

جامعة غرداية
كلية العلوم الاقتصادية
والتجارية وعلوم التسيير



مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان :

محاضرات وتطبيقات في مادة
الرياضيات 2

معدة لطلبة : السنة أولى جذع مشترك

من اعداد :

الدكتور : بن جواد مسعود

2025 /2026

Syllabus دليل المادة التعليمية			
اسم المادة: رياضيات 2			
الميدان	علوم اقتصادية، تسيير وعلوم تجارية	الفرع	جذع مشترك
التخصص	جذع مشترك	المستوى	السنة الأولى
السداسي	الثاني	السنة الجامعية	2023/2022
التعرف على المادة التعليمية			
اسم المادة	رياضيات 02	وحدة التعليم	المنهجية
عدد الأرصدة	04	المعامل	2
الحجم الساعي الأسبوعي	03 ساعات	المحاضرة (عدد الساعات في الأسبوع)	ساعة ونصف
أعمال توجمية (عدد الساعات في الأسبوع)	/	أعمال تطبيقية (عدد الساعات في الأسبوع)	ساعة ونصف
مسؤول المادة التعليمية			
الاسم، اللقب		الرتبة	
تحديد موقع المكتب		البريد الإلكتروني	
رقم الهاتف		توقيت الدرس ومكانه	
وصف المادة التعليمية			
المكتسبات	مفاهيم أولية في الجبر والتحليل		
الهدف العام للمادة التعليمية	زيادة المعارف واكتساب مهارات جديدة في التحليل و الجبر الخطي		
أهداف التعلم (المهارات المراد الوصول إليها)	- تمكين الطالب من استيعاب مفهوم المعادلة التفاضلية و المشتقات الجزئية لاستعمالها في الاقتصاد الجزئي. - التعامل مع المصفوفات من أجل توظيفها في مجالات ذات صلة مع تخصص العلوم الاقتصادية كرياضيات المؤسسة وبحوث العمليات وتحليل المعطيات ...الخ. - توظيف المفاهيم الأساسية حول المصفوفات في حل جمل معادلات خطية كي تستعمل لاحقا في نظرية اتخاذ القرار.		

محتوى المادة التعليمية					
المعادلات التفاضلية			المحور الأول		
الدوال ذات متغيرين			المحور الثاني		
مفاهيم عامة حول المصفوفات والعمليات عليها			المحور الثالث		
المحددات وطرق حساب مقلوب مصفوفة			المحور الرابع		
حل جملة المعادلات الخطية			المحور لخامس		
طريقة التقييم					
الوزن النسبي للتقييم			العلامة		التقييم بالنسبة المئوية
% 60	% 60	وزن المحاضرة	20/20		امتحان
%40	% 40	وزن الأعمال الموجهة والتطبيقية	20	8	امتحان جزئي
%25				5	واجب منزلي
%15				3	المواظبة (الحضور / الغياب)
% 20				4	عناصر أخرى (المشاركة)
بالنسبة للمواد التي تدرس في شكل محاضرات وأعمال موجهة/تطبيقية أو طبيعة تقييمها امتحان و مراقبة مستمرة يقاس معدل المادة بالوزن الترجيحي للمحاضرة والأعمال الموجهة:					
معدل المادة		نقطة المحاضرة * 0.6 + نقطة الأعمال الموجهة/التطبيقية * 0.4 =			
Moy.M		= (Note Ex * 0.6) + (Note Td * 0.4)			
المصادر والمراجع					
المرجع الأساسي الموصى به :					
عنوان المرجع		المؤلف		دار النشر و السنة	
الرياضيات العامة للاقتصاديين		هادية مسعودان وحناشي فارح		نوران للنشر والتوزيع 2021	
مراجع الدعم الإضافية (إن وجدت):					
1. مسعودان هادية و حناشي فارح (2021)، الرياضيات العامة للاقتصاديين.ط1 . نوران للنشر والتوزيع. تبسة-الجزائر.					
2. حسن ياسين طعمة (2010)، الرياضيات للاقتصاد والعلوم الادارية والمالية، ط1، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.					
3. Denis Serre (2001), Les Matrices Théorie et pratique, Dunod, Paris, France.					
4. Skander Belhaj (2011), Mathématiques pour l'économie et la gestion, 1re Édition, Vuibert.					
التوزيع الزمني المرتقب لبرنامج المادة					
الأسبوع		محتوى المحاضرة		التاريخ	
الأسبوع الأول		المحور الأول:المعادلات التفاضلية تعريف المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى المعادلات التفاضلية القابلة للفصل وطرق حلها			

الأسبوع الثاني	المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية (المميز موجب او معدوم)	
الأسبوع الثالث	<u>المحور الثاني: الدوال ذات متغيرين</u> - منطقة تعريف دالة ذات متغيرين - الاشتقاق الجزئي من الرتبة الاولى	
الأسبوع الرابع	- الاشتقاق الجزئي من الرتبة الثانية	
الأسبوع الخامس	<u>المحور الثالث: المصفوفات والعمليات عليها</u> - تعريف المصفوفة - أنواع المصفوفات - منقول المصفوفة وخصائصه	
الأسبوع السادس	- العمليات الأساسية على المصفوفات	
الأسبوع السابع	<u>المحور الرابع: محدد ومقلوب مصفوفة</u> - محددات المصفوفة من الرتبة الثانية - محدد المصفوفة من الدرجة الثالثة (قاعدة سارس، طريقة المحددات الصغرى) - خواص المحددات	
الأسبوع الثامن	مقلوب مصفوفة - تعريف مقلوب المصفوفة - إيجاد المقلوب بطريقة المصفوفة المرافقة	
الأسبوع التاسع	- إيجاد المقلوب بطريقة غوس Gauss - خصائص المقلوب	
الأسبوع العاشر	<u>المحور الخامس: حل جملة المعادلات الخطية</u> - كتابة جملة المعادلات على الشكل المصفوفي - حل جملة معادلات خطية بطريقة كرامر Cramer	
الأسبوع الحادي عشر	- حل جملة معادلات خطية بطريقة مقلوب المصفوفة	
الأسبوع الثاني عشر	- حل جملة معادلات خطية بطريقة غوس Gauss	
الأسبوع الثالث عشر	- حل جملة معادلات خطية باستخدام المحددات	
الأسبوع الرابع عشر	- حل جمل معادلات خطية في حال مصفوفتها المرفقة غير قابلة للقلب	
	امتحان نهاية السداسي	تحدهه الإدارة
	الامتحان الاستدراكي للمادة	تحدهه الإدارة

الأعمال الشخصية المقررة للمادة

1. حل تمارين خلال حصص الأعمال الموجهة؛
2. القيام بحل تمارين مقدمة على شكل واجبات منزلية؛
3. استجواب تقييمي؛
4. تقييم الأسئلة التفاعلية للطلبة عبر منصة Moodle.
5. الحضور والتفاعل في منصة Moodle.
6. إنشاء دردشة ومنتدى في منصة Moodle للتعليم الإلكتروني.

مصادقات الهيئات الإدارية والبيداغوجية

الأستاذ مسؤول المادة	رئيس القسم	مسؤول الميدان	نائب العميد الملحق بالبيداغوجيا أو مدير الدراسات
----------------------	------------	---------------	--

ملاحظة هامة: بعد المصادقة على دليل المادة في بداية كل سدا سي يتم نشره على الموقع الرسمي للمؤسسة الجامعية

تمهيد

مادة رياضيات 2 هي امتداد أساسي لمقرر رياضيات 1 الذي يهدف إلى تزويد الطالب بالمعارف والمهارات القاعدية في الرياضيات العامة. في هذا المستوى الثاني، تركز المادة على مواضيع متقدمة ذات صلة مباشرة بمجالات الاقتصاد والتجارة والمحاسبة، مثل دراسة المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها، تحليل الدوال متعددة المتغيرات، وفهم بنية المصفوفات والمحددات وطرق حل جمل المعادلات الخطية.

تسعى هذه المادة إلى تدريب الطالب على استعمال الأساليب الكمية والرياضية في صياغة المشكلات وتحليلها وتفسير النتائج بما يخدم اتخاذ القرار في المحيط الاقتصادي والمؤسسي.

كما تهدف المقياس إلى تعميق المعارف الرياضية لدى الطالب بما يسمح له بفهم وتحليل الظواهر الاقتصادية والمالية.

- تمكين الطالب من حل المعادلات التفاضلية البسيطة ذات التطبيقات الاقتصادية، مثل نماذج النمو الاقتصادي أو التآكل الرأسمالي.
 - اكتساب القدرة على تحليل الدوال ذات متغيرين وتوظيف الاشتقاق الجزئي في قياس العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية.
 - التمكن من التعامل مع المصفوفات والمحددات كأدوات لحل النماذج الرياضية وتحليل التوازن في النظم الاقتصادية.
 - إتقان طرق حل جمل المعادلات الخطية التي تمثل أساساً لنماذج المدخلات والمخرجات وتحليل الميزانيات في الاقتصاد.
- مع نهاية المقياس، من المنتظر أن يتمكن الطالب من:

- التعرف على مختلف أنواع المعادلات التفاضلية وحلها باستخدام الطرق الملائمة.
- التمييز بين أنواع المصفوفات وإجراء العمليات الأساسية عليها (الجمع، الضرب، المقلوب).
- حساب المحددات للمصفوفات من رتب مختلفة وتوظيفها في حل المعادلات الخطية.
- تطبيق الاشتقاق الجزئي لتفسير كيفية تأثير المتغيرات المستقلة على النتائج الاقتصادية.

فهرس المطبوعة

الصفحة	فهرس المطبوعة
1	تمهيد
2	فهرس المطبوعة
6	مقدمة عامة
7	الوحدة الأولى: المعادلات التفاضلية
7	1. مفاهيم أساسية حول المعادلات التفاضلية
7	○ تعريف المعادلة التفاضلية
8	○ رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية
9	○ الحل العام والحل الخاص
12	2. المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى
13	○ المعادلات القابلة للفصل
14	○ المعادلات المتجانسة
15	○ المعادلات التامة
16	○ معادلات بيرنولي
17	3. المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية
18	○ المعادلات ذات المعاملات الثابتة
18	○ حالة المميز الموجب
19	○ حالة المميز السالب
20	○ حالة المميز المعدوم
22	خلاصة
23	الوحدة الثانية: الدوال ذات متغيرين
23	1. أساسيات الدوال متعددة المتغيرات
24	○ تعريف الدالة ذات متغيرين
24	○ مجال الدالة متعددة المتغيرات
24	○ تمثيل الدوال بيانيا
28	2. الاشتقاق الجزئي

الصفحة	فهرس المطبوعة
29	○ المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى
29	○ المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية
32	خلاصة
33	الوحدة الثالثة: المصفوفات والعمليات عليها
33	1. مقدمة في المصفوفات
33	○ تعريف وعناصر المصفوفة
33	○ الدرجة والمميزات
34	2. أنواع المصفوفات
34	○ الأنواع المختلفة
37	3. منقول المصفوفة
37	○ مفهوم منقولة المصفوفة
38	○ طريقة الحساب
39	4. أثر المصفوفة
39	○ مفهوم أثر المصفوفة
39	○ طريقة الحساب
40	5. العمليات على المصفوفات
40	○ جمع وطرح المصفوفات
42	○ ضرب المصفوفات
44	خلاصة
45	الوحدة الرابعة: المحددات ورتبة المصفوفة
45	1. محدد المصفوفة
45	○ محدد المصفوفة من الرتبة 2×2
46	○ محدد المصفوفة من الرتبة 3×3
47	○ طريقة سارس (Sarrus)
48	○ طريقة بيزوت (Bézout) طريقة المحددات الصغرى
51	○ طريقة التحويلات الأولية
53	2. رتبة المصفوفة

الصفحة	فهرس المطبوعة
53	○ تعريف رتبة المصفوفة
54	○ طريقة الحساب لرتبة المصفوفة
58	خلاصة
59	الوحدة الخامسة: مقلوب المصفوفة
59	1. شروط وجود المقلوب
60	2. خواص مقلوب المصفوفة
61	3. طرق حساب مقلوب المصفوفة
61	○ طريقة المعاملات
66	○ طريقة غوص جوردين
72	خلاصة
73	الوحدة السادسة: حل جمل المعادلات الخطية
73	1. تقديم جمل المعادلات
73	○ الصيغة المصفوفية لجمل المعادلات
73	○ شرط وجود الحل
74	○ أنواع الجمل (مؤكدة، غير مؤكدة، مستحيلة)
77	2. طرق حل الجمل الخطية
77	○ طريقة كرامر
79	○ طريقة مقلوب المصفوفة
82	○ طريقة غوص
84	○ طريقة غوص -جوردان
86	خلاصة
87	دفاتر تمارين محلولة
105	خاتمة عامة
107	المراجع والمصادر

مقدمة عامة

تسعى هذه المطبوعة الى تقديم محتوى المادة بصورة منظمة ومبسطة، تجمع بين التأصيل النظري والتطبيقات العملية، بما يتماشى مع حاجات طالب السنة الثانية جذع مشترك. وتهدف المادة الى تنمية التفكير التحليلي وتعزيز القدرة على صياغة المشكلات الاقتصادية في شكل نماذج رياضية ثم معالجتها باستخدام ادوات الجبر والتحليل.

ينطلق البرنامج بدراسة المعادلات التفاضلية، حيث يتعرف الطالب على مفهوم المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى وطرق حل المعادلات القابلة للفصل، ثم ينتقل الى بعض اشكال المعادلات من الرتبة الثانية. وتكمن اهمية هذا المحور في قدرته على تمثيل تطور الظواهر الاقتصادية عبر الزمن مثل تطور الاسعار او النمو او تغير راس المال، مما يمنح الطالب فهما ديناميكيا للعلاقات الاقتصادية.

ثم يتناول المحور الثاني الدوال ذات متغيرين، مع التركيز على مجال التعريف والمشتقات الجزئية من الرتبة الاولى والثانية. ويعد هذا الجزء اساسيا في دراسة سلوك الدوال الاقتصادية متعددة المتغيرات كدوال الانتاج والتكلفة والمنفعة، حيث تساعد المشتقات الجزئية في تحليل التأثير الحدي لكل متغير على حدة، وهو مفهوم جوهري في النظرية الاقتصادية.

اما المحور الثالث فيخصص للمصفوفات والعمليات عليها، حيث يتعرف الطالب على مفهوم المصفوفة وانواعها وخصائصها، اضافة الى العمليات الاساسية كالجمع والضرب والنقل. وتمثل المصفوفات أداة فعالة في تنظيم البيانات الاقتصادية ومعالجة النماذج متعددة المعادلات، كما تستعمل في بحوث العمليات وتحليل المعطيات.

ويستكمل البرنامج بدراسة المحددات وطرق حساب مقلوب المصفوفة، من خلال محددات الرتبة الثانية والثالثة مثل قاعدة سارس وطريقة المحددات الصغرى، ثم ايجاد المقلوب باستعمال المصفوفة المرافقة او طريقة غاوس. ويشكل هذا المحور تمهيدا اساسيا لحل الانظمة الخطية بطرق مختلفة.

ويختتم المحتوى بمحور حل جملة المعادلات الخطية باستعمال طريقة كرامر وطريقة المصفوفة المقلوبة وطريقة غاوس، اضافة الى دراسة الحالات التي تكون فيها المصفوفة غير قابلة للقلب. وتعد هذه التطبيقات ذات اهمية مباشرة في تحليل التوازنات الاقتصادية ونماذج العرض والطلب وتخصيص الموارد واتخاذ القرار. وعليه فان هذه المطبوعة تمثل دليلا علميا ومنهجيا يساعد الطالب على استيعاب مفاهيم رياضيات 2 بصورة مترابطة، وفهم دورها كاداة تحليل اساسية في الاقتصاد والتسيير، تمهيدا لاستعمالها في مواد اكثر تخصصا مثل الاقتصاد الكمي وبحوث العمليات وتحليل المعطيات.

الوحدة الأولى: المعادلات التفاضلية

تعد المعادلات التفاضلية نافذة رياضية لفهم عالم الديناميكيات والتحول، حيث تمثل أدوات رياضية تعبر عن علاقات تربط بين الدوال ومشتقاتها، فتكشف عن سلوك الظواهر المتغيرة عبر الزمن أو المكان. تنبثق هذه المعادلات كجسر بين التجريد النظري والتطبيق العملي، حيث تتيح لنا صياغة قوانين تطور الأنظمة - من حركة الكواكب في الفضاء إلى تدفق رؤوس الأموال في الأسواق المالية - مما يجعلها أداة محورية في نمذجة الظواهر في الفيزياء والهندسة والاقتصاد والبيولوجيا. فمن خلال تحليل هذه المعادلات، لا تقتصر على وصف الحالة الآنية للأنظمة فحسب، بل نتوقع مساراتها المستقبلية، مما يمكننا من استشراف آفاق التغير والتحول في الكون من حولنا.

1. مفاهيم أساسية حول المعادلة التفاضلية

➤ **التعريف الرياضي:** المعادلة التفاضلية هي معادلة رياضية تربط دالة ما بمشتقاتها. تستخدم لنمذجة الظواهر المتغيرة مع الزمن أو المتغيرات الأخرى.

➤ **الصيغة العامة:**

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

حيث:

- x : المتغير المستقل
- y : المتغير التابع (الدالة)
- y' : المشتقة الأولى
- $y^{(n)}$: المشتقة من الرتبة n

➤ أمثلة واقعية:

• نمو السكان: $\frac{dP}{dt} = kP$

• التفاعلات الكيميائية: $\frac{dC}{dt} = -kC$

• حركة الأجسام: $m \frac{d^2x}{dt^2} = F$

➤ رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية

- رتبة المعادلة التفاضلية: هي أعلى رتبة للمشتقة الظاهرة في المعادلة حيث تمثل الرتبة عدد مرات

الاشتقاق التي أجريت على الدالة المجهولة.

أمثلة:

○ $y' + 2y = 0 \rightarrow$ الرتبة الأولى

○ $y'' + 3y' + 2y = e^x \rightarrow$ الرتبة الثانية

○ $\frac{d^3y}{dx^3} + x \frac{dy}{dx} = \sin x \rightarrow$ الرتبة الثالثة

- درجة المعادلة التفاضلية: هي القوة التي رفعتها أعلى رتبة مشتقة، بشرط أن تكون المعادلة كثيرة حدود

في المشتقات. بمعنى آخر هي الأس الذي رفعته إليه أعلى رتبة مشتقة، بعد كتابة المعادلة في صورة

كثيرة حدود في المشتقات.

أمثلة:

○ $(y')^2 + y = x \rightarrow$ الدرجة الثانية

○ $y'' + (y')^3 + y = 0 \rightarrow$ الدرجة الأولى

○ $(\frac{d^2y}{dx^2})^3 + (\frac{dy}{dx})^2 = 1 \rightarrow$ الدرجة الثالثة

• تمييز بين الرتبة والدرجة:

الدرجة	الرتبة	المعادلة
1	1	$y' + xy = 0$
2	2	$(y'')^2 + y' = x$
1	3	$y''' + (y'')^3 + y = 0$

➤ الحل العام والحل الخاص للمعادلات التفاضلية.

- **الحل العام:** هو حل يحتوي على ثوابت اختيارية بعدد رتبة المعادلة. وهو الحل الذي يحتوي على الثوابت التكاملية ($C_1, C_2, \dots$) الناتجة عن عملية التكامل. يمثل عائلة من الحلول، أي مجموعة لا نهائية من الدوال التي تحقق المعادلة التفاضلية. يستخرج دون استخدام شروط أولية أو حدودية.

• خصائص الحل العام:

- يحتوي على جميع الحلول الممكنة
- عدد الثوابت = رتبة المعادلة
- يمثل عائلة من المنحنيات

مثال:

- للمعادلة: $y' = 2x$
- الحل العام: $y = x^2 + C$ أي $y = \int 2x dx = x^2 + C$
- حيث C ثابت اختياري

- **الحل الخاص:** هو حل ناتج من الحل العام بتعيين قيم محددة للثوابت. هو الحل الناتج من تعويض قيم معينة للثوابت بناء على شروط ابتدائية أو حدودية.

- **شروط إيجاد الحل الخاص:**

– وجود شروط ابتدائية

– عدد الشروط = عدد الثوابت

مثال:

– للمعادلة: $y' = 2x$ ، مع الشرط $y(0) = 1$

– الحل العام: $y = x^2 + C$

– بتطبيق الشرط: $1 = 0 + C \Rightarrow C = 1$

– الحل الخاص: $y = x^2 + 1$

➤ **أمثلة تطبيقية مفصلة**

المثال 1: تصنيف معادلة تفاضلية

$$\text{المعادلة: } \frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x$$

التحليل:

– أعلى مشتقة $\frac{d^2y}{dx^2}$ من الرتبة 2

– مرفوعة للقوة 1 $\rightarrow$ من الدرجة 1

المثال 2: إيجاد الحل العام والخاص

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2: \text{المعادلة}$$

الحل العام:

$$y = \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

الحل الخاص: عندما $y(1) = 4$:

$$4 = 1^3 + C \Rightarrow C = 3$$

$$y = x^3 + 3$$

المثال 3: تطبيق اقتصادي

$$\frac{dK}{dt} = rK: \text{معادلة نمو رأس المال}$$

الحل العام:

$$K(t) = K_0 e^{rt}$$

حيث K_0 ثابت يمثل رأس المال الابتدائي

الحل الخاص عندما $K(0) = 1000$ ، $r = 0.05$:

$$K(t) = 1000e^{0.05t}$$

تمارين محلولة

- التمرين 1: حدد رتبة ودرجة المعادلة $(y''')^2 + (y')^4 = x^2$:

الحل:

- أعلى مشتقة y''' من الرتبة 3

- مرفوعة للقوة 2 $\rightarrow$ من الدرجة 2

- التمرين 2: أوجد الحل العام لـ $\frac{dy}{dx} = \cos x$:

الحل:

$$y = \int \cos x dx = \sin x + C$$

- التمرين 3: أوجد الحل الخاص لـ $y' = 2x + 1$ ، $y(0) = 3$:

الحل:

- الحل العام $y = x^2 + x + C$:

- بتطبيق الشرط $3 = 0 + 0 + C \Rightarrow C = 3$:

- الحل الخاص $y = x^2 + x + 3$:

2. المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى هي معادلات تحتوي على المشتقة الأولى فقط للدالة المجهولة،

وتأخذ الصورة العامة:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

- المعادلات القابلة للفصل: هي معادلات يمكن كتابتها على الصورة:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

أو

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

طريقة الحل:

– فصل المتغيرات: $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$

– تكامل الطرفين: $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$

– إيجاد الحل العام

مثال تطبيقي: قدم حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y$$

الحل:

$$\frac{dy}{y} = xdx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int xdx$$

$$\ln |y| = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = e^{\frac{x^2}{2} + C} = Ae^{\frac{x^2}{2}}$$

- المعادلات المتجانسة: هي معادلات يمكن كتابتها على الصورة:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

طريقة الحل:

– التعويض $y = vx$ حيث: $v = \frac{y}{x}$

– إذن: $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$

– التعويض في المعادلة الأصلية وحل المعادلة الناتجة

مثال تطبيقي: قدم حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \Rightarrow v + x \frac{dv}{dx} = 1 + v$$

$$x \frac{dv}{dx} = 1$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$dv = \frac{dx}{x}$$

$$v = \ln |x| + C$$

$$\frac{y}{x} = \ln |x| + C$$

$$y = x(\ln |x| + C)$$

• المعادلات التامة: هي معادلات على الصورة:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

بحيث:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

طريقة الحل:

– التأكد من شرط التمام: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

– إيجاد الدالة $F(x, y)$ بحيث:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M, \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

– الحل العام: $F(x, y) = C$

مثال تطبيقي: قدم حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$$

الحل:

$$M = 2x + y, N = x + 2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + g'(y) = x + 2y$$

$$g'(y) = 2y$$

• معادلات بيرنولي: هي معادلات على الصورة:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

حيث $n \neq 0, 1$

طريقة الحل:

– قسمة المعادلة على y^n

– التعويض $v = y^{1-n}$

– تحويل المعادلة إلى معادلة خطية في v .

مثال تطبيقي: قدم حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2 y^3$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^2 y^3$$

– قسمة على y^3 :

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y^{-2} = x^2$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx} v = y^{-2} \text{ نضع}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{x} v = x^2$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x} v = -2x^2$$

هذه معادلة خطية، حلها:

$$v = x^2 (\int -2dx + C) = x^2 (-2x + C)$$

$$y^{-2} = -2x^3 + Cx^2$$

- ملخص طرق الحل: يمكن تلخيص طرق حل المعادلات التفاضلية فيما يلي:

طريقة الحل	الصيغة	نوع المعادلة
فصل المتغيرات والتكامل	$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$	قابلة للفصل
التعويض $y = vx$	$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$	متجانسة
إيجاد الدالة $F(x, y)$	$Mdx + Ndy = 0$	تامة
التعويض $v = y^{1-n}$	$y' + P(x)y = Q(x)y^n$	بيرنولي

3. المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية

المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية هي معادلة تحتوي على المشتقة الثانية للدالة مجهولة $y(x)$ ، وقد

تأخذ الشكل العام:

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

حيث:

• $y = y(x)$ هي الدالة المجهولة.

• $y' = \frac{dy}{dx}$ هو المشتقة الأولى.

• $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ هو المشتقة الثانية.

➤ **المعادلات ذات المعاملات الثابتة:** المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة هي

المعادلة التي يكون فيها المعاملات أمام y'' , y' , y أعداد ثابتة لا تعتمد على المتغير x أو t .

الشكل العام:

$$R(x) = ay'' + by' + cy$$

أو

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

حيث a, b, c ثوابت حقيقية و $a \neq 0$

حيث:

- a, b, c أعداد ثابتة.
- $R(x)$ دالة معروفة (إذا كانت $0 \rightarrow$ متجانسة، وإذا لم تكن $0 \rightarrow$ غير متجانسة).
- $y = y(x)$ الدالة المجهولة.

طريقة الحل:

- المعادلة المميزة:

$$am^2 + bm + c = 0$$

- حسب طبيعة جذور المعادلة المميزة، يتحدد شكل الحل العام

أولاً: حالة المميز الموجب: واجب نحقق الشرط:

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

الحل العام:

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

حيث m_1, m_2 جذران حقيقيان مختلفان

مثال تطبيقي: قدم حل المعادلة التالية:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

الحل:

- المعادلة المميزة: $m^2 - 3m + 2 = 0$

- المميز: $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$

- الجذور: $m_1 = 1, m_2 = 2$

- الحل العام: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

- التطبيق الاقتصادي: نموذج تضخم أسعار سلعتين:

$$P_1'' - 3P_1' + 2P_1 = 0$$

يمثل نمو أسيا متفاوتا للأسعار

ثانيا: حالة المميز السالب: لابد من تحقق الشرط:

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$

الحل العام:

$$y = e^{\alpha x} [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]$$

$$m = \alpha \pm \beta i \text{ حيث}$$

مثال تطبيقي: قدم حل المعادلة التالية:

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

الحل:

$$- \text{المعادلة المميزة: } m^2 + 4m + 13 = 0$$

$$- \text{المميز: } \Delta = 16 - 52 = -36 < 0$$

$$- \text{الجزور: } m = -2 \pm 3i$$

$$- \text{الحل العام: } y = e^{-2x} [C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)]$$

- التطبيق الاقتصادي: دورة اقتصادية مخمدة:

$$Y'' + 4Y' + 13Y = 0$$

حيث Y الناتج المحلي، مع تذبذبات مخمدة

ثالثاً: حالة المميز المعلوم: يكون الشرط:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

الحل العام:

$$y = (C_1 + C_2x)e^{mx}$$

حيث m جذر مكرر

مثال تطبيقي: قدم حل المعادلة التالية:

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

الحل:

- المعادلة المميزة: $m^2 - 6m + 9 = 0$

- المميز: $\Delta = 36 - 36 = 0$

- الجذر المكرر: $m = 3$

- الحل العام: $y = (C_1 + C_2x)e^{3x}$

التطبيق الاقتصادي: نمو سكاني مع تسارع ثابت:

$$P'' - 6P' + 9P = 0$$

• ملخص الحالات الثلاث

حالة المميز	الجذور	الحل العام
موجب	حقيقية مختلفة	$C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$
سالب	مركبة	$e^{\alpha x}[C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x]$
معلوم	حقيقية مكررة	$(C_1 + C_2x)e^{mx}$

4. تمارين إضافية محلولة

التمرين 1: لتكن المعادلة التفاضلية التالية، والمطلوب إيجاد الحل:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

الحل:

- المميز $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$

- الجذور $m_1 = -2, m_2 = -3$

- الحل $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$

التمرين 2: لتكن المعادلة التفاضلية التالية، والمطلوب إيجاد الحل:

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

الحل:

- المميز $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$

- الجذور $m = -1 \pm 2i$

- الحل $y = e^{-x} [C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)]$

التمرين 3: لتكن المعادلة التفاضلية التالية، والمطلوب إيجاد الحل:

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

الحل:

- المميز $\Delta = 64 - 64 = 0$

- الجذر المكرر $m = 4$

- الحل $y = (C_1 + C_2 x) e^{4x}$

خلاصة

تتناول الوحدة الاولى موضوع المعادلات التفاضلية باعتبارها اداة اساسية لدراسة الظواهر المتغيرة عبر الزمن، خاصة في المجال الاقتصادي. وتهدف هذه الوحدة الى تمكين الطالب من فهم العلاقة بين الدالة ومشتقتها، وكيف يمكن التعبير عن تطور كمية اقتصادية من خلال معادلة تربط المتغير بمعدل تغيره.

بداية يتم التعرف على مفهوم المعادلة التفاضلية من الدرجة الاولى، وهي معادلة تحتوي على دالة مجهولة ومشتقتها الاولى. ويتم التركيز على المعادلات القابلة للفصل، حيث يمكن اعادة كتابة المعادلة بحيث توضع الحدود التي تحتوي على المتغير الاول في جهة، والحدود التي تحتوي على المتغير الثاني في جهة اخرى، ثم يتم الحل باستعمال التكامل.

بعد ذلك تم التطرق الى بعض المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية، خاصة الحالات البسيطة التي يكون فيها الطرف الثاني صفرا او ثابتا. ويتعلم الطالب كيفية ايجاد الحل العام للمعادلة، وفهم معنى الثوابت التكاملية ودورها في تحديد الحل الخاص عندما تعطى شروط ابتدائية.

وتكمن اهمية هذه الوحدة في تطبيقاتها الاقتصادية، حيث يمكن استعمال المعادلات التفاضلية لتمثيل تطور راس المال، النمو الاقتصادي، تغير الاسعار، او سلوك الاستهلاك بمرور الزمن. فهي تمكن الطالب من الانتقال من الوصف الساكن للظواهر الى تحليل ديناميكي يدرس التغير والاستقرار.

بصفة عامة، تسمح هذه الوحدة باكتساب مهارة اساسية تتمثل في صياغة المشكلات في شكل معادلات تفاضلية ثم حلها وتفسير النتائج اقتصاديا، وهو ما يشكل قاعدة لفهم نماذج اكثر تقدما في الاقتصاد الكمي والتحليل الرياضي.

الوحدة الثانية: الدوال ذات متغيرين

تعد الدوال متعددة المتغيرات من المفاهيم الأساسية في التحليل الرياضي والاقتصاد والإدارة، إذ تستخدم لوصف الظواهر التي تعتمد على أكثر من عامل واحد.

فعلى عكس الدوال ذات المتغير الواحد $y = f(x)$ ، التي تعبر عن علاقة بين متغير مستقل واحد ومتغير تابع، فإن الدالة ذات متغيرين تعبر عن علاقة تربط كمية معينة بمتغيرين أو أكثر.

1. أساسيات الدوال متعددة المتغيرات

➤ **التعريف الرياضي:** الدالة ذات متغيرين هي علاقة تربط كل زوج مرتب (x, y) من مجموعة D (تسمى المجال) بقيمة وحيدة z من مجموعة R (تسمى المدى).

الصيغة الرياضية:

$$z = f(x, y)$$

حيث:

- x, y : متغيران مستقلان

- z : متغير تابع

- f : قاعدة الدالة

أمثلة:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$h(x, y) = \frac{x}{y}$$

➤ مجال الدالة متعددة المتغيرات

تعريف المجال: مجال الدالة $f(x, y)$ هو مجموعة جميع القيم (x, y) التي تجعل الدالة معرفة.

يمكن تحديد المجال وفق القواعد التالية:

- المقام $0 \neq$
- ما تحت الجذر التربيعي $0 \leq$
- ما داخل اللوغاريتم $0 <$

المثال 1:

$$f(x, y) = \frac{1}{x - y}$$

المجال: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$

المثال 2:

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

المجال: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$

المثال 3:

$$h(x, y) = \ln(x + y)$$

المجال: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$

➤ طرق التمثيل البياني للدوال متعددة المتغيرات:

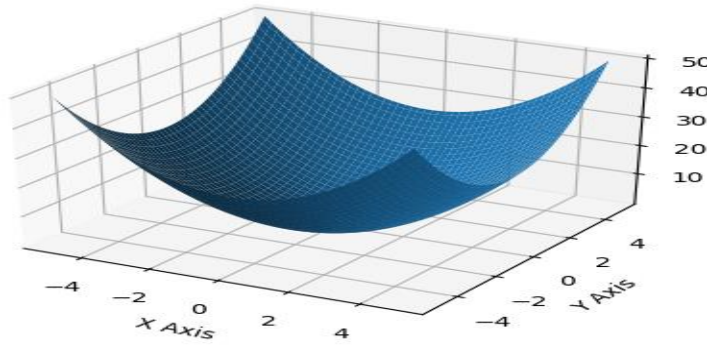
تعد الدوال متعددة المتغيرات، وخاصة الدوال ذات متغيرين من الشكل $f(x, y)$ ، من الأدوات الأساسية

في النمذجة البنائية، مثل دوال الانتاج والمنفعة والتكلفة. وبما ان هذه الدوال تعتمد على أكثر من متغير، فان

تمثيلها البياني يختلف عن تمثيل الدوال ذات متغير واحد. فيما يلي اهم طرق التمثيل:

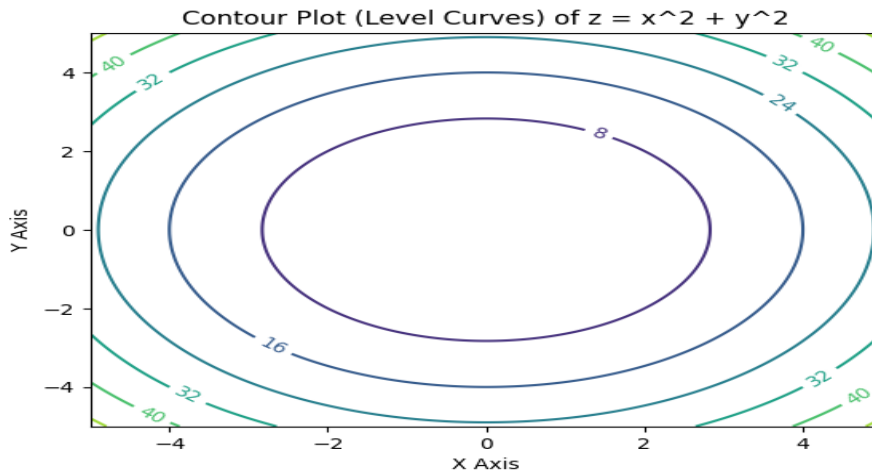
- التمثيل السطحي (السطح في الفضاء الثلاثي الابعاد)

يتم تمثيل الدالة من الشكل $z = f(x, y)$ كسطح في الفضاء ثلاثي الابعاد، حيث يمثل المحوران الافقيان المتغيرين x و y ، بينما يمثل المحور العمودي قيمة الدالة z . هذا التمثيل يعطي صورة هندسية كاملة لسلوك الدالة، مثل القمم والانخفاضات ونقاط السرج. وفيما يلي شكل التمثيل البياني:

3D Surface Plot of $z = x^2 + y^2$ 

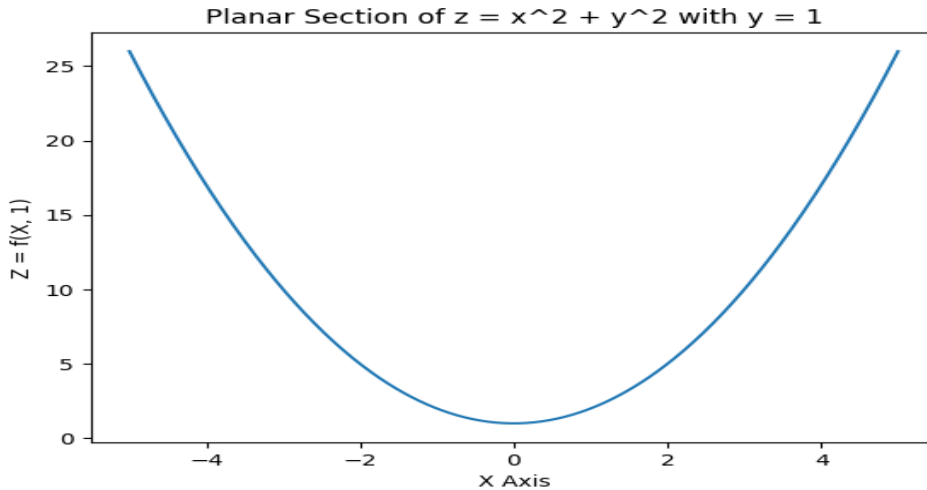
- منحنيات المستوى (Contour Plot)

وهي من أكثر الطرق استعمالاً، خاصة في الاقتصاد. نثبت قيمة معينة للدالة $f(x, y) = k$ ، فنحصل على معادلة في x و y فقط. كل قيمة ثابتة k تعطي منحنى في المستوى يسمى منحنى مستوى. هذه الطريقة مفيدة جداً لأنها تحول تمثيل السطح ثلاثي الابعاد الى رسم ثنائي الابعاد سهل القراءة والتحليل. وفيما يلي شكل التمثيل البياني:



- المقاطع المستوية (Planar Section)

نثبت أحد المتغيرين (مثلا $y = a$) فنحصل على دالة في متغير واحد $z = f(x, a)$. يمثل ذلك مقطعاً من السطح على مستوى مواز لأحد المستويات الاحداثية. تسمح هذه الطريقة بدراسة سلوك الدالة بالنسبة لمتغير واحد مع تثبيت الآخر.



➤ التطبيقات الاقتصادية: يمكن تطبيق الدوال متعددة المتغيرات في ميدان العلوم الاقتصادية فيمايلي:

- منحنيات السواء (Indifference Curves)

$$U(x, y) = C$$

تمثل مجموعات السلع التي تعطي نفس المنفعة

- خطوط التساوي للإنتاج (Isoquants)

$$Q(K, L) = C$$

تمثل تركيبات عناصر الإنتاج التي تعطي نفس الكمية

- منحنيات التساوي للتكلفة (Isocost Lines)

$$C(x, y) = K$$

تمثل تركيبات المدخلات التي تتساوى في التكلفة

➤ تمارين محلولة

التمرين 1: خاص بتحديد المجال

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x-1}}{y-2}$$

الحل:

$$- \text{ شرط البسط } x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$- \text{ شرط المقام } y - 2 \neq 0 \Rightarrow y \neq 2$$

$$- \text{ المجال } \{(x, y) \mid x \geq 1, y \neq 2\}$$

التمرين 2: خاص بالمنحنيات المستوية

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2$$

أوجد منحنيات الاستواء للقيم $k = 0, 1, 4$

الحل:

$$- \text{ النقطة } (0,0): x^2 + 4y^2 = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$- \text{ قطع ناقص } x^2 + 4y^2 = 1 \Rightarrow k = 1$$

$$- \text{ قطع ناقص } x^2 + 4y^2 = 4 \Rightarrow k = 4$$

التمرين 3: خاص بتمثيل دالة اقتصادية

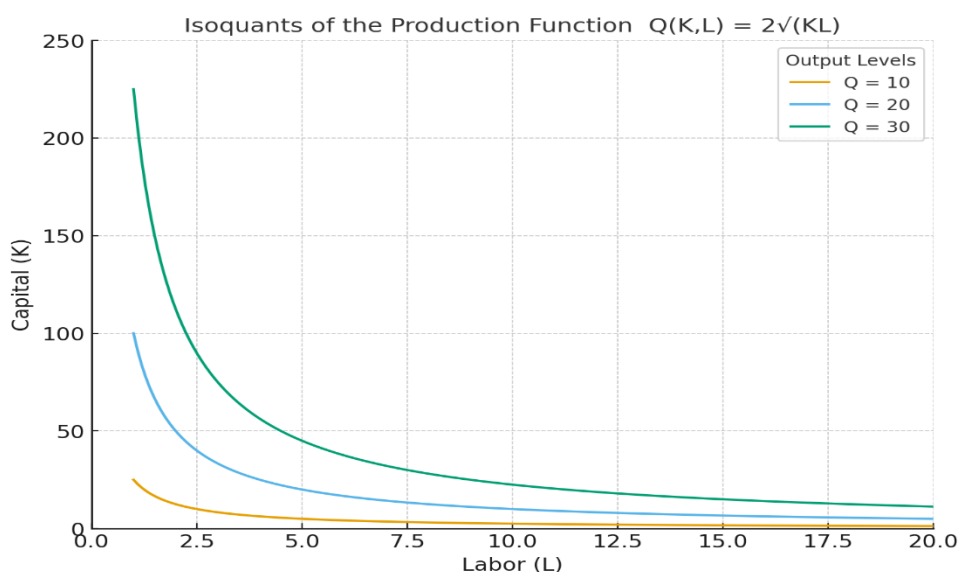
$$Q(K, L) = 2\sqrt{KL} \quad \text{دالة الإنتاج}$$

ارسم منحنيات الاستواء لـ $Q = 10, 20, 30$

الحل:

- $2\sqrt{KL} = 10 \Rightarrow KL = 25$
- $2\sqrt{KL} = 20 \Rightarrow KL = 100$
- $2\sqrt{KL} = 30 \Rightarrow KL = 225$

الرسم البياني:



2. الاشتقاق الجزئي

هو عملية اشتقاق دالة متعددة المتغيرات بافتراض أن أحد المتغيرات فقط هو الذي يتغير بينما تعتبر

باقي المتغيرات ثابتة. إذا كانت لدينا دالة مثل:

$$f(x, y) = x^2 + 3xy$$

فهذه الدالة تعتمد على متغيرين x و y .

- عندما نشق بالنسبة لـ x ، نعامل y كأنه عدد ثابت.

- عندما نشق بالنسبة لـ y ، نعامل x كأنه عدد ثابت.

نحتاج للاشتقاق الجزئي لأن كثيرا من الظواهر في الاقتصاد والهندسة والفيزياء تعتمد على أكثر من متغير (الإنتاج يعتمد على رأس المال والعمل، الحرارة تعتمد على المكان والزمان...).

➤ الاشتقاق الجزئي من الرتبة الأولى: إذا كانت لدينا دالة:

$$z = f(x, y)$$

فإن المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى هي:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

تمثل معدل تغير الدالة بالنسبة إلى متغير واحد مع تثبيت الآخر.

➤ الاشتقاق الجزئي من الرتبة الثانية: نشق المشتقات الجزئية الأولى مرة ثانية، فنحصل على أربع

مشتقات من الرتبة الثانية:

$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	(مرتين x ل بالنسبة ثانية مشتقة)
$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	(مرتين y ل بالنسبة ثانية مشتقة)
$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	(x ب ثم y ب أولا نشق)
$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$	(y ب ثم x ب أولا نشق)

ملاحظة مهمة (قانون التبادل في الاشتقاق): إذا كانت الدالة f مستمرة وقابلة للاشتقاق مرتين، فإن:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

أي أن ترتيب الاشتقاق لا يغير النتيجة.

مثال تطبيقي: لتكن الدالة ذات المتغيرين التالية:

$$f(x, y) = x^2y + 3xy^2$$

المشتقات الأولى:

$$f_x = 2xy + 3y^2, f_y = x^2 + 6xy$$

المشتقات الثانية:

$$f_{xx} = 2y, f_{yy} = 6x, f_{xy} = 2x + 6y, f_{yx} = 2x + 6y$$

إذن:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

التفسير الاقتصادي: في سياق دالة الإنتاج: $Q = f(K, L)$

- f_{KK} : يقيس تغير إنتاجية رأس المال الحدية عندما يتغير رأس المال نفسه (أي مرونة رأس المال).
- f_{LL} : يقيس تغير إنتاجية العمل الحدية عند تغير العمل.
- $f_{KL} = f_{LK}$: يقيس الأثر المتبادل بين العمل ورأس المال، أي كيف يؤثر تغيير أحدهما على إنتاجية الآخر.

المثال التطبيقي: لنأخذ دالة إنتاج بسيطة من نوع كوب-دوجلاس (Cobb–Douglas)

$$Q(K, L) = K^{0.5}L^{0.5}$$

الخطوة 1: حساب المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى

$$Q_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = 0.5K^{-0.5}L^{0.5} = \frac{1}{2} \frac{L^{0.5}}{K^{0.5}}$$

$$Q_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 0.5K^{0.5}L^{-0.5} = \frac{1}{2} \frac{K^{0.5}}{L^{0.5}}$$

تمثل Q_K و Q_L الإنتاجيتين الحديتين لرأس المال والعمل.

الخطوة 2: المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية: نحسب الاشتقاقات الثانية لنتحقق من طبيعة المنحنى:

$$Q_{KK} = \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = -\frac{1}{4} \frac{L^{0.5}}{K^{1.5}}$$

$$Q_{LL} = \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -\frac{1}{4} \frac{K^{0.5}}{L^{1.5}}$$

$$Q_{KL} = \frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} = \frac{1}{4} \frac{1}{K^{0.5} L^{0.5}} = Q_{LK}$$

الخطوة 3: التفسير الاقتصادي

• $Q_{KK} < 0$ و $Q_{LL} < 0$: الإنتاجية الحدية لكل من العمل ورأس المال تتناقص عند زيادة أحدهما

مع ثبات الآخر. أي هناك تناقص في الغلة الحدية.

• $Q_{KL} > 0$: يدل على وجود علاقة تكاملية بين العمل ورأس المال، أي أن زيادة أحدهما تزيد من

إنتاجية الآخر.

الخطوة 4: دلالة التقعر والتحدب: للتأكد من أن الدالة مقعرة (أي تظهر تناقص الغلة) نحسب المحدد الهيسيان

: (Hessian Determinant)

$$H = \begin{vmatrix} Q_{KK} & Q_{KL} \\ Q_{LK} & Q_{LL} \end{vmatrix} = Q_{KK} Q_{LL} - (Q_{KL})^2$$

بالتعويض:

$$H = \left(-\frac{1}{4} \frac{L^{0.5}}{K^{1.5}}\right) \left(-\frac{1}{4} \frac{K^{0.5}}{L^{1.5}}\right) - \left(\frac{1}{4} \frac{1}{K^{0.5} L^{0.5}}\right)^2 = 0$$

إذن:

$$H = 0$$

هذا يعني أن الدالة ليست مقعرة تماماً ولا محدبة تماماً، لكنها تظهر عائدات ثابتة إلى الحجم ، وهي خاصية

مميزة لدالة كوب-دوجلاس التي أسسها الاقتصاديان Charles Cobb و Paul Douglas.

خلاصة

تم من خلال هذه الوحدة التعرف على مفهوم الدالة ذات متغيرين من الشكل $f(x, y)$ ، وعلى كيفية تحديد مجال تعريفها، سواء كان المجال عبارة عن مجموعة نقاط في المستوى او منطقة محددة بشروط جبرية. بعد ذلك تم التطرق الى المشتقات الجزئية من الرتبة الاولى، حيث يتم اشتقاق الدالة بالنسبة الى احد المتغيرين مع تثبيت المتغير الاخر. وتبرز اهمية هذه المشتقات في قياس التغير الحدي، مثل الانتاج الحدي او التكلفة الحدية، وهي مفاهيم اساسية في التحليل الاقتصادي.

ثم تم دراسة المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية، والتي تسمح بتحليل تقعر الدالة وسلوكها، كما تمهد لدراسة القيم القصوى المحلية. ومن خلال هذه الادوات يستطيع الطالب تحديد نقاط العظمى او الصغرى وفهم شروط تحققها.

كما شملت الوحدة طرق التمثيل البياني للدوال ذات متغيرين، سواء باستعمال السطح في الفضاء الثلاثي الابعاد او منحنيات المستوى، مما يساعد على تصور سلوك الدالة وفهم العلاقات بين المتغيرات بصورة بصرية واضحة.

بصفة عامة، تمكن هذه الوحدة الطالب من الانتقال من دراسة العلاقات البسيطة بين متغيرين الى تحليل نماذج اكثر واقعية وتعقيدا، وتزوده بادوات رياضية ضرورية لدراسة الامثلية الاقتصادية ونماذج الانتاج والمنفعة والتكلفة، مما يجعلها قاعدة اساسية لبقية المحاور التطبيقية في التخصص.

الوحدة الثالثة: المصفوفات والعمليات عليها

المصفوفات هي أداة رياضية مهمة لتنظيم البيانات والأعداد بطريقة مرتبة في صفوف وأعمدة، وتستخدم في العديد من المجالات مثل الاقتصاد، الهندسة، الإحصاء، والحوسبة. المصفوفة تسهل إجراء العمليات الحسابية على مجموعات كبيرة من الأرقام بطريقة منظمة وفعالة.

1. مقدمة حول المصفوفات

المصفوفة هي ترتيب مستطيل من الأعداد أو الرموز أو التعبيرات الرياضية، منظمة في صفوف وأعمدة.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

عناصر المصفوفة:

- العنصر a_{ij} : يمثل الرقم أو الرمز الموجود في الصف i والعمود j .
- عدد الصفوف m : يحدد عدد الصفوف في المصفوفة (عدد الأفقيات).
- عدد الأعمدة n : يحدد عدد الأعمدة في المصفوفة (عدد العموديات).

درجة المصفوفة:

- درجة المصفوفة هي عدد صفوفها في مقابل عدد أعمدتها، أي $m \times n$.
- مثال: مصفوفة 3 صفوف و4 أعمدة رتبته 3×4 .

مميزات المصفوفة:

- تنظيم البيانات: المصفوفة تساعد على ترتيب البيانات والأعداد بطريقة مرتبة وواضحة.
- سهولة العمليات الحسابية: يمكن إجراء عمليات جمع، طرح، وضرب على المصفوفات بطريقة نظامية.
- تمثيل المتجهات: المصفوفة يمكن أن تمثل متجهات أو دوالاً في الفضاءات الرياضية.
- تطبيقات متعددة: تُستخدم المصفوفات في الاقتصاد، الهندسة، الإحصاء، علوم الحاسوب، الذكاء الاصطناعي، والمزيد.

مثال توضيحي:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

مميزات هذه المصفوفة:

- الصفوف: 2
- الأعمدة: 3
- الدرجة: 2×3
- عناصرها: $b_{11} = 5, b_{12} = 2, b_{13} = 3, b_{21} = 1, b_{22} = 4, b_{23} = 6$

2. أنواع المصفوفات

المصفوفات تصنف حسب عدد الصفوف والأعمدة، أو حسب خصائص معينة لعناصرها. فيما يلي

أهم الأنواع:

1.2. المصفوفة الصفية (Row Matrix)

- تعريف: مصفوفة تحتوي على صف واحد فقط و n أعمدة، أي رتبته $1 \times n$.
- مميزات: تمثل متجها أو شعاعا أفقيا.
- مثال:

$$A = (2 \ 1 \ 6 \ 4)$$

2.2. المصفوفة العمودية (Column Matrix)

- تعريف: مصفوفة تحتوي على عمود واحد فقط و m صفوف، أي رتبته $m \times 1$.
- مميزات: تمثل متجها أو شعاعا عموديا.
- مثال:

$$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3.2. المصفوفة المربعة (Square Matrix)

- تعريف: مصفوفة يكون فيها عدد الصفوف = عدد الأعمدة. ($n \times n$)
- مميزات: يمكن حساب محددها، معكوسها، وخصائصها مهمة في حل المعادلات الخطية.
- مثال:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

4.2. المصفوفة الصفرية (Zero Matrix) :

- تعريف: جميع عناصرها تساوي صفر.
- مميزات: تمثل نقطة محايدة في عمليات الجمع على المصفوفات.

- مثال:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.2. المصفوفة القطرية (Diagonal Matrix)

- تعريف : مصفوفة مربعة يكون فيها جميع العناصر خارج القطر الرئيسي = 0.

- مثال:

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

6.2. مصفوفة الوحدة (Identity Matrix)

- تعريف : مصفوفة قطرية جميع عناصر القطر الرئيسي = 1.

- مميزات : تمثل العنصر المحايد في الضرب على المصفوفات.

- مثال:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.2. المصفوفة المثلثية (Triangular Matrix)

- مثلثية عليا (Upper Triangular): جميع العناصر تحت القطر الرئيسي = 0.

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- مثلثية سفلى (Lower Triangular): جميع العناصر فوق القطر الرئيسي = 0.

$$L = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

8.2. المصفوفة المتناظرة (Symmetric Matrix)

- تعريف : مصفوفة مربعة تساوي مصفوفتها المنقولة ($A = A^T$)

- مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

9.2. المصفوفة السلمية

- تعريف : مصفوفة قطرية جميع عناصر القطر الرئيسي = 1.

- مميزات : تمثل العنصر المحايد في الضرب على المصفوفات.

- مثال:

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3. منقولة المصفوفة (Transpose of a Matrix)

منقولة المصفوفة هي مصفوفة جديدة نحصل عليها عن طريق تبديل الصفوف بالأعمدة في المصفوفة

الأصلية.

- إذا كانت المصفوفة الأصلية $A = [a_{ij}]$ من الدرجة $m \times n$ ، فإن المصفوفة المنقولة A^T تكون

من الدرجة $n \times m$.

- كل عنصر في المصفوفة المنقولة يحسب كالتالي:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

- مثال على منقولة المصفوفة: إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} (2 \times 3)$$

فإن منقولتها هو:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} (3 \times 2)$$

شرح المثال:

- الصف الأول من A يصبح العمود الأول في A^T
- الصف الثاني من A يصبح العمود الثاني في A^T

- خصائص منقولة المصفوفة

- منقولة المنقولة = المصفوفة الأصلية:

$$(A^T)^T = A$$

- منقولة مجموع مصفوفتين = مجموع منقولتيهما:

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

- منقولة حاصل ضرب مصفوفتين = حاصل ضرب منقولتيهما بالعكس:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

- ضرب العدد في المصفوفة:

$$(kA)^T = kA^T \text{ حيث } k \text{ عدد حقيقي}$$

- المصفوفة المتناظرة:

إذا كانت $A = A^T$ ، فإن A مصفوفة متناظرة.

• ملاحظات مهمة:

- منقولة المصفوفة لا تغير قيم العناصر، فقط تعيد ترتيبها.
- تستخدم المصفوفة المنقولة في حل المعادلات الخطية، تحليل المصفوفات، والاقتصاد الرياضي.

4. أثر المصفوفة (Trace of a Matrix)

أثر المصفوفة هو مفهوم أساسي في الجبر الخطي، ويستعمل كثيرا في الرياضيات التطبيقية والاقتصاد القياسي، إذا كانت لدينا مصفوفة مربعة A من الدرجة $n \times n$ ، فإن أثر المصفوفة يرمز له بـ:

$$\text{Tr}(A)$$

وهو يساوي مجموع عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة.

أي إذا كانت:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فإن:

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

ملاحظة: أثر المصفوفة يعرف فقط للمصفوفات المربعة، أي المصفوفات التي تمتلك قطرا كون أثر الأثر يرتبط أساسا بعناصر القطر.

مثال تطبيقي: لتكن المصفوفة التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

إذن:

$$\text{Tr}(A) = 2 + 3 + (-1) = 4$$

1.4. خصائص أثر المصفوفة

• الخطية:

$$\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$$

$$\text{Tr}(kA) = k \text{Tr}(A)$$

• خاصية جداء المصفوفات:

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

- أثر المصفوفة يساوي مجموع القيم الذاتية للمصفوفة (مع احتساب التكرار).
- التفسير الهندسي: أثر المصفوفة يعبر عن مجموع القيم الذاتية، أي أنه يعطي مؤشرا عن "السلوك الكلي" للتحويل الخطي المرتبط بالمصفوفة.

5. العمليات على المصفوفات

تشمل العمليات على المصفوفات عمليات الجمع والطرح، وضرب المصفوفة بعدد حقيقي، وضرب المصفوفات فيما بينها، إضافة إلى المصفوفة الأسية.

1.5. جمع وطرح المصفوفات

يتم جمع أو طرح المصفوفات التي لها نفس الأبعاد، بحيث يتم التعامل مع كل عنصر على حدة، مما يسهل دمج المعلومات أو المقارنة بين مجموعات البيانات المختلفة. أي أن مجموع مصفوفتين A و B لهما نفس الأبعاد (نفس عدد الصفوف ونفس عدد الأعمدة) يحسب بجمع العناصر المناظرة لكل منهما. والطرح بنفس الطريقة: نطرح العناصر المناظرة.

• صيغة الجمع:

$$C = A + B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

• صيغة الطرح:

$$C = A - B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

مثال: لتكن لدينا المصفوفتين التاليتين:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

اجراء عملية الجمع:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

اجراء عملية الطرح:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

• خصائص الجمع والطرح

– الخاصية التبديلية (Commutative) للجمع:

$$A + B = B + A$$

– الترابطية (Associative) للجمع:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

– وجود مصفوفة صفرية:

$$A + 0 = A$$

حيث 0 مصفوفة جميع عناصرها صفر.

– وجود المعكوس الجمعي:

$$A + (-A) = 0$$

حيث $-A$ هي المصفوفة التي كل عنصر فيها هو سالب العنصر المناظر في A .

– طرح المصفوفات:

2.5. ضرب المصفوفات

يعتبر ضرب المصفوفات عملية أكثر تعقيدا، حيث يتطلب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساويا لعدد صفوف المصفوفة الثانية. ويستخدم هذا النوع من العمليات كثيرا في حل المعادلات الخطية، التحويلات الهندسية، والنماذج الاقتصادية. ضرب مصفوفتين A و B ممكن إذا كان عدد أعمدة A يساوي عدد صفوف B . الناتج مصفوفة جديدة بعدد صفوف A وعدد أعمدة B .

• الصيغة:

$$C = A \cdot B \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

• مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

• خصائص ضرب المصفوفات

– الترابطية: (Associative) : حاصل ضرب ثلاث مصفوفات أو أكثر لا يعتمد على طريقة التجميع.

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

– التوزيعية على الجمع: (Distributive) :

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

– مصفوفة الوحدة: (Identity Matrix)

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

حيث I مصفوفة الوحدة. (diagonal elements = 1, others = 0)

• ملاحظة مهمة: الضرب ليس إبدالياً:

$$A \cdot B \neq B \cdot A \text{ عادة}$$

3.5. ضرب مصفوفة بعدد حقيقي:

يمكن ضرب كل عنصر في المصفوفة بعدد ثابت، مما يسمح بتكبير أو تصغير البيانات، أو تعديل وحداتها دون تغيير بنيتها الأساسية، ضرب المصفوفة بعدد حقيقي هو عملية رياضية يتم فيها ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في عدد ثابت يسمى العدد الحقيقي.

إذا كانت A مصفوفة بحجم $m \times n$ و k عدداً حقيقياً، فإن حاصل ضرب k في A يرمز له بـ kA ويكون مصفوفة جديدة بنفس أبعاد A ، حيث:

$$(kA)_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

أي أن كل عنصر a_{ij} من المصفوفة الأصلية يُضرب في k .

الضرب بالمصفوفة الصفرية مصفوفة صفرية 0 عند ضربها بأي مصفوفة تعطي مصفوفة صفرية:

$$A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$$

خلاصة

تركزت وحدة المصفوفات والعمليات عليها على دراسة المصفوفة باعتبارها أداة أساسية في الجبر الخطي، وتمثل وسيلة فعالة لتمثيل البيانات والعلاقات بين المتغيرات، سواء في الرياضيات البحتة أو في التطبيقات الاقتصادية والهندسية. تعرف الطالب على طبيعة المصفوفات المربعة والمستطيلة، وكيفية تنظيم العناصر في صفوف وأعمدة لتسهيل العمليات الحسابية والتحليلية.

تضمنت الوحدة العمليات الأساسية على المصفوفات مثل الجمع والطرح بين مصفوفتين متساويتين في الرتبة، والضرب في عدد ثابت، وضرب المصفوفات بعضها في بعض وفق قاعدة الصفوف في الأعمدة، مع التعرف على مصفوفة الوحدة والمصفوفة الصفرية ودورهما كمحايدتين في العمليات المختلفة.

كما درس الطالب خصائص المصفوفات المختلفة، مثل التبادلية الجزئية في الجمع، والتوزيعية، وخصائص الضرب في عدد ثابت، بالإضافة إلى العلاقة بين المصفوفات المترابطة وكيفية استخدام العمليات على الصفوف والأعمدة لتبسيط المعالجات الرياضية.

الوحدة الرابعة: المحددات ورتبة المصفوفة

المصفوفات لا تستخدم فقط للجمع والضرب، بل يمكن أيضا حساب المحدد (Determinant)، الذي يعطي معلومات مهمة عن المصفوفة مثل إمكانية وجود مقلوب المصفوفة (Inverse) وحل الأنظمة الخطية.

1. محدد المصفوفة (Determinant)

المحدد هو قيمة عددية ترتبط بمصفوفة مربعة (أي عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها)، وتستخدم لتحديد خصائص المصفوفة، مثل:

- ما إذا كانت المصفوفة قابلة للعكس. (invertible)

- حجم التحويل الهندسي الذي تمثله المصفوفة.

- حل أنظمة المعادلات الخطية.

صيغة عامة:

- لكل مصفوفة مربعة A بحجم $n \times n$ ، يوجد محدد يرمز له بـ $\det(A)$ أو $|A|$.

- المحدد هو عدد يحسب من عناصر المصفوفة باستخدام قواعد معينة تختلف حسب الدرجة (2×2 ، 3×3 ، أو أكبر).

1.1 محدد المصفوفة من الدرجة 2×2 : إذا كانت المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

فإن محددها يحسب كما يلي:

$$\det(A) = ad - bc$$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (3 \cdot 7) - (5 \cdot 2) = 21 - 10 = 11$$

2.1. محدد المصفوفة من الدرجة 3×3 : إذا كانت المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

فإن محددها يحسب كالتالي:

$$\det(A) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1(4 \cdot 6 - 5 \cdot 0) - 2(0 \cdot 6 - 5 \cdot 1) + 3(0 \cdot 0 - 4 \cdot 1)$$

$$\det(A) = 1(24 - 0) - 2(0 - 5) + 3(0 - 4) = 24 + 10 - 12 = 22$$

3.1. طريقة سارس (Sarrus Rule)

قاعدة سارس هي طريقة مختصرة وسهلة لحساب محدد مصفوفة من الدرجة 3×3 ، دون الحاجة

لإستخدام المحددات الصغرى.

لنفترض أن المصفوفة هي:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

– إعادة كتابة أول عمودين على يمين المصفوفة:

$$\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}$$

– حساب مجموع حاصل ضرب الأقطار من الأعلى إلى الأسفل (حاصل الضرب الرئيسي):

$$\text{Diagonal products (down)} = aei + bfg + cdh$$

– حساب مجموع حاصل ضرب الأقطار من الأسفل إلى الأعلى:

$$\text{Diagonal products (up)} = ceg + bdi + afh$$

– حساب المحدد النهائي:

$$\det(A) = (aei + bfg + cdh) - (ceg + bdi + afh)$$

مثال عملي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

– إعادة كتابة أول عمودين على يمين المصفوفة:

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 6 & 1 & 0 \end{array}$$

– مجموع حاصل ضرب الأقطار من الأعلى إلى الأسفل:

$$(1 \cdot 4 \cdot 6) + (2 \cdot 5 \cdot 1) + (3 \cdot 0 \cdot 1) = 24 + 10 + 0 = 34$$

- مجموع حاصل ضرب الأقطار من الأسفل إلى الأعلى:

$$(3 \cdot 4 \cdot 1) + (2 \cdot 0 \cdot 6) + (1 \cdot 5 \cdot 0) = 12 + 0 + 0 = 12$$

- المحدد:

$$\det(A) = 34 - 12 = 22$$

4.1. طريقة بيزوت (Bézout's method) أو المحددات الصغرى

طريقة بيزوت هي طريقة تحليلية لحساب محدد المصفوفة، تعتمد على تحويل المصفوفة إلى مصفوفة أصغر تدريجياً، ثم استخدام جمع وضرب محددات هذه المصفوفات الجزئية للوصول إلى قيمة المحدد النهائي.

القاعدة الأساسية:

- إذا كان لديك مصفوفة $n \times n$ ، يمكن التعبير عن المحدد كجمع محددات مصفوفات من درجة أقل بعد اختيار صف أو عمود.

- ثم يتم تكرار هذه العملية حتى تصل إلى مصفوفة 2×2 ، حيث يكون المحدد بسيطاً:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

مثال عملي

لنفترض المصفوفة التالية:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

طريقة بيزوت تشبه قاعدة سارس:

$$\det(A) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

- نأخذ أول صف (a, b, c) ونضرب كل عنصر في محدد المصفوفة 2×2 الناتجة بعد حذف الصف والعمود المتواجد به العنصر.

- نجمع ونراعي إشارة $(+, -, +)$.

خطوات عامة للطريقة:

- اختر صفًا أو عمودًا (عادة الصف الأول لتسهيل الحساب).

- لكل عنصر في الصف/العمود:

○ احذف الصف والعمود الذي يقع فيه هذا العنصر.

○ احسب محدد المصفوفة الناتجة (التي أصبحت من درجة أصغر).

○ اضرب العنصر في هذا المحدد.

○ ضع إشارة $+$ أو $-$ حسب موقع العنصر (الشكل يشبه رقعة الشطرنج: $+, -, +, - \dots$).

- اجمع كل هذه القيم $\rightarrow$ تحصل على محدد المصفوفة.

المثال: لنفترض المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

الخطوة 1: اختيار صف أو عمود: عادة نختار الصف الأول: $(2, 3, 1)$

- العلامات للصف الأول $+, -, +$: توزيع العلامات يتبع نمط رقعة الشطرنج $(+, -, +, - \dots)$

– الصفوف والأعمدة تبدأ دائماً بـ + في الزاوية العليا اليسرى (عنصر a_{11}).

– ثم تتناوب الإشارات عبر الصفوف والعمود:

$$(-1)^{i+j} = \begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

الخطوة 2: حساب المحددات الجزئية

العنصر $a_{11} = 2$

– احذف الصف الأول والعمود الأول $\rightarrow$ مصفوفة 2×2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

– محددها: $(0 \cdot 2) - (-1 \cdot 2) = 0 + 2 = 2$

– نضرب في العنصر الأول $2 \times 2 = 4$ ، يجب أن نراعي الإشارة: $+4$

العنصر $a_{12} = 3$

– احذف الصف الأول والعمود الثاني $\rightarrow$ مصفوفة 2×2 :

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

– محددها: $(4 \cdot 2) - (-1 \cdot 5) = 8 + 5 = 13$

– نضرب في العنصر الثاني $3 \times 13 = 39$ ، يجب أن نراعي الإشارة: -39

العنصر $a_{13} = 1$ - احذف الصف الأول والعمود الثالث $\rightarrow$ مصفوفة 2×2 :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

- محددها $8 - 0 = 8$: $(4 \cdot 2) - (0 \cdot 5) = 8$ - نضرب في العنصر الثالث $8 \times 1 = 8$ ، يجب أن نراعي الإشارة: $+8$

الخطوة 3: جمع النتائج

$$\det(A) = +4 - 39 + 8 = -27$$

النتيجة:

$$\boxed{\det(A) = -27}$$

5.1. طريقة التحويلات الأولية:

الفكرة الأساسية: التحويلات الأولية على الصفوف لا تغير قيمة المحدد أو تغيرها بطريقة يمكن تتبعها:

نوع التحويل	تأثير على المحدد
تبديل صفين	يغير إشارة المحدد $(+ \rightarrow - \text{ أو } - \rightarrow +)$
ضرب صف في عدد $\lambda \neq 0$	يضرب المحدد في λ
إضافة مضاعف من صف إلى صف آخر	لا يغير قيمة المحدد

باستخدام هذه التحويلات، نحول المصفوفة إلى مصفوفة مثلثية ، ثم:

حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي $\det(A) =$

مثال عملي: لنحسب محدد المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

الخطوة 1: جعل العنصر (1,1) هو المحور الأساسي

$$a_{11} = 2 = (1,1) \text{ العنصر} -$$

- نريد أن نحول العناصر أسفله في العمود الأول إلى 0.

تعديل الصف 2:

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$$

$$R_2 = (4, 0, -1) - 2 * (2, 3, 1) = (4 - 4, 0 - 6, -1 - 2) = (0, -6, -3)$$

تعديل الصف 3:

$$R_3 \rightarrow R_3 - \frac{5}{2}R_1$$

$$R_3 = (5, 2, 2) - (5, 7.5, 2.5) = (0, -5.5, -0.5)$$

الآن المصفوفة أصبحت:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & -5.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

الخطوة 2: جعل العنصر (2,2) هو المحور الأساسي

$$a_{22} = -6 = (2,2) \text{ العنصر} -$$

- نجعل العنصر أسفله في العمود 2 = 0

تعديل الصف 3:

$$R_3 \rightarrow R_3 - \frac{-5.5}{-6} R_2 = R_3 - \frac{11}{12} R_2$$

$$R_3 = (0, -5.5, -0.5) - \frac{11}{12} * (0, -6, -3) = (0, -5.5 + 5.5, -0.5 + 2.75) \\ = (0, 0, 2.25)$$

الخطوة 3: المصفوفة مثلثية عليا

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 2.25 \end{pmatrix}$$

الخطوة 4: حساب المحدد

$$\det(A) = 2 \cdot (-6) \cdot 2.25 = -27$$

ملاحظات:

- هذه الطريقة أسهل للمصفوفات الكبيرة.
- نفس النتيجة نحصل عليها إذا إتبعنا عملية التثليث السفلي.

2. رتبة المصفوفة (Rank of a Matrix)

1.2. تعريف رتبة المصفوفة

رتبة المصفوفة هي أكبر عدد من الصفوف (أو الأعمدة) الخطية غير المتميزة داخل المصفوفة.

بمعنى آخر، هي أكبر عدد من الصفوف أو الأعمدة المستقلة خطياً. ترمز لها بـ:

$$\text{rank}(A)$$

وهي قيمة عددية:

$$0 \leq \text{rank}(A) \leq \min(m, n)$$

إذا كانت A مصفوفة من الرتبة $m \times n$.

2.2. تفسير مفهومي للهندسة الخطية: الرتبة تمثل:

- عدد المتجهات الأساسية (المستقلة) في فضاء الأعمدة أو الصفوف.
- أبعاد الفضاء المتولد عن صفوف أو أعمدة المصفوفة.
- عدد المعلومات الفعلية الموجودة في المصفوفة (بقية الصفوف يمكن توليدها من هذه المستقلة).

3.2. حساب رتبة المصفوفة

نستخدم عمليات التحويلات الأولية على الصفوف لتحويل المصفوفة إلى الشكل المثلثي ثم:

رتبة المصفوفة = عدد الصفوف غير الصفيرية بعد الاختزال

الطريقة الأولى: باستخدام عمليات غوس (Gaussian Elimination)

- نحول المصفوفة إلى شكل سلبي (مثلثية علوية).

- نحسب عدد الصفوف غير الصفيرية.

الطريقة الثانية: باستخدام محددات صغرى (Minors)

تتمحور هذه الطريقة في البحث عن أكبر مصفوفة من الدرجة k يكون محددها غير معدوم.

إذا كان:

$$\exists \text{ minor}(k) \neq 0$$

فإن:

$$\text{rank}(A) = k$$

أما الخطوات العملية لإيجاد الرتبة وفق هذه الطريقة فتكون على الشكل التالي:

- إذا كانت المصفوفة مربعة:

- نحسب المحدد الكلي.

- إذا كان $0 \neq$ الدرجة = رتبة المصفوفة.

- إذا كان $0 =$ $\Rightarrow$ ننتقل إلى محددات أصغر درجة.

• إذا كانت غير مربعة:

- نبحث عن أكبر محدد جزئي غير منعدم.

مثال تطبيقي رقم 01: احسب رتبة المصفوفة التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

نطبق عمليات غوس:

• الصف الثاني = الصف الثاني - (2 × الصف الأول)

$$(2 - 2, 4 - 4, 6 - 6) = (0, 0, 0)$$

• الصف الثالث = الصف الثالث - الصف الأول

$$(1 - 1, 1 - 2, 1 - 3) = (0, -1, -2)$$

فالمصفوفة تصبح:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

بعد ترتيب الصفوف:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

عدد الصفوف غير الصفريّة = 2

إذن:

$$\text{rank}(A) = 2$$

مثال تطبيقي رقم 02: لنأخذ المصفوفة التالية نريد إيجاد رتبة المصفوفة باستخدام المحددات الصغرى.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

الخطوة الأولى: البحث عن المحددات من الدرجة 1

محدد كل عنصر غير صفر $\Rightarrow$ كل عنصر غير صفر يعطينا رتبة ≤ 1 .

جميع العناصر $\neq 0 \Rightarrow$ رتبة ≤ 1 .

الخطوة 2: البحث عن المحددات من الدرجة 2×2

نأخذ كل مصفوفة فرعية 2×2 ونحسب محددها:

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (1 \times 4) - (2 \times 2) = 4 - 4 = 0$
- $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = (1 \times 6) - (3 \times 2) = 6 - 6 = 0$
- $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = (2 \times 6) - (3 \times 4) = 12 - 12 = 0$
- $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (2 \times 1) - (3 \times 1) = 2 - 3 = -1 \neq 0$

وجدنا محدد فرعي $2 \times 2 \neq 0 \Rightarrow$ رتبة المصفوفة ≤ 2

الخطوة الثالثة: البحث عن محدّدات من الدرجة 3×3

نحسب محدد المصفوفة الأصلية:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(4 \cdot 1 - 6 \cdot 1) - 2(2 \cdot 1 - 6 \cdot 1) + 3(2 \cdot 1 - 4 \cdot 1) \\ = 1(-2) - 2(-4) + 3(-2) = -2 + 8 - 6 = 0$$

المحدد = 0 $\Rightarrow$ لا توجد مصفوفة من الدرجة 3

النتيجة

- أكبر مصفوفة محددها غير صفري $2 \times 2 =$

- إذن : رتبة المصفوفة = 2

ملاحظات مهمة

- إذا كانت المصفوفة مربعة ومحددها غير معدوم، فرتبتها تساوي درجتها.

مثال: مصفوفة 3×3 ذات محدد $0 \neq \Rightarrow$ رتبتها = 3.

- إذا كانت رتبتها أقل من عدد المتغيرات، فالجملة غير مؤكدة ولها عدد لا نهائي من الحلول.

- إذا اختلفت رتبة المصفوفة عن رتبة الموسعة، فالجملة مستحيلة.

خلاصة

تركزت هذه الوحدة على دراسة المصفوفات والمفاهيم الأساسية المرتبطة بها، مع التركيز بشكل خاص على المحددات ورتبة المصفوفة. تعلم الطالب أن المحدد هو قيمة عددية مرتبطة بالمصفوفة المربعة، ويعكس خصائص المصفوفة الأساسية مثل القابلية للعكس وتأثيرها في التحولات الخطية. كما تم توضيح طرق حساب المحدد للمصفوفات ذات الرتبة 2 و3، وفهم أثر العمليات على الصفوف والأعمدة في تغيير قيمة المحدد أو الحفاظ عليها.

بالنسبة للرتبة، تعرف الطالب على أن رتبة المصفوفة تمثل عدد الصفوف أو الأعمدة الخطية المستقلة، وأنها مؤشر مهم على حجم المعلومات التي تحتويها المصفوفة، وعلى إمكانية حل الأنظمة الخطية المرتبطة بها. كما تم دراسة العلاقة بين الرتبة والمحدد، حيث أن المصفوفة ذات محدد غير صفري لها رتبة كاملة، بينما المصفوفة ذات المحدد الصفري تكون رتبته أقل من الرتبة الكاملة.

كما تم التطرق إلى خصائص الرتبة مثل ثباتها عند التحويلات الصفية الأساسية، وعلاقتها بعمليات الجمع والضرب، مما يسمح للطالب بفهم سلوك المصفوفة تحت مختلف العمليات وتحليل التبعية الخطية بين الصفوف والأعمدة.

في النهاية، وفرت هذه الوحدة للطالب الأدوات اللازمة لفهم طبيعة المصفوفات، وكيفية استخدام المحدد والرتبة كمعايير مركزية لتحليل المصفوفات وتقييم خصائصها الأساسية، مما يمهّد الطريق لدراسة موضوعات أكثر تعقيداً مثل المصفوفات القابلة للعكس وحل الأنظمة الخطية.

الوحدة الخامسة: مقلوب المصفوفات

يعد مقلوب المصفوفة من المفاهيم الأساسية في الجبر الخطي، لأنه يسمح لنا بحل أنظمة المعادلات الخطية بطريقة منهجية ودقيقة، تماماً كما نستعمل مقلوب العدد في حل المعادلات البسيطة.

1. تعريف مقلوب المصفوفة: إذا كانت A مصفوفة مربعة من الرتبة n ، فإن مقلوب المصفوفة هو

مصفوفة أخرى نرمز لها بـ A^{-1} بحيث:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

– حيث I_n هي المصفوفة الوحدة من نفس الرتبة.

وجود هذا الشرط يعني أن ضرب المصفوفة في مقلوبها يعطينا مصفوفة الوحدة.

نفس المبدأ بالنسبة لمجموعة الأعداد الحقيقية إذا كان لدينا عدد حقيقي $a \neq 0$ ، فإن مقلوبه هو $\frac{1}{a}$

بحيث:

$$a \times \frac{1}{a} = 1$$

2. شروط وجود مقلوب المصفوفة

حتى يكون للمصفوفة مقلوب، يجب أن تتحقق الشروط التالية:

– أن تكون المصفوفة مربعة: غير المربعة لا يمكن أن يكون لها مقلوب.

– أن يكون محدد المصفوفة غير منعدم

$$\det(A) \neq 0$$

إذا كان المحدد يساوي صفراً، فالمصفوفة منفردة (Singular) ولا تملك مقلوباً.

– أن تكون رتبة المصفوفة كاملة

$$\text{rank}(A) = n$$

أي أن صفوف وأعمدة المصفوفة غير خطية التبعية.

3. خواص مقلوب المصفوفة: لتكن A و B مصفوفتين مربعيتين من نفس الرتبة، و I هي المصفوفة

المحايدة.

– مقلوب المقلوب: مقلوب المقلوب يعطينا المصفوفة الأصلية

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

– مقلوب حاصل ضرب: مقلوب حاصل ضرب مصفوفتين يساوي مقلوب الثانية مضروب في مقلوب

الأولى.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

مع مراعاة عكس الترتيب.

– مقلوب مصفوفة الوحدة: مقلوب مصفوفة الوحدة يساوي مصفوفة الوحدة

$$I^{-1} = I$$

– مقلوب المصفوفة المنقولة: مقلوب منقول مصفوفة يساوي منقول مقلوبها

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

– مقلوب العدد المضروب في مصفوفة: مقلوب مصفوفة مضروبة في عدد سلمي يساوي مقلوب العدد

في مقلوب المصفوفة

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

حيث $k \neq 0$.

– مقلوب المصفوفة القطرية: مقلوب المصفوفة القطرية يساوي مقلوب عناصر القطر

$$A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

فإن:

$$A^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)$$

4. طرق حساب مقلوب المصفوفة:

هناك عدة طرق لحساب مقلوب المصفوفة، أهمها استخدام المعاملات والمحددات للمصفوفات الصغيرة، أو طريقة غوس-جوردان عبر المصفوفة الموسعة. كما يمكن أحيانا استخدام الطرق العددية في حالة المصفوفات الكبيرة لتسهيل العمليات الحسابية.

1.4. طريقة المعاملات (Adjoint Method) :

تعد طريقة المعاملات أو طريقة المصفوفة المرافقة (Adjoint/Adjugate) من الطرق الأساسية في الجبر الخطي لحساب مقلوب المصفوفة. وتقوم هذه الطريقة على استخدام المحددات والمحددات الصغرى والمعاملات لتكوين مصفوفة خاصة تسمى مصفوفة المرافقات، والتي يتم من خلالها استخراج المقلوب بطريقة مباشرة للمصفوفة المربعة A من الدرجة n ، نتبع الخطوات التالية:

– نقوم بحساب المحدد $\det(A)$. إذا كان $\det(A) = 0$ فإن المصفوفة ليس لها مقلوب.

– نقوم نحسب لكل عنصر a_{ij} مصفوفة صغرى ترافقه M_{ij} (المصفوفة الناتجة بحذف الصف i والعمود j الذي يتواجد بها العنصر).

– نقوم بحساب المحددات الصغرى لمصفوفة المرافقات.

- نحسب المعامل: $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ أو ما يسمى بعملية توزيع الإشارات.

- نبني مصفوفة المرافقات $\text{Cof}(A) = [C_{ij}]$.

- نأخذ منقول مصفوفة المرافقات $\text{Adj}(A) = \text{Cof}(A)^T$.

- أخيرا نحسب المقلوب وفق العلاقة التالية: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A)$.

مثال تطبيقي رقم 01: نأخذ المثال الذي استخدمناه سابقا:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

الخطوة الأولى : حساب المحدد $\det(A)$

$$\det(A) = +2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 4 - 39 + 8 = -27. \text{ نجمع:}$$

بما أن $\det(A) = -27 \neq 0$ فالمصفوفة قابلة للقلب.

الخطوة الثانية: حساب المحددات الصغرى M_{ij} والمعاملات C_{ij}

نحسب لكل عنصر a_{ij} مصفوفة الناتج بعد حذف الصف i والعمود j ، ثم المحدد، ثم نضع إشارة

العبارة $(-1)^{i+j}$.

بالنسبة للصف 1:

$$- M_{11} = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow C_{11} = +2.$$

$$- M_{12} = \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 13 \rightarrow C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -13.$$

$$- M_{13} = \det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 8 \rightarrow C_{13} = +8.$$

بالنسبة للصف 2:

$$- M_{21} = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 6 - 2 = 4 \rightarrow C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -4.$$

$$- M_{22} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 4 - 5 = -1 \rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2} (-1) = -1.$$

$$- M_{23} = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = 4 - 15 = -11 \rightarrow C_{23} = (-1)^{2+3} (-11) = +11.$$

بالنسبة للصف 3:

$$- M_{31} = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 = -3 \rightarrow C_{31} = +(-3) = -3.$$

$$- M_{32} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 = -2 - 4 = -6 \rightarrow C_{32} = (-1)^{3+2} (-6) = +6.$$

$$- M_{33} = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 4 = 0 - 12 = -12 \rightarrow C_{33} = +(-12) = -12.$$

وبهذا تكون مصفوفة المرافقات هي:

$$\text{Cof}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -13 & 8 \\ -4 & -1 & 11 \\ -3 & 6 & -12 \end{pmatrix}$$

الخطوة الثالثة: نأخذ منقول (transpose) لمصفوفة المرافقات:

$$\text{Adj}(A) = \text{Cof}(A)^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -13 & -1 & 6 \\ 8 & 11 & -12 \end{pmatrix}$$

الخطوة الرابعة: حساب المقلوب A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A) = \frac{1}{-27} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -13 & -1 & 6 \\ 8 & 11 & -12 \end{pmatrix}$$

ننسط كل عنصر:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{27} & \frac{4}{27} & \frac{1}{9} \\ \frac{13}{27} & \frac{1}{27} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{8}{27} & -\frac{11}{27} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

تحقق سريع (اختياري): ضرب $A \cdot A^{-1}$ يعطي مصفوفة الوحدة I_3 .

تمرين تطبيقي رقم 02: احسب مقلوب المصفوفة التالية إن وجد:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل (خطوات مختصرة)

- حساب المحدد $\det(B)$ سأوسع على العمود الثالث (لأنه يحتوي صفراً، يوفر حساباً أبسط):

العناصر في العمود الثالث $b_{13} = 0, b_{23} = 3, b_{33} = 1$: مع إشارات حسب الصف:

$$\det(B) = +0 \cdot (\dots) - 3 \cdot (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 12 + 3 = 15 \neq 0 \text{ إذن}$$

- حساب المصفوفة المرافقات $\text{Cof}(B)$ نختصر الحسابات هنا ونكتب النتائج:

- $C_{11} = (+) \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 1.$
- $C_{12} = (-) \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -[(-1) \cdot 1 - 3 \cdot 2] = -(-1 - 6) = +7.$
- $C_{13} = (+) \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 0 - 1 \cdot 2 = -2.$
- $C_{21} = (-) \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -(2 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = -2.$
- $C_{22} = (+) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = 1.$
- $C_{23} = (-) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -(1 \cdot 0 - 2 \cdot 2) = -(-4) = 4.$
- $C_{31} = (+) \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 = 6.$
- $C_{32} = (-) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = -(1 \cdot 3 - 0 \cdot (-1)) = -3.$
- $C_{33} = (+) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 3.$

إنن:

$$\text{Cof}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

منقول مصفوفة المرافقات:

$$\text{Adj}(B) = \text{Cof}(B)^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 7 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

المقلوب:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \text{Adj}(B) = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 7 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2.4. طريقة غوس-جوردان

طريقة *Gauss-Jordan* هي امتداد لطريقة الحذف الغاوسي *Gauss Elimination*، وتهدف

إلى تحويل المصفوفة إلى مصفوفة الوحدة I عبر سلسلة من التحويلات الأولية على الصفوف.

وعندما نطبقها على المصفوفة الموسعة $[A | I]$ ، نحصل في النهاية على:

$$[A | I] \rightarrow [I | A^{-1}]$$

أي يصبح الجزء الأيسر مصفوفة الوحدة، بينما يصبح الجزء الأيمن مقلوب المصفوفة A .

الفكرة الأساسية للطريقة

– نكتب المصفوفة الأصلية A على اليسار ومصفوفة الوحدة I على اليمين:

$$[A | I]$$

– نطبق التحويلات الأولية على الصفوف:

○ تبديل صفين: $R_i \leftrightarrow R_j$

○ ضرب صف في عدد غير صفري: $R_i \rightarrow kR_i$

○ جمع/طرح صف من آخر:

$$R_i \rightarrow R_i + kR_j$$

▪ نستمر إلى أن يصبح الجزء الأيسر من المصفوفة هو مصفوفة الوحدة.

▪ عندها يكون الجزء الأيمن هو المقلوب A^{-1} .

في طريقة غوس-جوردان نعمل على:

▪ جعل العناصر القطرية تساوي 1

▪ جعل جميع العناصر فوق وتحت كل محور تساوي 0

وهذا هو الفارق الأساسي بين:

- **Gauss**: يجعل فقط العناصر تحت المحاور صفراً.

- **Gauss-Jordan**: يجعل فوق وتحت المحاور صفراً.

ولهذا تعطي Gauss-Jordan مباشرة المصفوفة المعكوسة.

خطوات الطريقة باختصار

- نبحث عن محور (Pivot) في الصف الأول، العمود الأول.

- إذا كان يساوي صفراً $\Rightarrow$ نبدل الصفوف.

- نجعل المحور = 1 بقسمة الصف.

- نجعل كل العناصر فوقه وتحت = 0.

- ننتقل للصف الثاني ثم الثالث... حتى آخر صف.

مثال تطبيقي رقم 01: لمصفوفة من الدرجة الثانية (2×2) : لنأخذ المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

نكتب المصفوفة الموسعة:

$$A \setminus I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة الأولى: جعل المحور الأول = 1

قسمة الصف الأول على 2:

$$R_1 \rightarrow \frac{1}{2} R_1$$

$$A \setminus I = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة الثانية: جعل العنصر تحت المحور = 0

$$R_2 \rightarrow R_2 - 5R_1$$

$$A \setminus I = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة الثالثة: جعل المحور الثاني = 1

$$R_2 \rightarrow 2R_2$$

$$A \setminus I = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

الخطوة الرابعة: جعل العنصر فوق المحور = 0

$$R_1 \rightarrow R_1 - \frac{1}{2} R_2$$

$$I \setminus A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{5}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

إذن:

$$I \setminus A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

النتيجة النهائية

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

• مميزات طريقة Gauss-Jordan

– مناسبة للمصفوفات الكبيرة: أفضل من طريقة المعاملات عندما تكون المصفوفة 4×4 أو 5×5 أو أكبر.

– مفيدة لحل الأنظمة الخطية: تعطينا الحل مباشرة في شكل:

$$[x_1, x_2, x_3, \dots]$$

– تعطي المقلوب مباشرة: بدون حساب المحددات والمعاملات.

– تعتمد فقط على التحويلات الأولية: وهي بسيطة وواضحة.

مثال تطبيقي رقم 02: لمصفوفة من الدرجة الثالثة (3×3) : لنأخذ المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

نكتب المصفوفة الموسعة:

$$A \setminus I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة الأولى: جعل العنصر تحت المحور (Pivot) الأول = 0

$$R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة الثانية: جعل العنصر (3,2) = 0

$$R_3 \rightarrow R_3 + 5R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة الثالثة: جعل المحور الثالث = 1

$$R_3 \rightarrow \frac{1}{14}R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \end{bmatrix}$$

الخطوة الرابعة: جعل العناصر فوق المحور الثالث = 0

فوقه في الصف الثاني:

$$R_2 \rightarrow R_2 - 3R_3$$

فوقه في الصف الأول:

$$R_1 \rightarrow R_1 - R_3$$

النتيجة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{5}{14} & -\frac{1}{14} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{4}{14} & -\frac{3}{14} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \end{bmatrix}$$

الخطوة الخامسة: جعل العنصر $(1,2) = 0$

$$R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2$$

$$I \setminus A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{14} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \end{bmatrix}$$

النتيجة

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

خلاصة

تعد وحدة مقلوب المصفوفة من الوحدات الاساسية في الجبر الخطي، لانها تمثل اداة رئيسية في حل انظمة المعادلات الخطية، كما تشكل قاعدة لفهم العديد من التطبيقات الرياضية والاقتصادية.

يقصد بمقلوب المصفوفة A المصفوفة A^{-1} التي تحقق العلاقة $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$ حيث I مصفوفة الوحدة. ولا يكون للمصفوفة مقلوب الا اذا كانت مربعة وكان محددها غير منعدم. فاذا كان محددها يساوي صفرا فهي غير قابلة للعكس وتسمى مصفوفة شاذة.

تعتمد طرق حساب المقلوب اساسا على طريقتين. الطريقة الاولى هي طريقة المصفوفة المرافقة حيث نحسب المحدد ثم مصفوفة المتممات الجبرية ثم نقسم على المحدد. اما الطريقة الثانية فهي طريقة غوص او الحذف الغاوسي جوردان، وفيها نكتب المصفوفة الموسعة $A|I$ ثم نجري عمليات اولية على الصفوف حتى يتحول الجزء الايسر الى مصفوفة الوحدة، وعندها يصبح الجزء الايمن هو المقلوب.

من الخصائص المهمة ان مقلوب جداء مصفوفتين يساوي جداء مقلوبيهما بترتيب عكسي، وان مقلوب مقلوب المصفوفة هو المصفوفة نفسها، كما ان ضرب المصفوفة في عدد غير معدوم يؤثر على مقلوبها بعكس ذلك العدد.

تظهر اهمية هذه الوحدة خاصة في حل الانظمة الخطية حيث اذا كان $AX = B$ وكان للمصفوفة A مقلوب، فان الحل يكتب على الشكل $X = A^{-1}B$. كما ان لمقلوب المصفوفة دورا مهما في النماذج الاقتصادية والمالية والقياسية التي تعتمد على الصياغة المصفوفية.

الوحدة السادسة: حل جمل المعادلات الخطية

1. تقديم جمل المعادلات: جملة المعادلات الخطية هي مجموعة من المعادلات المرتبطة بنفس المتغيرات.

الهدف مناه هو إيجاد قيم المتغيرات التي تحقق جميع المعادلات في آن واحد.

1.1. الصيغة المصفوفية لجمل المعادلات: إذا كانت لدينا جملة معادلات خطية بالشكل:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

يمكن كتابتها في شكل مصفوفتين:

• مصفوفة المعاملات: المعاملات المقرونة بالمتغيرات في الجملة الخطية، تؤخذ كما بنفس التنظيم

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

• مصفوفة المتغيرات: هي مصفوفة عمود تتضمن جميع مجاهيل الجملة الخطية

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

• مصفوفة الحدود أو عمود الثوابت: هي مصفوفة عمود تتضمن الحدود المتعلقة بالطرف الثاني من

المعادلات.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

فتكتب الجملة بالشكل المصفوفي:

$$AX = B$$

هذه الصيغة تسهل استخدام الطرق المصفوفية مثل:

طريقة غوس، غوس-جوردان، طريقة المصفوفة المرافقة، طريقة مقلوب المصفوفة.

2.1. شرط وجود الحل: يعتمد وجود الحل من عدمه على رتبة المصفوفة:

• رتبة مصفوفة المعاملات: $\text{rank}(A)$

• رتبة المصفوفة الموسعة: $\text{rank}(A | B)$

حيث أنه حسب مبرهنة روش-كروان (Rouché-Capelli)

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A | B) \Leftrightarrow \text{توجد حلول}$$

$$\text{rank}(A) \neq \text{rank}(A | B) \Leftrightarrow \text{لا يوجد حل}$$

3.1. أنواع الجمل الخطية:

• النوع الأول: جملة مؤكدة : ولها حل وحيد.

شرطها:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A | B) = n$$

حيث أن عدد المتغيرات يساوي رتبة المصفوفة ويساوي عدد معادلات الجملة.

الحل يكون فريدا ويمكن إيجاده بطريقة مقلوب المصفوفة أو طريقة غوس أو غوس جوردن

• النوع الثاني: جملة غير مؤكدة: عدد لا نهائي من الحلول

شرطها:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A | B) < n$$

عدد المتغيرات أكبر من الرتبة ومن عدد المعادلات.

يوجد متغيرات حرة $\Rightarrow$ حلول غير منتهية.

تمرين تطبيقي: لتكن لدينا الجملة الخطية التالية:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$

نلاحظ أن:

- عدد المعادلات = 2

- عدد المتغيرات = 3 $\rightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A | B) = 2 < 3$

- جملة غير مؤكدة: يوجد متغير حر $\rightarrow$ عدد لا نهائي من الحلول

الخطوة الأولى: كتابة المصفوفة الموسعة

$$[A | B] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

الخطوة الثانية: جعل العنصر الأول في العمود الأول = 1 (تم بالفعل)

$$R_1 = (1, 1, 1, 4)$$

الخطوة الثالثة: حذف العنصر تحت 1 في العمود الأول

• الصف الثاني: $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$

$$R_2 = (2, -1, 1, 5) - 2 * (1, 1, 1, 4) = (0, -3, -1, -3)$$

المصفوفة تصبح:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

الخطوة الرابعة: جعل العنصر الثاني في الصف الثاني = 1

$$R_2 \rightarrow \frac{-1}{3} R_2 = \left(0, 1, \frac{1}{3}, 1\right)$$

المصفوفة الآن:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

الخطوة الخامسة: حذف عنصر العمود الثاني في الصف الأول

$$R_1 \rightarrow R_1 - R_2$$

$$R_1 = (1, 1, 1, 4) - (0, 1, 1/3, 1) = (1, 0, 2/3, 3)$$

المصفوفة تصبح على الشكل التالي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

الخطوة السادسة : تعيين المتغير الحر

- عدد الصفوف = 2 > عدد الأعمدة = 3 معناه أن هناك متغير حر واحد

- لنختار $z = t \in \mathbb{R}$

الخطوة السابعة: التعبير عن x و y بالنسبة لـ t

$$- \text{ الصف الأول: } x + \frac{2}{3}t = 3 \Rightarrow x = 3 - \frac{2}{3}t$$

$$- \text{ الصف الثاني: } y + \frac{1}{3}t = 1 \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{3}t$$

$$- \text{ المتغير الحر: } z = t$$

النتيجة النهائية

$$\boxed{x = 3 - \frac{2}{3}t, y = 1 - \frac{1}{3}t, z = t, t \in \mathbb{R}}$$

عدد لا نهائي من الحلول، متغير حر t يمكن تغييره للحصول على حلول مختلفة.

2. طرق حل الجمل الخطية:

هناك عدة طرق لحل جمل المعادلات الخطية، من بينها طريقة التعويض او الحذف المباشر في الجمل البسيطة، وطريقة الحذف الغاوسي التي تعتمد على اجراء عمليات اولية على الصفوف، وطريقة كرامر المبنية على حساب المحددات عندما يكون محدد مصفوفة المعاملات غير منعدم، اضافة الى طريقة المصفوفة العكسية متى كانت المصفوفة قابلة للعكس.

1.2. طريقة كرامر (Cramer's Rule)

طريقة كرامر تستخدم لحل جملة معادلات خطية مربعة (عدد المعادلات = عدد المجاهيل) عندما

يكون محدد المصفوفة $\neq 0$.

الصيغة العامة لجملة معادلات خطية:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- نكتب المصفوفة A من معاملات المتغيرات a_{ij} وعمود B من الثوابت b_i .

- إذا كان $\det(A) \neq 0$ ، فإن الحل لكل متغير x_i هو:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

حيث A_i هي المصفوفة التي نستبدل فيها العمود i من A بالعمود B .

خطوات الحل:

- احسب محدد المصفوفة A . $(\det(A))$

- لكل متغير x_i :

○ استبدل العمود i من A بالعمود B لتكوين A_i .

○ احسب $\det(A_i)$.

○ احسب $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$.

مثال تطبيقي: نحل الجملة:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 1x - 2y = -3 \end{cases}$$

الخطوة الأولى: كتابة المصفوفة A وعمود B

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

الخطوة الثانية: حساب $\det(A)$

$$\det(A) = (2)(-2) - (3)(1) = -4 - 3 = -7$$

الخطوة الثالثة: حساب x و y

x : استبدال العمود الأول بـ B

$$A_x = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \det(A_x) = (8)(-2) - (3)(-3) = -16 + 9 = -7$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-7}{-7} = 1$$

y : استبدال العمود الثاني بـ B

$$A_y = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \det(A_y) = (2)(-3) - (8)(1) = -6 - 8 = -14$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{-14}{-7} = 2$$

النتيجة:

$$x = 1; y = 2$$

2.2. طريقة مقلوب المصفوفة: تستخدم هذه الطريقة لحل جملة المعادلات الخطية على شكل:

$$AX = B$$

- حيث A مصفوفة المعاملات،

- X عمود المتغيرات،

- B عمود الثوابت.

شرط الحل:

- يجب أن تكون المصفوفة A مربعة $(n \times n)$ ومحددها $\det(A) \neq 0$.

- حينها نوجد مقلوب المصفوفة A^{-1} ونحسب الحل:

$$X = A^{-1}B$$

خطوات الحل:

- الكتابة المصفوفية للجملة أي كتابة المصفوفة A وعمود الثوابت B .

- التأكد من أن $\det(A) \neq 0$.

- حساب مقلوب المصفوفة A^{-1} .

- ضرب المقلوب A^{-1} في العمود B لإيجاد المجاهيل X :

$$X = A^{-1}B$$

تمرين تطبيقي رقم 01: لتكن الجملة الخطية التالية:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 14 \\ -x + 4y - z = -2 \end{cases}$$

الخطوة 1: كتابة الجملة على شكل مصفوفة

$$AX = B$$

حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix}$$

الخطوة 2: التحقق من أن الحل مؤكد

- بما أن محدد المصفوفة A غير معدوم فإن رتبة المصفوفة (A) هو 3.

- إذن الحل مؤكد ويوجد مقلوب المصفوفة A^{-1}

الخطوة 3: إيجاد مقلوب المصفوفة A^{-1}

مقلوب المصفوفة 3×3 يحسب بالصيغ التالية:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

أولاً: حساب المحدد $\det(A)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

نحسب باستخدام التوسيع على الصف الأول:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot ((-1)(-1) - 3 \cdot 4) - 1 \cdot (2(-1) - 3(-1)) + 1 \cdot (2 \cdot 4 \\ &\quad - (-1)(-1)) \\ &= 1 \cdot (1 - 12) - 1 \cdot (-2 + 3) + 1 \cdot (8 - 1) \\ &= 1 \cdot (-11) - 1 \cdot (1) + 1 \cdot (7) = -11 - 1 + 7 = -5 \end{aligned}$$

$$\det(A) = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{الحل مؤكد}$$

ثانياً: حساب المقلوب:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -11 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 7 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} & -1 & -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{7}{5} & 1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

ثالثاً: إيجاد الحل

$$X = A^{-1}B$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} & -1 & -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{7}{5} & 1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix}$$

حساب كل عنصر:

- $x = \frac{11}{5} * 6 + (-1) * 14 + (-\frac{4}{5}) * (-2) = 66/5 - 14 + 8/5 = (66 + 8)/5 - 14 = 74/5 - 14 = 74/5 - 70/5 = 4/5$
- $y = 1/5 * 6 + 0 * 14 + 1/5 * (-2) = 6/5 + 0 - 2/5 = 4/5$
- $z = -7/5 * 6 + 1 * 14 + 3/5 * (-2) = -42/5 + 14 - 6/5 = -48/5 + 14 = -48/5 + 70/5 = 22/5$

الحل النهائي

$$(x, y, z) = \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{22}{5} \right)$$

3.2. حل الجمل الخطية وفق طريقة غوس

المفهوم: تعتمد طريقة غوس على تحويل المصفوفة الموسعة للجملة الخطية إلى مصفوفة مثلثية عليا

باستخدام العمليات الأولية على الصفوف، ثم الحل بالتعويض العكسي.

مميزات الطريقة:

- تعمل حتى لو كانت المصفوفة كبيرة أو محددها صفر (بشرط أن يكون الحل موجودا).
- لا تحتاج إلى حساب المقلوب أو المحدد مباشرة.

خطوات الحل:

– كتابة المصفوفة الموسعة:

$$[A | B]$$

حيث A مصفوفة المعاملات و B عمود الثوابت.

– تحويل المصفوفة إلى شكل مثلثي علوي:

○ الهدف جعل كل عناصر أسفل القطر الرئيسي $= 0$.

○ نستخدم عمليات الصفوف: تبديل الصفوف، ضرب صف في عدد $\neq 0$ ، جمع/طرح

مضاعفات الصفوف.

– الحل بالتعويض العكسي:

○ نبدأ بحل المعادلة الأخيرة ثم نعوض للأعلى خطوة بخطوة.

مثال تطبيقي رقم 01: نحل الجملة:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 1x - 2y = -3 \end{cases}$$

الخطوة الأولى: كتابة المصفوفة الموسعة

$$[A | B] = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

الخطوة الثانية: جعل العنصر الأول من الصف الثاني $= 0$

نجعل الصف الثاني: $R_2 = R_2 - (1/2)R_1$

$$R_2 = (1 \quad -2 \quad -3) - \frac{1}{2}(2 \quad 3 \quad 8) = (0 \quad -3.5 \quad -7)$$

المصفوفة تصبح:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 0 & -3.5 & -7 \end{array} \right)$$

الخطوة الثالثة: الحل بالتعويض العكسي

$$-3.5y = -7 \Rightarrow y = 2 \quad \text{من الصف الثاني:}$$

$$2x + 3y = 8 \Rightarrow 2x + 3(2) = 8 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \quad \text{من الصف الأول:}$$

النتيجة:

$$x = 1; y = 2$$

4.2. طريقة غوس-جوردان (Gauss-Jordan Elimination)

المفهوم: طريقة غوس-جوردان هي تعديل لطريقة غوس. والهدف منها هو تحويل المصفوفة الموسعة

$[A | B]$ إلى شكل مصفوفة وحدة على جهة المجاهيل مباشرة. وبعد التحويل، جهة B نتحصل على الحل

مباشرة دون الحاجة للتعويض العكسي.

خطوات الحل:

– كتابة المصفوفة الموسعة $[A | B]$.

– استخدام العمليات الأولية على الصفوف لجعل كل العناصر أسفل وفوق القطر الرئيسي $= 0$ ،

والقطر الرئيسي $= 1$.

– عند الانتهاء، يصبح العمود الخاص بكل متغير $= 1$ في مكانه و 0 في باقي الصفوف.

– العمود الأخير (B) يحتوي القيم النهائية للمتغيرات.

مثال تطبيقي رقم 01: نحل الجملة:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 1x - 2y = -3 \end{cases}$$

الخطوة 1: كتابة المصفوفة الموسعة

$$[A | B] = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

الخطوة 2: جعل العنصر الأول من الصف الأول = 1

$$R_1 \rightarrow \frac{R_1}{2} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1.5 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

الخطوة 3: جعل العنصر الأول من الصف الثاني = 0

$$R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1.5 & 4 \\ 0 & -3.5 & -7 \end{array} \right)$$

الخطوة 4: جعل العنصر الثاني من الصف الثاني = 1

$$R_2 \rightarrow \frac{R_2}{-3.5} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1.5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

الخطوة 5: جعل العنصر الثاني من الصف الأول = 0

$$R_1 \rightarrow R_1 - 1.5R_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

النتيجة:

$$x = 1; y = 2$$

خلاصة

تركز هذه الوحدة على دراسة جمل المعادلات الخطية متعددة المتغيرات وطرق حلها، وهي من المواضيع الأساسية في الجبر الخطي لما لها من أهمية في الرياضيات التطبيقية والاقتصاد.

يمكن تمثيل الجملة الخطية على الشكل $AX = B$ ، حيث A مصفوفة المعاملات، و X متجه المجاهيل، و B متجه الحدود الثابتة. وتوجد عدة طرق لحل هذه الجمل دون الخوض في التفاصيل، من بينها طريقة التعويض أو الحذف المباشر للجمال الصغيرة، وطريقة الحذف الغاوسي التي تحول المصفوفة الى شكل مثلثي، وطريقة كرامر القائمة على المحددات عندما يكون محدد مصفوفة المعاملات غير منعدم، وطريقة المصفوفة العكسية التي تسمح بكتابة الحل على الشكل $X = A^{-1}B$ اذا كانت المصفوفة قابلة للعكس، وطريقة غوس-جوردان التي تعتمد على تحويل المصفوفة الموسعة $[A | I]$ الى شكل الوحدة للحصول على الحل مباشرة. تساعد هذه الطرق على تحليل النماذج الاقتصادية والمالية وحل الانظمة المعقدة بطريقة منهجية ودقيقة، كما تمثل قاعدة مهمة لفهم المصفوفات والمقلوب في الجبر الخطي.

دفاتر تمارين محلولة:

1. دفتر تمارين متقدمة في المعادلات التفاضلية

التمرين 1: معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى (قابلة للفصل)

المعادلة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{y^2 + 1}$$

الحل :

- حيلة : المعادلة قابلة للفصل → نقسم المتغيرات:

$$(y^2 + 1)dy = (x^2 + 1)dx$$

- التكامل:

$$\int (y^2 + 1)dy = \int (x^2 + 1)dx$$

$$\frac{y^3}{3} + y = \frac{x^3}{3} + x + C$$

الحل النهائي:

$$\frac{y^3}{3} + y = \frac{x^3}{3} + x + C$$

التمرين 2: معادلة خطية من الرتبة الأولى

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}$$

الحل:

– حيلة: معادلة خطية من الشكل $dy/dx + P(x)y = Q(x)$ → استخدم عامل الضرب

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

$$\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

– ضرب المعادلة كلها في $\mu(x)$:

$$e^{2x} \frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = e^x$$

– الجانب الأيسر هو مشتقة:

$$\frac{d}{dx}(ye^{2x}) = e^x$$

– التكامل:

$$ye^{2x} = \int e^x dx = e^x + C$$

– الحل النهائي:

$$y = e^{-x} + Ce^{-2x}$$

التمرين 3: معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

الحل:

– حيلة: استخدم المعادلة المميزة $r^2 - 3r + 2 = 0$

- حل المعادلة المميزة $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = 1, r = 2$

- الحل العام:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

التمرين 4: معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية غير متجانسة

$$y'' + y = \sin x$$

الحل:

- الحل العام للمعادلة المتجانسة $y'' + y = 0 \rightarrow y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

- حل خاص للمعادلة غير المتجانسة باستخدام طريقة التخمين :

$$y_p = A x \cos x + B x \sin x$$

بعد الاشتقاق والتعويض نجد $A = 0, B = -1/2$

- الحل العام:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$$

التمرين 5: معادلة تفاضلية غير خطية (بيرنولي)

$$y' + y = y^2 e^x$$

الحل:

– حيلة: المعادلة على شكل بيرنولي $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ مع $n = 2$

– التحويل $v = y^{-1} \Rightarrow v' = -y^{-2}y'$

– المعادلة تتحول إلى خطية في v :

$$v' - v = -e^x$$

– حل المعادلة الخطية $v = Ce^x + 1$

– استرجاع $y = 1/v = 1/(Ce^x + 1)$

التمرين 6: معادلة تفاضلية جزئية بسيطة (PDE)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(x, 0) = \sin \pi x$$

الحل:

– حيلة: المعادلة هي معادلة الحرارة (Diffusion Equation)

– الحل باستخدام طريقة الفصل بين المتغيرات:

$$u(x, t) = e^{-k\pi^2 t} \sin \pi x$$

2. دفتر تمارين متقدمة: الدوال ذات متغيرين - مع الحلول

التمرين 1: تحديد المجال والمدى

لدينا الدالة التالية:

$$g(x, y) = \ln(x + y - 1)$$

الحل:

ما في الداخل للوغاريتم $x + y - 1 > 0 \rightarrow y > 1 - x > 0$ المجال: $D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1 - x\}$ المدى: $\mathbb{R}$ اللوغاريتم يمكن أن يصل لكل قيمة حقيقية

التمرين 2: لدينا الدالة التالية:

$$h(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 4}$$

الحل:

المقام $\rightarrow x^2 + y^2 - 4 \neq 0 \rightarrow x^2 + y^2 \neq 4$ المجال: كل النقاط خارج الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ المدى: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

التمرين 3: العمليات على الدوال

$$, g(x, y) = e^{x-y} f(x, y) = x^2 + y^2$$

الحل:

$$f + g = x^2 + y^2 + e^{x-y} -$$

$$f - g = x^2 + y^2 - e^{x-y} -$$

$$f \cdot g = (x^2 + y^2)e^{x-y} -$$

$$\frac{f}{g} = \frac{x^2 + y^2}{e^{x-y}} = (x^2 + y^2)e^{-(x-y)} -$$

مجال القسمة : كل $\mathbb{R}^2$ لأن $e^{x-y} \neq 0$

التمرين 4: المشتقات الجزئية

$$f(x, y) = x^2y + 3xy^2$$

الحل:

• المشتقات الأولى:

$$f_x = 2xy + 3y^2, f_y = x^2 + 6xy$$

• المشتقات الثانية:

$$f_{xx} = 2y, f_{yy} = 6x, f_{xy} = f_{yx} = 2x + 6y$$

التمرين 5: نقاط حرجة وتحديد نوعها

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13$$

الحل:

• المشتقات:

$$g_x = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$g_y = 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3$$

• النقطة الحرجة (2,3):

• Hessian:

$$H = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(H) = 4 > 0, g_{xx} > 0 \Rightarrow \text{حد أدنى محلي}$$

التمرين 6: منحنيات المستوى

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

الحل:

• منحنيات المستوى: $x^2 + y^2 = k$

• لكل $k = 1, 4, 9 \rightarrow$ دوائر نصف أقطارها 1, 2, 3

3. دفتر تمارين حول المصفوفات والعمليات عليها

التمرين 1: جمع وطرح مصفوفات 3×3 مع معاملات

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

احسب:

$$3A - 2B \quad -$$

$$(A + B) - (2A - B) \quad -$$

الحل:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad 3A &= \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 0 & 9 & 3 \\ 15 & 6 & -6 \end{pmatrix}, 2B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 6 & -2 & 8 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad 3A - 2B = \begin{pmatrix} 6 - (-2) & -3 - 4 & 12 - 0 \\ 0 - 6 & 9 - (-2) & 3 - 8 \\ 15 - 4 & 6 - 0 & -6 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 12 \\ -6 & 11 & -5 \\ 11 & 6 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare \quad (A + B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare \quad (2A - B) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 8 \\ -3 & 7 & -2 \\ 8 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare \quad (A + B) - (2A - B) = \begin{pmatrix} 1 - 5 & 1 - (-4) & 4 - 8 \\ 3 - (-3) & 2 - 7 & 5 - (-2) \\ 7 - 8 & 2 - 4 & 3 - (-9) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & -4 \\ 6 & -5 & 7 \\ -1 & -2 & 12 \end{pmatrix}$$

التمرين 2: استخدام مصفوفة الوحدة

المطلوب:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- احسب AI و IA .

الحل مع الفكرة:

• الفكرة: ضرب أي مصفوفة بالمصفوفة الوحدة لا يغيرها $: AI = IA = A$

$$AI = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, IA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

خاصية مهمة: مصفوفة الوحدة هي المحايد الضربي للمصفوفات.

التمرين 3: التوزيع على الجمع (فكرة اختصار)

المطلوب:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- احسب $A(B + C)$ بطريقة مختصرة.

الحل مع الفكرة:

• الفكرة: استخدم خاصية التوزيع $: A(B + C) = AB + AC$

1. حساب AB :

$$AB = \begin{pmatrix} 1*3 + 2*1 & 1*0 + 2*2 \\ 0*3 + (-1)*1 & 0*0 + (-1)*2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. حساب AC :

$$AC = \begin{pmatrix} 1*2 + 2*(-1) & 1*1 + 2*0 \\ 0*2 + (-1)*(-1) & 0*1 + (-1)*0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. جمعها :

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

الفكرة: استخدم التوزيع لتجنب ضرب مصفوفة كبيرة مباشرة.

التمرين 4: ضرب مصفوفة بما يقابلها صف/عمود صفري (فكرة إلغاء)

المطلوب:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- احسب AB باستخدام الفكرة.

الفكرة: أي صف أو عمود يحتوي على صفر كثير يمكن استغلاله لتبسيط الحساب.

- العنصر $(1,1)$: $1*0 + 2*1 + 0*2 = 0 + 2 + 0 = 2$
- العنصر $(1,2)$: $1*1 + 2*0 + 0*3 = 1 + 0 + 0 = 1$
- العنصر $(2,1)$: $0*0 + 3*1 + 1*2 = 0 + 3 + 2 = 5$
- العنصر $(2,2)$: $0*1 + 3*0 + 1*3 = 0 + 0 + 3 = 3$
- العنصر $(3,1)$: $2*0 + (-1)*1 + 0*2 = 0 - 1 + 0 = -1$
- العنصر $(3,2)$: $2*1 + (-1)*0 + 0*3 = 2 + 0 + 0 = 2$

إذن:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

الفكرة: استغل الأصفار في الصفوف أو الأعمدة لتقليل عمليات الضرب.

التمرين 5: ضرب مصفوفة قطرية (حيلة القطرية)

المطلوب:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

– احسب AD و DA .

الفكرة: ضرب مصفوفة قطرية مع أي مصفوفة أخرى يساوي مصفوفة قطرية

4. دفتر تمارين حول المحدد والمقلوب

التمرين 1: حساب محدد مصفوفة 3×3

لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

الحل: نحسب المحدد باستخدام بيزوت على الصف الأول:

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

المحددات الصغرى:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4(-2) - 1(2) = -8 - 2 = -10$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 0(-2) - 1(5) = -5$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 0(2) - 4(5) = -20$$

نحسب المحدد الكلي:

$$\det(A) = 2(-10) - (-1)(-5) + 3(-20) = -20 - 5 - 60 = -85$$

إذن $\det(A) = -85 \neq 0 \Rightarrow$ المصفوفة قابلة للقلب.

التمرين 2: حساب مقلوب مصفوفة 3×3 باستخدام طريقة المرافقات

المصفوفة:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

الحل

• نحسب المحدد أولاً:

$$\det(B) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1 * 0 - 4 * 6) - 2(0 * 0 - 4 * 5) + 3(0 * 6 - 1 * 5) = -24 + 40 - 15 = 1$$

إذن $\det(B) = 1 \neq 0$

• نحدد المرافقات الجبرية $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$

- $C_{11} = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = -24$ ثم نضرب بـ $(-1)^{1+1} = 1 \Rightarrow -24$
- $C_{12} = \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = -20$ ثم نضرب بـ $(-1)^{1+2} = -1 \Rightarrow 20$
- $C_{13} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = -5$ ثم نضرب بـ $(-1)^{1+3} = 1 \Rightarrow -5$

وهكذا لجميع العناصر

• نكون مصفوفة المرافقات ثم نأخذ المصفوفة المنقولة:

$$\text{Adj}(B) = \begin{pmatrix} -24 & 10 & 5 \\ 20 & -15 & 4 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 10 & -15 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

• نحسب المقلوب:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \text{Adj}(B) = \text{Adj}(B)$$

التمرين 3: مقلوب مصفوفة 3×3 بطريقة غوس-جوردان

المصفوفة: لتكن المصفوفة التالية:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

الحل باختصار

- نكتب المصفوفة الموسعة:

$$[C | I] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- نجري عمليات الصفوف (اختيار المحاور، تصغير العناصر تحت وفوق المحور، تقسيم الصف على

العنصر المحوري)

- بعد سلسلة من العمليات، تتحول الجهة اليسرى إلى مصفوفة الوحدة، والجهة اليمنى تصبح:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

الحل جاهز للتحقق بضرب $C \cdot C^{-1} = I$

التمرين 4: حساب محدد مصفوفة 4×4

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

يمكن حساب المحدد باستخدام توسيع لابلاس على الصف الأول أو تحويلها إلى شكل مثلثي ثم ضرب عناصر القطر.

$$\det(D) = -107 \text{ النتيجة}$$

إذن مصفوفة قابلة للقلب.

5. دفتر تمارين الجمل الخطية بالمصفوفات

التمرين 1: حل جملة خطية 2×2 باستخدام مقلوب المصفوفة

$$\begin{cases} 4x + 3y = 25 \\ 2x - 5y = -3 \end{cases}$$

الحل:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 25 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ المصفوفة}$$

$$\det(A) = 4 * (-5) - 3 * 2 = -20 - 6 = -26 \neq 0$$

مقلوب 2×2 :

$$A^{-1} = \frac{1}{-26} \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{26} & \frac{3}{26} \\ \frac{1}{13} & -\frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow x = 4, y = 3 \text{ الحل:}$$

فكرة: استخدم مقلوب 2×2 مباشرة لتفادي العمليات الطويلة.

التمرين 2: حل جملة خطية 3×3 باستخدام كرامر

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ -x + y - z = -4 \end{cases}$$

الحل:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ المصفوفة}$$

$$1. \det(A) = 1(-1 * -1 - 3 * 1) - 2(2 * -1 - 3 * -1) + 1(2 * 1 - (-1 * -1)) = -1$$

$$2. \det(A_x), \det(A_y), \det(A_z) \rightarrow \text{الحل: } x = 2, y = 3, z = 2$$

فكرة: استخدم طريقة كرامر للجمل الصغيرة فقط لتجنب التعويض المعقد.

التمرين 3: حل جملة خطية 3×3 باستخدام غوس

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ \{-x + 2y + 3z &= 9 \\ 3x - y + 2z &= 8 \end{aligned}$$

الحل:

– المصفوفة الموسعة:

$$[A | B] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

– تحويلها إلى مصفوفة مثلثية علوية باستخدام غوس

– التعويض العكسي: ومنه فالحل: $x = 2, y = 1, z = 3$

فكرة: اختر الصفوف المناسبة لتقليل الكسور.

التمرين 4: حل جملة خطية 3×3 باستخدام غوس-جوردان

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 5 \\ -x + 2y + 3z = 10 \end{cases}$$

الحل:

— المصفوفة الموسعة:

$$[A | B] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$x = 3, y = 1, z = 2$: غوس-جوردان → مصفوفة الوحدة → الحل مباشرة

فكرة: غوس-جوردان يعطي الحل النهائي مباشرة بدون التعويض العكسي.

التمرين 5: حل جملة خطية 4×4 باستخدام غوس-جوردان

$$\begin{cases} x + y + z + w = 10 \\ 2x - y + z + 3w = 20 \\ -x + 3y + 2z - w = 5 \\ 3x + y - z + 2w = 15 \end{cases}$$

الفكرة:

- اختر الصفوف التي تحتوي على صفر في أعمدة معينة لتسهيل الحساب
- إذا ظهر صفر في عمود أساسي، استخدمه للتقليل من العمليات
- قم أولاً بتحويل الصفوف لتصبح أحد العناصر = 1 لتسهيل الحسابات

الحل

بعد العمليات الحسابية وفق طريقة غوس-جوردان نجد الحل: $x = 2, y = 1, z = 3, w = 4$

التمرين 6: حل الجلة 3×3 باستخدام مقلوب المصفوفة

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - z = 7 \end{cases}$$

الحل باستخدام مقلوب المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- حساب $\det(A) = -20 \neq 0$

- إيجاد المقلوب ثم $X = A^{-1}B \Rightarrow x = 2, y = 3, z = 4$

حيلة: استغل أي صفر أو عنصر $1 \pm$ في المصفوفة لتسهيل حساب المقلوب.

خاتمة عامة

اختتمت مادة الرياضيات 2 بتغطية مجموعة واسعة من المواضيع الأساسية التي تمثل العمود الفقري للرياضيات التطبيقية والتحليل الرياضي، وتشكل قاعدة صلبة لفهم النماذج الاقتصادية والهندسية والفيزيائية. فقد بدأت الوحدة بدراسة المعادلات التفاضلية، حيث تعلم الطالب كيفية صياغة المعادلات التي تصف التغيرات المستمرة في الزمن، سواء في الأنظمة الطبيعية أو الاقتصادية. كما تعرف على طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والثانية، وفهم الفرق بين الحلول الخاصة والحلول العامة، واستعمال المعادلات التفاضلية في نمذجة التغيرات الديناميكية مثل النمو السكاني، الاهتزازات الميكانيكية، أو التغيرات المالية.

ثم انتقلنا إلى دراسة الدوال ذات المتغيرين، حيث أصبح الطالب قادراً على التعامل مع دوال تأخذ أكثر من متغير في الوقت نفسه، وتحليل سلوكها من خلال المشتقات الجزئية، وحساب المشتقات العليا، ودراسة النقاط الحرجة لتحديد القيم العظمى والصغرى، فضلاً عن دراسة الانحناءات والانعطافات باستخدام مصفوفة الهسيان. هذه الأدوات سمحت بفهم العلاقة بين المتغيرات المختلفة وتحليل التأثيرات المتبادلة بينها، وهو أمر أساسي في الاقتصاد والتحليل المالي ونمذجة الظواهر الطبيعية.

كما تناولت المادة موضوع المصفوفات، الذي يعد أحد أهم الركائز في الجبر الخطي. وقد تعرف الطالب على العمليات الأساسية للمصفوفات مثل الجمع والضرب، وحساب المحددات والمقلوب، وفهم شروط وجود المقلوب وأهميته في حل الأنظمة الخطية. كذلك تم التطرق إلى حل جمل المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات، سواء عبر طريقة المصفوفة العكسية، أو طريقة كرامر للمصفوفات المربعة، أو طريقة الحذف الغاوسي-جوردان، والتي تعد أكثر الطرق العملية والفعالة، خاصة عند التعامل مع جمل كبيرة ومعقدة من المعادلات.

من خلال هذه المواضيع، أصبح الطالب قادرا على الانتقال من مجرد العمليات الحسابية إلى التحليل المنهجي للمسائل، وفهم كيفية ربط المفاهيم النظرية بالتطبيقات العملية. فقد مكنت المادة الطالب من بناء مهارات التحليل الرياضي والتفكير المنطقي، وهو أمر ضروري عند دراسة النماذج الاقتصادية متعددة المتغيرات، تحليل التوازن العام، الاقتصاد القياسي، أو دراسة الأنظمة الديناميكية في العلوم والهندسة.

في الختام، يمكن القول إن مادة الرياضيات 2 وفرت للطالب الأدوات الرياضية الأساسية للتعامل مع المشكلات المعقدة، سواء كانت متعلقة بالديناميكا، التحليل متعدد المتغيرات، أو الأنظمة الخطية، كما مهدت الطريق للمواضيع المتقدمة في الرياضيات التطبيقية، الاقتصاد المالي، والنماذج الإحصائية. وقد ساعدت هذه الوحدة على تطوير القدرة على التفكير التحليلي، حل المشكلات، وصياغة النماذج الرياضية الدقيقة التي تمثل أساسا قويا لأي دراسة مستقبلية في العلوم الاقتصادية والهندسية.

المصادر والمراجع:

المراجع العربية

1. محمد فريد محمد، المعادلات التفاضلية العادية، دار الكتب العلمية، الطبعة الأولى، بيروت - لبنان، 2012.
2. رمضان محمد رمضان، المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها، مكتبة الأنجلو المصرية، الطبعة الثانية، القاهرة - مصر، 2005.
3. فؤاد إسكندر، المعادلات التفاضلية، دار المراد، الطبعة الأولى، دمشق - سوريا، 1999.
4. عبد الهادي خماس، التحليل الحقيقي المتقدم، مطبوعات جامعة القدس المفتوحة، الطبعة الأولى، القدس - فلسطين، 2010.
5. محمد فتحي عبد الهادي، التفاضل والتكامل المتعدد، دار الفكر العربي، الطبعة الأولى، القاهرة - مصر، 2001.
6. جامعة دمشق - قسم الرياضيات، التفاضل والتكامل في عدة متغيرات، منشورات جامعة دمشق، الطبعة الثالثة، دمشق - سوريا، 2015.
7. محمد المرزوقي، الجبر الخطي وتطبيقاته، مركز الكتاب الجامعي، الطبعة الأولى، الرياض - السعودية، 2013.
8. سعيد كامل، المصفوفات والجبر الخطي، دار الفكر العربي، الطبعة الأولى، القاهرة - مصر، 2008.
9. مجدي مطاوع، الجبر الخطي، دار المسيرة للنشر، الطبعة الثانية، عمان - الأردن، 2011.

المراجع الإنجليزية

1. Dennis G. Zill, Differential Equations with Boundary-Value Problems, Cengage Learning, 11th Edition, USA, 2018.
2. George F. Simmons, Differential Equations with Applications and Historical Notes, McGraw-Hill, 2nd Edition, USA, 1991.
3. James Stewart, Multivariable Calculus, Cengage Learning, 8th Edition, USA, 2015.
4. Jerrold E. Marsden & Anthony Tromba, Vector Calculus, W. H. Freeman, 6th Edition, USA, 2012.
5. Gilbert Strang, Linear Algebra and Its Applications, Cengage Learning, 5th Edition, USA, 2016.
6. David C. Lay, Linear Algebra and Its Applications, Pearson, 5th Edition, USA, 2015.
7. Boyce, William E. & DiPrima, Richard C., Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Wiley, 11th Edition, USA, 2017.
8. Morris Tenenbaum & Harry Pollard, Ordinary Differential Equations, Dover Publications, Reprint Edition, USA, 1985.
9. Stanley Grossman, Multivariable Calculus and Linear Algebra, Academic Press, 2nd Edition, USA, 1973.
10. H. Anton, I. Bivens & S. Davis, Calculus: Multivariable, Wiley, 11th Edition, USA, 2016.
11. Howard Anton, Elementary Linear Algebra, Wiley, 11th Edition, USA, 2014.
12. David Poole, Linear Algebra: A Modern Introduction, Cengage Learning, 4th Edition, USA, 2015.
13. Stephen Boyd & Lieven Vandenberghe, Introduction to Applied Linear Algebra, Cambridge University Press, 1st Edition, UK, 2018.

14. Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, Wiley, 10th Edition, USA, 2011.