

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة غرداية

N° d'enregistrement

Université de Ghardaïa



كلية العلوم والتكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم الآلية والكهروميكانيك

Département d'Automatique et Electromécanique

Mémoire de fin d'études, en vue de l'obtention du diplôme de master

Domaine : Sciences et technologies

Filière : Electromécanique

Spécialité : Maintenance industrielle

Thème :

**Optimisation par plans d'expériences du contact par frettage
entre arbre et moyeu et effet du frottement sur le contact**

Présenté par : HAMIDA SLIMANE

DIRECTEURS DU MEMOIRE : Dr. BOUARICHA AMOR

Devant le jury composé de :

Dr. BOUSNANE TOUFIKE	Dr	Université de Ghardaïa	Présidente
Dr. BOUARICHA AMOR	Dr	Université de Ghardaïa	Encadrant
Dr. BOUGEFA SIFEDINE	Dr	Université de Ghardaïa	Examineur
Dr. AKERMI FOUZI	Dr	Université de Ghardaïa	Examineur

Année universitaire

2025 / 2026

DEDICACE

Je dédie ce travail

A toute la famille

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, je tiens à présenter mes plus vifs remerciements à Dr. AMOR BOUARICHA & Dr. BOUSNANE TOUFIK, pour avoir suivi et dirigé ce travail. Mes remerciements vont également aux tous les enseignants de département d'Automatique et Electromécanique. Notre gratitude va également aux membres du jury pour honorer notre soutenance et pour l'effort fourni afin juger ce travail. Qu'il me soit permis de remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce modeste travail.

RESUME

L'objectif de cette étude est de déterminer les valeurs optimales des paramètres géométriques et matérielles critiques de conception (résistance à la traction, épaisseur de la couronne, géométrie) afin de maximiser la capacité de transmission (couple τ transmettre), tout en minimisant les contraintes qui s'imposent et évaluant l'impact relatif de chaque facteur ainsi que les interactions potentielles entre eux. L'étude comprend également une analyse de l'effet du coefficient de frottement (μ) sur la distribution des contraintes de contact et sur la stabilité de la liaison sous charges cycliques, dans le but de prévenir les risques de plastification des composants ou du glissement relatif et d'augmenter ainsi la durée de vie et la fiabilité du montage mécanique.

Plus précisément, le problème consiste à dimensionner la denture de la couronne (géométrie, résistance en flexion et en contact) selon une procédure claire en tenant compte de l'effet du fretage qui doit être suffisant pour transmettre les trois composantes de l'effort de l'engrenage (tangential, radial et axial) sans risque de glissement durant toute la durée de vie de la machine.

Mots-clés : Engrenage, couronne frettée, optimisation par plans d'expériences, analyse par MEF,

ملخص

يتمثل هدف هذه الدراسة في تحديد القيم المثلى للمعاملات الحرجة في التصميم (مقاومة الشد، سُمْك التاج المسنن، الهندسة الشكلية)، بغرض تعظيم القدرة على نقل العزم مع تقليص الإجهادات إلى أدنى حد ممكن، وذلك من خلال تقييم التأثير النسبي لكل عامل تصميمي وتحديد التفاعلات المحتملة فيما بينها.

كما تتضمن الدراسة تحليلاً لتأثير معامل الاحتكاك في توزيع إجهادات التماس وفي استقرار الوصلة تحت تأثير الاحمال، وذلك بهدف الوقاية من التشوه اللين للمكونات أو الانزلاق المبكر وبالتالي إطالة عمر التشغيل وتعزيز موثوقية التجميع الميكانيكي، وبصورة أدق تكمن الدراسة في تحديد ابعاد اسنان التاج المسنن من حيث الهندسة الشكلية، مقاومة الانحناء، مقاومة التماس مع الأخذ بعين الاعتبار تأثير التثبيت بالانكماش الحراري، الذي يجب ان يكون كافياً لنقل مركبات القوى الثلاث الناتجة عن التعشيق (المماسية، الشعاعية، المحورية) دون خطر الانزلاق طول مدة التشغيل.

الكلمات المفتاحية: تروس، تاج مسنن مُفَرَّت، التحسين بواسطة تصاميم التجارب، التحليل بالعناصر المحدودة

ABSTRACT

The objective of this study is to determine the optimal values of the geometric and material design parameters.

(tensile strength, ring gear thickness, geometry) in order to maximize torque transmission capacity while minimizing stresses, through an evaluation of the relative impact of each design factor and the identification of potential interactions between them. The study also includes an analysis of the effect of the friction coefficient (μ) on the distribution of contact stresses and on the stability of the joint under cyclic loading, with the aim of preventing the risks of component plastic deformation (plasticization) or premature slippage, thereby extending service life and enhancing the reliability of the mechanical assembly.

More specifically, the problem consists of sizing the ring gear teeth (geometry, bending strength, and contact strength), taking into account the effect of the shrink-fit connection, which must be sufficient to transmit the three gear force components (tangential, radial, and axial) without any risk of slippage throughout the machine's service life.

Keywords: Gear, fretted crown, Design of Experiments (DOE) optimization, Finite Element Analysis (FEA).

SOMMAIRE

Liste des figures	
Liste des tableaux	
Nomenclatures	
Introduction Générale	
Chapitre I : ASSEMBLAGE FRETTÉ	
I.1. Introduction	1
I.2. Type des ajustements	3
I.3. Description de l'opération de frettage	4
I.4. Les avantages et les inconvénients du frettage	4
I.4.1 Les avantages	5
I.4.2 Les inconvénient	5
I.5. L'objectif du frettage	6
I.6. Caractéristiques des matériaux utilisés dans le frettage	6
I.6.1 Les Propriétés Mécaniques	7
I.6.2 Les Propriétés Thermiques	7
I.6.3 Les Propriétés de Surface	7
I.7. Calcul des emmanchements cylindriques	8
I.7.1 Relations générales	8
I.7.2 Pressions spécifiques et contraintes dans les pièces	9
I.8. Valeur du serrage réel	10
I.9. Efforts transmissibles par l'emmanchement	11
I.9.1 Transmission de l'effort dans le sens axial	12
I.9.2 Transmission d'un couple de torsion	12
I.10. Montage par échauffement ou refroidissement	13
I.11. Conclusion	13
Chapitre II : TRANSMISSIONS PAR ENGRENAGES	
II.1. Introduction	15
II.2. Généralités et Concepts Fondamentaux	15
II.1.1. Définition	15
II.3. Classification Technologique des Engrenages	15
II.3.1. Engrenages à axes parallèles (Engrenages cylindriques)	15
II.3.2. Engrenages à axes concourants (Engrenages coniques)	16
II.3.3. Engrenages à axes non concourants	17
II.4. Géométrie des Engrenages Cylindriques à Denture Droite	17
II.4.1. Formules de calcul géométrique (denture droite externe)	18
II.4.2. Formules de calcul géométrique (denture hélicoïdale)	20
II.5. Efforts sur les engrenages	21
II.5.1. Cas des engrenages droits à denture droite	21
II.5.2. Cas des engrenages droits à denture hélicoïdale	23
II.6. Conclusion	25
Chapitre III : Approche analytique et numérique du calcul de la résistance d'une dent dans une couronne frettée	
III.1. Introduction	27
III.2. Calcul à la flexion de la denture	27
III.2.1. Effort transmis par la dent d'engrenage droit	27
III.3. Vérification de la résistance de la denture d'une couronne frettée	29

III.3.1. Effets du frettage et de la concentration de contraintes	29
III.3.2. Concentration de contrainte au pied de dent	30
III.3.3. Expression finale (formule exploitable en engineering)	31
III.3.4. Calcul de résistance au matage (pression de Hertz) de la dent	32
III.3.5. Calcul de résistance d'une dent d'engrenage à la fatigue ou pitting norme (ISO 6336-2)	33
III.4. Conclusion	33
Chapitre IV : simulation numérique et analyse du comportement d'une couronne frettée à chaud	
IV .1 Introduction	35
IV.2. Approche par plans d'expériences	35
IV.3. Approche numérique utilisant la méthode des éléments finis	36
IV.4. Données du problème pour le calcul numérique	39
IV.5. Représentation simplifiée des efforts d'engrènement	40
IV.6. Simulation numérique du frettage sur la couronne	41
IV.7. Calcul analytique	42
IV.8. Conclusion	44
Conclusion Générale	45
BIBLIOGRAPHIE	46

LISTE DES FIGURES

Figure. I.1	Assemblage couronne avec moyeu par frettage	3
Figure. I.2	Principe du frettage	5
Figure I.3	Procédure du frettage par dilatation et par contraction	5
Figure I.4	Emmanchements cylindriques	9
Figure I.5	Relation entre la rugosité de surface et la correction des cotes nominales dans les ajustements mécaniques	12
Figure II.1	Différents types d'engrenages droits à dentures droites	15
Figure II.2	Différents types d'engrenages hélicoïdaux	16
Figure II.3	Engrenage conique à denture droite pour arbres concourants	16
Figure II.4	Engrenages roues et vis entre arbres orthogonaux	17
Figure II.5	Efforts de contact sur un engrenage droit à denture droite	21
Figure II.6	Organigramme de calcul pour engrenages droits à denture droite	22
Figure II.7 a	Différents types d'engrenages droits à dentures droites	23
Figure II.7 b	Efforts de contact sur un engrenage droit à denture hélicoïdale	29
Figure II.8	Organigramme de calcul pour engrenage droit à denture hélicoïdale	37
Figure III.1	Composantes de l'effort d'engrènement d'un engrenage cylindrique	38
Figure IV.1	Modèles géométriques (Moyeu + Couronne) obtenues par SolidWorks	38
Figure IV.2	Modèles géométriques assemblés sous Abaqus (Moyeu + Couronne)	38
Figure IV.3	Maillage en éléments finis du modèle géométrique (Moyeu + Couronne)	38
Figure IV.4	F_t Effort tangent au cercle primitif, F_r dirigée vers le centre et F_a parallèle à l'axe de la couronne	40
Figure IV.5	Distribution radiale uniforme des contraintes induite par le frettage dans le volume du matériau de la roue frettée	40
Figure IV.6	Effet du frettage seul sur la distribution de l'état de contraintes au pied de dents d'engrenage droit	41
Figure IV.7	Effet du frettage seul sur la distribution de l'état de contraintes au pied de	41
Figure IV.8	dents d'engrenage hélicoïdale	42

LISTE DES TABLAUX

Tableau I.1.	Valeurs Caractéristiques des matériaux utilisés dans le frettage	8
Tableau I.2.	Coefficients usuels de frottement dans les emmanchements	12
Tableau I.3.	Grandeurs utilisées dans les calculs pratiques de l'engineering.	31

NOMENCLATURES

<i>Symbole</i>	<i>Désignation</i>	<i>unité</i>
E	Module de Young	daN/mm ²
v	Coefficient de poisson	-
α	Coefficient de dilatation linéaire	(10 ⁻⁶ /C°)
C	Couple transmis	N.m
d_p	Diamètre primitif	mm
F_t	Force tangentielle	N
ω	Vitesse angulaire	rad/s
N	Vitesse de rotation	tr/min
Angle β	L'inclinaison de l'hélice	-
σ_{adm}	La contrainte admissible du matériau de la dent	Pa
F_r	Force radiale	Pa
F_a	Force axiale	Pa
b	Largeur de dent	mm
P	Puissance transmise	KW
m	Module d'engrènement	-
Y_t	Coefficient de forme	-
p	Pression de contact	Pa
ΔT	Différence de température	K
T_{am}	Température ambiante	°C / K

INTRODUCTION GENERALE :

L'assemblage par frettage (assemblage obtenu à chaud) entre une couronne dentée et un moyeu est considéré parmi les solutions d'ingénierie les plus utilisées pour la transmission de couples entre les ensembles d'une conception mécanique. L'intérêt de ce type de liaison repose essentiellement sur l'uniformité de la distribution de la pression de contact entre les deux pièces.

Le frottement est un facteur crucial dans la performance de cette liaison ; il garantit la stabilité de l'assemblage des pièces et garantit le transfert le couple nécessaire de transmission.

Compte tenu du nombre de variables entrant dans le calcul du serrage nécessaire telles que la puissance à transmettre, la valeur de pression de contact nécessaire, le coefficient de frottement, les caractéristiques mécaniques et géométriques des pièces en contact, on a jugé qu'il est nécessaire de présenter un calcul optimal des principaux facteurs qui contribuent directement à la détermination de la capacité de la transmission de la puissance. Dans ce type de calcul, vu le nombre des paramètres qui interviennent dans le calcul de transmission de puissance, on a aussi jugé nécessaire de rappeler et utilisé la technique des plans d'expériences pour cibler les variables les plus significativement influentes qui assurent la capacité et la durabilité de l'assemblage afin d'assurer l'équilibre optimal entre le couple maximal moteur et la résistance ainsi que la rigidité de la denture de l'engrenage nécessaire.

CHAPITRE I :
ASSEMBLAGE FRETTE

I.1. Introduction :

L'assemblage mécanique par frettage dit aussi par interférence consiste à emmancher deux tubes cylindriques ; l'un dans l'autre selon un ajustement serré. Techniquement, la réalisation technologique de ce type d'assemblage consiste habituellement à chauffer le tube extérieur ou à refroidir le tube intérieur pour bénéficier du phénomène de dilatation et/ou de contraction thermique lors de l'assemblage. Le frettage est habituellement pratiqué sur des éléments de révolution, avec un emmanchement cylindrique ou conique. L'usinage des pièces requiert des tolérances serrées pour assurer une pression de contact adéquate.

Ce type de liaison est souvent utilisé pour effectuer un assemblage (quasistatique) permanent et compact, tout en conservant une bonne rigidité. Son utilisation est répandue dans plusieurs domaines ; par exemple pour les arbres de turbine à gaz, les essieux d'une voiture ferroviaire (dans le transport sur chemins de fer), etc. [1]

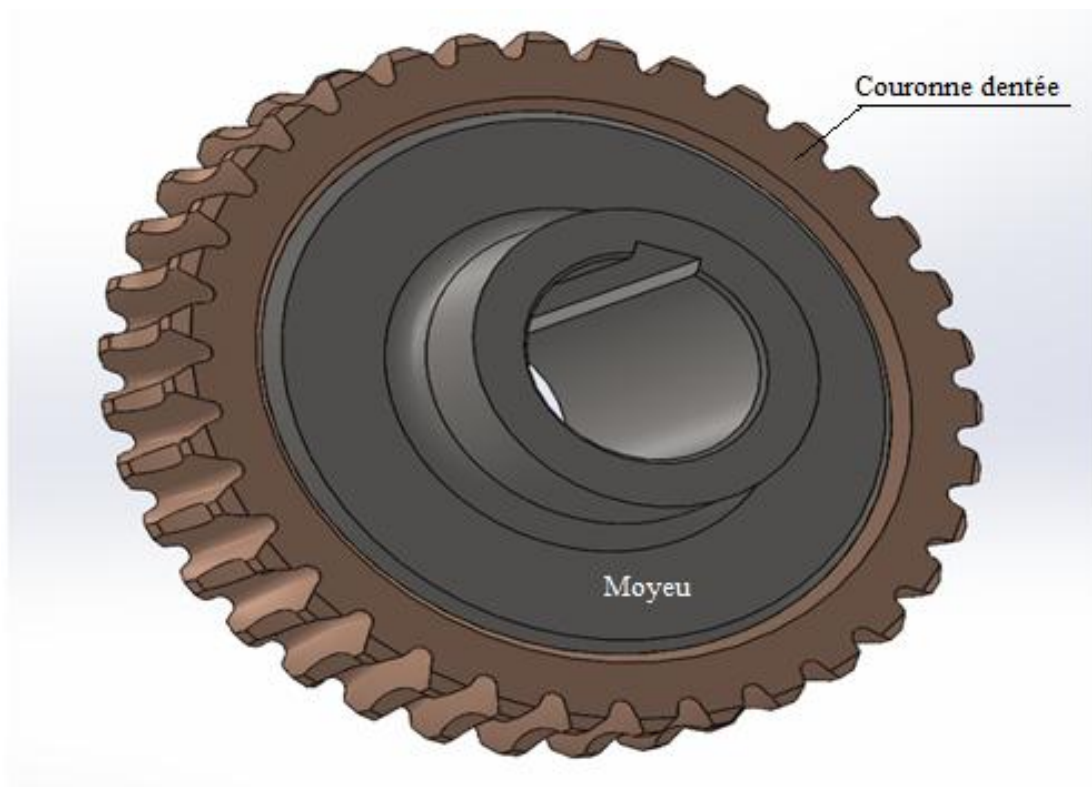


Figure. I.1- Assemblage couronne avec moyeu par frettage

I.2. Type des ajustements :

En mécanique générale, la relation dimensionnelle entre deux pièces assemblées (un arbre consistant en l'élément mâle et un alésage en l'élément femelle) est caractérisée et définie par le type d'ajustements (normalisation ISO). On distingue trois grandes catégories d'ajustements :

- **Ajustement avec jeu** : Le diamètre maximal de l'arbre est toujours inférieur au diamètre minimal de l'alésage. Le mouvement relatif entre les pièces reste possible (ex. : $H7/g6$).
- **Ajustement incertain** : Les tolérances des dimensions des deux pièces se chevauchent. Selon la dispersion de fabrication, l'assemblage peut présenter un léger jeu ou un léger serrage (ex. : $H7/js6$).
- **Ajustement avec serrage** : Le diamètre de l'arbre avant assemblage est strictement supérieur à celui de l'alésage. L'assemblage nécessite une force ou une modification thermique pour être réalisé. Le frettage se classe exclusivement dans cette catégorie d'assemblage (ex. : $H7/p6$, $H7/s6$ ou $H7/u6$ pour les serrages les plus énergiques).

I.3. Description de l'opération de frettage :

Le principe fondamental du frettage repose sur l'utilisation des propriétés matérielles de dilatation et de contraction thermiques des matériaux pour annuler temporairement le serrage négatif (l'interférence) lors de l'insertion.

L'opération d'assemblage serré par frettage se déroule généralement selon les étapes suivantes

- **Chauffage de l'alésage (frettage à chaud)** : La pièce extérieure (la frette ou la couronne) est chauffée dans un four ou par induction. Sous l'effet de la chaleur, son diamètre intérieur augmente temporairement (phénomène de dilatation thermique).
- **Refroidissement de l'arbre (frettage à froid, optionnel ou complémentaire)** : L'arbre peut être plongé dans de l'azote liquide pour provoquer sa contraction thermique.
- **Assemblage rapide** : Grâce au jeu thermique temporairement créé, l'arbre est justement inséré dans l'alésage sans aucun effort mécanique, garantissant une coaxiale parfaite.
- **Retour à l'équilibre thermique** : En refroidissant (pour la frette) et en se réchauffant (pour l'arbre), les matériaux cherchent à reprendre leurs dimensions initiales. L'interférence géométrique initial avant dilatation et /ou contraction crée alors une **pression de contact** radiale intense à l'interface, ce qui génère un couple de frottement suffisant pour assurer la transmission de puissance. [1]

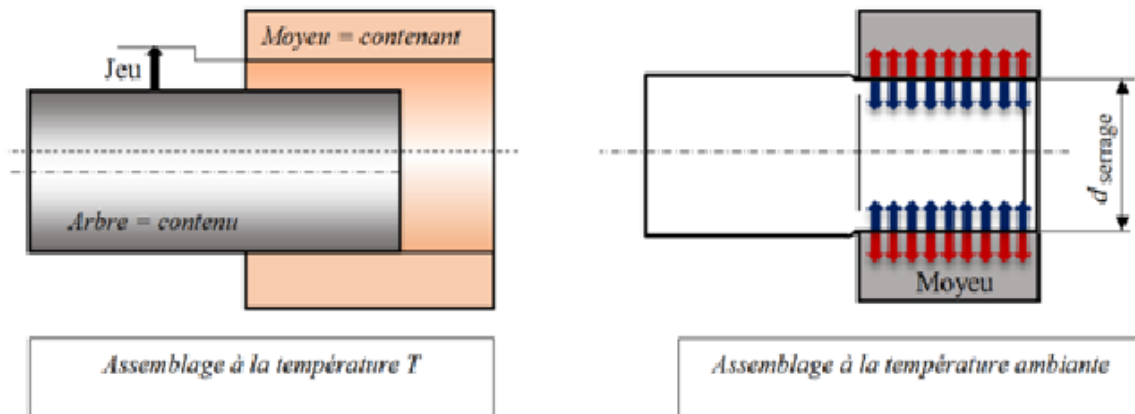


Figure. I.2- Principe du frettage*[3]

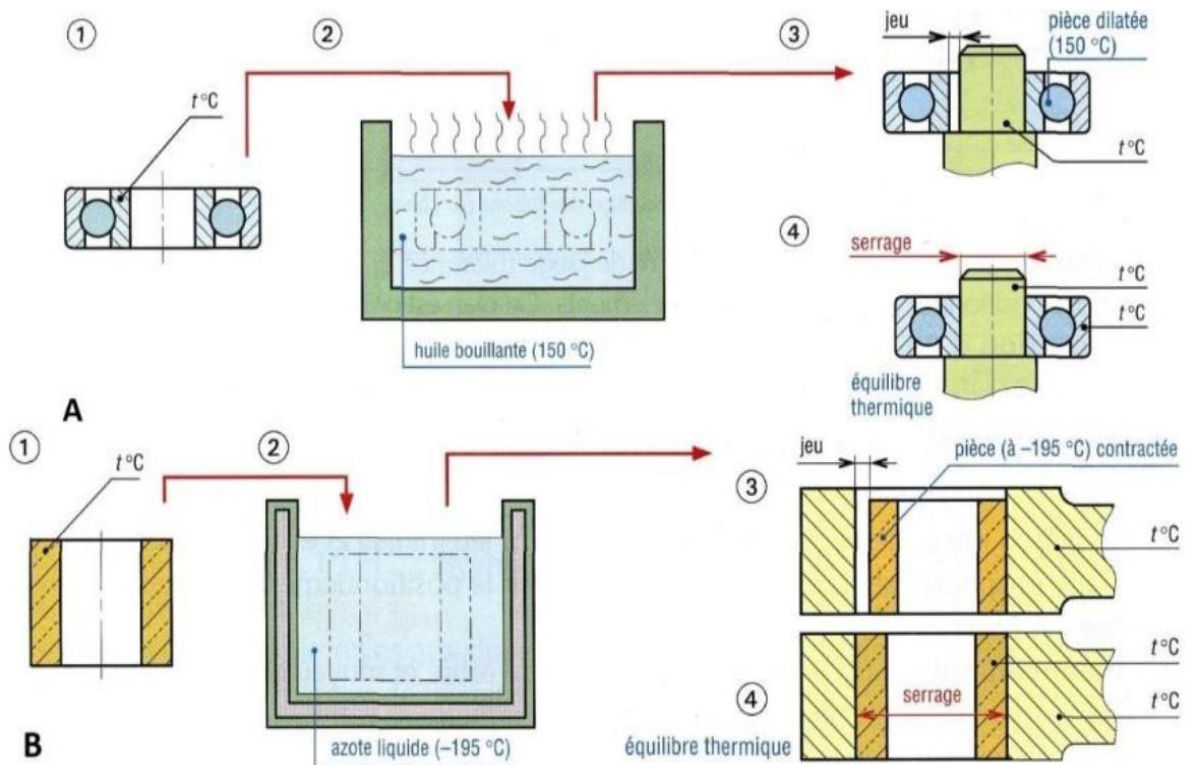


Figure. I.3- Procédure du frettage par dilatation et par contraction [3]

I.4. Les avantages et les inconvénients du frettage :

I.4.1 Les avantages

- facilité de montage et démontage

- Limite les concentrations de contraintes et permet une meilleure coaxiale, donc un contact uniforme.
- Permet la transmission d'efforts importants
- Éliminent le jeu dans les clavettes et les cannelures
- Meilleure et uniforme répartition des contraintes.

I.4.2 Les inconvénient

- Le contact est sensible à la Chaleur
- Nécessite et exige une précision de Fabrication
- Risque de dépassement de la limite élastique pendant le retour aux conditions de température initiales
- Transmission de couple limitée

I.5. L'objectif du frettage :

Tel que défini auparavant, le frettage cylindrique est une méthode d'assemblage par adhérence qui repose sur l'interférence dimensionnelle entre les deux pièces cylindriques. Lorsqu'on se concentre sur la transmission du couple avec la rigidité nécessaire de la couronne, les objectifs deviennent très spécifiques :

➤ Transmission du couple

Dans un assemblage fretté, la transmission du couple ne repose pas sur un obstacle physique (comme une liaison par clavette ou par cannelures), mais sur l'effort de **frottement** généré par une pression radiale intense et uniforme. Ainsi, il entraîne :

- **Une suppression des concentrateurs de contraintes :** L'un des objectifs majeurs est d'éliminer les rainures de clavettes ou les cannelures qui affaiblissent l'arbre et le moyeu. Le frettage répartit l'effort sur toute la surface de contact, ce qui permet de transmettre des couples plus élevés avec des diamètres d'arbres plus faibles.
- **Une adhérence totale :** En créant une pression de contact p uniforme, on génère une force de frottement tangentielle capable de s'opposer au glissement.
- **Une élimination de jeu :** Le frettage élimine tout jeu fonctionnel, ce qui est crucial pour les transmissions soumises à des inversions de cycle (chocs de couple) où un jeu même minime finirait par mater les surfaces des pièces en contact.

➤ Rigidification de la couronne extérieure

L'objectif associé dans ce cas est d'utiliser le frettage comme un outil de création de précontraintes structurelles. Lorsqu'on a une couronne (pièce extérieure) sur un moyeu (pièce intérieure), on modifie l'état de contrainte naturel de l'ensemble.

Précontrainte de compression

En mécanique, la plupart des ruptures (notamment par fatigue) débutent en zone de traction.

- Le frettage place la couronne extérieure dans un état de tension circonférentielle (contrainte de traction σ_θ) mais, surtout, il maintient le moyeu intérieur sous une compression permanente.
- Application aux engrenages : Pour une couronne dentée frettée, cette tension initiale permet de limiter les déformations élastiques des dents sous charge, rendant l'ensemble beaucoup plus "rigide" dynamiquement.

Limitation des déformations radiales

- Les contraintes internes de compression permettent de contenir la force centrifuge : Pour les pièces tournant à très haute vitesse (rotors, volants d'inertie), la force centrifuge tend à dilater la couronne le serrage initial du frettage compense cette dilatation, empêchant la couronne de se désolidariser ou de vibrer.
- Frettage de renforcement : On frette souvent des anneaux en acier haute résistance autour de cylindres soumis à une forte pression interne (cylindres de presse hydraulique). L'objectif est de "serrer" le cylindre pour qu'il ne s'expande (se dilate) pas au-delà de sa limite élastique lors du travail.

I.6. Caractéristiques des matériaux utilisés dans le frettage : [4]

Le frettage repose sur la déformation élastique des composants pour transmettre des efforts importants sans l'utilisation d'éléments de liaison ou de fixation tels que des clavettes, des vis, des cordons de soudures, etc. Par conséquent, la sélection des matériaux est de la plus haute importance.

Les caractéristiques essentielles à prendre en compte lors d'une efficace conception d'un assemblage fretté sont les suivantes :

➤ I.6.1- Les Propriétés Mécaniques :

Pour qu'un frettage fonctionne, les matériaux doivent supporter des pressions de contact élevées sans pour cela subir de déformation plastique (permanentes), Essentiellement ces caractéristiques se résument en :

- Module de Young (E) : Il détermine la rigidité du matériau.
- La Limite Élastique (Re) : C'est le critère de sécurité absolu. La contrainte tangentielle, la plus importante composante du champ de contraintes induites par le frettage ne doit jamais dépasser la limite élastique du matériau.
- Le Coefficient de Poisson (ν) : Intervient directement dans le calcul des déformations radiales et axiales lors de l'assemblage.

➤ I.6.2- Les Propriétés Thermiques :

Le frettage est souvent réalisé en chauffant (dilatation) le contenant (couronne) et/ou en refroidissant le contenu (contraction).

- Le Coefficient de dilatation thermique (α) : Plus un coefficient de poisson est élevé plus il permet d'obtenir le jeu nécessaire au montage avec une variation de température moindre.
- La Conductivité Thermique (λ) : Lors du montage de l'ensemble, une bonne conductivité permet une répartition homogène de la température, évitant par les chocs thermiques ou les déformations asymétriques.

➤ I.6.3- Les Propriétés de Surface :

- Le Coefficient de Frottement (μ) : La capacité de charge de ce type d'assemblage (couple ou effort axial transmissible) est directement proportionnelle au coefficient de frottement entre les deux surfaces en contact. Un frottement trop faible nécessite un serrage initial démesuré.
- La Résistance au Grippage : Lors de l'assemblage (surtout à la presse), le risque de microsoudure ou de rayure est élevé. Certains couples de matériaux (comme l'acier sur l'acier inoxydable) sont très sensibles.

Tableau I.1. Valeurs Caractéristiques des matériaux utilisés dans le frettage [5]

Matériaux	Caractéristiques mécaniques		Coefficient de dilatation linéaire α en ($10^{-6}/C^{\circ}$)	
	Module de Young (E) en daN/mm ²	Coefficient de poisson(v)	Chauffage (α_e)	Refroidissement (α_r)
Acier au carbone et aciers faiblement alliés	20 000 à 22 000	0.3	11	-9
Acier moulé	20 000 à 21 000	0.3	11	-9
Fonte grise	7500 à 11 000	0.25	10	-8
Fonte malléable	9 000 à 10 000	0.25	10	-8
Laiton	8000	0.3	18	-16
Aluminium et alliages	6000 à 8 000	0.27	24	-18
Bronze	8500 à 12000	0.35	17	-14

I.7. Calcul des emmanchements cylindriques :

Dans ce travail, la roue dentée (couronne) est assimilée à un manchon. Le calcul des assemblages cylindriques constitués par un arbre plein ou creux et un manchon fait intervenir les hypothèses simplificatrices suivantes :

- La loi de proportionnalité de Hooke est applicable bien qu'il soit possible d'avoir des assemblages avec déformations plastiques ou non linéaires.
- Les deux pièces ont même longueur.
- Les deux pièces sont constituées par des cylindres dont l'arbre peut être plein ou creux.

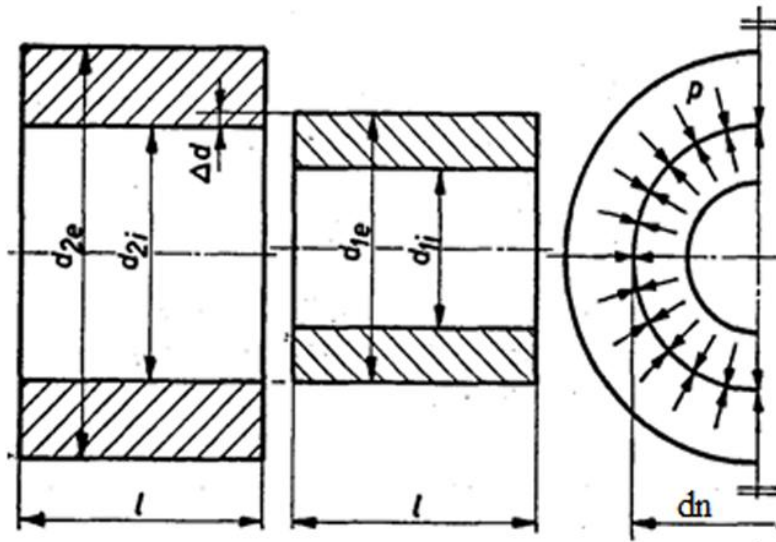


Figure. I.4 - Emmanchements cylindriques [5]

Avec :

d_{1i} : diamètre intérieur de l'arbre.

d_{1e} : diamètre extérieur de l'arbre.

d_{2i} : diamètre intérieur du manchon.

d_{2e} : diamètre extérieur du manchon.

E_1, E_2 , modules d'élasticité des matériaux de l'arbre et du manchon respectivement.

ν_1, ν_2 : coefficients de Poisson des matériaux.

I.7.1 Relations générales : [4]

Le serrage diamétral des deux pièces emmanchées (Fig. I.4) est simplement donné par :

$$\Delta d = d_{1e} - d_{2i} \dots\dots\dots \text{I.1}$$

Le serrage se répartit en un serrage Δd_1 , de l'arbre, soit la diminution de son diamètre extérieur, et un serrage, Δd_2 qui provient de la dilatation élastique du manchon. On a évidemment :

$$\Delta d = \Delta d_1 + \Delta d_2 \dots\dots\dots \text{I.2}$$

Les relations de la résistance des matériaux, appliquées dans le cas de cylindres épais soumis à la pression intérieure ou /et à la pression extérieure s'écrivent sous la forme simplifiée suivante :

Déformation de l'arbre (moyeu):
$$\Delta d_1 = d_{1e} \cdot \frac{p}{E_1} \left[\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \nu_1 \right] \dots\dots\dots \text{I.3}$$

Déformation du manchon (couronne):
$$\Delta d_2 = d_{2e} \cdot \frac{p}{E_2} \left[\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} - \nu_2 \right] \dots\dots\dots \text{I.4}$$

Avec : $k_1 = \frac{d_{1i}}{d_{1e}}$ et $k_2 = \frac{d_{2i}}{d_{2e}}$

Les diamètres d_{1e} et d_{2i} sont à peu près égaux de telle sorte qu'on peut admettre que :

$$d_{1e} \cong d_{2i} \cong d_n \dots\dots I.5$$

d_n Est le diamètre nominal.

Pour simplifier l'écriture, on pose :

$$C_1 = \frac{1}{E_1} \left[\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \nu_1 \right] \dots\dots I.6$$

$$C_2 = \frac{1}{E_2} \left[\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} - \nu_2 \right] \dots\dots I.7$$

La déformation totale devient :

$$\Delta d = p \cdot d_n [C_1 + C_2] \dots\dots I.8$$

La pression « p » entre les deux cylindres est directement opposée sur les deux surfaces cylindriques en contact.

I.7.2- Pressions spécifiques et contraintes dans les pièces : [5]

- **Pression spécifique**

La pression dans l'emmanchement est donnée immédiatement par :

$$P = \frac{\Delta d}{[C_1 + C_2] \cdot d_n} \dots\dots I.9$$

- **Contraintes dans l'arbre (moyeu)**

D'un côté, l'arbre est soumis à l'action d'une pression extérieure « p » créant un état de contrainte bi- axial dans le cylindre. Si l'arbre est creux la contrainte tangentielle intérieure représente la contrainte maximale.

$$\sigma_{1i} = \sigma_t = -p \frac{1}{1-k_1^2} \dots\dots I.10$$

Si l'arbre est plein, c'est-à-dire si $K_1 = 0$, la contrainte sur l'arbre est égale à la pression extérieure sur l'arbre.

$$\sigma_{1i} = -p \dots\dots I.11$$

- **Contrainte dans le manchon (couronne)**

La partie la plus sollicitée de la paroi se trouve à l'intérieur du cylindre creux, la contrainte tangentielle a pour valeur :

$$\sigma_t = P \frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \dots\dots I.12$$

En admettant une répartition uniforme de la contrainte axiale, on a :

$$\sigma_a = P \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \dots\dots\dots \text{I.13}$$

La contrainte radiale à l'intérieur a pour valeur :

$$\sigma_r = -p \dots\dots\dots \text{I.14}$$

La contrainte de comparaison s'écrit sous forme simplifiée :

$$\sigma_{2i} = \frac{P}{1 - k_2^2} \sqrt{3 + k_2^4} \dots\dots\dots \text{I.15}$$

- **Contrainte admissible**

La contrainte de comparaison dans les deux pièces devra rester inférieure à la limite élastique R_e .

I.8. Valeur du serrage réel : [4]

Le serrage, représenté par la différence :

$$\Delta d = d_{1e} - d_{2i} \dots\dots\dots \text{I.16}$$

Est défini pour des cylindres parfaits, c'est-à-dire sans rugosité. Le serrage réel des pièces est inférieur au serrage calculé à partir des dimensions mesurées sur les pièces. La perte de serrage représente approximativement 1.5 Ra (Ra = rugosité moyenne arithmétique) par surface. En exprimant par R_{a1} et R_{a2} les rugosités des deux cylindres, le serrage réel (théorique corrigé) peut être donné par :

$$\Delta d = d_{1e} - d_{2i} - 3 \cdot (R_{a1} + R_{a2}) \dots\dots\dots \text{I.17}$$

Le serrage se détermine à partir de l'ajustement adopté, il varie entre les écarts supérieurs et inférieurs des deux diamètres tolérés. Le serrage maximal sert au contrôle des contraintes, le serrage minimal sert au contrôle de la transmission de l'effort.

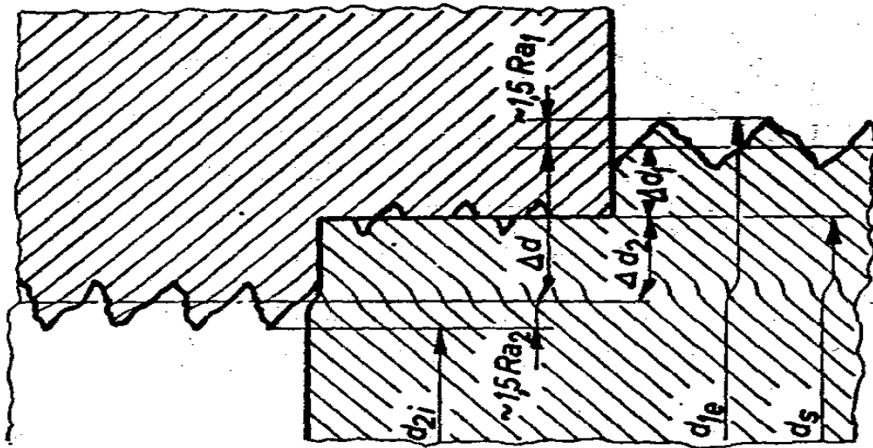


Figure. I.5- Relation entre la rugosité de surface et la correction des cotes nominales dans les ajustements mécaniques [5]

I.9. Efforts transmissibles par l'emmanchement :

Les efforts transmissibles par l'emmanchement dépendent de la pression exercée p , de l'étendue de la surface de contact, du coefficient de frottement de calcul et du coefficient de sécurité.

Tableau I.2. Valeurs Caractéristiques des matériaux utilisés dans le frettage

Coefficients usuels de frottement dans les emmanchements [5]

Matière du manchon	Acier		Fonte Ft		Alliage de cuivre	Alliage d'aluminium
Surfaces	Huilées	Sèches	Huilées	Sèches	Sèches	Sèches
Coefficient de frottement μ	0.05 à 0.2	0.08 à 0.2	0.05 à 0.15	0.15 à 0.25	0.04 à 0.08	0.02 à 0.1

Le coefficient de sécurité au glissement varie habituellement entre 1.4 et 2 ;

$$1.4 \leq \alpha_{gl} \leq 2$$

I.9.1- Transmission de l'effort dans le sens axial

L'effort axial F_a transmissible dans l'emmanchement s'obtient par :

$$F_a = P \cdot \frac{\mu \cdot A}{\alpha_{gl}} \dots \dots \dots \text{I.18}$$

$A = \pi \cdot d_n \cdot l$: Représente l'aire de la surface de contact

d_n : diamètre de l'emmanchement ; l : largeur du contact

I.9.2- Transmission d'un couple de torsion

Le couple de torsion transmissible par un emmanchement vaut :

$$M_t = P \cdot \frac{\mu \cdot A \cdot d_n}{2 \cdot \alpha_{gl}} \dots\dots\dots \text{I.19}$$

I.10. Montage par échauffement ou refroidissement :

Le montage dit par frettage, par échauffement de la partie extérieure ou par refroidissement de l'arbre s'utilise lorsque le serrage exigé est important. La dilatation linéaire positive ou négative à prévoir doit tenir compte du serrage maximal et d'un jeu d'emmanchement compris entre $j = 0.03$ et 0.1 mm ou $j = \frac{d_n}{1000}$ pour les grandes dimensions. [4]

L'échauffement à prévoir pour la pièce extérieure vaut :

$$\Delta\theta_e = \frac{\Delta d_{Max}^* + j}{\alpha_c \cdot d_n} \dots\dots\dots \text{I.20}$$

j : jeu d'emmanchement.

α_e : Coefficient de dilatation linéaire.

d_n : diamètre nominal.

Δd_{Max}^* : serrage maximum sans rugosité.

Le refroidissement à prévoir pour la pièce intérieure vaut :

$$\Delta\theta_r = \frac{\Delta d_{Max}^* + j}{\alpha_r \cdot d_n} \dots\dots\dots \text{I.21}$$

α_c Et α_r sont les coefficients de dilatation pendant le chauffage et le refroidissement du matériau de la pièce de l'assemblage. [4]

I.11. Conclusion

Le frettage est par définition une méthode de liaison par interférence métrologique provoquant un important serrage entre les éléments de l'assemblage qui peuvent se présenter telles que pièces cylindriques, coniques ou prismatiques. Il garantit une transmission optimale des efforts, une excellente résistance à la fatigue et un centrage précis des composants sous forte charge.

Le frettage s'impose comme une solution technologique incontournable pour les liaisons hautement sollicitées de structures cylindriques et coniques concentriques et pour les sections prismatiques. Sa pertinence repose sur un calcul rigoureux de la pression d'interface induite par le serrage, afin de garantir la tenue mécanique sans dépasser la limite élastique des matériaux en présence. Ce premier chapitre pose les bases qualitatives nécessaires avant d'aborder l'analyse mathématique et mécanique des contraintes générées par ce type d'assemblage.

CHAPITRE II :
TRANSMISSIONS PAR
ENGRENAGES

II.1. Introduction :

Dans la conception des systèmes mécaniques, la transmission de puissance est une fonction technologique fondamentale. Parmi les différents organes de transmission, les engrenages occupent une place prépondérante pour transmettre les mouvements lorsque la distance entre les axes est relativement faible. Ils permettent de transmettre fidèlement un couple et une vitesse de rotation entre les arbres sans glissement en assurant un excellent rendement cinétique (généralement supérieur à 95%). [6]

II.2. Généralités et Concepts Fondamentaux : [6]

II.2.1. Définition :

Un engrenage est un mécanisme élémentaire composé de deux roues dentées mobiles autour d'axes de position relative invariante. La roue qui a le plus petit nombre de dents est appelée pignon (généralement l'élément menant ou moteur), tandis que la plus grande est appelée roue.

II.3. Classification Technologique des Engrenages : [6]

Selon la position relative des axes de rotation et la géométrie des dentures, on classe les engrenages en trois grandes catégories :

II.3.1. Engrenages à axes parallèles (Engrenages cylindriques) :

- **À denture droite :** Les génératrices des flancs des dents sont des droites parallèles à l'axe de rotation. Ils sont simples à fabriquer et ne génèrent aucun effort axial. Cependant, l'entrée en contact de toute la largeur de la dent se fait instantanément, ce qui les rend bruyants à haute vitesse.

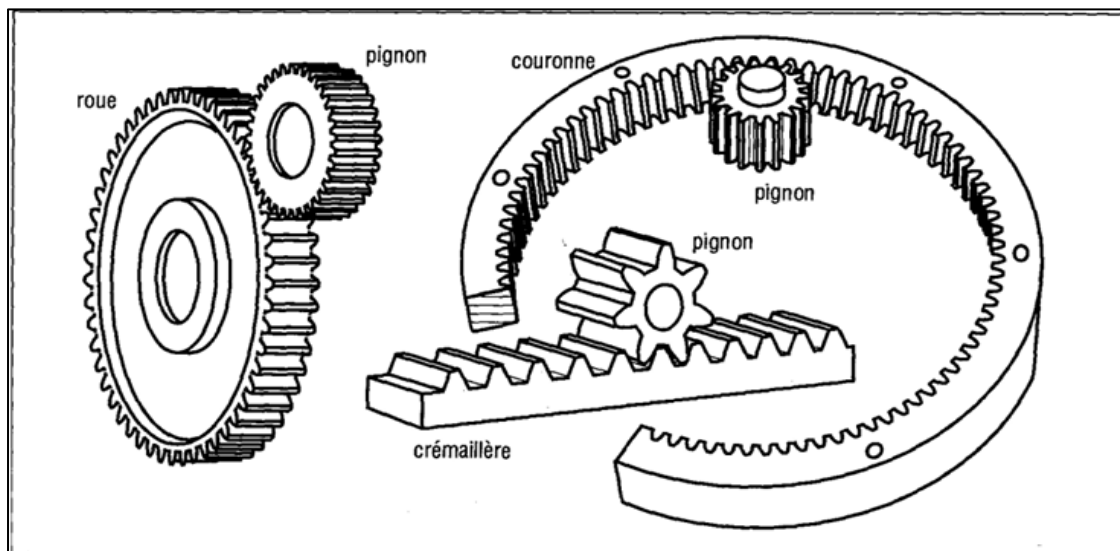


Figure II.1. Différents types d'engrenages droits à dentures droites [10]

- **À denture hélicoïdale :** Les dents sont enroulées suivant des hélices coaxiales à l'axe de l'arbre. Le contact commence en un point et s'étend progressivement sur toute la largeur de la dent. Cela offre une transmission beaucoup plus souple, silencieuse et une capacité de charge accrue. En contrepartie, ils génèrent un effort axial. [6]

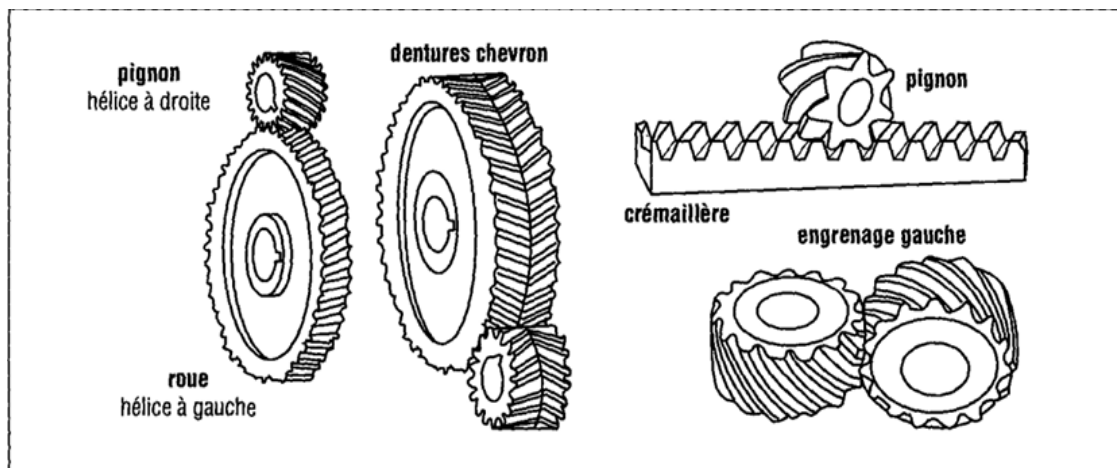


Figure II.2. Différents types d'engrenages hélicoïdaux [10]

II.3.2. Engrenages à axes concourants (Engrenages coniques)

Utilisés lorsque les axes des arbres se coupent (généralement à 90°). Les surfaces primitives sont des cônes. Les dentures peuvent être droites ou spirales. Les dentures spirales offrent les mêmes avantages de progressivité et de silence que les dentures cylindriques hélicoïdales. [6]

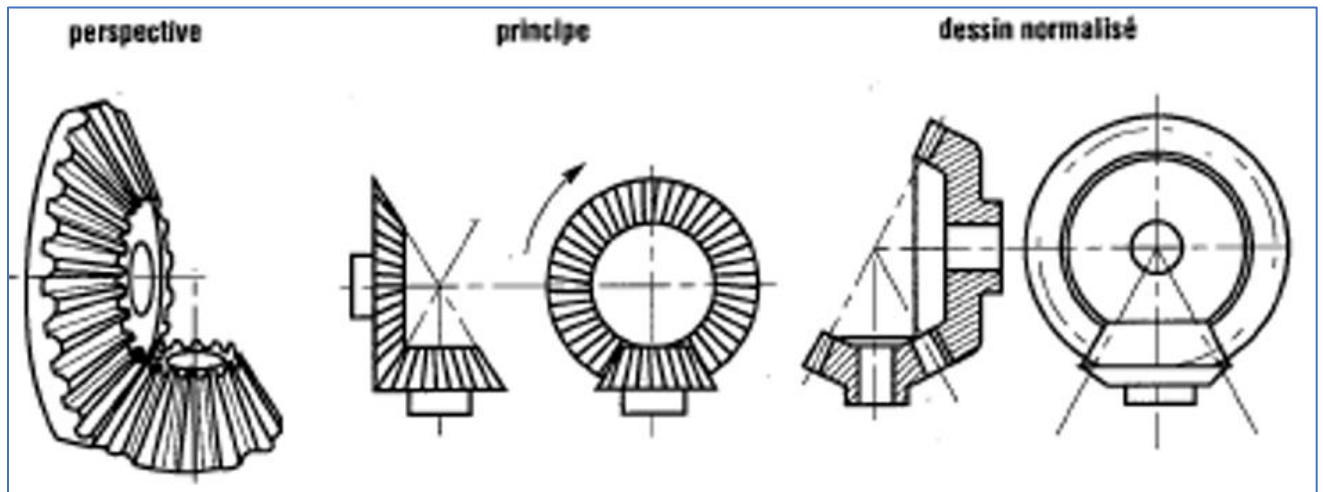


Figure II.3. Engrenage conique à denture droite pour arbres concourants [10]

II.3.3. Engrenages à axes non concourants :

- Système roue et vis sans fin : Composé d'une vis (analogue à une vis à filet trapézoïdal) et d'une roue dentée hélicoïdale. Ce système permet d'atteindre de très grands rapports de réduction (jusqu'à 1/100) sous un encombrement réduit et présente souvent une propriété d'irréversibilité.

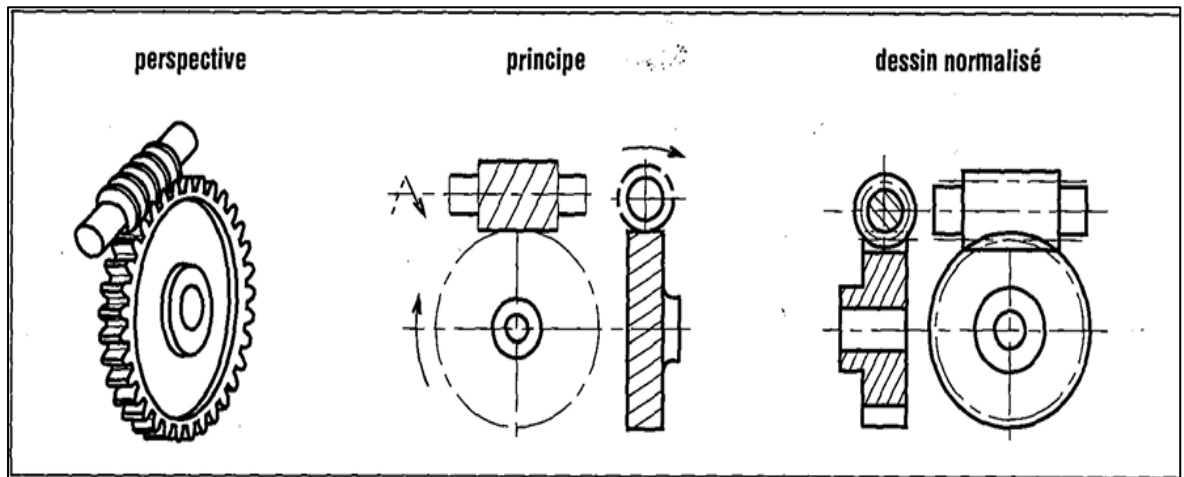


Figure II.4. Engrenages roues et vis entre arbres orthogonaux [10]

II.4. Géométrie des Engrenages Cylindriques à Denture Droite :

Toutes les dimensions géométriques d'une roue dentée sont normalisées et calculées à partir du module d'engrènement (m) ; le paramètre géométrique fondamental exprimé en millimètres. A partir du calcul de résistance de la dent assimilée à une poutre, le résultat du calcul de ce module permet de guider au choix de la valeur de ce module dans les séries de valeurs normalisées (norme ISO) en fonction des contraintes de résistance mécanique. [6]

La relation permettant le calcul de ce module étant :

$$m \geq \sqrt[2.34]{\frac{F_t}{K \cdot R_{pe}}} \dots\dots \text{II.1}$$

F_t : effort tangentiel sur la dent.

K : coefficient de largeur de denture compris entre 7 et 12

R_{pe} : résistance pratique à l'extension. R_{pe} Dépend du matériau utilisé (R_{pe}) ; $R_{pe} = \frac{R_e}{\alpha}$

R_e : limite élastique du matériau

α : coefficient de sécurité

Valeurs normalisées du module m (NF ISO 54...)									
valeurs principales en mm					valeurs secondaires en mm				
0,06	0,25	1,25	5	20	0,07	0,28	1,125	5,5	22
0,08	0,30	1,5	6	25	0,09	0,35	1,375	7	28
0,10	0,40	2	8	32	0,11	0,45	1,75	9	36
0,12	(0,50)	2,5	10	40	0,14	(0,55)	2,75	11	45
0,15	(0,80)	3	12	50	0,18	(0,7)	3,5	14	55
0,20	1,0	4	16	60	0,22	(0,9)	4,5	18	70

II.4.1. Formules de calcul géométrique (denture droite externe) : [16]

Le tableau suivant rassemble les relations mathématiques régissant la géométrie d'un engrenage cylindrique droit standard (angle de pression normalisé $\alpha = 20^\circ$) :

Caractéristiques et formules des engrenages droits à denture droite		
caractéristiques	symboles ISO	observations et formules usuelles
vitesse angulaire	ω	$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} \approx 0,1n$ (unités : rad/s)
nombre de tours par minute	n	n_1 (roue 1) et n_2 (roue 2)
module	m	valeurs normalisées (tableau des modules)
pas primitif	p	$p = \pi m = 3,14159 m$ ($p = p_1 = p_2$)
nombre de dents	Z	Z_1 (roue 1) et Z_2 (roue 2)
rayon primitif	r	r_1 (roue 1) et r_2 (roue 2) ; $r = d/2$
diamètre primitif	d	$d_1 = mZ_1$ et $d_2 = mZ_2$
entraxe entre les 2 roues	a	$a = r_1 + r_2 = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m(Z_1 + Z_2)}{2}$
largeur de la dent	b	$b = k \cdot m$ ($7 \leq k \leq 12$)
saillie	h_a	$h_a = m$
creux	h_f	$h_f = 1,25m$
hauteur de dent	h	$h = h_a + h_f = 2,25m$
diamètre de tête	d_a	$d_a = d + 2m$
rayon de tête	r_a	$r_a = r + m = d_a/2$
diamètre de pied	d_f	$d_f = d - 2,5m$
rayon de pied	r_f	$r_f = r - 1,25m = d_f/2$
épaisseur de la dent	s	$s_1 = e_2 = s_2 = e_1 = \pi m/2$ (avec jeu nul)
intervalle	e	$s_1 + e_1 = s_2 + e_2 = p$
angle de pression	α	valeur usuelle : $\alpha = 20^\circ$
rayon de base	r_b	$r_b = d_b/2$
diamètre de base	d_b	$d_b = d \cdot \cos \alpha$
pas de base	p_b	$p_b = p \cdot \cos \alpha$

Pour la même occasion nous rappelons aussi les formules de calcul des paramètres géométriques des engrenages à denture hélicoïdales dans le tableau suivant :

II.4.2. Formules de calcul géométrique (denture hélicoïdale) : [16]

Principales caractéristiques des engrenages droits à denture hélicoïdale		
caractéristiques	symboles ISO	observations et formules usuelles
angle d'hélice	β	valeurs usuelles : $15^\circ \leq \beta \leq 30^\circ$
sens de hélice		si la roue 1 a une hélice à droite, alors la roue 2 a une hélice à gauche
module réel	m_n	m_n est à choisir dans la série des modules normalisés
pas réel	p_n	$p_n = \pi \cdot m_n$
module apparent	m_t	$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta}$ (augmente avec β)
pas apparent	p_t	$p_t = \frac{p_n}{\cos \beta} = \pi \cdot m_t$
vitesse angulaire	ω	$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} \approx 0,1 n$ (unités rad/s)
nombre de tours/minute	n	n_1 (roue 1) n_2 (roue 2)
nombre de dents	Z	Z_1 (roue 1) Z_2 (roue 2)
diamètre primitif	d	$d_1 = m_t Z_1$ et $d_2 = m_t Z_2$
entraxe entre 2 roues	a	$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m_t (Z_1 + Z_2)}{2} = \frac{m_n (Z_1 + Z_2)}{2 \cos \beta}$
saillie	h_a	$h_a = m_n$
creux	h_f	$h_f = 1,25 m_n$
hauteur de dent	h	$h = h_a + h_f = 2,25 m_n$
diamètre de tête	d_a	$d_a = d + 2 m_n$
diamètre de pied	d_f	$d_f = d - 2,5 m_n$
diamètre de base	d_b	$d_b = d \cos \alpha_t$
angle de pression réel	α_n	valeur la plus usuelle : $\alpha = 20^\circ$
angle de pression apparent	α_t	$\tan \alpha_n = \tan \alpha_t \cdot \cos \beta$
pas de base réel	p_{bn}	$p_{bn} = p_n \cdot \cos \alpha_n$
pas de base apparent	p_{bt}	$p_{bt} = p_t \cdot \cos \alpha_t$
pas axial	p_x	$p_x = \frac{p_t}{\tan \beta} = \frac{p_n}{\sin \beta} = \frac{p_z}{Z}$
pas de l'hélice primitive	p_z	$p_z = \frac{\pi \cdot d}{\tan \beta} = Z \cdot p_x$
largeur de dent	b	$b > 2 \frac{\pi \cdot m_n}{\sin \beta} = 2 p_x$

Où : β : Angle d'hélice : il mesure l'inclinaison de la denture, ou de l'hélice, par rapport à l'axe de la roue ; les valeurs usuelles se situent entre 15 et 30°.

Grandeurs réelles ou normales : P_n , m_n , et $\alpha_n = 20^\circ$. Elles sont normalisées et mesurées perpendiculairement à l'hélice.

Grandeurs apparentes ou tangentielles : p_t , m_t et α_t ne sont pas normalisées et dépendent de la valeur β . Elles sont mesurées dans le plan de rotation de la roue. Entraxe a : il dépend de l'angle β . En faisant varier β , on peut obtenir n'importe quel entraxe désiré, ce qui est particulièrement intéressant pour les trains d'engrenages.

II.5. Efforts sur les engrenages : [6]

II.5.1. Cas des engrenages droits à denture droite :

La roue 1 est supposée la roue menante

(Motrice) et la roue 2 est la roue menée (réceptrice), r_1 et r_2 sont les rayons primitifs.

C_1 : le couple moteur sur la roue 1 et C_2 le couple résistant sur la roue 2.

P_1 : la puissance motrice de la roue 1 et P_2 la puissance sur la roue 2 ; roue réceptrice.

Si le rendement est égal à 1, alors on a : $P_2 = P_1$.

$$P = C \cdot \omega$$

$$P_1 = C_1 \cdot \omega_1$$

$$P_2 = C_2 \cdot \omega_2 : \text{avec } P \text{ en watts, } C \text{ en Nm et } \omega \text{ en rad/s}$$

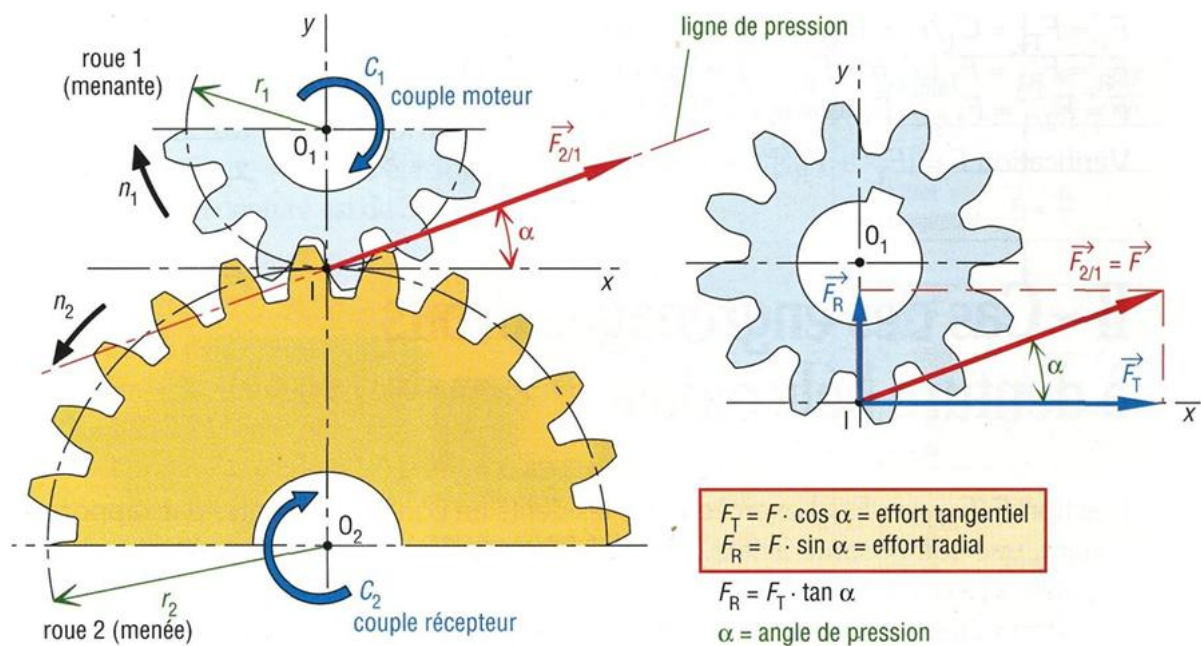


Figure II.5. Efforts de contact sur un engrenage droit à denture droite[10]

a) Efforts de contact

Action de contact $F_{2/1}$: Elle schématise l'action exercée par la roue 2 sur la roue 1. Elle est toujours portée par la ligne de pression (inclinée sous l'angle de pression α et passant par le point de contact I, point de contact situés entre les cercles primitifs des deux roues en prise).

b) Effort tangentiel F_t

Il est obtenu en projetant $F_{2/1}$ sur la tangente en I aux cercles primitifs. F_t : est à l'origine du couple transmis.

$F_t = F_{2/1} \cdot \cos \alpha$	$C_1 = F_t \cdot r_1$	$C_2 = F_t \cdot r_2$
-----------------------------------	-----------------------	-----------------------

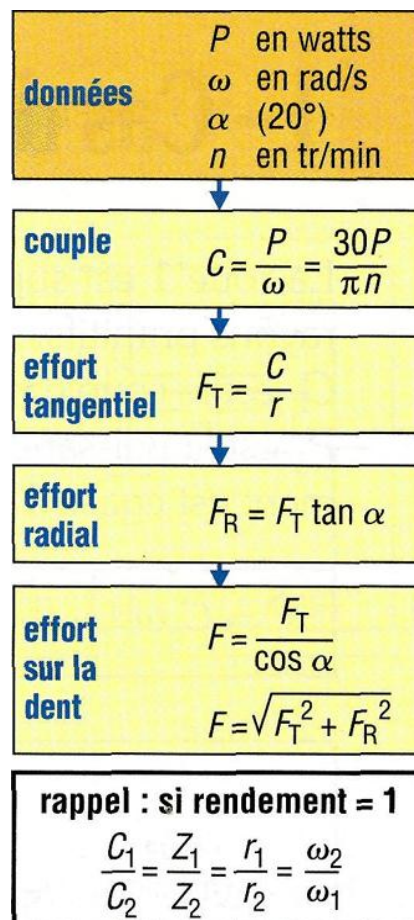


Figure II.6. Organigramme de calcul pour engrenages droits à denture droite [10]

c) Effort radial F_R

Perpendiculaire à F_t , il est obtenu en projetant $F_{2/1}$ sur O_1O_2 .

Parfois appelé effort de séparation, il ne participe pas à la transmission du couple son action a tendance à séparer les deux roues et se traduit par un fléchissement des arbres.

$$F_R = F_{2/1} \cdot \sin \alpha$$

Donc, pour calculer F_R on doit suivre la procédure suivante : connaissant la puissance d'entrée, la vitesse de rotation et l'angle de pression, la détermination de F_t à partir du couple est déterminée et de cette force on déduit F_R et $F_{2/1}$.

II.5.2. Cas des engrenages droits à denture hélicoïdale : [6]

L'action F ($F_{2/1}$ ou $F_{1/2}$) exercée entre les dents en contact présente, par rapport au cas précédent, une composante axiale (F_A) supplémentaire due à l'inclinaison β de la denture.

(F_A) est parallèle à l'axe de la roue et se transmet aux paliers par l'intermédiaire des arbres.

(F_R) effort radial passant par le centre de la roue, et (F_t) effort tangentiel transmettant le couple et la puissance.

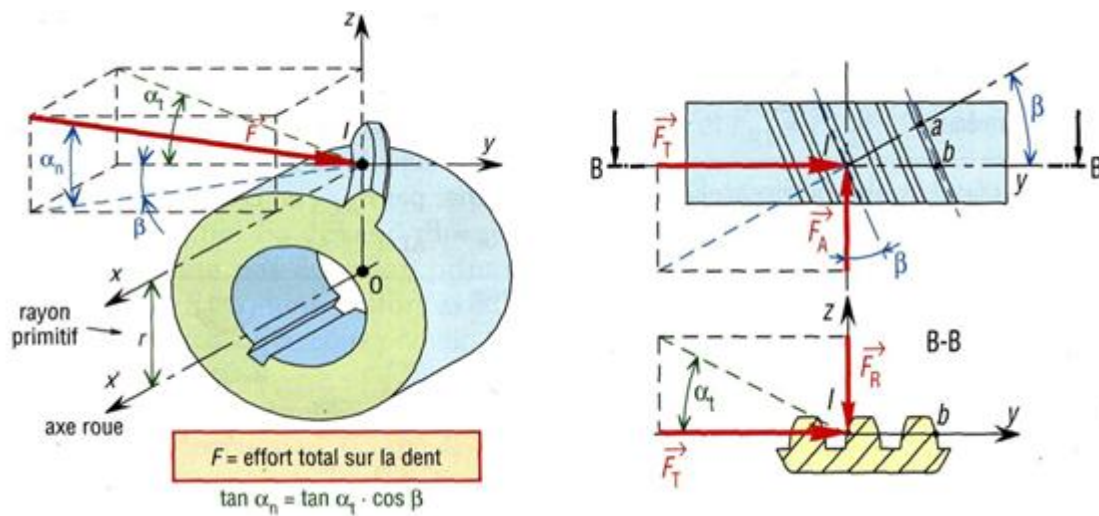


Figure II.7a. Efforts de contact sur un engrenage droit à denture hélicoïdale [10]

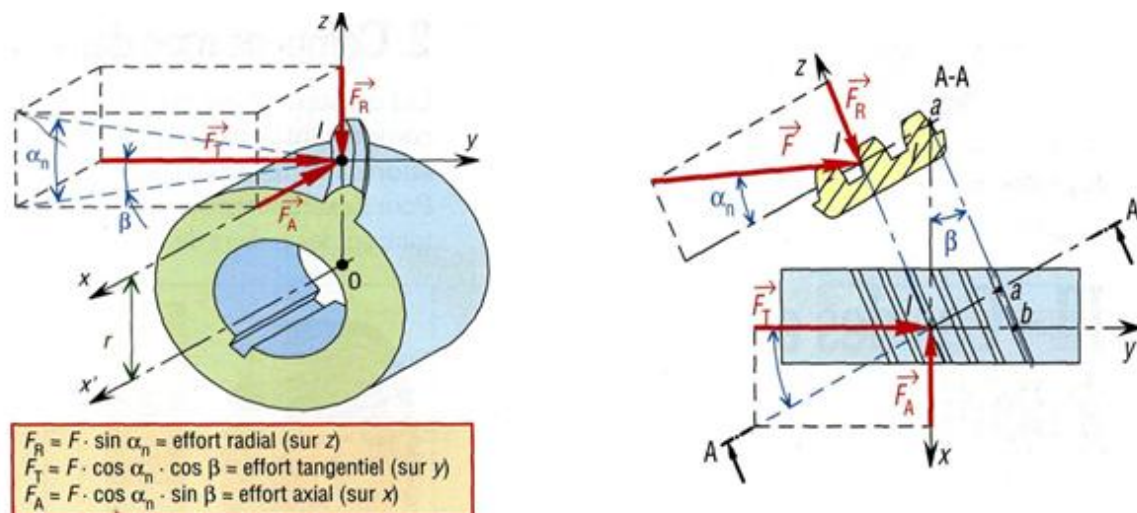


Figure II.7b. Efforts de contact sur un engrenage droit à denture hélicoïdale [10]

Calcul de (F_t) , (F_R) , (F_A) et (F) L'organigramme proposé indique la procédure à suivre, connaissant la puissance d'entrée, la vitesse de rotation, l'angle de pression normal α_n , angle de pression apparent α_t et l'angle d'inclinaison β .

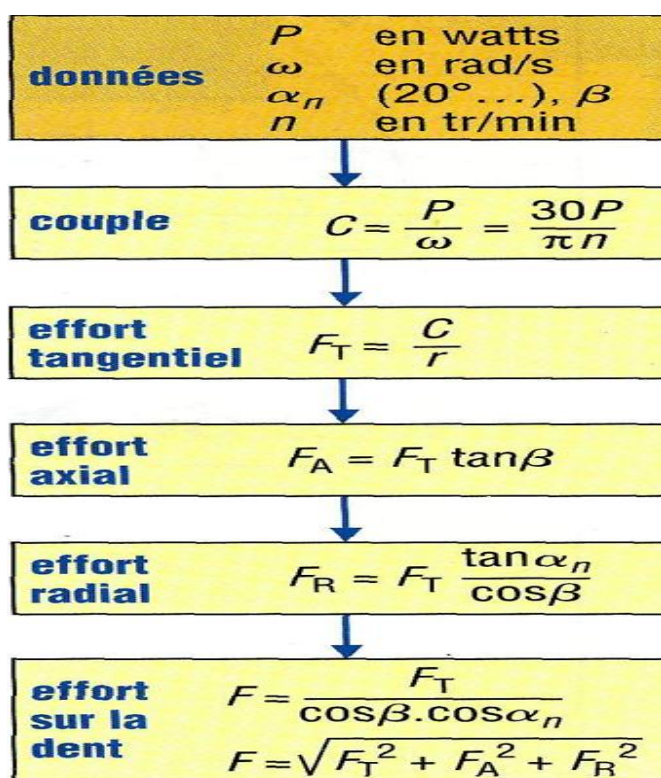


Figure II.8. Organigramme de calcul pour engrenage droit à denture hélicoïdale [10]

II.6. Conclusion :

L'étude technologique présentée dans ce chapitre met en évidence l'interdépendance stricte entre la géométrie d'une denture et le comportement mécanique des matériaux choisis. La maîtrise des calculs des forces de contact et des critères de fatigue selon les normes ISO constitue le socle indispensable sur lequel reposera la phase de dimensionnement et de simulation numérique de notre propre système de transmission dans la suite de ce mémoire.

CHAPITRE III :

**APPROCHE ANALYTIQUE ET
NUMERIQUE DU CALCUL DE LA
RESISTANCE D'UNE DENT DANS
UNE COURONNE FRETTEE**

III.1. Introduction :

Pour garantir que la dent puisse supporter les efforts qu'elle doit transmettre dans les meilleures conditions technologiques, certaines exigences doivent être respectées. Parmi ces exigences on peut rappeler les matériaux de la couronne et du moyeu doivent être soigneusement sélectionnés afin d'offrir une résistance adéquate à la déformation et à la rupture, tout en assurant une rigidité optimale qui impose une géométrie réfléchie. De plus, la dent d'engrenage de la couronne doit satisfaire à certaines conditions de stress qui sont liées à des calculs usuels tels que :

- * Calcul à la flexion de la denture en tenant compte de l'effet de fretage
- * Calcul au matage
- * Calcul à la fatigue

Étant donné que le calcul analytique ne peut permettre de déterminer avec la précision nécessaire les effets du stress appliqués à la denture en tenant compte de l'ensemble du corps de la roue dentée, un calcul numérique utilisant la méthode des éléments finis est indispensable pour évaluer les effets géométriques de forme et de contact associés à ce type de transmission par couronne frettée.

Dans ce chapitre, afin de prendre en considération les effets géométriques et de charge (nombre de dents en prise simultanément), nous proposons préciser ces effets sur les formules usuelles habituellement utilisées dans les cas d'une denture droite et d'une denture hélicoïdale. La différence dans les deux géométries réside dans l'orientation de la denture par rapport à l'axe de rotation de la roue. Donc, la composante axiale F_t de l'effort d'engrènement va être nulle dans le cas d'une denture droite et est différente dans le cas d'une denture hélicoïdale. Dans la suite de ce travail, nous allons d'abord rappeler le calcul analytique appliqué aux cas de géométries idéales qu'on a déjà mentionnés précédemment.

III.2. Calcul à la flexion de la denture (norme ISO 6336-3) : [13]

III.2.1. Efforts transmis par la dent d'engrenage droit :

Pour mener ce calcul, la dent est assimilée en tant que poutre encastrée.

L'effort périphérique sur une dent étant déterminé directement par :

- **Force tangentielle F_t :**

$$F_t = \frac{2C}{d_p} = \frac{2P}{\omega d_p} = \frac{60P}{\pi N d_p} \dots\dots\dots \text{III.1}$$

Où: C = couple transmis [N.m]; d_p = diamètre primitif [mm] ; F_t : Force tangentielle en [N]
; P : puissance transmise en [KW] ; $\omega = \frac{2P}{\omega d_p} = \frac{60P}{\pi N d_p}$: vitesse angulaire [rad/s] ; N : vitesse de rotation en [tr/min].

Il faut préciser que dans le cas d'une denture droite, la force appliquée sur la dent est dirigée par rapport à la ligne d'action (la normale aux surfaces de contact) selon un angle de pression ($\alpha=20^\circ$). Cette force se décompose en une force tangentielle F_t qui transmet le couple, et une force radiale F_r (voir Figures II.5; III.1).

- **Force radiale F_r :** Cette force est déduite de F_t géométriquement selon :

$$F_r = F_t \tan(\alpha) \dots\dots\dots \text{III.2}$$

Force axiale F_a : Dans le cas des engrenages à denture hélicoïdale, l'inclinaison de l'hélice (angle β) résulte en une troisième composante de la force d'engrènement ; c'est l'effort axial F_a (voir Figures II.7b et Figure III.1). Cette se détermine géométriquement selon :

$$F_a = F_t \tan(\beta) \dots\dots\dots \text{III.3}$$

La résistance de la dent nécessite de vérifier sa résistance à la flexion en tant que poutre encastrée, c'est à dire, vérifier la condition de résistance à sa base d'encastrement (la zone critique) selon : $\sigma_{fl} \leq \sigma_{adm}$

σ_{adm} : La contrainte admissible du matériau de la dent

La contrainte σ_{fl} en (Pa) est dans ce cas la contrainte de flexion calculée selon la formule de Lewis :

$$\sigma_{fl} = \frac{F_t}{b m Y_t} \dots\dots\dots \text{III.4}$$

σ_{fl} : étant contrainte en flexion au pied de la dent, F_t : effort tangent lié au couple C ; b : largeur de dent ; m : le module d'engrènement et Y_t : coefficient de forme dont la valeur dépend du nombre de dent de la couronne.

Malheureusement, cette formule ne prend pas en compte l'effet du rayon de courbure à la base de la dent ni l'effet tridimensionnelle de la poutre ni les contraintes résiduelles qui résultent du serrage entre la couronne et le moyeu. Donc cette formule ne donne pas précisément la valeur de la contrainte de flexion à la base de la dent. Pour un calcul plus réaliste, il faut, en plus de la charge périphérique sur la denture de la couronne ajouter l'effet du serrage qui génère d'autres contraintes internes dans le corps de la couronne. Dans le paragraphe prochain, on tente de préciser l'effet du fretage sur ce calcul de résistance.

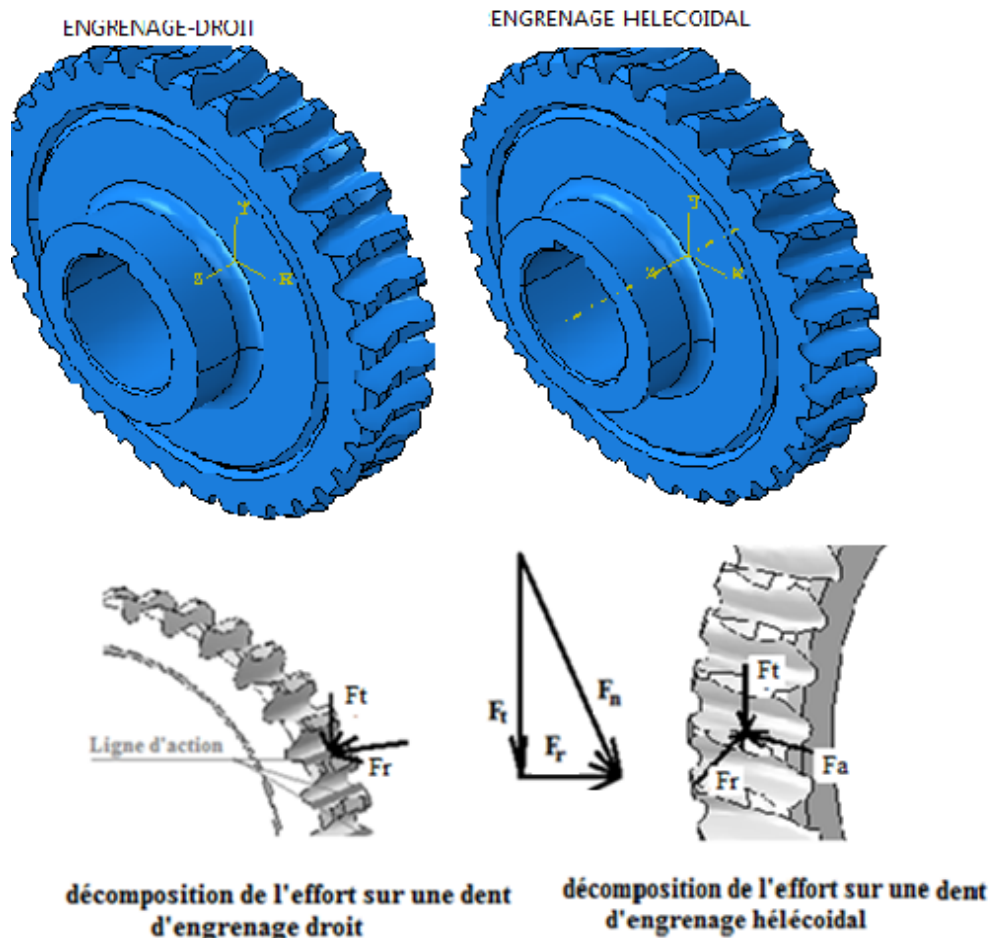


Figure III.1 Composantes de l'effort d'engrènement d'un engrenage cylindrique

III.3. Vérification de la résistance de la denture d'une couronne frettée :

III.3.1. Effets du frettage et de la concentration de contraintes : [1], [2]

Le frettage introduit donc une **pression de contact** entre la couronne et le moyeu. De Cela résulte la naissance de contraintes circonférentielles de type cerclage (circonférentielles) et des contraintes radiales compressives en plus des charges de fonctionnement.

Après le montage (avec jeu) de la frette (couronne) portée à la température de chauffe nécessaire (ΔT) sur le moyeu, on obtient le serrage estimé après le refroidissement à la température ambiante (T_{am}) Le serrage s'établit au niveau de la surface de contact entre le moyeu et la couronne. Ce serrage s'interprète et se caractérise par la pression de frettage (p), elle-même une contrainte radiale qui s'applique mutuellement à la limite périphérique du moyeu et de la couronne.

Le frettage crée alors une contrainte circonférentielle et une contrainte de compression dans la couronne. Cette contrainte est obtenue (comme défini au Chapitre I) à partir d'un modèle géométrique idéalisé selon un tube cylindrique à paroi épaisse soumis à une pression interne p

Cette pression est déterminée par :

$$p = \frac{\delta/2}{\frac{r_c}{E_m} \left(\frac{1+k_m^2}{1-k_m^2} \mu_m \right) + \frac{r_c}{E_{co}} \left(\frac{1+k_{co}^2}{1-k_{co}^2} \mu_{co} \right)} \dots\dots\dots \text{III.5}$$

Où : $k_{co} = \frac{r_{co}}{r_c}$; $k_m = \frac{r_m}{r_c}$; δ : serrage (interférence); co : indices pour la couronne et m : pour le moyeu ; k_{co} , k_m : rapport des rayons pour la couronne et pour le moyeu ; e_{co} et e_m : épaisseurs du moyeu et de la couronne ; E_{co} et E_m : sont respectivement les module d'élasticité de la couronne et de moyeu, μ_{co} et μ_m coefficients de poisson du matériau de la couronne et du moyeu respectivement.

On remarque bien que la pression de contact p varie proportionnellement avec le serrage δ (interférence) et est inversement proportionnelle avec le diamètre du contact d .

En général δ est trop petit par rapport au rayon r_c , c'est pour cela qu'on prend le rayon intérieur de la couronne égale au rayon extérieur du moyeu.

Comme précisé précédemment, le frettage crée une précontrainte compressive dans le volume du matériau de la couronne, précisément au voisinage du son diamètre intérieur qui s'ajoute à l'effet de flexion selon le principe de superposition, soit :

$$\sigma_{tot} = \sigma_{fl} \cdot K_t + \sigma_{fret} \dots\dots\dots \text{III.6}$$

Avec : σ_{fl} : contrainte de flexion selon Lewis sans prendre en compte la concentration de contraintes due à la discontinuité de la géométrie, σ_{fret} : contrainte due au frettage (résiduelle) K_t : facteur de concentration de contraintes réel. Ce facteur est introduit pour tenir compte de la discontinuité géométrique, Un autre facteur correcteur k_f a été introduit dans l'équation précédente de la contrainte totale. Ce facteur permet de tenir compte du taux de d'influence de la contrainte de frettage sur la contrainte totale au pied de la couronne frettée par rapport à la couronne monobloc. Alors : $k_f = 1$ est le cas du frettage pleinement efficace alors que dans le cas d'absence du frettage, $k_f = 0$ c'est à dire qu'aucun effet du serrage sur la contrainte au pied n'est perceptible.

III.3.2. Concentration de contrainte au pied de dent : [1], [2]

Pour tenir compte de la discontinuité géométrique (corps de la roue dentée, présence des creux entre-dents), un facteur K_t est introduit (dans la formule de Lewis) pour prendre en compte l'effet de concentration de contraintes en cette discontinuité géométrique.

Typiquement :

- Pour une denture droite, $K_t \approx 1.6$ à 2.2
- Pour une denture hélicoïdale, K_t plus faible à cause du chargement progressif dans ce cas.

L'expression de la contrainte circonférentielle de compression considérée précédemment peut être calculée en partant de l'expression de la pression de contact (p) en exprimant les épaisseurs du moyeu par : e_m et de la couronne par e_c , Alors :

$$p = \frac{\delta}{\frac{d}{E_c} \left(\frac{1-\mu_c}{e_c} \right) + \frac{d}{E_m} \left(\frac{1-\mu_m}{e_m} \right)} \dots\dots\dots \text{III.7}$$

Et

$$\sigma_{fre} = -p \cdot \frac{R_i^2}{R_0^2 - R_i^2} \dots\dots\dots \text{III.8}$$

Avec R_0 et R_i le rayon de tête et le rayon à la base de la roue dentée.

On remarque que l'effet du frettage est compressif ($\sigma_{fre} < 0$), contrairement à l'effet du couple à transmettre qui provoque une traction à la base de la dent, du côté du flanc actif ($\sigma_{fl} > 0$) ceci favorise l'amorçage de fissures au pied de la dent donc fait diminuer la résistance en fatigue de la roue. Avec ces effets antagonistes, la contrainte résultante (totale) qui représente selon l'expression précédente σ_{tot} la somme algébrique va diminuer ($\sigma_{tot} < \sigma_{fl}$) ce qui donne plus de longévité à la dent et lui procure une meilleure résistance à la fatigue.

III.3.3. Expression finale (formule exploitable en engineering) :

Avec l'effet du frettage sur la contrainte de flexion en pied de dent de l'engrenage droit, la contrainte équivalente nécessaire au calcul de la résistance de denture d'une couronne s'annonce selon l'expression suivante :

$$\sigma_{pied} = \sigma_{fl} + \sigma_{fre} = K_t \frac{F_t}{b.m.Y} - k_f \cdot |\sigma_{fre}| \dots\dots\dots \text{III.9}$$

La nature du contact entre la couronne et le moyeu n'est pas uniforme à cause de la présence alternative dent-creux-dent, c'est pourquoi un coefficient d'influence (k_f) a été introduit. Le coefficient d'influence k_f est introduit pour tenir compte du taux de d'influence de cette contrainte de frettage sur la contrainte au pied de la dent, cela permet d'ajuster la contrainte au pied de la dent de la couronne frettée par rapport à la couronne monobloc. Alors : $k_f = 1$ frettage pleinement efficace et $k_f = 0 \rightarrow$ aucun effet au pied

Typiquement : Pour une denture droite $k_f = 0.6 - 0.8$,

Pour une denture hélicoïdale $k_f = 0.4 - 0.7$

Selon la bibliographie, le tableau I.3. Suivant reprend les grandeurs utilisées dans les calculs pratiques de l'engineering.

Cas	k_f
Denture droite classique	0.6 – 0.8
Denture hélicoïdale	0.4 – 0.7
Couronne mince	0.3 – 0.6
Couronne massive	0.7 – 0.9

En pratique l'influence du frettage sur le calcul de la contrainte en pied de dent estimé par le facteur k_f est déterminé selon l'expression suivante :

$$k_f = \frac{\Delta\sigma_{pied}}{p} \dots\dots\dots \text{III.10}$$

$\Delta\sigma_{pied}$: réduction réelle de contrainte due au frettage

$$\Delta\sigma_{pied} = \sigma_{fr(couronne\ monobloc)} - \sigma_{fr(couronne\ frettée)}$$

III.3.4. Calcul de résistance au matage (pression de Hertz) de la dent norme (ISO6336-2) : [17]

A partir de cette dernière équation, on voit clairement que le frettage de la couronne sur son moyeu entraîne la naissance de précontraintes supplémentaires de compression dans le volume de son matériau, précisément au voisinage de son diamètre intérieur. Alors, selon cette dernière expression, on peut affirmer que ce type de montage a d'une part, à l'avantage d'améliorer la résistance à la fatigue de la roue dentée, mais de l'autre côté, il peut augmenter les contraintes cumulées qui risquent d'atteindre la plastification. Donc, il faut chercher un compromis entre objectiver une forte pression de contact importante pour éviter le glissement relatif entre le moyeu et la couronne et prolonger sa durée de vie d'une part et éviter le phénomène de matage (déformation plastique) des surfaces de contact (couronne-moyeu) d'autre part. Donc un calcul complémentaire doit être envisager pour vérifier le risque de matage et prévenir la rupture prématurée.

La pression de contact maximale à ne pas dépasser est à contrainte de contact σ_H entre deux dents en prise, elle est déterminée selon Hertz en assimilant les deux dents comme deux cylindres. σ_H Est déterminée selon l'équation :

$$\sigma_H = Z_E \cdot Z_H \cdot Z_\varepsilon \cdot Z_\beta \sqrt{\frac{F_t}{b \cdot d_p} \cdot \frac{u+1}{u}} \leq \sigma_{HP} \dots\dots\dots \text{III.11}$$

Où: d_p diamètre primitif de la couronne, u rapport de transmission de l'engrenage couronne-pignon qui peut être une vis sans fin aussi, ce rapport peut être donné par : $u = \frac{Z(\text{couronne})}{Z(\text{pignon})}$,

Z_E facteur d'élasticité des matériaux qui dépend du module d'élasticité et du coefficient de poisson du matériau, Z_H Facteur de zone qui prend en compte la forme des flans en contact des deux roues, Z_ε Facteur de recouvrement qui prend en compte le nombre de paires de dents en prise, Z_β Facteur d'inclinaison $Z_\beta = 1$ pour un engrenage droit et σ_{HP} est la contrainte limite admissible de matage déterminée selon l'équation suivante:

$$\sigma_{HP} = \sigma_{Hlim} \cdot \frac{Z_N \cdot Z_L \cdot Z_V \cdot Z_R \cdot Z_W \cdot Z_X}{S_H} \dots\dots\dots \text{III.12}$$

Où σ_{Hlim} La limite d'endurance au matage du matériau de la couronne, les coefficients Z_N , Z_L , Z_V , Z_R , Z_W , Z_X sont des coefficients qui tiennent compte du nombre de cycles.

III.3.5. Calcul de résistance d'une dent d'engrenage à la fatigue norme (ISO 6336-3) : [9]

La méthode AGMA introduit une **contrainte de flexion admissible** dépendant du matériau et de la durée de vie. Une forme générale est :

$$\sigma_{F,adm} = \sigma_{FP} \cdot \frac{Y_N}{S_F \cdot K_T \cdot K_R} \dots\dots\dots \text{III.13}$$

où notamment σ_{FP} : contrainte admissible de flexion de référence du matériau ;

- Y_N : facteur de durée de vie ;
- S_F : coefficient de sécurité ;
- K_T : facteur de température ;
- K_R : facteur de fiabilité.

La contrainte calculée doit alors rester inférieure à la contrainte admissible.

III.4. Conclusion :

On doit rappeler que la recherche du compromis entre pression de serrage, résistance mécanique et tenue en fatigue constituent ainsi un problème d'optimisation particulièrement adapté à l'utilisation des plans d'expérience. C'est ce qui peut, en lui seulement, constituer un autre sujet de mémoire de master. Dans ce travail, on a juste introduit la notion des plans d'expériences avec le choix des paramètres d'entrée influents qui commandent la fonction de sortie (résultats du calcul de conception) et la façon de choisir les simulations numériques pour déterminer les effets individuels et globaux des principales variables d'entrée.

En définitive, on peut dire que **l'objectif** d'un assemblage fretté n'est pas juste de maximiser le serrage pour éviter le glissement relatif, mais de déterminer le niveau de serrage optimal permettant de bénéficier de l'effet bénéfique de la précontrainte induite par le frettage sur le contact, tout en contrôlant la surcharge excessive du matériau sans risque de plastification.

Dans cette perspective, un chapitre supplémentaire est ajouté pour expliquer en bref, l'approche par plans d'expérience dédiée à l'étude de l'influence simultanée des paramètres de conception et de leurs interactions en essayant de d'identifier les combinaisons de variables influentes possibles pouvant conduire au meilleur compromis entre les différents critères mécaniques. L'interférence optimale ne correspond donc pas nécessairement à la valeur produisant la pression de contact maximale, mais à celle qui satisfait simultanément les contraintes de fonctionnement et les critères de résistance retenus. Justement c'est l'intérêt recherché dans l'utilisation des plans d'expérience dans l'étude de ce mémoire de fin d'études.

Chapitre IV :

**SIMULATION NUMERIQUE ET
ANALYSE DU COMPORTEMENT
D'UNE COURONNE FRETTEE A
CHAUD**

IV .1 Introduction :

Dans les chapitres précédents, nous avons rappelé l'essentiel du calcul géométrique et technologique des engrenages et nous avons précisé le calcul de résistance de la dent d'un engrenage, essentiellement la résistance à la flexion, à la fatigue et le calcul de résistance au matage selon la théorie de Hertz. Ces calculs sont conformes aux normes ISO. L'effet particulier du frettage sur la résistance de la dent a été introduit en tant que phénomène supplémentaire qui peut perturber favorablement ou défavorablement La résistance des engrenages. Parce que la condition de fonctionnement efficace d'un engrenage fretté, nécessite une résistance et un frottement optimale donc une pression de contact optimale assurée par un serrage réfléchi, une recherche du compromis entre pression de serrage, résistance mécanique et tenue en fatigue constituant ainsi un problème d'optimisation associé à l'utilisation des plans d'expérience. Il faut préciser que l'optimisation associée à l'utilisation des plans d'expériences constitue, à lui seul, un autre sujet de mémoire de master. Pour cela ce travail, ne comporte qu'une partie synthèse de l'utilisation des plans d'expériences qui a permis de dresser un tableau présentant les paramètres influents (variables) à exploiter dans les simulations numérique pour la détermination de la contrainte équivalente de Von Mises (Fonction de sortie) en pied de la dent qui résulte de l'application du serrage induit par le frettage à chaud et par le chargement lors de la transmission par engrenage du puissance mécanique imposé par le chargement. Ci-après on a présenté le tableau regroupant les différentes simulations à effectuer numériquement pour déterminer la contrainte de Von. Mises et vérifier la résistance à la flexion, à la fatigue et au matage de la dent d'engrenage de la couronne frettée à denture droite ou à denture hélicoïdale.

IV.2. Approche par plans d'expériences :

L'objectif d'un assemblage par frettage n'est pas seulement de maximiser le serrage pour éviter le glissement relatif, mais de déterminer le niveau de serrage optimal par rapport aux différents niveaux des facteurs permettant de bénéficier de l'effet positif de la précontrainte induite par le frettage sur le contact (voir chapitre précédent), tout en contrôlant la surcharge excessive du matériau sans risque de plastification. Ce travail qualifié d'optimisation nécessite un travail complémentaire assez important pour être abordé dans ce mémoire.

Pour dresser le tableau des simulations (plan d'expériences), on fixe d'abord les facteurs de l'expérience, c'est à dire le nombre des paramètres influents directement sur la fonction de sortie. En général, le nombre d'expérience est donné selon la formule : $N = \prod_{i=1}^k n_i$; avec k le nombre de facteurs influents et si le nombre de niveau est fixé , par exemple à trois valeurs, le nombre d'expériences sera donné simplement par : $N = 3^k$; dans notre cas, on en compte plusieurs (module m , largeur de la dent b , le serrage δ , le couple à transmettre C ou les efforts d'engrènement (F_r , F_t , F_a), le rayon de raccordement (creux -flan de dent), angle de pression α), ce nombres de paramètres implique un grand nombre de simulations pour une précision de l'estimation significative de la fonction de sortie (σ_{dent}) donc un temps très important de calcul. Afin de simplifier et réduire le temps de calcul tout en préservant une bonne précision (significative) de la fonction de sortie, une analyse scientifique sur la priorité de signification des facteurs et leur niveau a permis de fixer les facteurs suivants, jugés plus signification sur la fonction de sortie. Ces facteurs fixés sont : l'interférence ou le serrage δ , le couple à transmettre C (ou les efforts d'engrènement) et la largeur de la dent b .A ces seuls trois facteurs ($k=3$ variables) avec trois niveaux (3 valeurs) chacun, il est nécessaire d'effectuer $N= 27$ simulations ($N = 3^k=3*3*3$) et l'effet de chaque paramètre sur la contrainte de flexion, de fatigue ou de matage peut être obtenu sous forme de courbes ou de fonctions empiriques.

Dans ce travail, les 27 expériences numériques nécessitent beaucoup de temps, surtout que mon ordinateur n'est pas assez performant. Par ailleurs, si ces simulations sont exploitées pour déterminer finalement, les valeurs optimales des paramètres de la fonction de sortie, une optimisation par plans de Box-Behnken ou selon le plan composite central, peut permettre une nette réduction du nombre de simulations pour obtenir la fonction de sortie avec la précision nécessaire.

Paramètre	Désignation	Niveaux		
		Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3
Module	M (mm)	8		
Serrage	δ (mm)	0.01	0.02	0.03
Couple transmis	C (N.m)	300	400	500
Largeur de la dent	b (mm)	20	30	40

Vu le manque de temps, on a limité le travail au calcul par la méthode des éléments finis et à l'analyse des résultats donnant la contrainte maximale ($\sigma_{max} = (\sigma_{pied})_{max}$ au pied de dent d'engrenage de la couronne qui cumule l'effet du frettage et l'effet de charge (couple à transmettre). En fin, il faut souligner le plan d'expériences (de simulations) permet de montrer, individuellement ou globalement, l'influence des paramètres de calcul sur la résistance de la denture de l'engrenage.

IV.3. Approche numérique utilisant la méthode des éléments finis : [2]

Pour le calcul par la méthode des éléments finis, l'étude de l'effet du serrage (frettage) sur la résistance de la dent doit considérer séparément les effets des deux phénomènes, qui sont en réalité des phénomènes couplés. Numériquement, ces phénomènes doivent être considérés dans le bon ordre : considérer le montage par frettage à chaud d'abord, et ensuite ajouter le chargement sur la denture. Le résultat cumule les effets des deux phases du chargement (frettage + chargement). On a montré, dans les chapitres précédents, qu'à cause de la distribution non uniforme de la matière sur le volume de la couronne (présence des creux de la denture), la contrainte résultante de ces effets est estimée, en ingénierie, par l'équation (N° III.9).

Depuis le calcul de résistance à la flexion d'une dent selon la formule de Lewis, jusqu'à la prise en charge des forces induites (radiale, tangentielle et axiale (denture hélicoïdale)) par le phénomène du frettage à chaud, nous avons majoré cette résistance en introduisant des coefficients correcteurs, qui permettent d'améliorer la précision de l'estimation de la résistance réelle, tenant compte du serrage.

Afin de pousser la résistance du calcul de la résistance de la denture d'une couronne frettée, à denture droite ou hélicoïdale, en présence de l'effet de serrage, ce présent chapitre comporte les résultats d'une simulation numérique, obtenue en utilisant la méthode des éléments finis, appliquée dans le cas d'un comportement en petites déformations (dans le sens du comportement de Cauchy).

Le calcul à partir d'une modélisation par la méthode des éléments finis, du moment que l'approche analytique ne peut permettre ce calcul à cause de la discontinuité géométrique (due à la présence des dents à la périphérie de la couronne), est nécessaire afin d'approcher le calcul avec une meilleure précision. Un logiciel de calcul par la méthode des éléments finis,

en comportement en petites déformations, est nécessaire. Dans ce travail, le logiciel de calcul par éléments finis ABAQUS est utilisé. La procédure suivie pour ce calcul est composée des étapes suivantes :

- Le dessin de la couronne à denture droite et à denture hélicoïdale est construit à l'aide du logiciel **SOLIDWORKS** version **2023**, un logiciel qui permet le dessin assisté par ordinateur (DAO) Une fois construite aux dimensions fixées, ce modèle géométrique roue dentée (Moyeu et couronne dentée) ainsi obtenu est enregistrée au format "step" pour être importé et exploité par ABAQUS (un logiciel de commerce pour le calcul par la méthode des éléments finis).

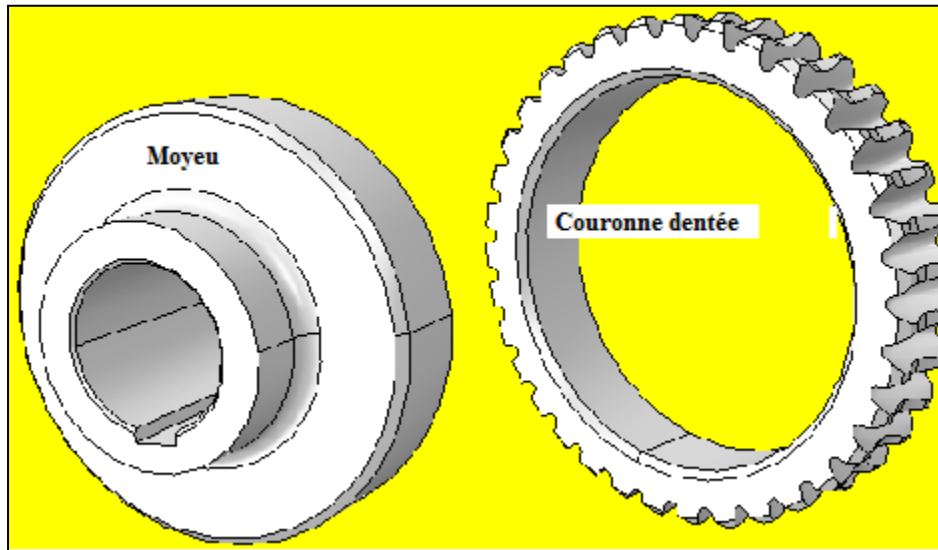


Figure IV.1. Modèles géométriques (Moyeu + Couronne) obtenues par SolidWorks

- Importer par Abaqus des deux modèles géométrique (Moyeu + couronne dentée) en format "step" et assignement à ces deux modèles des propriétés mécaniques nécessaires (module de Young E et coefficient de Poisson μ),
- On fixe les étapes d'obtention des résultats de calcul Dans cette simulation on distingue deux différentes phases principales de calcul : (phase 1 pour obtenir les résultats que résulte uniquement de l'effet du fretage et phase 2 pour obtenir le résultat sous l'effet cumulée du fretage et de l'effort d'engrènement).
- On impose les conditions de déplacements et de chargements aux limites aux éléments de l'assemblage (couronne, moyeu) ; dans ce travail, on impose un encastrement de la surface intérieure (au diamètre intérieur) du moyeu, en libérant la dilatation radiale. Ces conditions aux limites sont valables pour les deux variantes (couronne à denture droite et couronne à denture hélicoïdale).
- On procède à l'assemblages par interférence des deux éléments selon l'ajustement **242H7p6** en vérifiant la condition du serrage δ (interférence) **H7p6**, préalablement vérifiée dans les chapitres précédents selon la condition de non glissement.

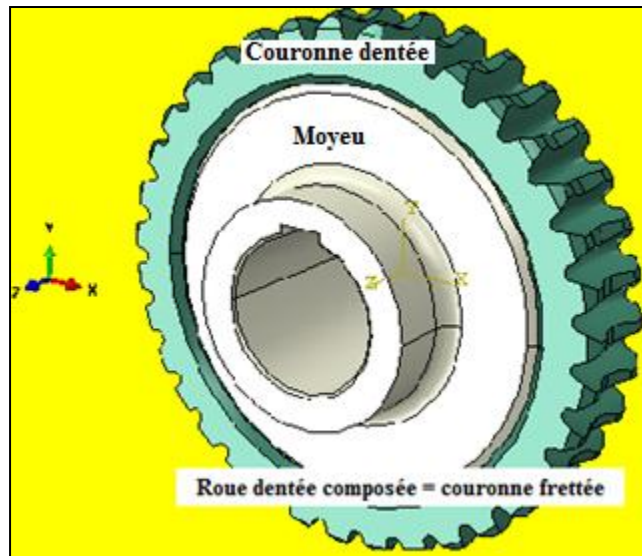


Figure IV.2. Modèles géométriques assemblés sous Abaqus (Moyeu + Couronne)

- On procède ensuite au maillage optimisé de chaque élément de l'assemblage (dans cette simulation on a opté pour des éléments finis de type tétraédrique).

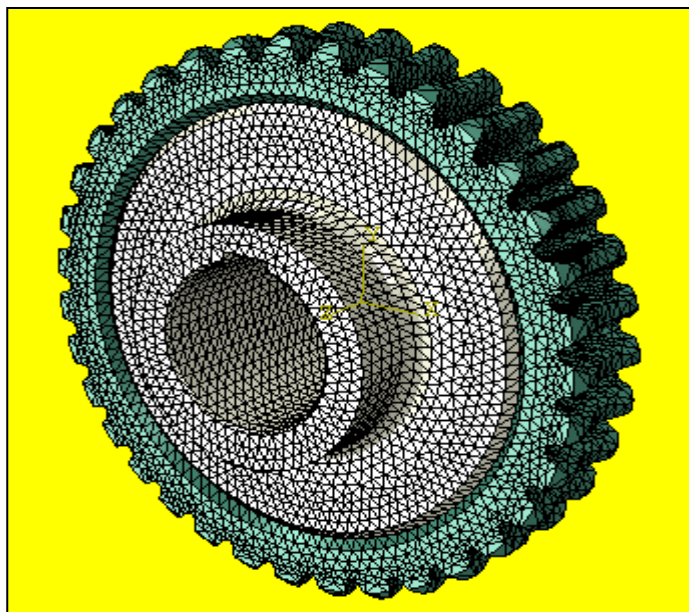


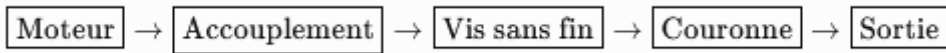
Figure IV.3. Maillage en éléments finis du modèle géométrique (Moyeu + Couronne)

- On applique l'effort d'engrènement (chargement sur la denture de la couronne sous forme de charge répartie selon l'angle de pression).
- Finalement on lance le calcul et on recueille les résultats (contraintes et déformations) au zones dangereuses (au pied de la dent).
- Une fois le calcul fini, on collecte les résultats aux zones d'intérêt.

IV.4. Données du problème pour le calcul numérique :

Puissance à transmettre : **P=15 KW**, Vitesse de rotation **N= 341 tr/mn**, Rendement approximatif $\approx 100\%$; module d'engrènement **m= 8**, rapport de transmission : **i=17.5**, **Z(couronne)= 35 dents** et **Z (vis) = 2 filets** et **N(vis) =19.49 tr/mn**.

Le système de transmission étant défini selon le schémas suivant :



Les paramètres géométriques de la couronne en tant que roue dentée à droite normale : module **m=8** ; Nombre de dents **Z= 35 dents** ; angle de pression de la denture **$\alpha = 20^\circ$** ; son diamètre primitif **$D_p = 286.25mm$** ; son diamètre de tête **$D_{tet} = 302.25mm$** , la Largeur **b =57 mm**

Pour la couronne à denture hélicoïdale, le détail géométrique avec les composantes de l'effort d'engrènement sont regroupées sur le tableau suivant :

Paramètre	Valeur
Module	8 mm
Nombre de dent de la couronne Z	35 dents
Nombre de filets de la vis Z(vis)	02 filets
Angle de pression α	20°
Largeur b	57 mm
Puissance P	15 kW
Vitesse (Nombre de tours N)	341 tr/mn
Couple théorique à transmettre	7389 N.m
Diamètre primitif D_p	286.25mm
Force tangentielle	52.5 kN
Force radiale	19.1 kN
Force axiale	10.5 kN
Contrainte de flexion selon Lewis	308.02 MPa

Numériquement selon le CAE du logiciel Abaqus. Ces efforts sont appliqués sur le flanc actif de la dent, au diamètre primitif telles qu'ils soient répartis sur la largeur de dent pour adoucir le calcul et permettre une convergence rapide ; c'est à dire qu'il faut éviter de concentrer les efforts au sommet de la dent parce que le calcul dans ce cas devient long, coûteux et risque de non convergence à cause des singularités géométriques.

IV.5. Représentation simplifiée des efforts d'engrènement :

➤ Engrenage droit

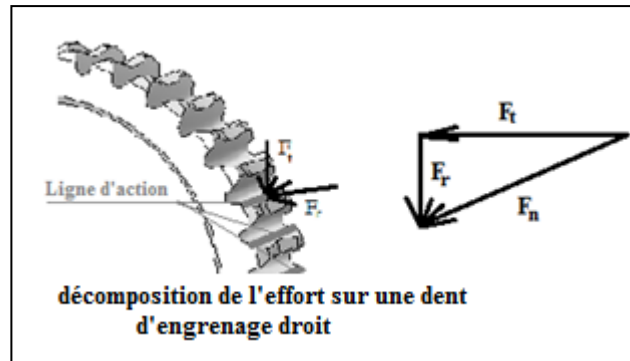


Figure IV.4. F_t Effort tangent au cercle primitif et F_r dirigée vers le centre

Remarque : En réalité la force réelle de contact est inclinée sous l'angle de pression (α) sur la ligne d'action. Elle vaut : $F_n = F_t \cos \alpha$. Dans Abaqus, on peut utiliser la méthode simple suivante qui consiste à Appliquer F_t et F_r séparément. Cela rend le calcul plus stable numériquement.

Dans le cas d'engrenage droit, on n'a pas de force axiale ($F_a = 0$).

Pratiquement on procède selon les étapes pratiques suivantes : Étape 1 : On crée la surface sur le flanc actif (chargé) de la dent Étape 2 : Ensuite on crée un repère local cylindrique pour définir distinctement, d'une part, la contrainte radiale et la contrainte tangentielle d'autre part Pour simplifier : on applique ces efforts sous forme de pressions uniformes la zone du flanc. C'est très acceptable numériquement.

➤ Engrenage hélicoïdal

Dans ce cas d'engrenage hélicoïdal, tout le calcul s'effectue dans le même ordre avec les mêmes formules sauf pour les efforts qui comptent en plus la force axiale qui n'est pas nulle parce que la force tangentielle qui donne lieu à une composante tangentielle déterminée selon la force axiale : $F_a = F_t \tan \beta$.

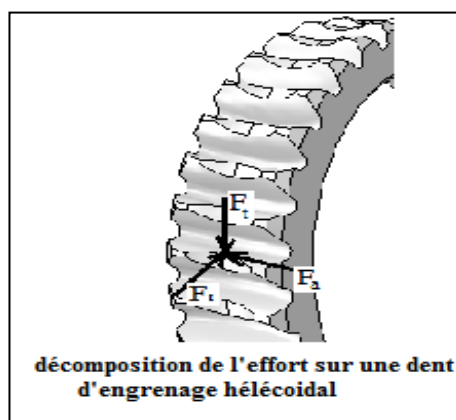


Figure IV.5. F_t Effort tangent au cercle primitif, F_r dirigée vers le centre et F_a parallèle à l'axe de la couronne

IV.6. Simulation numérique du frettage sur la couronne :

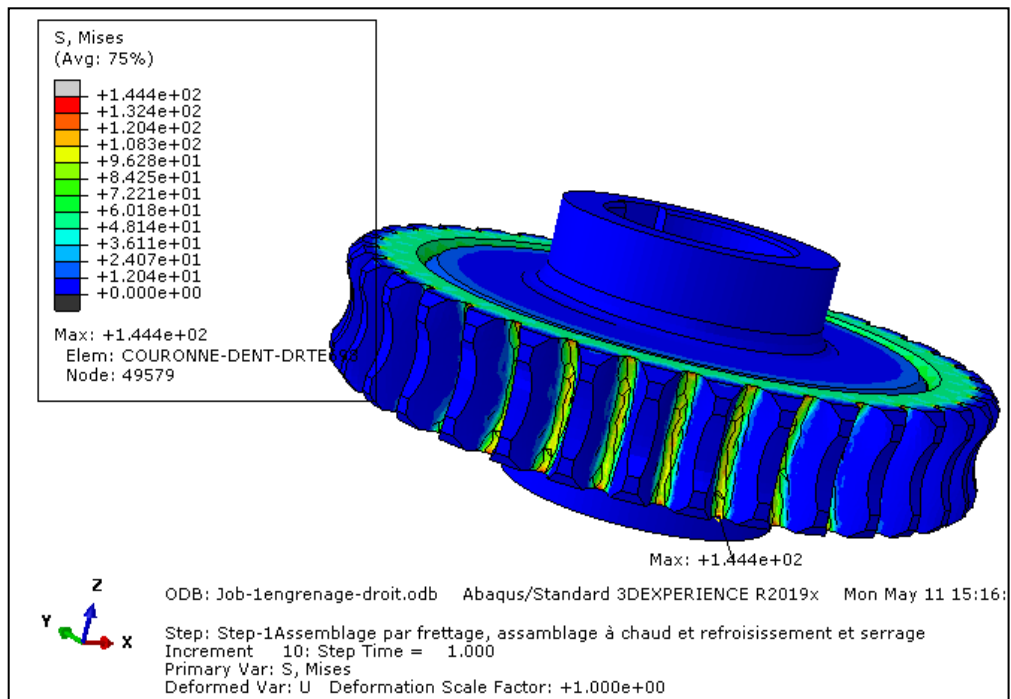


Figure IV.6 Distribution radiale uniforme des contraintes induite par le frettage dans le volume du matériau de la roue frettée

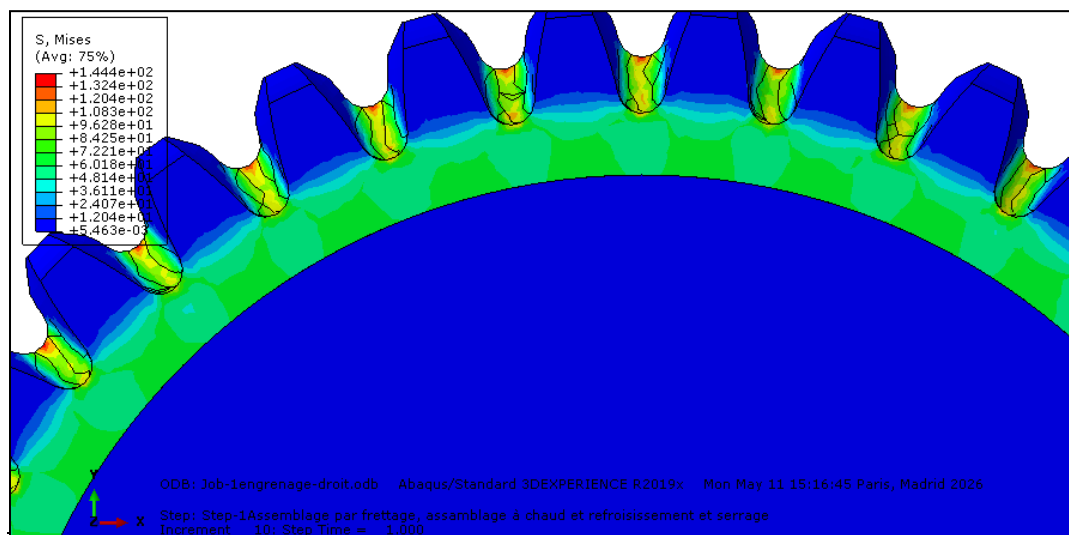


Figure IV.7 Effet du frettage seul sur la distribution de l'état de contraintes au pied de dents d'engrenage droit

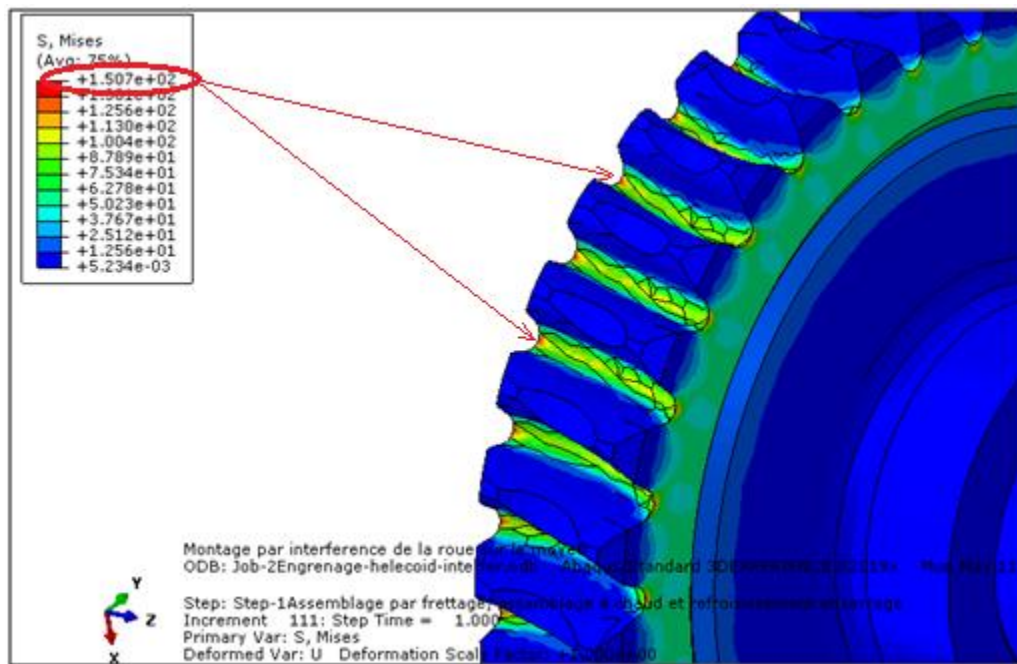


Figure IV.8 Effet du frottement seul sur la distribution de l'état de contraintes au pied de dents d'engrenage hélicoïdale

IV.7. Calcul analytique :

Selon les données retenues : puissance à transmettre par la couronne $P = 15 \text{ kW}$; conformément aux hypothèses module $m = 8$; $N_1 = 341 \text{ tr/mn}$; $Z_1 = 35 \text{ dents}$; $Z(\text{vis}) = 2 \text{ filets}$, largeur de la dent de la couronne $b = 57 \text{ mm}$; à titre démonstratif on prend comme matériau de bronze.

Le calcul analytique donne diamètre primitif de la couronne : $D_p = 286.25 \text{ mm}$ Le rapport de transmission $i = (Z_1 = 35) / (Z(\text{vis}) = 2) = 17.5$ d'où la vitesse sur la vis $N_2 = N_1 / i = 19.49 \text{ tr/mn}$.

Le couple transmis par la couronne sera $C_2 = 7389 \text{ N.m}$, c'est le couple utilisé pour le calcul de la charge sur la couronne, du moment que la puissance transmise effectivement à l'arbre de sortie est prise égale à $P = 15 \text{ kW}$.

Le couple sur l'arbre de sortie sera déduit dans ce cas à partir : $P = c\omega$ Avec : $\omega = 2\pi N / 60$ (rd/s) Donc : $\omega = 2\pi \times 19.49 / 60 \approx 2.03 \text{ rad/s}$ Le couple transmis : $C_2 = \frac{15000}{2.03} \approx 7389 \text{ N.m}$

C'est le couple qu'on utilisera pour le calcul de la charge sur la couronne du moment que la puissance de 15 kW est la puissance transmise effectivement à la sortie. Le calcul des composantes de l'effort d'engrènement sur la denture de la couronne va donner dans ce cas : La force tangentielle $F_t = 52530 \text{ N} \approx 52.5 \text{ kN}$. C'est là force qui provoque la flexion de la dent selon le modelé de la poutre encastree ; quant aux autres composantes radiale et axiale (cas de denture hélicoïdale), elles interviennent que pour le calcul de résistance des arbres.

Le calcul des contraintes de résistance repose sur la géométrie et l'effort d'engrènement. Le calcul donne : pour la contrainte de flexion au pied de la dent $\sigma_f = 308.02 \text{ MPa}$, avec un

facteur de forme de Lewis $Y = 0.374$ (la moyenne entre un coefficient Y pour 34 dents et pour 36 dents, c'est à dire que pour 35 dents qui n'est pas figuré sur le tableau des coefficients, on prend la moyenne). On doit souligner que ce calcul représente l'estimation analytique selon Lewis qui peut donner des résultats légèrement supérieurs à ceux obtenus selon la norme ISO 6336-3 qu'on exploite aux bureaux d'étude pour le calcul de résistance à la flexion des dents.

Le calcul de la contrainte de fatigue en flexion de la dent nécessite une certaine attention car la résistance à la fatigue dépend du matériau de la roue dentée, de sa dureté, de son état de surface après l'usinage, du rayon de courbure au creux de l'entre-dents, de la concentration des contraintes, du nombre de cycles, et de la nature du type de chargement. En pratique, les méthodes de calcul selon la normalisation ISO utilisent le calcul de la contrainte limite de fatigue en flexion associée aux facteurs : de vie, de taille, de sensibilité à l'entaille, etc. Alors, dans notre cas, on propose de prendre comme contrainte limite de fatigue la limite d'élasticité du matériau de la roue (**bronze**), soit $Re \approx 150 \text{ à } 200 \text{ MPa}$.

Finalement, pour le calcul de la contrainte de résistance au matage, il faut attirer l'attention qu'on peut pas la calculer immédiatement vue que cette contrainte ne dépend pas uniquement des paramètres (F_t , m , b , Z), mais nécessite de connaître aussi la géométrie locale au contact (roue /vis sans fin) c'est à dire les facteurs géométriques tels que: diamètre primitif de la vis, angle d'hélice, angle de pression, rayons de courbure des surface des flancs de contact de la largeur de contact, etc.

Pour comparer les deux types d'engrenages (engrenage à denture droite et à denture hélicoïdale) on peut se poser la question suivante : En général pour obtenir le couple ou la puissance à l'axe de sortie en utilisant les deux approches analytiques et numériques, peut-on dire lequel des deux types d'engrenage : engrenage à denture droite ou à denture hélicoïdale est plus sûr ?

D'abord, avant de répondre à cette question, on doit d'abord souligner que les deux approches sont utilisées dans ce travail pour déterminer l'effet du phénomène du fretage à chaud sur la contrainte de flexion au pied de la dent de l'engrenage qui va être exploiter simplement dans la suite du calcul en vue de dimensionnement géométrique de la couronne. Dans ce cas la réponse à la question posée est que les deux approches permettent d'abord la comparaison de la performance de chaque type d'engrenages nécessite de considérer plusieurs critères tels que la transmission du couple et sa continuité, le nombre de dents en prise simultanément, le type de charge statique ou dynamique avec vibrations, bruit, les charges sur les paliers d'appuis des axes, la résistance à la fatigue de la dent, la fabrication, le rendement, etc.

Par contre, on peut dire à priori que l'avantage principal de l'engrenage hélicoïdal est l'engrènement qui s'effectue avec recouvrement où plusieurs dents supportent en même temps le chargement appliqué. Cela permet de réduire la variation brusque c'est à dire les sollicitations dynamiques. Cela permet une meilleure tenue en flexion et en contact pour l'engrenage hélicoïdal.

IV.8. Conclusion :

Finalement on peut finir par une conclusion sur le calcul analytique et le calcul numérique par éléments finis en disant que les formulations analytiques constituent une approche rapide et efficace, comme même pour une première estimation des contraintes de flexion et de contact dans les engrenages et aussi pour le pré dimensionnement et la vérification de la sécurité.

Le calcul par éléments finis permet quant à lui de représenter plus fidèlement la géométrie réelle de la denture, les conditions de contact et la distribution locale des contraintes notamment dans les zones locales fortement sollicitées telles que le pied de dent. C'est pourquoi les résultats analytiques trahissent la rigidification de la structure, contrairement aux résultats par éléments finis.

La différence entre les résultats analytiques et numériques est souvent prévisible et souvent très frappante, des relations analytiques basées sur des hypothèses impliquant des coefficients de correction et de simplification. La comparaison des deux approches permet de vérifier l'exactitude des résultats obtenus (notamment dimensionnels) avec l'identification de condensateurs de contraintes locales et de phénomènes que les formules analytiques ne sont pas en mesure de montrer avec précision.

Conclusion Générale

Ce travail avait pour objectif d'étudier le comportement d'une couronne dentée frettée à chaud sur son moyeu et de poser les bases d'une optimisation par plans d'expériences, afin de concilier capacité de transmission du couple, niveau de contraintes admissibles et durabilité de la liaison, en tenant compte de l'effet du coefficient de frottement.

Le premier chapitre a présenté les principes du frettage et les relations de calcul des emmanchements cylindriques : effort axial, couple transmissibles, pression de contact et contraintes dans les pièces, La capacité de transmission est proportionnelle à la pression de contact, à la surface d'interface et au coefficient de frottement, souvent majorée par un coefficient de sécurité au glissement compris entre 1,4 et 2.

Le deuxième chapitre a rappelé la géométrie des engrenages cylindriques et la détermination des composantes de l'effort d'engrènement (tangentielle, radiale, axiale).

Le troisième a traité la résistance de la denture d'une couronne frettée (flexion, matage, fatigue selon ISO 6336) et a montré que le frettage crée une précontrainte de compression en pied de dent souvent bénéfique à la résistance à la flexion, mais qui peut aussi conduire au risque d'atteindre le niveau de contrainte de plastification ou au matage s'il est excessif.

Ce chapitre est complété par des indications sur la procédure empruntée pour déterminer numériquement la contrainte de radiale ou la pression de serrage nécessaire pour transmettre la puissance, suivi des résultats de la simulation ABAQUS et du plan d'expériences où serrage, contraintes de frettage et en pied de dent, influence de μ sont des facteurs significatifs avec des niveaux de variations limités à 3.

Il en ressort que l'objectif du frettage n'est pas de maximiser simplement le serrage, mais de trouver le niveau optimal, suffisant pour éviter le glissement mais ne devant pas générer des contraintes supérieures aux limites élastiques du matériau constitutif de la couronne. Les plans d'expériences permettent de hiérarchiser l'effet sur la fonction de sortie (contrainte équivalente dans ce travail) des paramètres et de leurs interactions avec un nombre limité de simulations, à savoir que le nombre de simulations est égal aux nombres de paramètres multiplié par le nombre de niveaux de ces paramètres (facteurs).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Lanoue, F. (2008). Modélisation et simulation des assemblages mécaniques par frettage sollicités en fatigue par la méthode des éléments finis [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
- [2] LANOUE, Frédéric, VADEAN, Aurelian et SANSCHAGRIN, Bernard. Finite element analysis and contact modelling considerations of interference fits for fretting fatigue strength calculations. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 2009, vol. 17, n° 10, p. 1587-1602. DOI 10.1016/j.simpat.2009.06.017.
- [3] Mémoire de master 2 zerbani et belli -juin 2025
- [4] BUDYNAS, Richard G. et NISBETT, J. Keith. *Shigley's Mechanical Engineering Design*. 11th ed. New York : McGraw-Hill Education, 2020.
- [5] Cour emmanchement et frettage pour 3 année licence constriction mécanique
- [6] Cour transmissions par engrenage pour 3 année licence constriction mécanique
- [7] Livre d'engrenages Conception - Fabrication - Mise en œuvre, Georges Henriot.
- [8] Norme ISO 6336-1 (*Principes de base*), ISO 6336-2 (*Résistance à la pression de contact, pitting*) et ISO 6336-3 (*Résistance à la flexion en pied de dent*).
- [9] Norme AGMA 2001-D04, *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*.
- [10] Cours de Département GMP – Transmission par Engrenages.
- [11] R. LEBORZEC, Etude générale de l'engrenage, (polycopie de cours), ENSAM, 1989, Lille, France.
- [12] Mémoire de fin d'étude d'un emmanchement fretté compte tenu de l'effet combiné des défauts de forme et d'état de surface Hamid Boutoutaou
- [13] INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. *ISO 6336-3:2019. Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 3: Calculation of tooth bending strength*. Genève: ISO, 2019.
- [14] YOUNG, Warren C., BUDYNAS, Richard G. et SADEGH, Ali M. *Roark's Formulas for Stress and Strain*. 8th ed. New York : McGraw-Hill, 2012.
- [15] INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. *ISO 6336-2:2019. Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 2: Calculation of surface durability (pitting)*. Genève : ISO, 2019.
- [16] CHEVALIER, André. *Guide du dessinateur industriel*. Paris : Hachette Technique
- [17] JOHNSON, Kenneth L. *Contact Mechanics*. Cambridge : Cambridge University Press, 1985.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Université de Ghardaïa
Faculté des Sciences
et de la technologie

جامعة غرداية
كلية العلوم والتكنولوجيا
قسم: الآلية والكهروميكانيك

غرداية في : 2026/09/29

شعبة: الكهروميكانيك
تخصص: صيانة صناعية

شهادة ترخيص بالتصحيح والاياداع:

انا الاستاذ(ة) : بوسنان توفيق

بصفتي المشرف المسؤول عن تصحيح مذكرة تخرج (ليسانس/ماستر/دكتورا) المعنونة بـ:

Optimisation par plans d'expériences du contact par frettage entre arbre et moyeu et effet du frottement
sur le contact

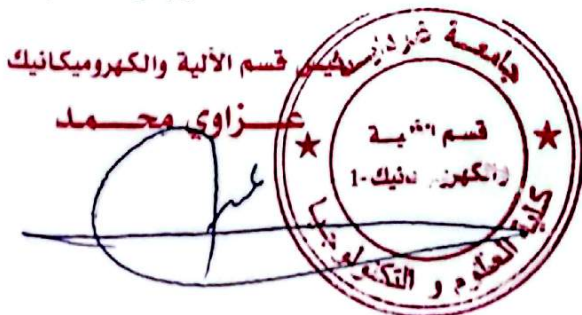
من انجاز الطالب (الطالبة):

حميدة سليمان

التي نوقشت بتاريخ: 2026/09/27

اشهد ان الطالب/الطالبة قد قام /قاموا بالتعديلات والتصحيحات المطلوبة من طرف لجنة المناقشة وقد تم التحقق من ذلك من طرفنا
وقد استوفت جميع الشروط المطلوبة.

مصادقة رئيس القسم



امضاء المسؤول عن التصحيح