viscosité locale.

Abstract

In this paper we study two problems related to the decay of the first energy of one dimension of the linear wave equation with Kelvin-Voigt damping with string modulus functions and then we replace the Kelvin-Voigt model with the Boltzmann model. And allow the discontinuation of the properties of materials at the interfaces accelerated.

Energy decay has been demonstrated in both cases.

These new results indicate that the material discontinuity properties at the interface and the 'type' of the damping can influence the specific behavior of the energy decay.

Key words : Exponential stability, semi-group, local viscosity.

Table des matières

1 Introduction générale **2**

2 Rappels d'analyse fonctionnelle **4**

2.1 Epaces vectoriel normés, Espaces de Hilbert 4
2.2 Espaces de lebesgue 5
2.3 Espaces réflexifs, espaces séparables 6
2.3.1 Espaces réflexifs 6
2.3.2 Espaces séparables 6
2.4 Espaces de Sobolev 6
2.4.1 Inégalité de Poincaré 7
2.5 Semi groupe 8
2.6 Opérateurs 8
2.6.1 Opérateurs m-dissipatifs dans un espace de Banach 9
2.6.2 Opérateurs m-dissipatifs dans un espace de Hilbert 9
2.6.3 Définition et propriétés élémentaires des opérateurs maximaux monotones 10
2.7 Générateur infinitésimal 10
2.7.1 Générateur infinitésimal de Semi groupe de contraction . . 11

3 Kelvin-Voigt Model **13**

4 Boltzmann Modele **21**

Notations

- t : temps
- E : énergie
- f : fonction
- $D(A)$: Domaine de lopérateur A.
- $[0, L]$: l'intervalle fermé $0 \leqslant t \leqslant L$
- $\|.\|$ la norme associée aux produits scalaires
- L^p : l'espace des fonctions à la puissance p intégrables pour la mesure de Lebesgue
- $H^1(\Omega)$,$H^2(\Omega)$: Espaces de Sobolev
- $\|x\|$: La norme de x
- $W^{1,p}$:Espace de Sobolev, $1 \leqslant p \leqslant \infty$
- $W^{1,2} = H^1(\Omega)$: Espace de Sobolev
- $\dot{u}$: Dérivée partielle de u par rapport à t
- u' : Dérivée partielle de u par rapport à x

Introduction

Au cours des dernières années, on s'est beaucoup intéressé au problème de stabilté exponentielle pour les systèmes élastiques avec amortissement distribué uniquement dans un sous-domaine
Dans ce mémoire, nous reprenons plus en détail les travaux de Kangsheng et Zhuangyi [9] et nous essayons d'expliquer quelques passge nous limitons notre attention à la corde vibrante à viscoélasticité locale, c'est-à-dire qu'un segment de la corde est constitué d'un matériau viscoélastique, les autres segments sont en matériau élastique. Dans ce travail on suivra le plan suivant :
Chapitre 01 Dans ce chapitre, Introduction générale pour le problème de la stabilité exponentielle
Chapitre 02 Dans ce chapitre, Quelques rappels sur l'analyse fonctionnelle qu'on utlise au cours de ce mémoire
Chapitre 03 Nous étudions l'équation (3.1) en supposant que toutes les fonctions de module sont lisses sur $(0, L)$.
Chapitre 04 Nous étudions l'équation (4.1) et permettons l'incompatibilité des fonctions de paramètres dans l'interface.

Chapitre 1

Introduction générale

Au cours des dernières années, on s'est beaucoup intéressé au problème de la stabilité exponentielle (qui est la décroissance exponentielle de l'énergie associée à un problème) pour les systèmes élastiques avec amortissement distribué uniquement dans un sous-domaine (appelons-le amortissement local). A notre connaissance, le premier article dans ce sens a été publié en 1991 par Chen et ses collègues [3] où ils ont obtenu des conditions suffisantespour la décroissance exponentielle de l'énergie associée à un système conservateur linéaire abstrait avec amortissement. Un exemple donné dans leur article est une équation d'onde linéaire unidimensionnelle avec amortissement visqueux local

$$\begin{cases} \ddot{u}(x,t) = u''(x,t) - b(x)\dot{u}(x,t), \quad x \in (0,L), t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \\ u(x,0) = u^0(x), \dot{u}(x,0) = u^1(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

où $b(x)$ est une fonction à support local sur $(0, L)$ et est strictement positive sur un sous-intervalle $(\alpha, \beta) \subset (0, L)$ $\dot{u}$ est la dérivée par rapport à "t" et u' est la dérivée par rapport à "x" , Ils ont montré que l'énergie associée à (1.1) décroît exponentiellement, c'est-à-dire qu'il existe des constantes M, $w > 0$ telles que l'énergie associée à ce problème $E(t)$ vérifie

$$E(t) \leq Me^{-\omega t}E(0). \tag{1.2}$$

Dans ce cas, le système est dit exponentiellement stable.
Notons que (1.2) est valable pour le système ci-dessus même si la fonction du coefficient d'amortissement $b(x)$ est discontinue en $x = \alpha$ et $x = \beta$. Plus tard, Renardy [12] a obtenu la propriété de croissance déterminée par le spectre (d'un certain opérateur A) pour le même système abstrait. Si cet opérateur A s'écrit sous la forme $A = A_0 + B$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe dans un espace de Hilbert avec A_0 est normal et B est borné. Nous supposons en outre

qu'il existe $M > 0$ tel que toute valeur spectrale de A_0 de module supérieur à $M-1$ est une valeur propre isolée à multiplicité finie. En outre, on suppose que les multiplicités de toutes les valeurs propres appartiennent à un disque unité donnée (centré en un point z avec $\mid z \mid \leq M$) ne dépassent pas un certain entier n. On a montré que le type du semi-groupe est déterminé par le spectre de A. On définit le type du semi-groupe e^{At} par

$$\omega_0 = \lim_{t\to\infty} \log \left\| e^{At} \right\| /t$$

et nous définissons la borne spectrale par

$$r_0 = \sup\{\operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\},$$

où $\sigma(A)$ désigne le spectre de A. Ainsi, pour (1.1),on suppose que sup ω est le sup des parties réelles des valeurs propres. Concernant la version de dimension supérieur à un de (1.1)nous nous référons à [2] pour les conditions géométriques optiques connue. On peut aussi se référer à [15] , [16] pour le cas semi linéaire. La condition suffisante est prouvée pour des problèmes de contrôle et d'observation dans la frontière.
Les auteurs des articles [7] [15], ont prouvé l'équivalence entre la contrôlabilité exacte et la stabilisabilité exponentielle pour un système conservateur abstrait à contrôle borné
Dans l'article [6], il a été abordé la question de contrôlabilité des solutions de l'équation des ondes par des forces de commande distribuées limitées qui s'annulle en dehors d'un certain sous-ensemble de la zone dans laquelle le processus se développe. Ainsi, Par exemple, nous considérerons le problème de contrôle de mouvement d'une corde vibrante ou une membrane vibrée par des forces externes exercées uniquement sur une partie spécifique du milieu élastique. Il a été montré que la corde vibrante peut être contôlée en tous type d'énergie selon les forces en question. mais c'est pas le cas pour la membrane vibrante. En fait , en considérant un ensemble ouvert $\mathcal{O}$ ayant son complémentaire dans une membrane ayant des "trapped rays ", en général il y aura des combinaisons d'énergie finis de fréquences et d'amplitudes qui ne peuvent être induites ou éliminées par la membrane par des forces extérieures exercées seulement sur $\mathcal{O}$. Il a été montré également que la contrôlabilité exacte donnée dans [6] implique la stabilité exponentielle de (1.1) par l'équivalence entre eux [7].
L'équation des ondes avec amortissement visqueux local a été bien étudié, en particulier dans le cas unidimensionnel linéaire. Mais on n'a pas assez d'études sur les systèmes élastiques avec amortissement viscoélastique local, bien que il y a une compréhension assez profonde lorsque l'amortissement est distribué sur l'ensemble du domaine . c'est l'objet de l'article qu'on a détaillé dans ce mémoire [9].

Chapitre 2

Rappels d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques éléments d'analyse fonctionnelle que nous allons utiliser dans les chapitres suivants de ce mémoire tous les détails se trouvent dans [1]

2.1 Epaces vectoriel normés, Espaces de Hilbert

Théorème 2.1 *[18] Pour toute norme $x \mapsto \|x\|$ sur $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K}$ est un corps), l'application*

$$A \mapsto \|A\| = \sup_{x \in S} \|Ax\| \qquad (S \textit{est la sphère unité})$$

définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 2.1 *[18] L'application $A \mapsto \|A\| = \sup_{x \in S} \|Ax\|$ est la norme matricielle induite par (ou subordonnée à) la norme vectorielle $x \mapsto \|x\|$.*

Définition 2.2 (Espaces de Hilbert) *Soit H un espace vectoriel. Un produit scalaire (u, v) est une forme bilinéaire de $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$ dans $\mathbb{R}$, symétrique, définie positive [i.e. $(u, u) \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathrm{H}$ et $(u, u) > 0$ si $u \neq 0$].*

Théorème 2.2 (Lax-Milgram) *Soit H un espace de Hilbert réel et a une forme bilineaine sur H continue et coercive, c'est-à-dire telle qu'il existe $C, \alpha > 0$ telles que $\forall x, y \in H$,*

$$|a(x, y)| \leqslant C\|x\|\|y\| \quad \textit{et} \quad a(x, x) \geqslant \alpha\|x\|^2$$

alors pour toute forme linéaire continue L de H il existe un unique $u \in H$ tel que $\forall x \in H$

$$L(x) = a(u, x)$$

de plus si a est symétrique, en posant $J(x) = \frac{1}{2}a(x,x) - L(x)$ *pour* $x \in H, u$ *est caractérise par*

$$J(u) = \min J(x)$$

Définition 2.3 (Inégalité de Young) *Supposons que* $a, b \geq 0$ *et* $1 < p, q < \infty$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, l'inégalité de Young s'exprime par :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

2.2 Espaces de lebesgue

Définition 2.4 *(L'espace* L^p*) Soit* $p \in \mathbb{R}$ *avec* $1 \leqslant p < \infty$

$$L^p(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in \mathrm{L}^1(\Omega)\right\}$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right]^{1/p}$$

avec $\|.\|_{L^p}$ *est une norme.*

Théorème 2.3 $\mathbf{L}^p$ *est un espace vectoriel et* $\|.\|_{L^p}$ *est une norme pour tout* $1 \leqslant p \leqslant \infty$

Théorème 2.4 L^p *est un espace de Banach pour tout* $1 \leqslant p \leqslant \infty$

Propriété 2.1 *nous avons les deux propriétés suivantes de l'espace* L^p

1. $\mathbf{L}^p$ *est réflexif pour* $1 < p < \infty$
2. $\mathbf{L}^p(\Omega)$ *est séparable pour* $1 \leqslant p < \infty$

Définition 2.5 (Inégalité de Hölder généralisée) *Soit* f, g *deux fonction respeetivement daus* $L^P(\Omega)$ *et dans* $L^q(\Omega)$*, avec*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

Alozs- le produit fg *est daus* $L^r(\Omega)$ *et l'on a*

$$\left(\int_\Omega |fg|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

2.3 Espaces réflexifs, espaces séparables

2.3.1 Espaces réflexifs

Définition 2.6 *Soit E un espace de Banach . On dit que$E$ est réflexif si $J(E) = E''$ On donne le résultat*

Théorème 2.5 *Soit E un espace de Banach réflexif; alors toute suite bornée dans E admet au moins une sous-suite faiblement convergente.*

2.3.2 Espaces séparables

Définition 2.7 *On dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.*

Proposition 2.1 *Soit E un espace métrique séparable et soit F un sous-ensemble de E . Alors F est séparable.*

Preuve 2.1 *Soit (u_n) une suite dénombrable dense dans E. Soit (r_m) une suite de réels positifs avec $r_m \longrightarrow 0$. On choisit (arbitrairement) $a_{m,n} \in B(u_n, r_m) \bigcap F$ lorsque cet ensemble est non vide. Il est clair que la suite $(a_{m,n})$ constitue un ensemble dénombrable dense dans F.*

Corollaire

Soit$E$ un espace de Banach.
Alors (E réflexif et séparable)$\Leftrightarrow$ E' (réflexif et séparable)

Preuve 2.2 *Voir H. Brezis [1] (le démonsration de Corollaire III.24. , page 48)*

2.4 Espaces de Sobolev

Définition 2.8 *(L'espace de Sobolev $W^{1,p}$) Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné ou non et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$*

$$W^{1,p}(\mathbf{I}) = \left\{u \in \mathbf{L}^p(\mathbf{I}); \exists g \in \mathrm{L}^p(\mathrm{I}) \text{ tel que } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\mathrm{I})\right\}$$

Proposition 2.2 (Inégalité de Couchy-Schwarz) *Soit$H$ un espace vectoriel .(u, v) un produit scalaire sur H. Alors*

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}}$$

Définition 2.9 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$ L'espace de Sobolev $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ est défini par :*

$$\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathrm{L}^p(\Omega) \mid \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall \varphi \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, \mathrm{N} \right\}$$

Proposition 2.3 *nous avons définie quelque propriétés de l'espace $W^{1,p}$ L'espace $\mathbf{W}^{1,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leqslant \boldsymbol{p} \leqslant \infty$*

— $\mathbf{W}^{1,p}$ *est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leqslant p < \infty$.*
— $H^1(\Omega) = \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$
— *L'espace H^1 est un espace de Hilbert séparable.*
— *L'espace $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme*

$$\|u\|_{\mathrm{W}^{1,p}} = \|u\|_{\mathrm{L}^p} + \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

ou parfois de la norme équivalente

$$\left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{1/p} (\text{si } 1 \leqslant p < \infty)$$

— L'espace $\mathrm{H}^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{\mathrm{H}^1} = (u, v)_{\mathrm{L}^2} + \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{\mathrm{L}^2}$$

la norme associée

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

est équivalente à la norme de $\mathrm{W}^{1,2}$.

2.4.1 Inégalité de Poincaré

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. Soit p un réel superieur ou égal a 1 ; alors il existe une constante positive C telle que

$$\forall u \in W_0^{1;p}(\Omega), \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

2.5 Semi groupe

Nous avons utilisé [11] comme référence de ce paragraphe

Définition 2.10 *Soit X un espace de Banach, une famille $T(t), 0 \leqslant t < \infty$ d'opérateurs linéaires bornés de X dans X est dite un semi-groupe sur X si :*

— $T(0) = I$ *(I est l'identité dans X)*

— $T(s+t) = T(s)T(t)$ *pour tout $t, s \geqslant 0$*

Définition 2.11 (C_0 semi-groupe) *Un semi-groupe $T(t), 0 \leqslant t < \infty$ d'opérateurs linéaires bornés est un semi-groupe fortement continu si :*

$$\lim_{t \to 0} T(t)x = x \qquad \text{pour tout } x \in X$$

Un semi groupe d'opérateurs linéaires bornés fortement continu est dit un C_0 semi-groupe

Théorème 2.6 *Soit $T(t)$ un C_0 semi-groupe, alors ils existent un réel w et un réel $M \geqslant 1$ tels que :*

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{wt} \text{ pour tout } t \geqslant 0$$

En particulier, si $M = 1$ et $w = 0$ alors $(T(t))_t$ est appelé C_0 semi-groupe de contractions

2.6 Opérateurs

Définition 2.12 *Soient E et F deux espaces de Banach. On appelle opérateur linéaire de* E *dans F toute application linéaire* $\mathrm{A} : \mathrm{D(A)} \subset \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$, à valeurs dans $F.D(A)$ est le domaine de A.*
On dit que A est borné s'il existe une constante $c \geqslant 0$ telle que

$$\|\mathrm{A}u\| \leqslant c\|u\| \quad \forall u \in \mathrm{D(A)}.$$

Définition 2.13 *Soit H un espace de Hilbert, un opérateur linéaire continue T de H dans H est dit compact s'il transforme tout ensemble borné en un ensemble relarivement compact.*

Propriété 2.2 *Un opérateur linéaire est compact si et seulement s'il transforme toute suite faiblement convergente en une suite admettant au moins une sous suite fortement converyente.*

2.6.1 Opérateurs m-dissipatifs dans un espace de Banach

Définition 2.14 (Opérateur dissipatif) *On dit que l'opérateur* $(A, D(A))$ *linéaire non borné dans* $E(A : D(A) \subset E \longrightarrow E)$ *est dissipatif si pour tout* $u \in D(A), \lambda > 0$

$$||(\lambda I - A)u|| \geq \lambda ||u||$$

Définition 2.15 *Un opérateur* $(A, D(A))$*, linéaire non borné dans* X*(* X *est un espace de Hilbert), est m-dissipatif Si :*

— *. A est dissipatif,*

— $\forall\ f \in X, \forall\ \lambda > 0, \exists\ x \in D(A)$ *tel que* $\lambda x - Ax = f$

2.6.2 Opérateurs m-dissipatifs dans un espace de Hilbert

Dans cette section nous supposons que X est un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$

Définition 2.16 *Un opérateur* $(A; D(A))$ *; linéaire non borné dans un espace de Hibert réel X ; est dissipatif si et seulement si*

$$\forall x \in D(A); (Ax, x) \leq 0$$

Dans le cas d'un espace de Hilbert complexe, la condition précédente est remplacée par

$$\forall x \in D(A); Re(Ax, x) \leq 0$$

Définition 2.17 *Soit* $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ *un opérateur non-borné à domaine dense .On peut définir un opérateur non-borné* $A^* : D(A^*) \subset F' \longrightarrow E'$ *en posant :*

$$D(A^*) = \{v \in F'; \exists c \geq 0 \textit{tel que } \mid \langle v, Au \rangle \mid \leq c \mid\mid u \mid\mid \forall u \in D(A)\}$$

Définition 2.18 *Un opérateur linéaire non borné* $(A; D(A))$ *; de domaine dense dans* X *est dit auto-adjoint si* $A = A^*$ *Il est dit anti-adjoint si* $A = -A^*$

Remarque 2.1 *Si A est autoadjoint dans un espace de Hibert E et si A est dissipatif, alors*
A est m-dissipatif.

2.6.3 Définition et propriétés élémentaires des opérateurs maximaux monotones

Définition 2.19 *Soit* $\mathrm{A} : \mathrm{D(A)} \subset \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ *un opérateur linéaire non-borné. On dit que A est monotone si*

$$(Av, v) \geqslant 0 \quad \forall v \in D(A),$$

A est maximal monotone si de plus $\mathrm{R(I + A) = H}$ *i.e.*

$$\forall f \in \mathrm{H}, \exists u \in \mathrm{D(A)} \textit{ tel que } u + \mathrm{A}u = f.$$

Propriété 2.3 *Soit A un opératear maximal monotone, Alors*

- $\mathrm{D(A)}$ *est dense dans* $\mathbf{H}$.
- *A est fermé.*
- *Pour tout* $\lambda > 0, (\mathrm{I} + \lambda\mathrm{A})$ *est bijectif de* $\mathrm{D(A)}$ sur $\mathbf{H}$, $(\mathrm{I} + \lambda\mathrm{A})^{-1}$ *est un opérateur borné et* $\|(\mathrm{I} + \lambda\mathrm{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\ \mathrm{W})} \leqslant 1$

Preuve 2.3 *Voir H. Brezis [1] (le démonsration de Proposition VII.1. , page 114)*

2.7 Générateur infinitésimal

Nous avons utilisé [11] comme référence de ce paragraphe

Théorème 2.7 *Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique. Soit B un opérateur linéaire fermé vérifiant* $D(B) \supset D(A)$ *et*

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\| \quad \textit{pour} \quad x \in D(A).$$

Il existe un nombre positif δ *tel que si* $0 \leq a \leq \delta$ *alors* $A + B$ *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique*

Corollaire 2.1 *Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique. Si B est un opérateur linéaire borné alors* $A + B$ *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique*

Corollaire 2.2 *Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique uniformément borné. Soit B un opérateur fermé vérifiant* $D(B) \supset D(A)$ *et*

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| \textit{ pour } x \in D(A).$$

Alors il existe une constante positive δ *telle que pour* $0 \leq a \leq \delta, A + B$ *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique uniformément borné.*

Théorème 2.8 (Lumer Phillips) *Soit A un opérateur linéaire tel que $\overline{D(A)} = X$*

- *Si A est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\operatorname{Im}(\lambda_0 I - A) = X$ alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi groupe de contractions sur X*
- *Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi groupe de contractions sur X alors A est dissipatif et $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$. De plus, pour tout $x \in D(A)$ et pour tout $x^* \in F(x), \operatorname{Re}\langle Ax, x^*\rangle) \leqslant 0$*

2.7.1 Générateur infinitésimal de Semi groupe de contraction

Définition 2.20 *Un opérateur dissipatif A pour lequel $R(I - A) = X$, est dit m-dissipatif.*
Si A est dissipatif alors μA pour tout $\mu > 0$ et donc si A est m-dissipatif alors $R(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$. En termes d'opérateurs m-dissipatifs, le théorème de Lumer-Phillips peut être reformulé comme suit : un opérateur densément défini A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe C_0 de contractions si et seulement si c'est m -dissipatif. Le résultat principal de cette section est le théorème de perturbation suivant pour les opérateurs m-dissipatifs

Résolution du problème d'évolution

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \quad \text{sur} \quad [0, \infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Existence et unicité Commencons par rappeler un retsultat classique.

Théorème 2.9 (Cauchy, Lipschitz, Picard) *Soit $\mathbf{E}$ un espace de Banach et soit $\mathbf{F} : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ une application telle que*

$$\|\mathrm{F}u - \mathrm{F}v\| \leqslant \mathbf{L}\|u - v\| \quad \forall u, v \in \mathrm{E} \quad (\mathrm{L} \geqslant 0).$$

Alors pour tout $u_0 \in \mathrm{E}$ il existe $u \in \mathbf{C}^1([0, \infty[; \mathbf{E})$ unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \mathrm{Fu} \quad \text{sur} \quad [0, \infty[\\ u(0) = u_0 \quad \text{(donnée initiale).} \end{cases} \tag{2.1}$$

Demonstration :
Existence. Résoudre (2.1) equivaut à trouver $u \in \mathrm{C}([0, \infty[\,; \mathrm{E})$ tel que

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \mathrm{F}(u(s))ds. \tag{2.2}$$

Étant donné $k > 0$ - qui sera fixé ulterieurement - on introduit

$$X = \left\{u \in C\left(\left[0, \infty[; E\right); \quad \operatorname{Sup}_{t \geq 0} e^{-Kt} \|u(t)\|\right\} < \infty\right\}$$

On vérifie aisément les propriétés suivantes :
i) X est un Banach pour la norme

$$\|u\|_X = \operatorname{Sup}_{t \geq 0} e^{-Kt} \|u(t)\|$$

ii) Pour tout $u \in$ X la fonction

$$(\Phi u)(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds$$

appartient à X.
iii) $\|\Phi_u - \Phi_v\|_X \leqslant \frac{L}{k} \|u - v\|_X$ $\forall$ u,v $\in$ X.
Pour $k > L, \Phi$ admet un point fixe qui est une solution de (2.2)
Unicite.
Soient u et $\tilde{u}$ deux solutions de (2.1). Posant

$$\varphi(t) = \|u(t) - \tilde{u}(t)\|,$$

on a, grâce à (2.2) ,

$$\varphi(t) \leqslant L \int_0^t \varphi(s)ds \quad \forall t \geqslant 0.$$

Donc $\varphi = 0$.

Théorème 2.10 (Hille-Yosida) *Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout* $u_0 \in \mathrm{D(A)}$ *il existe une fonction*

$$u \in \mathrm{C}^1\left([0, +\infty[; \mathbf{H}\right) \cap \mathrm{C}\left([0, +\infty[; \mathbf{D}(\mathrm{A})\right)$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & sur \quad [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 & (donne\ initiale). \end{cases}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leqslant |u_0| \quad et \quad \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right| = |\mathrm{A}u(t)| \leqslant |\mathrm{A}u_0| \quad \forall t \geqslant 0.$$

Preuve 2.4 *Voir H. Brezis [1] (le démonsration de Theorème VIL.4 , page 118)*

Chapitre 3

Kelvin-Voigt Model

Le modèle Kelvin-Voigt de viscoélasticité linéaire suppose que la contrainte instantanée dépend linéairement du taux de contrainte-déformation instantané, c'est-à-dire

$$\sigma(x,t) = a(x)\varepsilon(x,t) + b(x)\dot{\varepsilon}(x,t).$$

Pour l'équation (3.1), un résultat tout à fait inattendu a été obtenu dans [8] dans lequel nous avons que dans le cas où $m(x)$, $a(x)$ sont des fonctions constantes positives par morceaux avec discontinuité aux interfaces $x = \alpha, \beta$ et $b(x)$ étant la fonction caractéristique de (α, β) , l'énergie pour l'équation (3.1) ne décroît pas de façon exponentielle. Ce résultat est déroutant puisque le phénomène ne se voit pas dans l'amortissement visqueux local modèle (1.1). Il est donc naturel de se poser la question suivante : Pourquoi la localisation de l'amortissement visqueux "plus faible" ne perd pas stabilité exponentielle alors que l'amortissement Kelvin-Voigt "plus fort" le fait ? Nous supposons qu'il existe deux causes possibles à ce phénomène.
(1). La discontinuité des propriétés des matériaux à l'interface.
(2). L'illimité de l'amortissement viscoélastique dans l'espace sous-jacent
Etudions alors le probléme :

$$\begin{cases} m(x)\ddot{u}(x,t) = \left[a(x)u'(x,t) + b(x)\dot{u}'(x,t)\right]', & x \in (0,L), t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \\ u(x,0) = u^0(x), \dot{u}(x,0) = u^1(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

Nous considérerons le taux de décroissance de l'énergie pour l'équation (3.1)avec les conditions suivantes sur les fonctions coefficient :
$m, a, b \in C^1\left[0, L\right], (ma)', (ab') \in C^{0,1}\left[0, L\right],$

$$m(x), a(x) > 0, b(x) \geq 0, \int_0^L b(x)dx > 0. \tag{3.2}$$

$b(x)$ peut étre une fonction supportée localement sur$[0, L]$. l'énergie de l'équation (3.1) est définie par

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[m(x)|\dot{u}|^2 + a(x)|u'|^2\right] dx. \tag{3.3}$$

Soit

$$H = L^2(0, L), \quad ||v||_H^2 = \int_0^L m(x)\,|v(x)|^2\,dx,$$

$$V = H_0^1(0, 1), \quad ||v||_v^2 = \int_0^L a(x)\,|v'(x)|^2\,dx,$$

$$\mathcal{H} = V \times H, \quad ||(u, v)||_{\mathcal{H}}^2 = ||u||_V^2 + ||v||_H^2.$$

on définit dans $\mathcal{H}$

$$D(\mathcal{A}) = \left\{(u, v)|v \in V, au' + bv' \in H^1(0, L)\right\}, \tag{3.4}$$

et

$$\mathcal{A}(u, v) = (v, \frac{1}{m}(au' + bv')') \tag{3.5}$$

Ainsi (3.1) peut étre réécrite comme une équation d'évolution abstraite sur $\mathcal{H}$:

$$(\dot{u}(t), \dot{v}(t)) = \mathcal{A}(u(t), v(t)), (u(0), v(0)) = (u_0, u_1) \tag{3.6}$$

il est bien connu que [13]

Lemme 3.1 *$\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-group de contractions sur $\mathcal{H}$,et $i\mathbb{R} \in \rho(\mathcal{A})$.*

Preuve 3.1 *[14]*
i) D'aprés

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}(u, v), (u, v)\rangle_{\mathcal{H}} = -b(v) \leq 0 \quad \forall (u, v)) \in D(\mathcal{A})$$

$\mathcal{A}$ est dissipativ. Il est évident que $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{0\}$. *Pour tout $(f, g) \in \mathcal{H}$,Soit*

$$u = -A^{-1}g - Sf, \quad v = f;$$

Alors $(u, v) \in D(\mathcal{A}), \mathcal{A}(u, v) = (f, g)$, et

$$|(u, v)|_{\mathcal{H}} \leq M|(f, g)|_{\mathcal{H}}$$

pour un certain $M > 0$ *indépendant de* (f, g). *Par conséquent,* $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), 0 \in \rho(\mathcal{A})$, *et* $\mathcal{A}$ *est fermé. De plus, on voit que* $R(\lambda - A) = \mathcal{H}$ *pour* $\lambda > 0$ *suffisamment petit. et pour* $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$. *La conclusion découle maintenant du théorème de Lumer-Phillips*

ii) Il est facile de montrer qu'il n'y a pas de spectre ponctuel sur l'imaginaire axe, c'est-à-dire nous devons prouver que $\Lambda_0 \cap [C \backslash \sigma_p(\mathcal{A})] \subset \rho(\mathcal{A})$. *Par le théarème du graphe fermé, il suffit de montrer que* $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ *et* $\operatorname{Ker}(\lambda - \mathcal{A}) = \{0\}$ *implique* $R(\lambda - \mathcal{A}) = H$.
soit

$$\Lambda_\epsilon = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}) || \operatorname{Im} \lambda |> \epsilon\}.$$

et

$$\Delta(\lambda) \equiv I + \lambda S + \lambda^2 A^{-1} \in \mathcal{L}(V). \tag{3.7}$$

Si $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ *et* $\operatorname{Ker}(\lambda - \mathcal{A}) = \{0\}$, *on a* $\operatorname{Ker} \Delta(\lambda) = \{0\}$. *Sinon, il existe un nonero* $v \in \operatorname{Ker} \Delta(\lambda) \subset V$. *Il est facile de voir que* $\left(\frac{1}{\lambda} v, v\right) \in \operatorname{Ker}(\lambda - \mathcal{A})$.
Il découle de l'auto-adjonction de $S \in \mathcal{L}(V)$ *que* $0 \in \rho(I + \lambda S)$ *pour tout non réel* λ. *Sinoe*

$$\Delta(\lambda) = (I + \lambda S)\left(I + \lambda^2 (I + \lambda S)^{-1} A^{-1}\right)$$

et A^{-1} *est compact, par la théorie bien connue de Rics -Schunder*

$$0 \in \rho(\Delta(\lambda)), \quad R(\Delta(\lambda)) = V.$$

À présent. pour tout $(f, g) \in \mathcal{H}, \operatorname{let} v = \Delta^{-1}(\lambda)\left(\lambda A^{-1} g - f\right), u = \frac{1}{\lambda}(f + v)$. *On a* $u, v \in V$
et

$$u + S v = \frac{1}{\lambda}(f + v) + \frac{1}{\lambda}\left(\lambda A^{-1} g - f - v - \lambda^2 A^{-1} v\right) = A^{-1}(g - \lambda v) \in D(A).$$

Par conséquent. $(u, v) \in D(\mathcal{A})$ *et* $(\lambda - \mathcal{A})(u, v) = (f, g)$. *La preuve est complète*

Théorème 3.1 *le semi-group* e^{At} *pour l'equation* (3.1) *avec des coefficients satisfaisant les condition* (3.2) *est exponentiellement stable .*
De plus,

$$\beta_0(\mathcal{A}) \leq \max\left\{-\frac{\gamma_1}{2}, \sigma_0(\mathcal{A})\right\},$$

où $\beta_0(\mathcal{A}) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \left\|e^{t\mathcal{A}}\right\|$ *est le type de* $e^{t\mathcal{A}}$, *et* $\sigma_0(\mathcal{A})$ *est le maximum de la partie réelle de* $\sigma(\mathcal{A})$, *le spectre de* $\mathcal{A}$.

preuve : il suffit de prouver (d'après [4], [5] , [17])

$$sup\left\{||\left(i\beta_n - \mathcal{A}\right)^{-1}|| : \beta \in \mathbb{R}\right\} < \infty \tag{3.8}$$

Par la propriété de la résolvante, il suffit de montrer

$$\sup\left\{\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \mid 0 < \operatorname{Re}\lambda \leq 1\right\} < +\infty$$

En cas d'échec, d'après le théorème de résonance, il existe une suite β_n avec $Re\beta_n \to \tau_0 \in [0,1]$, et une suite de vecteurs $(u_n, \nu_n) \in D(\mathcal{A})$ tels ce

$$a(u_n) + c(v_n) = 1 \tag{3.9}$$

et

$$(i\beta_n - \mathcal{A})(u_n, v_n) \equiv (f_n, g_n) \to 0 \text{ dans } \mathcal{H} \tag{3.10}$$

on résout l'équation résolvante

$$i\beta_n u_n - v_n = f_n \to 0 \text{ dans } V, \tag{3.11}$$

$$i\beta_n v_n - \frac{1}{m}\left(au' + Sv'\right)' = g_n \to 0 \text{ dans } H. \tag{3.12}$$

Maintenant, par $(3.9), (3.11)$ implique que

$$\beta_n a(u_n) - a(v_n, u_n) \to 0 \tag{3.13}$$

On obtient

$$a\left(S^{\frac{1}{2}} v_n\right) = b(v_n) \to -\tau_0 \leq 0.$$

Ainsi $\tau_0 = 0$, et $Sv_n \to 0$ dans V. De plus, $c(v_n) \to 0$. Enfin, en ajoutant le conjugué complexe de (3.13) et en utilisant le résultat de la dernière étape, nous concluons que $a(u_n) \to 0$. Par conséquent, $1 = a(u_n) + c(v_n) \to 0$, une contradiction.

Prouvons ensuite l'inégalité (3.8)

$$\beta_0(A) = \inf\left\{\sigma > \sigma_0(A) \mid \sup_{\operatorname{Re}\lambda \geq \sigma} \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| < +\infty\right\}$$

A partir de la dissipation de A, il suffit de montrer que

$$\sup\left\{\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \mid Re\lambda \in [\sigma, 1]\right\} < +\infty$$

pour tout σ tel que $\max\{-\gamma_1/2, \sigma_0(\mathcal{A})\} < \sigma < 1$. Nous raisonnons à nouveau par contradiction. Si l'inégalité ci-dessus n'est pas vraie, d'après le théorème de résonance, il existe une suite β_n avec $\operatorname{Re}\beta_n \to \tau_0 \in [\sigma, 1]$ et $|\beta_n| \geq 1$ et une suite de vecteurs $(u_n, v_n) \in D(\mathcal{A})$ tels que $(3.9), (3.10)$ soient vérifiés. On peut répéter la preuve après (3.9) pour obtenir

$$b(v_n) \to -\tau_0 \leq -\sigma < \frac{\gamma_1}{2}.$$

D'autre part, on a

$$\beta_n c(a_n) + \overline{\beta_n a}(u_n) + b(v_n) \to 0.$$

Prendre la partie imigrinaire et la combiner avec (3.9) assure $c(v_n) \to \frac{1}{2}$ avec $v := v_n$ comme $n \to \infty$ est $-\tau_0 \geq \frac{2}{2}$. Cette contradiction achève la preuve .

Lemme 3.2 *La suite de fonctions* (u_n, v_n) *vérifie*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^L b(x) |v_n'|^2 \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^L b(x) |\beta_n u_n'|^2 \, dx = 0 \tag{3.14}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^L a(x) |u_n'|^2 \, dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^L b(x) |\beta_n v_n|^2 \, dx = O(1) \tag{3.15}$$

Preuve 3.2 *D'apri* (3.10) *, on obtient*

$$\int_0^L b(x) |v_n'|^2 \, dx = \mathrm{Re}\left((i\beta_n - \mathcal{A})(u_n, v_n), (u_n, v_n)\right)_H \to 0 \tag{3.16}$$

Ceci et (3.11) *conduisent encore à*

$$\int_0^L b(x) |\beta_n u_n'|^2 \, dx = \int_0^L b(x) |v_n' + f_n'|^2 \, dx \to 0 \tag{3.17}$$

En suite , nous prenons la somme du produit scalaire de (3.11) avec v_n , et (3.12) avec u dans H pour obtenir

$$\|u_n\|_V^2 - \|v_n\|_H^2 = \mathrm{Re}\left(\langle f_n, v_n\rangle_H + \langle g_n, u_n\rangle_H - \langle bv_n', u_n'\rangle\right) \to 0 \tag{3.18}$$

Donc , compte tenu de(3.9) on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^L a(x) |u_n'|^2 \, dx = \frac{1}{2} \tag{3.19}$$

Pour montrer la deuxiéme égalité dans (3.15) on prend le produit scalaire de (3.12) avec $i\beta_n bv_n$ dans H pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\int_0^L mb\left|\beta_n v_n\right|^2 dx \\
=&\left(g_n, i\beta_n bv_n\right)_H-\int_0^L\left(au_n'+bv_n'\right) b\overline{i_n\beta_n v_n'} dx-\int_0^L\left(au_n'+bv_n'\right) b'\overline{i\beta_n v_n} dx \\
=&\operatorname{Re}\int_0^L\left[\left(mg_n-b'v_n'\right) b\overline{i\beta_n v_n}+a\left(v_n'+f_n'\right) b\bar{v}_n'+au_n'b'i\beta_n v_n\right] dx \\
=&\operatorname{Re}\int_0^L\left[\left(mg_n-b'v_n'\right) b\overline{i\beta_n v_n}+\alpha u_n'b'i\beta_n\bar{v}_n\right] dx+o(1).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

le second terme intégral est borné puisque

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\int_0^L ab'u_n'i\beta_n\bar{v}_n dx \\
=&\operatorname{Re}\int_0^L ab'\left(v_n'+f_n'\right)\bar{v}_n dx \\
=&-\frac{1}{2}\int_0^L\left(ab'\right)'\left|v_n\right|^2 dx+\operatorname{Re}\int_0^L ab'f_n'\bar{v}_n dx \\
=&O(1)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

En raison de la délimtation de $\|v_n\|_H$. Enfin , le premier terme peut étre estimé comme suit ,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\int_0^L\left(mg_n-b'v_n'\right) b\overline{i\beta_n v_n} dx \\
=&\operatorname{Re}\int_0^L\left(-g_n\sqrt{mb}+b'v_n'\sqrt{b/m}\right)\left(i\sqrt{mb}\beta_n\bar{v}_n\right) dx \\
\leq&\frac{1}{2}\int_0^L mb\left|\beta_n v_n\right|^2 dx, \quad \text{pour grand } n.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Donc , le membre de gauche de (3.20) est borné
Revenons maintenant à la preuve du théoréme . Prenos $q\in C^{1,1}([0,L];\mathbb{R})$ avec $q(0)=0$. il résulte du produit scalaire de (3.12) avec qT_n dans H que

$$\operatorname{Re}\left(i\beta_n v_n, qT_n\right\rangle_H-\operatorname{Re}\left(T_n'/m, qT_n\right\rangle_H=\operatorname{Re}\left(g_n, qT_n\right)_H. \tag{3.23}$$

où $T_n=au_n'+bv_n'$. Notons que T_n est borné dans H .
le membre de droite de(3.23) converge vers zéro du fait que T_n est borné dans H et g_n converge vers zéro dans H .Pour les termes de gauche dans (3.23) , ona

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\langle iB_n v_n, qT_n\rangle_H \\
=&Re\int_0^L -i\beta_n v_n mqa\bar{u}_n' dx + Re\int_0^L (i\beta_n v_n mq)(b\bar{v}_n')\, dx \\
=&Re\int_0^L \left(-i\beta_n f_n - \beta_n^2 u_n\right) mqa\bar{u}_n' dx + o(1) \quad (Lemme(3.2)) \\
=&\frac{1}{2}\int_0^L (maq)'\left|\beta_n u_n\right|^2 dx - Re\int_0^L i\left(f_n maq\right)'\left(\beta_n \bar{u}_n'\right) dx + o(1) \\
=&\frac{1}{2}\int_0^L (maq)'\left|\beta_n u_n\right|^2 dx + o(1)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

et

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\langle T_n'/m, qT_n\rangle_H \\
=&-\frac{1}{2}\int_0^L q'|T_n|^2 dx + \frac{1}{2}q(L)\mid T_n(L)|^2 + o(1) \\
=&-\frac{1}{2}\int_0^L q'a^2|u_n'|^2 dx + \frac{1}{2}q(L)|T_n(L)|^2 + o(1) \quad (Lemme(3.2))
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Ainsi (3.23) peut étre réécrit comme

$$\int_0^L (maq)'\left|\beta_n u_n\right|^2 dx + \int_0^L q'a^2\left|u_n'\right|^2 dx - q(L)\left|T_n(L)\right|^2 = o(1). \tag{3.26}$$

Prenons aussi le produit scalaire de ((3.23)) avec $(maq)'u_n$ un dans $L^2(0,L)$ pour obtenir

$$\left\langle -\beta_n^2 u_n - T_n'/m, (maq)'u_n\right\rangle_{L^2} = o(1) \tag{3.27}$$

De

$$\begin{aligned}
&\langle -T_n'/m, (maq)'u_n\rangle_{L^2} \\
=&\int_0^L au_n'\left(\frac{(maq)'}{m}\bar{u}_n\right)' dx + \int_0^L \mathrm{b}\, v_n'\left(\frac{(maq)'}{m}\bar{u}_n\right)' dx \\
=&\int_0^L \frac{(maq)'}{m}a\left|u_n'\right|^2 dx + \int_0^L au_n'\left(\frac{(maq)'}{m}\right)'\bar{u}_n dx + o(1) \quad (\text{ Lemme } (3.2)) \\
=&\int_0^L \frac{(maq)'}{m}a\left|u_n'\right|^2 dx + o(1). \quad (\text{ Lemme } (3.2)\cdot \|u_n\|_H = o(1))
\end{aligned} \tag{3.28}$$

nous réécrivons (3.27) comme

$$\int_0^L \frac{(maq)'}{m} a \left|u_n'\right|^2 dx - \int_0^L (maq)' \left|\beta_n u_n\right|^2 dx = o(1). \tag{3.29}$$

la combinaison de (3.26) et (3.29) donne

$$\int_0^L \left(q'a + \frac{(maq)'}{m}\right) a \left|u_n'\right|^2 dx - q(L) \left|T_n(L)\right|^2 = o(1). \tag{3.30}$$

Nous pouvons montrer que (3.30) conduira à une contradiction en choisissant correctement $q(x)$ et en profitant de (3.14) .D'abord prenons

$$q(x) = \frac{1}{2\sqrt{ma}} \int_0^x \frac{\sqrt{m(\tau)}}{\sqrt{a^3(\tau)}} b(\tau) d\tau. \tag{3.31}$$

L'equation (3.30) est alors simplifiée en

$$\int_0^L b \left|u_n'\right|^2 dx - q(L) \left|T_n(L)\right|^2 = o(1) \tag{3.32}$$

ce qui implique de plus que $T_n(L) \to 0$ dû à (3.14)
Ensuite , nous

$$q(x) = \frac{1}{2\sqrt{ma}} \int_0^x \frac{\sqrt{m(\tau)}}{\sqrt{a(\tau)}} d\tau \tag{3.33}$$

Prenons (3.30) pour obtenir

$$\int_0^L a \left|u_n'\right|^2 dx = o(1) \tag{3.34}$$

Ceci contredit (3.15)

Chapitre 4

Boltzmann Modele

Le modèle de Boltzmann d'élasticité viscoélastique linéaire suppose que la contrainte instantanée dépend de la contrainte instantanée et de l'historique complet du taux de contrainte de manière linéaire, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\sigma(x,t) &= \int_{-\infty}^{t} \eta(x,t-s)\dot{\varepsilon}(x,t)ds \quad (\varepsilon(x,-\infty)=0)\\ &= \eta(x,\infty)\varepsilon(x,t) - \int_0^\infty \eta_s(x,s)[\varepsilon(x,t)-\varepsilon(x,t-s)ds\\ &= a(x)\varepsilon(x,t) - b(x)\int_0^\infty g_s(s)[\varepsilon(x,t)-\varepsilon(x,t-s)]ds\end{aligned}$$

où l'on prend la fonction de relaxation sous la forme

$$\eta(x,s) = a(x) + b(x)g(s), \quad g(\infty)=0$$

et appelons aussi la fonction g la fonction de relaxation
Etudions alors le problème :

$$\begin{cases} \ddot{u}(x,t) = \left[a(x)u'(x,t) - b(x)\int_0^\infty g_s(s)\left(u'(x,t)-u'(x,t-s)\right)ds\right]', \\ u(0,t)=u(L,t)=0, \quad 0<x<L, t>0, \\ u(x,t)=u^0(x,t), \quad \dot{u}(x,t)=u^1(x,t) \text{ pour } t\le 0, 0<x<L. \end{cases} \tag{4.1}$$

supposons que la " fonction de relaxation " $g(s)$ satisfasse les conditions suivantes :
(g1) $g(s) \in C^2(0,\infty)\cap C[0,\infty)$, et $g_s(s)\in L^1(0,\infty)$.
(g2) $g>0, g_s<0, g_{ss}>0$ sur $(0,\infty)$.
(g3) $-kg_s \le g_{ss} \le -Kg_s$ sur $(0,\infty)$ pour certains $k,K>0$.
(g4) $g(\infty)=0$.

Nous supposons également que

$$a, b \in C^{0,1}[0, \alpha] \cap C^{0,1}[\alpha, L], a > 0 \text{ sur } [0, L], b > 0 \text{sur } (\alpha, L], b = 0 \text{ sur } [0, \alpha), \quad (4.2)$$

$$\eta(\cdot, 0) = (a + g(0)b) \in C^{1,1}[\alpha, L] \text{ si } b\left(\alpha^{+}\right) = 0. \quad (4.3)$$

Soit $y(x,t,s) = u(x,t) - u(x,t-s)$ et $v = \dot{u}, z = (u, v, y)$. l'énergie du systéme (4.1) est donnée par

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(a(x)\left|u'\right|^2 + |\dot{u}|^2\right) dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty |g_s(s)| \int_\alpha^L b(x)\left|y'\right|^2 dxds. \quad (4.4)$$

On définit les espaces V, H, Y et $\mathcal{H}$ comme suit

$$W = \left\{w \mid w, w' \in L^2(\delta, L), \forall \alpha < \delta < L, \sqrt{b}w' \in L^2(\alpha, L), w(L) = 0\right\},$$

$$\langle w_1, w_2 \rangle_w = \int_a^L b(x) w_1' \bar{w}_2' dx,$$

$$V = H_0^1(0, L), \qquad \|u\|_V^2 = \int_0^L a(x)\left|u'\right|^2 dx,$$

$$H = L^2(0, L), \qquad \|v\|_H^2 = \int_0^L |v|^2 dx,$$

$$Y = L^2((0, \infty); W), \qquad \|y\|_Y^2 = \int_0^\infty |g_s(s)| \|y\|_w^2 ds,$$

et

$$\mathcal{H} = V \times H \times Y. \quad (4.5)$$

Alors $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert .
On peut maintenant réécrire (4.1) comme une équation d'évolution

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A}z(t)$$

sur $\mathcal{H}$ *où*

$$\mathcal{A}z = (v, T', v - y_s), \quad (4.6)$$

avec

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ z \in \mathcal{H} \;\middle|\; \begin{array}{l} v \in V, y_s \in Y, y(x, 0) = 0 \\ T(x) \equiv a(x)u' - b(x)\int_0^\infty g_s(s)y'(x, s)ds \in H^1(0, L) \end{array} \right\} \quad (4.7)$$

D'aprés notre résultat précédent ([10], lemme(3.2)) on a

Lemme 4.1 *Supposons que $h(s) \in Y, Re\lambda > -\frac{k}{2}, g(s)$ satisfait aux conditions*

$(g1)$ -$(g3)$

$$y(s)=\int_0^s e^{-\lambda(s-\tau)}h(\tau)d\tau.\ Alors$$

(i) $\quad y \in Y\cap C([0,\infty),W), y_s\in Y et$

$$\|y\|_Y^2 \leq \frac{1}{\delta}(2\operatorname{Re}\lambda+k-\delta)^{-1}\|h\|_Y^2, \quad pour\ \delta\in(0,2\operatorname{Re}\lambda+k), \tag{4.8}$$

$$Re\int_0^\infty g_s(s)\left\langle y_s(s),y(s)\right\rangle_W ds \leq -\frac{k}{2}\|y\|_Y^2. \tag{4.9}$$

(ii) $\quad \|g_s(s)y(s)\|_W\to 0 \quad lorsque \quad s\downarrow 0, \quad et \quad \|g_s(s)y(s)\|_W\to 0 \quad lorsque \quad s\to\infty.$

Théorème 4.1 *Supposons que* $(g1-4),(4.2)-(4.3)$ *soient satisfaites . Alors l'opérateur* $\mathcal{A}$ *défini par* $(4.6)-(4.7)$ *génére un*C_0 *semi-groupe de contraction exponentiellement stable sur* $\mathcal{H}$

Preuve 4.1 *Pour* $z=(u,v,y)\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$*, D'aprés le lemma* (4.1) *on a*

$$\operatorname{Re}\left\langle\mathcal{A}z,z\right\rangle_{\mathcal{H}}=\operatorname{Re}\int_0^\infty g_s(s)\left\langle y_s,y\right\rangle_W ds\leq -\frac{k}{2}\|y\|_Y^2\leq 0. \tag{4.10}$$

Ainsi ,$\mathcal{A}$ est dissipatif . Pour $(f,l,h)\in\mathcal{H}$, considérons l'équation

$$\mathcal{A}z=(f,l,h), \quad z=(u,v,y)\in\mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{4.11}$$

il est facile de vérifier que(4.11) admet une unique solution satisfait

$$\|(u,v,y)\|_{\mathcal{H}}\leq M\|(f,l,h)\|_{\mathcal{H}}$$

Pour une constante M indépendante de (f,l,h). Donc $\mathcal{A}^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$. il de montrer que $\mathcal{A}$ génére un semi-groupe C_0 de contractions sur $\mathcal{H}$ (voir [10])
Puisque $0\in\rho(\mathcal{A})$, pour vérifier (3.1) il suffit de prouver qu'il existe un constante $\delta>0$ telle que

$$\|(i\beta-\mathcal{A})z\|_{\mathcal{H}}\geq\delta\left\|z\right\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall z\in\mathcal{D}(\mathcal{A}),\beta\in\mathbb{R}. \tag{4.12}$$

Supposons (4.12) est faux , alors il existe $\beta_n\in\mathbb{R}, \quad z_n=(u_n,v_n,y_n)\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$, $n=1,2,\cdots$, tels que

$$\|(u_n,v_n,y_n)\|_{\mathcal{H}}=1, \quad |\beta_n|>\frac{1}{2}\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|^{-1}\equiv\delta_0 \tag{4.13}$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\|(i\beta_n-\mathcal{A})\,z_n\|_{\mathcal{H}}=0, \tag{4.14}$$

et aussi

$$i\beta_n u_n - v_n = f_n \quad \to 0 \text{ dans } V, \tag{4.15}$$

$$i\beta_n v_n - T_n' = l_n \quad \to 0 \text{ dans } H, \tag{4.16}$$

$$i\beta_n y_n + y_{n,s} - v_n = h_n \quad \to 0 \text{ dans } Y. \tag{4.17}$$

Lemme 4.2 *La suite de fonction* (u_n, v_n, y_n) *satisfait*

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n\|_Y = \lim_{n\to\infty} \int_\alpha^L \left(b\left|u_n'\right|^2 + |u_n|^2 + |T_n - au_n'|^2 \right) dx = 0, \tag{4.18}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^L qb\bar{v}_n \int_0^\infty g_s(s) y_{n,s}' ds dx = 0 \quad \forall q \in C([\alpha, L]; \mathbb{R}). \tag{4.19}$$

Preuve 4.2 *D'aprés*(4.17) *on a*

$$y_n = \int_0^s e^{-i\beta_n(s-\tau)} \left(v_n + h_n(\tau)\right) d\tau = \frac{1}{i\beta_n} \left(1 - e^{-i\beta_n s}\right) v_n + \int_0^s e^{-i\beta_n(s-\tau)} h_n(\tau) d\tau. \tag{4.20}$$

Il résulte de(4.1)(4.13) *et* (4.14) *que*

$$\frac{k}{2} \|y_n\|_Y^2 \leq \operatorname{Re} \langle y_{n,s}, y_n \rangle_Y = \operatorname{Re} \langle (i\beta_n - \mathcal{A}) z_n, z_n \rangle_{\mathcal{H}} \to 0 \tag{4.21}$$

De lemme (4.2)(i) ,(4.20) et (4.21) on obtient

$$2\int_0^\infty (\cos\beta_n s - 1) g_s(s) ds \int_\alpha^L b\left|\frac{v_n'}{i\beta_n}\right|^2 dx = \left\|\frac{1}{i\beta_n}\left(1 - e^{-i\beta_n s}\right) v_n\right\|_Y^2 \to 0. \tag{4.22}$$

Par les conditions $(g1) - (g3)$

$$\xi(\beta) \equiv \int_0^\infty (\cos\beta s - 1) g_s(s) ds > 0, \quad \forall \beta \neq 0. \tag{4.23}$$

$\lim_{|\beta|\to\infty} \xi(\beta) = g(0) > 0$ et ξ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ .On a donc

$$\inf_{|\beta|\geq\delta_0} \int_0^\infty (\cos\beta s - 1) g_s(s) ds > 0. \tag{4.24}$$

La combinaison de (4.22) et (4.24) donne

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^L b(x) \left|u_n'\right|^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_\alpha^L b(x) \left|\frac{v_n'}{i\beta_n}\right|^2 dx = 0. \tag{4.25}$$

Cela implique que $u_n \to 0$ dans $L^2(\delta, L)$ pour tout $\alpha < \delta < L$. Puisque u_n' est borné dans $L^2(\alpha, L)$, en appliquant le théoréme d'interpolation faisant intervenir des sous-domaines compacts , on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^L |u_n|^2 \, dx = 0 \tag{4.26}$$

De plus

$$\begin{aligned}\int_\alpha^L |T_n - au_n'|^2 \, dx &= \int_\alpha^L b \left| \int_0^\infty g_s(s) y_n' ds \right|^2 dx \\ &\leq \int_0^\infty |g_s(s)| \, ds \int_\alpha^L b^2 \int_0^\infty |g_s(s)| |y_n'|^2 \, dsdx \\ &\leq g(0) \max_{\alpha \leq x < \leq L} b(x) \, \|y_n\|_Y^2 \to 0\end{aligned}$$

D'aprés le lemme (4.1)(ii) , nous avons

$$\begin{aligned}&\left| \int_\alpha^L qb\bar{v}_n \int_0^\infty g_s(s) y_{n,s}' dsdx \right| \\ =&\left| \int_\alpha^L qb\bar{v}_n \int_0^\infty g_{ss} s(s) y_n' dsdx \right| \\ \leq& K \int_0^\infty |g_s(s)| \int_\alpha^L |qb\bar{v}_n| \, |y_n'| \, dxds \\ \leq& K \int_0^\infty |g_s(s)| \left(\int_\alpha^L b \, |q\bar{v}_n|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\alpha^L b \, |y_n'|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} ds \\ \leq& K \left(\int_0^\infty |g_s(s)| \, ds \int_\alpha^L b \, |q\bar{v}_n|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \|y_n\|_Y \to 0.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Lemme 4.3 *u_n, v_n et T_n vérifient*

$$\text{(i)} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(|v_n(\alpha)|^2 + \left| T_n\left(\alpha^+\right) \right|^2 \right) = 0.$$

$$\text{(ii)} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_\alpha^L \left(|v_n|^2 + a \, |u_n'|^2 \right) dx.$$

Preuve 4.3 *Soit $q(x) \in C^{0,1}([\alpha, L]; \mathbb{R})$ tel que $q(L) = 0, q(\alpha) \neq 0$. il résulte de* (4.16) *que*

$$\operatorname{Re} \langle i\beta_n v_n, qT_n \rangle_{L^2(a,L)} - \operatorname{Re} (T_n', qT_n)_{L^2(a,L)} \to 0 \tag{4.28}$$

On en déduit

$$-\operatorname{Re}\langle T_n', qT_n\rangle_{L^2(\alpha,L)} = \frac{1}{2}q(\alpha)\left|T_n(\alpha)\right|^2 + \frac{1}{2}\int_\alpha^L q'\left|T_n\right|^2 dx \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\langle i\beta_n v_n qT_n\rangle_{L^2(\alpha,L)}\\
=&\operatorname{Re}\int_\alpha^L i\beta_n q v_n\left(a\bar{u}_n' + \bar{T}_n - a\bar{u}_n'\right)dx\\
=&\operatorname{Re}\int_\alpha^L -aqv_n\left(\bar{v}_n' + \bar{f}_n'\right)dx + \operatorname{Re}\int_\alpha^L i\beta_n q v_n\left(\bar{T}_n - a\bar{u}_n'\right)dx\\
=&\frac{1}{2}q(\alpha)a\left(\alpha^+\right)\left|v_n(\alpha)\right|^2 + \frac{1}{2}\int_\alpha^L (aq)'\left|v_n\right|^2 dx\\
&\qquad +\operatorname{Re}\int_\alpha^L i\beta_n q v_n\left(\bar{T}_n - a\bar{u}_n'\right)dx + o(1),
\end{aligned} \tag{4.30}$$

et

$$\begin{aligned}
&Re\int_\alpha^L i\beta_n q v_n\left(\bar{T}_n - a\bar{u}_n'\right)dx\\
=&Re\int_\alpha^L i\beta_n q v_n b\int_0^\infty g_s(s)\bar{y}_n' ds dx\\
=&Re\int_\alpha^L q v_n b\int_0^\infty g_s(s)(\bar{h}_n' + \bar{v}_n' - \bar{y}_{n,s}')ds dx\\
=&Re\int_\alpha^L -g(0)qv_n b\bar{v}_n' dx - Re\int_\alpha^L q\bar{v}_n b\int_0^\infty g_s(s)y_{n,s}' ds dx + o(1).\\
=&\frac{1}{2}q(\alpha)b(\alpha^+)g(0)\mid v_n(\alpha)\mid^2 + \frac{g(0)}{2}\int_\alpha^L (bq)'\left|v_n\right|^2 dx + o(1)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Substitution (4.29)-(4.31) en (4.28) donnne

$$\begin{aligned}
&q(\alpha)[|T_n(\alpha^+)|^2 + (a(\alpha^+) + b(\alpha^+)g(0))\left|v_n(\alpha)\right|^2]\\
&\qquad + \int_\alpha^L [q'\left|T_n\right|^2 + (aq + g(0)bq)'\left|v_n\right|^2]dx = o(1).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

soit $p \in C^{0,1}([\alpha, L]; \mathbb{R})$,On prend les produits scalaires de (4.15) avec pv_n et (4.16) avec pu_n dans $L^2(\alpha, L)$ pour obtenir

$$i\beta_n\int_\alpha^L p u_n\bar{v}_n dx = \int_\alpha^L p\left|v_n\right|^2 dx + o(1), \tag{4.33}$$

$$i\beta_n \int_\alpha^L p\bar{u}_n v_n dx = \int_\alpha^L pT_n' \bar{u}_n dx + o(1)$$

$$= -p(\alpha)T_n\left(\alpha^+\right)\bar{u}_n(\alpha) - \int_\alpha^L \left[p'T_n\bar{u}_n + pT_n\bar{u}_n'\right] dx + o(.1) \tag{4.34}$$

D'aprés le lemme (4.2), T_n est borné dans $L^2(\alpha, L)$ et $u_n(\alpha) \to 0$. En prenant $q(x) = L - x$ dans (4.32) , on sait que $T_n\left(\alpha^+\right)$ est borné. Ainsi (4.33) et (4.34) impliquent

$$\int_\alpha^L p\left(|v_n|^2 - \frac{1}{a}|T_n|^2\right) dx = o(1). \tag{4.35}$$

En prenant $p = b$ dans (4.35) et en utilisant le lemme (4.2) on obtient

$$\int_\alpha^L b\,|v_n|^2\, dx = o(1). \tag{4.36}$$

Si $b\left(\alpha^+\right) > 0$, par (4.32) et (4) la preuve est complétée sans condition (4.3) . Si $b\left(a^+\right) = 0$, On substitue (4.35) par $p = aq'$ dans (4.32) pour obtenir

$$q(\alpha)\left[\left|T_n\left(\alpha^+\right)\right|^2 + a\left(\alpha^+\right)|v_n(\alpha)|^2\right] + \int_\alpha^L \left[2aq' + (a + g(0)b)'q\right]|v_n|^2\, dx = o(1). \tag{4.37}$$

prenons q dans (4.37) satisfaisant

$$2aq' + (a + g(0)b)'q = b \qquad q(L) = 0.$$

Alors

$$q(\alpha) = \int_L^\alpha e^{\int_\alpha^s \frac{(a+\theta b)'}{2a} d\tau} \frac{b(s)}{2a(s)} ds \neq 0$$

où $\theta = g(0)$. Donc (i) est vérifié et (4.37) se réduit *à*

$$\int_\alpha^L \left[2aq' + (a + g(0)b)'q\right]|v_n|^2\, dx = o(1). \tag{4.38}$$

En prenant g dans (4.38) satisfaisant

$$2aq' + (a + g(0)b)'q = 1 \qquad q(L) = 0.$$

et $p = 1$ dans (4.35) , on obtient les résultats recherchés .
Revenons maintenant*à* la preuve du théoréme . Soit $q(x) \in C^{0,1}([0, \alpha]; \mathbb{R})$ tel que $q(0) = 0$. il résulte de (4.16) que

$$\mathrm{Re}\left\langle i\beta_n v_n, qau_n'\right\rangle_{L^2(0,\alpha)} - \mathrm{Re}\left\langle\left(au_n'\right)', qau_n'\right\rangle_{L^2(0,\alpha)} \to 0. \tag{4.39}$$

D'aprés le lemme (4.3) et $T_n \in H^1(0,L)$, on a $\left(au_n'\right)\left(\alpha^-\right) = T_n\left(\alpha^+\right) = o(1)$. Ainsi

$$-\operatorname{Re}\left\langle \left(au_n'\right)', qau_n'\right\rangle_{L^2(0,\alpha)} = \frac{1}{2}\int_0^\alpha q' \left|au_n'\right|^2 dx + o(1) \tag{4.40}$$

et

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left\langle (i\beta_n v_n, qau_n'\right\rangle_{L^2(0,\alpha)} &= \operatorname{Re}\int_0^\alpha -aqv_n\left(\bar{v}_n' + \bar{f}_n'\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\alpha (qa)'\left|v_n\right|^2 dx - \frac{1}{2}q(\alpha)a\left(\alpha^-\right)\left|v_n(\alpha)\right|^2 + o(1) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^a (ga)'\left|v_n\right|^2 dx + o(1) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\alpha (qa)'\left|v_n\right|^2 dx + o(1) \qquad (4.41)
\end{aligned}$$

la combinaison de (4.39)-(4.41) donne

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\alpha \left(q'\left|au_n'\right|^2 + (qa)'\left|v_n\right|^2\right) dx = 0 \tag{4.42}$$

Si nous choisissons

$$q(x) = \int_0^x e^{\int_s^x \frac{|a'(\tau)|}{a\tau)} d\tau}\frac{1}{a(s)} ds,$$

il est facile de vérifier que

$$q' \geq \frac{1}{a} \quad (qa)' \geq 1.$$

Ainsi (4.42) implique

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\alpha \left(a\left|u_n'\right|^2 + \left|v_n\right|^2\right) dx = 0 \tag{4.43}$$

Conclusion

En combinant les résultats de ce mémoire et ceux examinés dans la section 1, nous avons une image assez claire de l'effet de localisation de l'amortissement (visqueux, Boltzmann, Kelvin-Voigt) sur la préservation de la stabilité exponentielle pour une equation des ondes linéaire unidimensionnelle .
1. Lorsque les fonctions coefffcientes sont lisses, la localisation de l'amortissement préserv la stabilité exponentielle dans les trois cas.
2. Lorsque les fonctions coeścientes présentent une discontinuité aux interfaces, la localisation de l'amortissement Kelvin-Voigt perd sa stabilité exponentielle, tandis que la localisation de l'amortissement visqueux ou les amortissements Boltzmann préservent toujours la stabilité exponentielle.
3. Pour le modèle d'amortissement de Kelvin-Voigt (3.1) avec des fonctions coeffcientes discontinues aux interfaces, puisque la contrainte $\sigma(x, t)$ est continue, à l'interface $x = \alpha$ Nous avons

$$a(\alpha^-)u'(\alpha^-, t) = a(\alpha^+)u'(\alpha^+, t) + b(x)\dot{u}'(\alpha^+, t)$$

Ainsi la pente $u'(x, t)$ de la corde pourrait être discontinue en ce point. l'onde peut être partiellement réfléchie à l'interface avant qu'elle n'entre dans le Région. Par une analyse aux valeurs propres, il existe une branche de l'approche aux valeurs propres - l'axe imaginaire comme sa partie imaginaire va vers l'infini, ce qui signifie que l'effet d'amortissement diminue jusqu'à s'annuler pour une séquence de fréquences alors qu'il tend à l'infini. Cependant, ce n'est pas la seule cause de perte exponentielle de stabilité. Pour le modèle de Boltzmann (4.1) avec des fonctions coeffcientes discontinues au interfaces, La pente de la corde peut également être discontinue. On sait alors que le "type" de l'amortissement joue également un rôle ici.
Pour les structures élastiques de grande dimension avec viscoélasticité locale, le problème de la décroissance exponentielle de l'énergie est plus délicate en raison du caractère illimité de l'amortissement et absence de régularité de déplacement. Nous rapporterons quelques résultats dans cette orientation dans les articles à venir.

Bibliographie

[1] Haim Brezis. *Analyse Fonctionnelle Théorie et applications.* masson, 2010.

[2] G. Lebeau C. Bardos and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Cont. Optim*, 30 (1992) :1024 – 1065.

[3] F. J. Narcowich G. Chen, S. A. Fulling and S. Sun. Exponential decay of energy of evolution equation with locally distributed damping. *SIAM J. Appl. Math*, 51(1) (1991) :226 – 301.

[4] L. M. Gearhart. Spectral theory for contraction semigroups on hilbert space. *Trans. Amer. Math. Soc*, 236 (1978) :385 – 394.

[5] F. L. Huang. Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in hilbert spaces. *Ann. of Diff. Eqs*, 1(1) (1985) :43 – 56.

[6] J. Lagnese. Control of wave process with distributed controls supported on a subregion. *SIAM J. Cont. Optim*, 21 (1983) :68 – 85.

[7] K. Liu. Locally distributed control and damping for the conservative systems. *SIAM J. Cont. Optim*, 35 (1997) :1574 – 1590.

[8] K. Liu and Z. Liu. Exponential decay of energy of the euler-bernoulli beam with locally distributed kelvin-voigt damping. *SIAM J. Cont. Optim*, 36(3) (1998) :1086 – 1098.

[9] K. Liu and Z. Liu. Exponential decay of energy of vibrating strings with local viscoelasticity. *Z. angew. Math. Phys*, 53 (2002) :265 – 280.

[10] K. Liu and Z. Liu. On the type of c_0-semigroup associated with the abstract linear vis- coelastic system,. *J. Appl. Math. Phys.*, (ZAMP) 47 (1996) :1 – 15.

[11] A. pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, 1983.

[12] M. Renardy. On the type of certain c_0-semigroups. *Comm. Part. Diff. Eq*, 18 (1993) :1299 – 1307.

[13] K. Liu S. Chen and Z. Liu. Spectrum and stability of elastic systems with global or local kelvin-voigt damping. *SIAM J. Appl. Math.*, 59 (1998), :651 − 668.

[14] K. LIU S. CHEN and Z. LIU. Spectrum character and stability for the elastic systems with global/local kelvinVoigt damping. *SIAM J. Appl. Math.*,, page to appear.

[15] E. Zuazua. Exponential decay for the semilinear wave equation with localized damping. *Comm. Part. Diff. Eq*, 15 (1990) :205 − 235.

[16] E. Zuazua. Exponential decay for the semilinear wave equation with localized damping in unbounded domains. *J. Math. Pures et Appl.*, 70 (1991), :513 − 529.

[17] J. Pr Íu ss. On the spectrum of c_0-semigroups. *Trans. Amer. Math. Soc*, . 284 (1984) :847 − 857.

[18] Jean Étienne Rombaldi. *Analyse matricielle - Cours et exercices résolus*. EDP Sciences, 2019.