Université de Ghardaia
Faculté des Sciences et Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Réduction des endomorphismes

Cours distiné aux étudiants de 2$^{\text{ème}}$ année Licence Mathématiques

Dr. MERABET Brahim

e.mail : merabet.brahim@univ-ghardaia.edu.dz

Table des matières

Introduction

Les notions d'applications linéaires et de matrices occupent une place centrale en algèbre linéaire. Elles constituent des outils incontournables aussi bien pour les mathématiques pures que pour les sciences appliquées : analyse numérique, traitement du signal, mécanique, physique quantique, économie ou encore informatique. La puissance de ces concepts réside dans leur capacité à traduire des situations complexes en un langage algébrique simple et manipulable.

Une application linéaire est, avant tout, une transformation qui respecte la structure vectorielle : elle conserve les combinaisons linéaires. Grâce à ce caractère, elle permet de modéliser un grand nombre de phénomènes où interviennent des relations proportionnelles et des superpositions d'effets. La représentation matricielle, quant à elle, offre un outil concret et efficace pour effectuer des calculs et pour mettre en évidence les propriétés essentielles de ces transformations.

L'étude des matrices ne se limite pas à de simples manipulations algébriques. Elle ouvre la voie à des questions fondamentales :

— Comment simplifier une application linéaire en choisissant une base adaptée ?

— Quelles sont les informations contenues dans le polynôme caractéristique et le polynôme minimal ?

— Peut-on calculer efficacement des puissances ou l'exponentielle d'une matrice ?

— Quels liens unissent la structure interne d'un endomorphisme et ses valeurs propres ?

Ces interrogations mènent naturellement à l'étude de la **réduction des endomorphismes**. Réduire une application linéaire, c'est trouver une base dans laquelle sa matrice prend une forme la plus simple possible. Selon les cas, il s'agira d'une matrice diagonale, triangulaire ou encore sous forme de Jordan. Ces formes réduites condensent toute l'information spectrale de l'endomorphisme et rendent accessibles des calculs autrement complexes, comme le calcul de puissances élevées ou de l'exponentielle de la matrice.

Le premier chapitre de ce polycopié rappelle les bases : définition des applications linéaires, représentation matricielle, changement de base et notion de matrices semblables. Le deuxième chapitre introduit l'anneau des polynômes et développe la théorie des polynômes d'endomorphismes, en particulier le polynôme minimal et les polynômes annulateurs, outils clés de la réduction. Le troisième chapitre est consacré aux valeurs propres et vecteurs propres, au polynôme caractéristique et au théorème de Cayley-Hamilton. Ces résultats préparent à la diagonalisation, développée dans le quatrième chapitre, puis à la trigonalisation et enfin à la jordanisation, qui représente le cadre le plus général de simplification d'un endomorphisme.

Enfin, le septième chapitre aborde l'exponentielle d'une matrice et son application à la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Ce lien illustre la puissance de l'algèbre linéaire : un concept algébrique abstrait devient un outil concret pour résoudre des problèmes analytiques.

Ainsi, ce cours a un double objectif :

1. Fournir une compréhension théorique solide des propriétés des endomorphismes et de leurs formes réduites.
2. Donner des méthodes pratiques pour effectuer des calculs utiles dans des contextes variés.

Chapitre 1

Rappels sur les applications linéaires et les matrices

1.1 Applications linéaires

Définition 1.1. *Soient $\mathbb{K}$ un corps et E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle application linéaire de E dans F une application u de E dans F telle que*

$$(i)\forall x, y \in E, u(x+y) = u(x) + u(y),$$
$$(ii)\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u(\lambda x) = \lambda u(x)$$

Ces deux conditions peuvent être réunies en une seule

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

Définition 1.2 (noyau et image d'une application linéaire)**.** *Soit u une application linéaire de E dans F.*

— *Le noyau de u (noté $\ker(u)$) est l'ensemble des vecteurs x de E dont l'image par u est le vecteur nul de F, on écrit alors*
$$\ker(u) = \{x \in E, u(x) = 0_F\}$$

— *L'image de u (noté $Im(u)$) est l'ensemble des vecteurs $u(x)$ où x est un vecteur de E, on écrit alors*
$$Im(u) = \{u(x), x \in E\}$$

Définition 1.3 (Isomorphisme, Endomorphisme)**.** *Les deux situations suivantes sont très fréquentes*

— *Une application linéaire bijective de E dans F est appelée* ***isomorphisme****,*

— *Une application linéaire de E dans lui même est appelée* ***endomorphisme****.*

Proposition 1.1. *Une application linéaire u de E dans F est :*
1. injective si et seulement si $\ker(u) = \{0_E\}$
2. surjective si et seulement si $Im(u) = F$.

Théorème 1.1 (du rang)**.** *Si E et F sont deux $\mathbb{K}$- espaces vectoriels, et si E est de dimension finie, on a pour toute application linéaire u de E dans F*

$$\dim \ker(u) + \dim Im(u) = \dim E \tag{1.1}$$

1.2 Matrice d'une application linéaire

Dans toute la suite, on supposera que tous les espaces vectoriels considérés sont de dimensions finies.
Soit donc E et F deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$ de dimensions n et p respectivement. Soient

$$B_E = \{e_1, e_2 \ldots, e_n\} \text{ et}$$

$$B_F = \{f_1, f_2, \ldots, f_p\}$$

deux bases de E et F respectivement. Si u est une application linéaire de E dans F, les images par u des vecteurs de la base de E s'écrivent en combinaisons linéaires des vecteurs f_i comme suit :

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i, \forall j = 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Définition 1.4 (de la matrice d'une application linéaire)**.** *La matrice de u relativement aux bases B_E et B_F est constituée par les coordonnées des vecteurs $u(e_j)$, écrits en colonne de la manière suivante :*

$$Mat_{B_E,B_F}(u) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \vdots & \ldots & a_{ij} & \vdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pj} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

La matrice d'une application linéaire est liée aux bases de l'espace de départ E et de l'espace d'arrivé F, si on change l'une des bases de E ou de F, la matrice changera.

1.3 Opérations sur les matrices

Les notions de la matrice nulle, la somme de deux matrices, le produit de deux matrices (quand il est défini), et en particulier pour les matrices carrées, la notion de la matrice identité, la transposée et l'inverse d'une matrice carrée, tous ces notions sont supposées connues (elles font partie du contenu de la matière Algèbre2 de la première année licence). On se réfère par exemple aux [1], [6], [7] pour se rappeler des détails.

Définition 1.5 (de matrice diagonale)**.** *Une matrice carrée $A = (a_{ij})$ est dite diagonale si*

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & si\ i = j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Si tous les éléments diagonaux a_{ii} sont égales à 1, alors la matrice A est la matrice identitée notée I_n.

Définition 1.6 (de matrice triangulaire)**.** *Une matrice carrée $A = (a_{ij})$ est dite*
1- Triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ si $i > j$
2- Triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ si $j > i$.

1.4 Changement de base, Matrices semblables

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, muni de deux bases

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \text{ et } \mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$$

Soit $e'_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i, j = 1, \ldots, n$, la matrice P du système des vecteurs e'_j dans $\mathcal{B}$ est

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1j} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2j} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \vdots & \ldots & \alpha_{ij} & \vdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nj} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Cette matrice définit le changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, elle s'appelle la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Cette matrice est régulière puisque le système des vecteurs (e'_j) est libre.
Si u est un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$ et de matriceA' dans la base $\mathcal{B}'$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ alors

$$A' = P^{-1}AP$$

Définition 1.7. *Deux matrices A et A' liées par une relation de la forme $A' = P^{-1}AP$ avec P une matrice de passage, sont dites semblables. On écrit alors $A' \sim A$.*

On peut montrer que la relation de similitude est une relation d'équivalence sur l'anneau des matrice carrées d'ordre n.
Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Proposition 1.2. *Si $A' = P^{-1}AP$ alors*

$$A'^k = P^{-1}A^kP, \forall k \in \mathbb{N}$$

Démonstration. Si $A' = P^{-1}AP$ alors $A'^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}A^2P$, puisque $P^{-1}P = I$.
Par récurrence on montre que

$$A'^k = P^{-1}A^kP, \forall k \in \mathbb{N}$$

□

Cette relation nous permet de calculer facilement la puissance d'une matrice surtout quand elle est diagonalisable. Ceci est l'objectif principal de la réduction des matrices.

1.5 Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E. Le déterminant de la matrice de u est indépendante de la base choisie. En effet, sachant que deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes. On a

$$\begin{aligned} &\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in GL_n(\mathbb{K}), \\ det(P^{-1}AP) &= det(P^{-1}) \cdot det(A) \cdot det(P) \\ &= det(A) \end{aligned}$$

On peut alors définir le déterminant d'un endomorphisme comme étant :

Définition 1.8. *Le déterminant de u est le déterminant de la matrice de u relativement à une base quelconque de E.*

On peut aussi définir le déterminant d'une matrice en utilisant la notion des formes linéaires alternées, le groupe symétrique et la notion de la signature d'une permutation, les détails peuvent être consultés dans [2].

Définition 1.9. *Soit $A = (a_{ij})$ une matricz carrée d'ordre n. Le déterminant de la matrice A est défini par :*

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n}.$$

où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ et S_n est le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$.

Remarquons que deux matrices semblables ont même déterminant (puisqu'elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes).

1.5.1 Inverse d'une matrice carrée

Nous présentons ici un résultat util dans la théorie du calcul du déterminant et de l'inverse d'une matrice carrée.

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n. On note Δ_{ij} le mineur relatif au coefficient a_{ij}, c'est-à-dire le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne d'indice i et la colonne d'indice j. Alors

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}, \text{pour tout indice de ligne } i \text{ et}$$
$$det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}, \text{pour tout indice de colonne } j.$$

— Le coefficient $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ est appelé le cofacteur du cofficient a_{ij}.

— La matrice $Com(A) = ((-1)^{i+j}\Delta_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est appelée la comatrice de A.
- La transposée de la matrice $Com(A)$ vérifie la relation

$$A\ {}^tCom(A) = {}^tCom(A)\ A = det(A)I_n \tag{1.4}$$

Il en résulte que si A est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\ {}^tCom(A) \tag{1.5}$$

Chapitre 2

Anneau des polynômes et Polynômes d'endomorphismes

Nous avons utilisé essentiellement les références [1], [5], [3] et [8] pour ce chapitre.

2.1 Construction de l'ensemble des polynômes

Dans ce paragraphe, nous verrons d'une façon plus claire la construction de l'ensemble des polynômes à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ et d'en dégager les propriétés structurelles. Nous vulgarisons la notion des polynômes pour mieux comprendre le sens de l'écriture $\sum_{0\leq k\leq n} a_k X^k$. Nous désignerons le corps par $\mathbb{K}$ que nous prendrons souvent celui des nombres réels ou celui des nombres complexes. On va construire les polynômes en partant de la suite de leurs coefficients : $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$.

2.1.1 L'espace vectoriel S_f

Nous savons que l'ensemble des suites de nombres réels est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Ici, nous noterons S l'espace des suites d'éléments du corps $\mathbb{K}$ qui est de même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Considérons le sous-ensemble S_f de S des suites ayant un nombre fini de termes non nuls. Il est clair que S_f est un sous-espace vectoriel de S, car si deux suites ont un nombre fini de de termes non nuls, leur somme également et leur produit de l'une d'elle par un scalaire aussi.

Pour tout entier $k \geq 0$, notons e_k la suite de S_f dont tous les termes sont nuls, sauf le k-ième qui est égal à 1. Chaque élément de S_f s'écrit comme combinaison linéaire des suites e_k : en effet, si $u = (u_k)$ est une suite de S_f dont les termes de rang $> n$ sont nuls, on a $u = \sum_{0\leq k\leq n} u_k e_k$. La famille $(e_k)_{k\geq 0}$ est donc une famille génératrice de S_f.

Montrons que la famille $(e_k)_{k\geq 0}$ est une famille libre de S_f. En effet, si $\sum_{0\leq k\leq n} u_k e_k = 0$, la suite $(u_0, u_1, \ldots, u_n, 0, 0, \ldots)$ est la suite nulle, donc $u_0 = u_1 = \ldots = u_n = 0$. On voit que la famille infinie $(e_k)_{k\geq 0}$ est une base de S_f et que S_f est un espace de dimension infinie.

2.1.2 Définition du produit

Afin de retrouver les polynômes, on définit un produit sur S_f qui donne ce qu'on veut. Si $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ sont des suites de S_f, on définit $w = uv$ par $w_n = \sum_{0\leq p\leq n} u_p v_{n-p} = \sum_{p+q=n} u_p v_q$. On obtient bien un élément de S_f puisque si u_n est nul pour $n > M$ et si v_n est nul pour $n > N$, on vérifie que w_n est nul pour $n > M + N$.

Propriétés du produit

La loi de multiplication que nous avons défini a les propriétés attendues.

Elle est associative car

$$[u(vw)]_n = \sum_{p+m=n} u_p (vw)_m = \sum_{p+m=n} u_p \left(\sum_{q+r=m} v_q w_r \right) = \sum_{p+q+r=n} u_p v_q w_r.$$

et de même
$$[(uv)w]_n = \sum_{p+q+r=n} u_p v_q w_r.$$
On vérifie de même les propriétés suivantes :
- — Elle est distributive par rapport à l'addition : $u(v+w) = uv + uw$.
- — Elle est commutative : $uv = vu$.
- — Pour tout scalaire a de $\mathbb{K}$: $(au)v = u(av) = a(uv)$.

2.1.3 Changement de notation

Posons $X = e_1$; X s'appelle l'indéterminée (les anglais disent souvent variable ; on pourrait choisir une autre variable : Y, T, etc.). La définition précédente nous montre que
$$X^2 = XX = e_2 \text{ et plus généralement } X^n = e_n \text{ pour tout entier } n \geq 1.$$
La suite e_0 est l'élément neutre pour cette multilication et nous la noterons 1.
Une suite $u = (u_k)$ de S_f dont les termes de rang $> n$ sont nuls peut maintenant s'écrire
$$u = u_0e_0 + u_1e_1 + \ldots + u_ne_n = u_01 + u_1X + \ldots + u_nX^n.$$
Ce simple changement de notation nous donne une notation cohérente avec celle des fonctions polynomiales.

Récapitulation

On notera désormais $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble S_f et ses éléments seront appelés polynôme en X.
L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ est muni de plusieurs lois :
1. une loi d'addition des polynômes entre eux ;
2. une loi de multilication des polynômes entre eux ;
3. une loi de multilication des polynômes par les scalaires.

Les deux premières lois munissent $\mathbb{K}[X]$ d'une structure d'anneau commutatif unitaire ;
La première et la troisième loi munissent $\mathbb{K}[X]$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Les trois lois munissent $\mathbb{K}[X]$ de ce qu'on appelle une structure de $\mathbb{K}$-algèbre commutative.

2.2 Polynômes d'endomorphisme

L'objective de cette section est l'introduction de la notion de polynôme annulateur d'un endomorphisme qui joue un rôle essentiel dans le calcul de l'inverse quand il existe.

2.2.1 Notion de polynômes d'endomorphismes

Soient $P(X) = \sum_{0\leq k\leq N} a_kX^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, f un endomorphisme de E ($\mathbb{K}$-espace vectoriel).

Définition 2.1 (polynôme d'endomorphisme)**.** *On définit une application de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$ qui associe à un polynôme $P(X) = \sum_{0\leq k\leq N} a_kX^k$ l'endomorphisme $P(f) = \sum_{0\leq k\leq N} a_kf^k$ avec $f^0 = Id_E$ et $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$, (k fois).*
$P(f)$ est un polynôme de l'endomorphisme f.

Exemple 2.1. *Pour un endomorphisme f et un polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$, on a $P(f) = 2f^3 - 3f^2 + Id$.*

Remarque 2.1. *On définit de même, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, la matrice $P(A)$. Remarquons que si A est la matrice d'un endomorphisme f dans une base $\mathcal{B}$, alors $P(A)$ est la matrice de l'endomorphisme $P(f)$ dans la même base $\mathcal{B}$.*

Proposition 2.1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. L'application qui à un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ associe l'endomorphisme $P(f)$ de $\mathcal{L}(E)$ est un morphisme d'algèbres.*
L'image de ce morphisme, notée $\mathbb{K}[f]$, est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

Notation Si $f \in \mathcal{L}(E)$, et P, Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, alors :
$P(f) \circ Q(f)$ est par définition $(P \cdot Q)(f)$ (le produit de P et Q appliqué à f).

Proposition 2.2. *Soit f un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ et soit P, Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, alors les endomorphismes $P(f)$ et $Q(f)$ commutent, c'est à dire $P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$.*

Démonstration. On a $P(f) \circ Q(f) = (P \cdot Q)(f) = (Q \cdot P)(f) = Q(f) \circ P(f)$. Ici, on a utilisé le fait que la multiplication des polynômes est commutative. □

De la Proposition précédente on déduit que, les deux endomorphismes $P(f)$ et $Q(f)$ commutent (ainsi que les deux matrices associées $P(A)$ et $Q(A)$). Ce qu'il faut bien saisir est donc :

> « Deux endomorphismes de E ne commutent pas en général, mais ils commutent dans le cas particulier où ils sont obtenus comme application de polynômes à un même endomorphisme de E. »

De même :

> « Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne commutent pas en général, mais elles commutent dans le cas particulier où elles sont obtenues comme application de polynômes à une même matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. »

2.2.2 Application d'un polynôme à une matrice diagonale

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, et soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}.$$

On a trivialement, pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$D^i = \begin{pmatrix} d_1^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^i \end{pmatrix}, \quad \text{avec la convention } D^0 = I_n.$$

Écrivons alors le polynôme :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i, \quad \text{avec } a_i \in \mathbb{K}.$$

Alors :

$$P(D) = \sum_{i=0}^{k} a_i D^i = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{k} a_i d_1^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{k} a_i d_2^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{i=0}^{k} a_i d_n^i \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire :

$$P(D) = \begin{pmatrix} P(d_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P(d_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P(d_n) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

La formule (2.1) est remarquable. Elle nous apprend simplement que l'application d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ à une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donne une matrice diagonale obtenue en appliquant P à chacun des éléments diagonaux de D.

Application d'un polynôme à deux matrices semblables

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, et soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Il existe alors $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$B = M^{-1}AM.$$

Une simple récurrence montre que, pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$B^i = M^{-1}A^iM.$$

En écrivant le polynôme :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i, \quad \text{avec } a_i \in \mathbb{K},$$

on obtient :

$$P(B) = \sum_{i=0}^{k} a_i B^i = \sum_{i=0}^{k} a_i (M^{-1}A^iM) = M^{-1}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i A^i\right)M = M^{-1}P(A)M.$$

Conséquence immédiate
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \sim B \quad \Rightarrow \quad P(A) \sim P(B).$$

2.3 Polynôme annulateur

Les polynômes annulateurs sont utilisés en algèbre linéaire d'une façon générale et en particulier pour la réduction des endomorphismes.

Définition 2.2. *Soit f un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ et soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Un polynôme P est annulateur de f si l'endomorphisme $P(f)$ est l'endomorphisme nul.*
De même si A est une matrice carrée d'ordre n, un polynôme P est annulateur de A si $P(A)$ est la matrice nulle.

Proposition 2.3. *Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un polynôme annulateur non nul.*

Remarque 2.2. *Grâce au théorème de Cayley-Hamilton (qu'on verra dans la suite) on montrera qu'en dimension finie n, on peut déterminer un polynôme annulateur de degré n (c'est le polynôme caractéristique).*

-Attention, le résultat précédent n'est pas vraie en dimension infinie.

Définition 2.3. *Un endomorphisme est dit nilpotent s'il admet un monôme comme polynôme annulateur.*

Proposition 2.4. *Soit f un endomorphisme, alors l'ensemble $\mathcal{I}_f$ des polynômes annulateurs de f est un idéal de l'anneau $\mathbb{K}[X]$.*

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{I}_f$ est clairement un sous-groupe additif de $\mathbb{K}[X]$.
Si $P \in \mathcal{I}_f$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors $QP \in \mathcal{I}_f$, car :

$$QP(f) = Q(f) \circ P(f) = Q(f) \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

□

2.4 Polynôme minimal

L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est euclidien, il est donc en particulier principal, donc chaque idéal de $\mathbb{K}[X]$ peut être engendré par un unique polynôme unitaire. Ceci justifie la définition suivante.

Définition 2.4. *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Le polynôme minimal de f est l'unique polynôme unitaire, noté μ_f, qui engendre l'idéal des polynômes annulateurs de f.*

Proposition 2.5. *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors la dimension de l'algèbre $\mathbb{K}[f]$ est égale au degré du polynôme minimal μ_f de f.*

On va détrminer dans les exemples suivants l'idéal des polynômes annulateurs de quelques endomorphismes remarquables.

Exemple 2.2. *Si f est un endomorphisme nilpotent, il admet un polynôme annulateur de la forme X^k. Par conséquent, le polynôme minimal de f est de la forme $X^p, p \leq k$. Cet entier p est appelé indice de nilpotence de f. Alors, un polynôme est annulateur de f si 0 en est une racine d'ordre au moins k.*

Exemple 2.3. *Si p est un projecteur (donc $p^2 = p \circ p = p$), alors un polynôme annulateur de p est de la forme $X^2 - X$. Ce polynôme est le polynôme minimal de p si $p \neq id$ et $p \neq 0$.*

Exemple 2.4. *Si h est une homothétie de E, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $h = \lambda Id_E$. Par conséquent $X - \lambda$ est un polynôme annulateur de h de dergé 1 donc minimal. Tout polynôme annulateur de h est muliple de $X - \lambda$.*

2.5 Utilisation des polynômes annulateurs

Les polynômes annulateurs sont utilisés dans la pratique surtout por trouver l'inverse d'un endomorphisme ou pour calculer ses puissanses.

2.5.1 Calcul de l'inverse

La proposition suivante donne une manière pour calculer l'inverse d'un endomorphisme en utilisant un polynôme annulateur.

Proposition 2.6. *Soit f un endomorphisme de E admettant un polynôme annulateur P tel que $P(0) \neq 0$. Alors, f est inversible. De plus son inverse apartient à l'algèbre $\mathbb{K}[f]$.*

Démonstration. Si $P(X) = \sum_{0 \leq k \leq N} a_k X^k, N > 0, P(0) = a_0 \neq 0$. Alors on peut montrer facilement que l'endomorphisme

$$g = -\frac{1}{a_0} \sum_{1 \leq k \leq N} a_k f^{k-1}$$

est l'inverse de f. □

Le résultat suivant donne une condition nécéssaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit inversible.

Proposition 2.7. *Un endomorphisme f d'un espace vectoriel E est inversible si, et seulement si, 0 n'est pas racine de son polynôme minimal.*

2.5.2 Calcul de puissances

Nous utilisons le résultat suivant pour trouver les puissances f^m d'un endomorphisme f.

Proposition 2.8. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur de degré N. Alors pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, $f^m \in vect(f^k), 0 \leq k \leq N-1$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ ayant un polynôme annulateur P de degré N et $m \in \mathbb{N}$. La division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ nous donne l'existence de deux polynômes Q_m, R_m dans $\mathbb{K}[X]$ tels que

$$X^m = Q_m(X)P(X) + R_m(X),$$

avec $degR_m < degP = N$. Alors pour $X = f$, on trouve que $f^m = R_m(f)$, d'où le résultat. □

2.6 Anneau des matrices carrées d'ordre n

L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de la somme et le produit de deux matrices est un anneaux non commutatif (le produit de deux matrices n'est pas commutatif). Tous les calculs algébriques sur les polynômes sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont applicables sur les matrices sauf la multiplication puisqu'elle n'est pas commutative. Un polynôme $P(x)$ où x un nombre peut être exprimé comme un polynôme $P(X)$ sur les matrices en remplaçant x^k par X^k, pour $k \geq 0$, avec la convention $X^0 = I$. Ainsi

$$P(x) = x^3 - 2x + 5 \Rightarrow P(X) = X^3 - 2X + 5I$$

X étant une matrice carrée quelconque et I la matrice identité d'ordre n.
- Les identités remarquables de l'algèbre dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ restent vraies si les deux matrices commutent, à savoir

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2, \text{ sauf si } AB = BA\\ (A+B)(A-B) &= A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2, \text{ sauf si } AB = BA.\end{aligned}$$

- La formule de binôme de Newton s'applique pour les matrices carrées qui commutent :

$$(A+B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k}$$

En particulier, on a

$$(A+I)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k I^{N-k} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k$$

- L'anneau des matrices carrées n'est pas intègre :

$$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ ni } B = 0$$

Il en résulte que même si $A \neq 0, AB = AC \not\Rightarrow B = C$.

Chapitre 3

Éléments propres d'un endomorphisme

Nous avons utilisé essentiellement les références [3], [8] pour ce chapitre.
La problématique est la suivante : Etant donné un endomorphisme, trouver les vecteurs ayant une image qui leur est proportionnelle et étudier ensuite l'ensemble des vecteurs attachés à un facteur de proportion donnée (valeur propre).

On définira dans ce chapitre les éléments propres d'un endomorphisme et les résultats essentiels qui les concernent. Dans tout ce chapitre E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et φ un endomorphisme de E.

3.1 Valeur propre et vecteur propre

Définition 3.1 (valeur propre et vecteur propre)**.** *Un vecteur v de E est appelé vecteur propre de φ s'il est non nul et s'il existe un scalaire λ tel que*

$$\varphi(v) = \lambda v \tag{3.1}$$

Le scalaire λ, ainsi associé à v (il ne peut y en avoir qu'un seul) est appelé valeur propre de φ associée à v.

Remarquons que λ est une valeur propre de φ si et seulement si l'équation $(\varphi - \lambda id_E)(v) = 0$ a une solution non nulle. Autrement dit que l'application $(\varphi - \lambda id_E)$ n'est pas injective.
Lorsque E est de dimension finie, on a la définition suivante.

Définition 3.2 (Spectre d'un endomorphisme)**.** *Si E est de dimension finie, l'ensemble des valeurs propres de φ (éventuellement vide) est appelé spectre de φ et est noté $Sp_{\mathbb{K}}(\varphi)$.*

Remarque 3.1. *Lorqu'il n'y a pas d'embiguité sur le corps $\mathbb{K}$, le spèctre $Sp_{\mathbb{K}}(\varphi)$ peut être noté simplement $Sp(\varphi)$*

On définit d'une façon analogue les valeurs propres, les vecteurs propres et le spectre d'une matrice carrée.

Définition 3.3. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur $X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que*

$$AX = \lambda X.$$

On dit dans ce cas que X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Exemple 3.1. *Considérons le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Prenons φ égal l'opérateur de dérivation sur E, soit*

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & E \to E \\ & u \mapsto u' \end{aligned}$$

Si u est la fonction réelle définie par $u(x) = e^{\lambda x}$, on a bien u est une fonction non nulle qui appartient à E et

$$\varphi(u)(x) = u'(x) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda u(x).$$

On a donc :
λ est une valeur propre de φ et la fonction $u : x \mapsto e^{\lambda x}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Ainsi, tout nombre réel λ est une valeur propre de φ.

Exemple 3.2. *Considérons la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut montrer que :
$v_1 = (1, 1, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$,
$v_2 = (4, 3, -2)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$,
$v_3 = (2, -3, 2)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_3 = -4$. et le spectre de A est égale à $Sp(A) = \{1, 2, -4\}$.

Définition 3.4 (Sous espace propre). *Soit λ une valeur propre de φ, alors $E_\lambda = \ker(\varphi - \lambda id_E)$ est appelé sous-espace propre de E associé à λ.*
C'est l'ensemble constitué du vecteur nul et des vecteurs propres de φ associés à λ.

On définit d'une manière analogue la notion d'espace propre associé à une valeur propre d'une matrice. Observons d'abord le résultat suivant.

Proposition 3.1. *Soit φ un endomorphisme de E, alors φ laisse stable ses sous-espaces vectoriels propres.*

Démonstration. Si λ est une valeur propre de E et v un vecteur de E_λ, donc $\varphi(v) = \lambda v$, alors :

$$\varphi(\varphi(v)) = \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v).$$

Ce qui signifie que $\varphi(v)$ est aussi un vecteur propre de E_λ. □

Les résultats suivants sont essentiels.

Théorème 3.1. *Soit φ un endomorphisme de E, alors, toute famille $(v_i)_{1\leq i\leq k}$ de vecteurs propres associés respectivement à des valeurs propres $(\lambda_i)_{1\leq i\leq k}$ de φ deux à deux distinctes, est libre.*

Démonstration. On fait la preuve par récurrence sur k. Le résultat est trivial pour $k = 1$. Supposons qu'il est vrai pour $k - 1$.
Soit $(v_i)_{1\leq i\leq k}$ une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres $(\lambda_i)_{1\leq i\leq k}$ de φ deux à deux distinctes. Toute relation linéaire de la forme

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \tag{3.2}$$

donne alors

$$0 = \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i v_i \tag{3.3}$$

On en déduit en "retranchant" λ_k(3.2) à (3.3), que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i v_i - \lambda_k \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) v_i$$

D'où, par l'hypothèse de récurrence, $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$, pour tout i dans $\{1, \ldots, k-1\}$.
Compte tenu du fait que les λ_i sont deux à deux distincts, on en déduit que $\alpha_i = 0$ pour tout i dans $\{1, \ldots, k-1\}$. L'égalité (3.2) s'écrit alors

$$\alpha_k v_k = 0$$

Mais v_k n'est pas nul, on a donc $\alpha_k = 0$. On en déduit que $\alpha_i = 0$ pour tout i dans $\{1, \ldots, k\}$. □

Corollaire 3.1. *La famille* $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ *étant une famille de valeurs propres de* φ *deux à deux distincts, alors, la somme des sous espaces propres* $(E_{\lambda_i})_{1\leq i\leq k}$ *correspondants à celles ci est directe.*

Démonstration. Montrons que tout élément v de E se décompose d'une façons unique suivant la somme des sous espaces propres $(E_{\lambda_i})_{1\leq i\leq k}$. Pour cela, on suppose qu'il y en a deux décompositions de v.

$$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_k = v'_1 + v'_2 + \ldots + v'_k \in E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_k}$$

Alors

$$(v_1 - v'_1) + (v_2 - v'_2) + \ldots + (v_k - v'_k) = 0$$

Or si dans les k différences $(v_i - v'_i), 1 \leq i \leq k$ (et qui sont chacune dans un sous-espace propre de E_{λ_i} différent), il y en avait une non nulle, une combinaison linéaire nulle de vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres distinctes, ce qui est impossible (puisque cette famille de vecteurs est libre). Toutes les différences sont donc nulles et : $v_i = v'_i$ pour tout $i = 1, \ldots, k$. □

Exemple 3.3. *Si on considère l'espace* $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*, le sous espace vectoriel des fonctions paires et le sous espace vectoriel des fonctions impaires sont en somme directe. En effet, ce sont les deux sous espaces propres associés aux valeurs propres* 1 *et* -1 *de l'endomorphisme de* E *défini par* $u \mapsto \bar{u}$ *où* $\bar{u} : x \mapsto u(-x)$*.*

Corollaire 3.2. *Lorsque* E *est de dimension finie, le nombre de valeurs propres de* φ *est inférieur ou égal à la dimension de* E *:*

$$card(sp(\varphi)) \leq \dim E$$

Démonstration. En effet, si le spèctre de φ n'est pas vide, soit $sp(\varphi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$. Les λ_i étant distinctes deux à deux, on peut associer à chaque λ_i un vecteur propre non nul, soit v_i. La famille $(v_i)_{1\leq i\leq k}$ est donc libre, donc nécessairement, $k \leq \dim E$. □

Remarque 3.2. *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et si* λ *est une valeur propre complexe de* A*, alors* $\overline{\lambda}$ *est également une valeur propre de* A*, et* $E_{\overline{\lambda}} = \overline{E_\lambda} = \{\overline{X}; X \in E_\lambda\}$*.*

3.2 Polynôme caractéristique

On verras dans cette section un moyen très pratique pour déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme d'espace vectoriel E lorsqu'il est de dimension finie. Le résultat suivant est essentiel et découle de la définition d'une valeur propre.

Proposition 3.2. *On suppose que* E *est de dimension finie,* φ *étant un endomporphisme de* E*. Soit* $\lambda \in \mathbb{K}$*, alors,* λ *est une valeur propre de* φ *si et seulement si*

$$det(\varphi - \lambda id_E) = 0$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de } \varphi &\iff (\varphi - \lambda id_E) \text{ n'est pas injectif} \\ &\iff (\varphi - \lambda id_E) \text{ n'est pas bijectif} \\ &\iff det(\varphi - \lambda id_E) = 0 \end{aligned}$$

□

La théorie du développement des déterminants montre que $det(\varphi - \lambda id_E)$ donne un polynôme de degré $n = \dim E$ en λ et à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

Définition 3.5. *On suppose que* E *est de dimension finie,* φ *étant un endomporphisme de* E*. L'expression* $det(\varphi - \lambda id_E)$ *qu'on notera* $P_\varphi(\lambda)$*, s'appelle le polynôme caractéristique de* φ*.*

Le corollaire suivant est une conséquence directe de ce qui précède.

Corollaire 3.3. *Si l'espace vectoriel E est de dimension finie n. Alors les valeurs propres d'un endomorphisme φ de E sont les racines de son polynôme caractéristique P_φ.*
De plus, tout endomorphisme de E possède au plus n valeurs propres dans $\mathbb{K}$ (calculée avec leurs ordre de multiplicité).

Par analogie, on a la définition et le corollaire suivants pour le cas matriciel.

Définition 3.6. *Soit A une matrice carrée d'ordre n. On appelle le polynôme caractéristique de A le polynôme de degré n obtenu en développant le déterminant de $(A - \lambda I_n)$ qu'on notera $P_A(\lambda)$.*

Corollaire 3.4. *Les valeurs propres d'une matrice carrée A sont les racines de son polynôme caractéristique P_A.*
De plus, toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au plus n valeurs propres (calculée avec leurs ordre de multiplicité).

Définition 3.7. *Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme φ (resp. d'une matrice A). Si λ est racine multiple d'ordre k de $P_\varphi(\lambda)$ (resp. de $P_A(\lambda)$), on dit que λ est valeur propre de φ (resp. de A) d'ordre de multiplicité égal à k.*

Exemple 3.4. *1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors*

$$P_A(\lambda) = (-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - \frac{1-\sqrt{5}}{2})(\lambda - \frac{1+\sqrt{5}}{2}).$$

Donc $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$ et $Sp_{\mathbb{Q}}(A) = \emptyset$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, alors

$$P_A(\lambda) = (-\lambda)(-1-\lambda) + 1 = \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda - j)(\lambda - j^2)$$

où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Donc $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{j, j^2\}$ et $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

Exemple 3.5. *1. Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, on a alors*
$P_B(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 3\lambda - 10$.
Les valeurs propres sont alors $\lambda_1 = 5$, et $\lambda_2 = -2$.

3.2.1 Cas des matrices semblables

Les matrices semblables ont des propriétés communes importantes (puisqu'elles représentent un même endomorphisme dans des bases différentes), parmi ces propriétés le polynôme caractéristique et les valeurs propres.

Proposition 3.3. *Deux matrices carrées semblables d'ordre n ont le même polynôme caractéristique et les mêmes valeurs propres.*

Démonstration. Soient A et B deux matrices semblable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe alors une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que : $B = P^{-1}AP$. Donc

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= det(B - \lambda I_n) = det(P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda I_n)P) \\ &= det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = det(P^{-1})det(A - \lambda I_n)det(P) \\ &= \frac{1}{det(P)}det(A - \lambda I_n)det(P) = det(A - \lambda I_n) = P_A(\lambda) \end{aligned}$$

D'où les matrices A et B ont le même polynôme caractéristique et par conséquent les mêmes valeurs propres. □

La Proposiion 3.3 montre que si A et B sont deux matrices qui représentent le même endomorphisme φ dans deux bases distincts, alors ces deux matrices ont le même polynôme caractéristique, ce qui justifie la définition donnée du polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

On en déduit que le polynôme caractéristique d'une matrice A ne dépend que de l'endomorphisme φ qu'elle représente.

3.2.2 Deux coefficients remarquables du polynôme caractéristique

Nous avons vu dans la Proposition 3.3 que deux matrices sembalbles ont même polynôme caractéristique, donc mêmes coefficients. On prouve dans cette section qu'il existe deux coefficients dans l'expression du polynôme caractéristique d'un endomorphisme qui sont liés à l'endomorphisme lui même, à savoir le déterminant et la trace.

Rappelons que si $A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors la trace de A est la somme de ses éléments diagonaux.

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Proposition 3.4. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, le polynôme caractéristique de A s'écrit sous la forme :*

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} tr(A) + \ldots + det(A). \tag{3.4}$$

Démonstration. Posons $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. On a

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \vdots & \ldots & a_{ij} & \vdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Par définition du déterminant, on a :

$$P_A(\lambda) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(a_{\sigma(1)1} - \lambda \delta_{\sigma(1)1}) \ldots (a_{\sigma(n)n} - \lambda \delta_{\sigma(n)n}).$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker et S_n est le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$; il est donc clair que $P_A(\lambda)$ est une somme de polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n. Or, σ étant une permutation de $\{1, \ldots, n\}$, le polynôme

$$(a_{\sigma(1)1} - \lambda \delta_{\sigma(1)1}) \ldots (a_{\sigma(n)n} - \lambda \delta_{\sigma(n)n})$$

est de degré inférieur ou égal à $n-2$ lorsque $\sigma \neq id$: en effet, s'il existe deux entiers i et j de $\{1, \ldots, n\}$ tels que $i \neq \sigma(i) = j$, on a également $\sigma(j) \neq j$ (sinon i serait égal à j car σ est une bijection) ; donc $\delta_{\sigma(i)i} = 0$ et $\delta_{\sigma(j)j} = 0$. Tout cela montre que

$$P_A(\lambda) = (a_{11} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda) + q(\lambda) \text{ où } \deg(q(\lambda)) \leq n-2.$$

On en déduit que :

— le coefficient de λ^n de $P_A(\lambda)$ est égal à $(-1)^n$,

— le coefficient de λ^{n-1} de $P_A(\lambda)$ est égal à $(-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots a_{nn}) = (-1)^{n-1} tr(A)$.

Enfin le coefficient constant de $P_A(\lambda)$ est égal à $P_A(0) = det(A)$. □

Cas particulier d'une matrice 2×2

Si A est une matrice 2×2 à coefficients dans $\mathbb{K}$, son polynôme caractéristique P_A est de degré 2. D'après la Proposition 3.4 ses trois coefficients sont connus et

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A) + det(A).$$

3.3 Théorème de Cayley-Hamilton

Le théorème de Cayley-Hamilton est un résultat fondamental en algèbre linéaire, qui affirme que toute matrice carrée A satisfait son propre polynôme caractéristique.Plus précisément, si $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ est le polynôme caractéristique de A, alors $P(A) = 0$. Ce théorème fut obtenu d'abord par Hamilton dans le cas particulier d'un espace vectoriel E de dimension 4 (plus précisément pour le cas où E est l'espace des quaternions), puis il a été généralisé par Cayley au cas de tout espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 3.2. *Soit f un endomorphisme de E. Alors le polynôme caractéristique P_f de f est un polynôme annulateur de f. Autrement dit, on a :*

$$P_f(f) = 0, \text{ ce zéro représente l'endomorphisme nul sur } E.$$

La version matricielle du théorème de Cayley-Hamilton est la suivante :

Théorème 3.3. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors le polynôme caractéristique P_A de A est un polynôme annulateur de A, c'est à dire que $P_A(A) = 0$, (où 0 est la matrice nulle).*

Démonstration. Nous allons faire la démonstration du ce théorème pour la version matricielle par la méthode de la comatrice (il existe d'autre méthodes comme la preuve par les sous-espaces cycliques et parles matrices compagnons).
La matrice $\lambda I_n - A$ est de taille $n \times n$. Son déterminant, qui est un polynôme de degré n en λ, est :

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

Pour une matrice B inversible, on a la relation suivante entre B, sa comatrice $Com(B)$, et son déterminant, (la relation (1.4)) :

$$B \; {}^tCom(B) = {}^tCom(B) \; B = det(B)I_n$$

Ici, on applique cette relation à la matrice $B = \lambda I_n - A$. ce qui donne :

$$(\lambda I_n - A) \; {}^tCom(\lambda I_n - A) = {}^tCom(\lambda I_n - A) \; (\lambda I_n - A) = det(\lambda I_n - A)I_n$$

On sait que $\det(\lambda I_n - A) = P_A(A)$, ce qui donne :

$$(\lambda I_n - A) \; {}^tCom(\lambda I_n - A) = det(\lambda I_n - A)I_n$$

Remplaçons λ par A, on trouve :

$$(AI_n - A)^tCom(AI_n - A) = P_A(A)I_n.$$

Or $AI_n - A = 0$, ce qui simplifie l'équation :

$$0 \cdot {}^tCom(AI_n - A) = P_A(A)I.$$

Cela implique que :

$$P_A(A) = 0.$$

Ainsi, le théorème de Cayley-Hamilton est démontré. □

3.3.1 Lien avec les polynômes annulateurs

Nous verrons dans cette section l'importance de trouver un polynôme annulateur d'un endomorphisme f, puisque le fait de connaitre les racines de ce polynôme permet de trouver des valeurs propres de cet endomorphisme.

Proposition 3.5. *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, et soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de f, c'est-à-dire :*

$$P(f) = 0$$

Alors toute valeur propre de f est racine du polynôme annulateur $P(X)$.

Mais la réciproque est fausse en général :
Une racine de P n'est pas forcément une valeur propre de f.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f. Alors il existe $v \neq 0$ tel que :

$$f(v) = \lambda v,$$

Appliquons $P(f)$ à v :

$$P(f)(v) = P(\lambda)v = 0 \Rightarrow P(\lambda) = 0$$

Donc toute valeur propre λ est racine de tout polynôme annulateur.

Conséquence utile :

Corollaire 3.5. *Les valeurs propres sont des racines du polynôme minimal.*

Rappelons que le polynôme minimal μ_f est le polynôme annulateur unitaire de plus petit degré. Ses racines sont exactement les valeurs propres de f.

Corollaire 3.6. *L'ensemble des valeurs propres de f est incluse dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur de f.*

Donc si on connaît un polynôme annulateur (ex. $P(X) = (X-2)^2(X+1)$), alors :
Les valeurs propres sont parmi $\{2, -1\}$, mais il se peut que, par exemple, f n'ait que 2 comme valeur propre.

3.3.2 Calcul de la puissance k-ième d'une matrice par un polynôme annulateur

Pour fixer les idées, on prend ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme annulateur de A non nul (par exemple, on peut prendre $P = P_A$, le polynôme caractéristique).

Soit $d = \deg(P)$. Il est possible d'exprimer A^k ($k \in \mathbb{N}$) sans réduction de A, uniquement en utilisant P. Pour cela on utilise les étapes suivantes :

Étapes de la méthode :

1. On considère la division euclidienne :

$$X^k = Q_k(X)P(X) + R_k(X), \tag{3.5}$$

avec $\deg R_k < \deg P = d$. On écrit alors :

$$R_k(X) = a_0^{(k)} + a_1^{(k)}X + \cdots + a_{d-1}^{(k)}X^{d-1}.$$

avec $a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \cdots, a_{d-1}^{(k)}$ des nombres complexes (dépendant à priori de k) que l'on déterminera par le procédé qui va suivre.

D'après le théorème fondamental de l'algèbre, P possède d racines complexes deux à deux distinctes (comptées avec leurs ordres de multiplicités), notées $x_1, \ldots, x_h$, avec multiplicités $m_1, \ldots, m_h$, telles que $m_1 + \cdots + m_h = d$.

Pour chaque x_i, on substitue dans la relation (3.5) et ses dérivées jusqu'à l'ordre $m_i - 1$ et on substitue dans chacune de ces identités l'indéterminée X par x_i. Comme x_i $(1 \leq i \leq h)$ est une racine de P de multiplicité m_i alors x_i est -à fortiori- une racine du polynôme $Q_k(X)P(X)$, de multiplicité au moins m_i. Ceci entraîne que pour tout $\alpha \in \{0, 1, dots, m_i - 1\}$, le polynôme $(\frac{d}{dX})^\alpha (Q_k(X)P(X))$ s'annule en x_i. On obtient donc (par la substitution suscitée) le système d'équations :

$$\frac{d^\alpha}{dX^\alpha} X^k \bigg|_{X=x_i} = \frac{d^\alpha}{dX^\alpha} R_k(X) \bigg|_{X=x_i}, \quad \text{pour } \alpha = 0, \dots, m_i - 1.$$

Cela donne un système de m_i équations linéaires aux d inconnues $a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \cdots, a_{d-1}^{(k)}$. Au final, l'adjonction de tous ces systèmes d'équations (correspondants à $i = 1, 2, \dots, h$) donne un systèeme de $m_1 + m_2 + \cdots + m_h = d$ équations aux d inconnus $a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \cdots, a_{d-1}^{(k)}$ dont la réesolution donne les expressions de $a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \cdots, a_{d-1}^{(k)}$ en fonction de k ; c'est-à-dire l'expression explicite du polynôme $R_k(X)$ en fonction de k.

2. Une fois que le polynôme $R_k(X)(k \in \mathbb{N})$ est exprimé explicitement en fonction de k, on applique les deux polynômes de l'identité (3.5) à la matrice A. Ce qui donne :

$$A^k = Q_k(A)P(A) + R_k(A) = R_k(A).$$

Mais puisque $P(A) = 0$ (car P est un polynôme annulateur de A), il en résulte que :

$$A^k = R_k(A).$$

On obtient ainsi l'expression explicite de $A^k, (k \in \mathbb{N})$ en fonction de k.

3.4 Exercices

Exercice 3.1. *Soit La mtrice A définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

— *Calcule les valeurs propres de A.*
— *Pour chaque valeur propre, trouve un vecteur propre non nul.*

Exercice 3.2. *Etant donnée la matrice B,*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

— *Détermine les valeurs propres de B en résolvant l'équation caractéristique* $\det(B - \lambda I) = 0$.
— *Trouve des vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres.*

Exercice 3.3. *Considérons la matrice*

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

— *Calcule les valeurs propres de C.*
— *Soit $D = 2C$. Quelles sont les valeurs propres de D ?*
— *Montre que C et D sont diagonalisables (i.e. qu'il existe une base de vecteurs propres).*

Exercice 3.4. *Soit la matrice*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

— *Trouve les valeurs propres de E.*

— *Pour chaque valeur propre, trouve (si possible) un vecteur propre.*

Exercice 3.5. *Considérons la matrice*

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

— *Écris $F - \lambda I$.*

— *Calcule le déterminant $\det(F - \lambda I)$, c'est-à-dire le polynôme caractéristique.*

— *Résous ce polynôme pour trouver les valeurs propres.*

— *Si possible, déduis un vecteur propre pour au moins une des valeurs propres.*

Exercice 3.6. *Soit G la matrice définie par*

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

— *Écris l'équation caractéristique $\det(G - \lambda I) = 0$ en fonction de a, b, c, d.*

— *Montre que la somme des valeurs propres est $a + d$ (la trace) et que leur produit est $ad - bc$ (le déterminant).*

— *Applique ces résultats à la matrice B de l'exercice 2 pour vérifier que les valeurs propres obtenues coïncident.*

Exercice 3.7. *Soit A la matrice carrée d'ordre 3 donnée par :*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -10 & 4 & 4 \\ -6 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. *Calculer le polynôme caractéristique de f.*
2. *En déduire les valeurs propres de f et, pour chaque valeur propre, un vecteur propre associé.*
3. *Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, constituée de vecteurs propres de f. On notera P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$.*
4. *Écrire la matrice D associée à f relativement à la base $\mathcal{B}$. De quelle nature est D ?*
5. *Écrire la relation matricielle reliant A et D. Que peut-on dire de A et D ?*
6. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer explicitement A^n en fonction de n.*

Chapitre 4

Diagonalisation des endomorphismes

La diagonalisation d'un endomorphisme est un outil fondamental en algèbre linéaire qui permet de simplifier les calculs matriciels en transformant une matrice en une forme diagonale. Elle est particulièrement utile dans divers domaines tels que les systèmes différentiels, la physique quantique et les probabilités. Ce chapitre couvre en détail la notion de digonalisation, les conditions de diagonalisation et les méthodes pratiques avec des exemples pratiques.

4.1 Définitions

Définition 4.1. *Un endomorphisme f de E est diagonalisable s'il existe une base $(V_i)1 \leq i \leq n$ de E telle que la matrice associée à f relativement à $(V_i)1 \leq i \leq n$ soit diagonale, c'est à dire de la forme :*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda_i & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

La version matricielle de cette définition est la suivante.

Définition 4.2. *Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale ; autrement dit, s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale.*

La Proposition suivante peut être déduite des définitions précédentes.

Proposition 4.1. *Un endomorphisme f de E est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E qui soit constituée de vecteurs propres de f.*

Démonstration. Soit f un endomorphisme de E.
- Supposons que f est diagonalisable. Il existe donc une base $\mathcal{B} = (V_i)_i$ de E suivant laquelle f est représenté par une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda_i & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Par définition de la matrice associée à un endomorphisme, on a :

$$f(V_1) = \lambda_1 V_1, f(V_2) = \lambda_2 V_2, \cdots, f(V_n) = \lambda_n V_n.$$

Ces égalités montrent que les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont des valeurs propres de f et que les vecteurs $V_1, \cdots, V_n$ en sont respectivement des vecteurs propres associés. D'où $\mathcal{B} = (V_i)_i$ est une base de E

constituée de vecteurs propres de f.
- Inversement, supposons qu'il existe une base $\mathcal{B} = (V_i)_i$ de E qui soit constituée de vecteurs propres de f. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ les valeurs propres associées respectivement aux vecteurs propres $V_1, \cdots, V_n$ de f. On a donc :

$$f(V_1) = \lambda_1 V_1, f(V_2) = \lambda_2 V_2, \cdots, f(V_n) = \lambda_n V_n.$$

Il s'ensuit de ces égalités que la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B} = (V_i)_i$ est

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda_i & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

qui est visiblement diagonale. Ce qui montre que f est diagonalisable. □

Ce résultat nous conduit aux deux définitions suivantes.

Définition 4.3. *Soit f un endomorphisme de E. Diagonaliser f signifie "trouver une base de E suivant laquelle la matrice associée à f soit diagonale". D'après la proposition 4.1, ceci est équivalent à trouver une base de E qui soit constituée de vecteurs propres de f.*

Définition 4.4. *Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Diagonaliser A signifie «trouver une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale». D'après la proposition 4.1, ceci est équivalent à trouver une base de $\mathbb{K}^n$ qui soit constituée de vecteurs propres de A.*
On verra dans la pratique de la diagonalisation que la matrice P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ vers la nouvelle base trouvée (constituée de vecteurs propres de A).

Remarquons qu'il existe des endomorphismes (ou matrices) non diagonalisables. On peut donner des exemples.

Exemple 4.1. *Soit la matrice A*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A n'est pas diagonalisable. En effet, si on suppose le contraire, il existerait une matrice P vérifiant $P^{-1}AP = D$, où D est la matrice diagonale ayant la seule valeur propre $\lambda = 2$ sur la diagonale puisque A est une matrice triangulaire. Ceci est équivalent à :

$$A = PDP^{-1} = P(2I_3)P^{-1} = 2I_3$$

Ce qui n'est pas le cas.

4.2 Caractérisation des endomorphismes diagonalisables

La caractérisation des endomorphismes diagonalisables, qu'on donnera dans cette section dépend de deux notions importantes, à savoir la notion de la multiplicité d'une valeur propre et la notion du polynôme scindé.

4.2.1 Polynôme scindé

On introduit dans ce paragraphe la notion de polynômes scindés qui est une notion très importante de l'algèbre des polynômes.

Définition 4.5. *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On dit que P est scindé sur $\mathbb{K}$ si il est possible de décomposer P en produit de polynômes de degré un dans $\mathbb{K}[X]$. En d'autre termes, le nombre de racines de P dans $\mathbb{K}$ et que l'on compte avec leurs multiplicités est exactement égale à $\deg P$.*

Remarque 4.1. *Un polynôme peut ne pas être scindé sur un corps et être scindé sur un autre corps plus grand. Par exemple, le polynôme $P(X) = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ (car il est de degré 2 et ne possède aucune racine réelle) mais il est scindé sur $\mathbb{C}$ (puisqu'il se décompose en $P(X) = (X+i)(X-i)$).*

Propriété 4.1. *On a les propriétés suivantes sur la notion de polynôme scindé :*
1. Le produit de deux polynômes scindés sur $\mathbb{K}$ donne un polynôme scindé sur le même corps $\mathbb{K}$.
2. La somme de deux polynômes scindés sur $\mathbb{K}$ peut donner un polynôme non scindé sur $\mathbb{K}$.
3. Si P est scindé sur $\mathbb{R}$ alors P' est aussi scindé sur $\mathbb{R}$, et par récurrence, on obtient que $P^{(k)}$ est aussi scindé sur $\mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$.

On rappelle le théorème fondamental de l'algèbre très utile.

Théorème 4.1. *Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$. Autrement dit, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $k, (k \in \mathbb{N})$ possède exactement k racines complexes comptées avec leurs ordres de multiplicité.*

On voit ainsi que la notion de polynôme scindé n'est pas importante dans le corps $\mathbb{C}$.

Définition 4.6. *On dit d'un corps commutatif $\mathbb{K}$ qui vérifie la propriété*
" Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est scindé sur $\mathbb{K}$" qu'il est algébriquement clos.

4.2.2 Multiplicité d'une valeur propre

Définition 4.7. *Soient f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f. La multiplicité de λ (appelé aussi multiplicité algébrique) est le plus petit entier k tel que $(X-\lambda)^k$ divise le polynôme caractéristique $P_f(X)$ de f.*
Cet entier sera noté m_λ (ou souvent $m_a(\lambda)$.

Dans le but de simplifier l'énoncé du théorème (donnant une condition nécessaire et suffisante de la diagonalistion d'un endomorphisme) ci-après, certains ouvrages utilisent aussi une autre notion de multiplicité à savoir la multiplicité géométrique.

Définition 4.8. *On définit la multiplicité géométrique de λ, que l'on note souvent $m_g(\lambda)$, comme étant la dimension de l'espace propre E_λ associé à λ.*

On a le théorème :

Théorème 4.2. *Soit f un endomorphisme de E.Alors pour toute valeur propre λ de f,on a :*

$$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de la diagonalisation d'un endomorphisme.

Théorème 4.3. *Soit f un endomorphisme de E. Alors f est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Le polynôme caractéristique P_f de f est scindé sur $\mathbb{K}$,*
2. *Pour toute valeur propre λ de f, la dimension du sous espace propre associé à λ est égale à l'ordre de multiplicité de λ, (autrement dit $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$).*

Démonstration. 1. Supposons que f est diagonalisable et montrons que f satisfait les deux conditions (1) et (2) du théorème. Il existe donc une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice associée à f est diagonale, c'est à dire qu'elle s'écrit sous la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda_i & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. On a donc

$$P_f(x) = P_D(x) = \det(D - xI_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 - x & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - x & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda_i - x & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n - x \end{pmatrix}$$
$$= (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x) \cdots (\lambda_n - x).$$

On voit bien que P_f est un produit de polynômes de premier degré de $\mathbb{K}[x]$. Ce qui montre que P_f est scindé sur $\mathbb{K}$. La condition (1) du théorème est ainsi vérifiée.
Montrons maintenant que f satisfait la condition (2) du théorème.Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et Soient λ une valeur propre arbitraire de f et k sa multiplicité (algébrique). Par définition de k, il existe $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, tous distincts, tels que : $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} = \ldots = \lambda_{i_k} = \lambda$ et $\lambda_i \neq \lambda$ pour $i \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$. On a donc :

$$\begin{aligned} E_\lambda = \ker(D - xI_n) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, (D - \lambda I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \begin{pmatrix} (\lambda_1 - \lambda)x_1 = 0 \\ \vdots \\ (\lambda_n - \lambda)x_n = 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, x_i = 0 \text{ pour } i \notin \{i_1, \ldots, i_k\} \right\} \\ &= Vect\{(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})\} \end{aligned}$$

Ceci entraîne que $\dim E_\lambda = k$, c'est-à-dire que l'ordre de multiplicité de λ égale à la dimension de E_λ.La condition (2) du théeorème est donc satisfaite.

2. Inversement, supposonsque les deuxcondition (1) et (2) du théorème sont satisfaites et montrons que f est diagonalisable. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, (p \in \mathbb{N}^*)$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f et $k_1, \ldots, k_p$ leurs multiplicités srespectives. Le nombre de racines (dans $\mathbb{K}$) du polynôme P_f, comptées avec leurs ordres de multiplicité, est donc égale à $(k_1 + \ldots + k_p)$. Mais puisque P_f est supposé scindé sur $\mathbb{K}$, ce même nombre est aussi égale à $\deg P_f = n$; d'où :

$$k_1 + \ldots + k_p = n.$$

Par ailleurs, d'après la condition (2) du théorème, on a :

$$\dim E_{\lambda_i} = k_i \text{ pour tout } i = 1, \ldots, p.$$

Enfin, sachant que la somme $E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_p}$ est directe. Il s'ensuit de tout cela que :

$$\begin{aligned} \dim(E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}) &= \dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_p} \\ &= k_1 + \ldots + k_p \\ &= n = \dim E. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que l'on a :

$$E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p} = E.$$

Ainsi, en considérant une base $\mathcal{B}_i$ pour chaque sous espace propre E_{λ_i}, la famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_p$ sera une base de E constituée de vecteurs propres de f (puisque chaque $\mathcal{B}_i$ est constitué de vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ_i). On en déduit que f est diagonalisable, comme il fallait le prouver. La démonstration est achevée. $\square$

Le corollaire important suivant est une conséquence directe du théorème précédent.

Corollaire 4.1. *Soit f un endomorphisme de E. Si le polynôme caractéristique P_f de f est scindé sur $\mathbb{K}$ et ne possède que des racines simples (c'est à dire que f possède n valeurs propres toutes distinctes) alors f est diagonalisable.*

Démonstration. On montre que les deux conditions du théorème 4.3 sont satisfaites. Concernant la condition (1), elle est satisfaite par hypothèse même. Montrons que la condition (2) est aussi satisfaite. Etant donnée une valeur propre λ de f, on a d'une part : $m_g(\lambda) = \dim E_\lambda \geq 1$ et d'autre part (en vertu du théorème 4.2 : $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) = 1$. D'où l'on conclut que $m_g(\lambda) = 1 = m_a(\lambda) = 1$. Comme ceci étant vrai pour toute valeur propre λ de f, la condition (2) du théorème 4.3 est bien satisfaite. L'endomorphisme f est donc diagonalisable. Ce qui achève cette démonstration. □

Le résultat suivant (qui concerne les matrices symétriques) donne aussi une condition suffisante de diagonalisation.

Théorème 4.4. *Soit f un endomorphisme de matrice $A = (a_{ij}), i, j = 1, \dots, n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors :*

1. *toutes les valeurs propres de A sont réelles ;*
2. *A est diagonalisable ;*
3. *on peut choisir comme base de vecteurs propres une base telle que la matrice de passage P vérifie $P^{-1} = {}^tP$ (une telle base est dite **orthonormée**).*

Le fait d'avoir une base orthonormée permet d'écrire l'inverse de la matrice de passage sans calcul supplémentaire (car $P^{-1} = {}^tP$).

Ce théorème est un cas particulier d'un résultat plus général, pour une matrice A à valeurs complexes qui est **hermitienne**, c'est-à-dire telle que $A = {}^t\bar{A}$, soit $a_{j,i} = \bar{a}_{i,j}$, où $\bar{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z. Les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont réelles, la matrice est diagonalisable et il existe une matrice de vecteurs propres **unitaire**, à savoir telle que $P^{-1} = {}^t\bar{P}$.

Démonstration. Soit $v \in \mathbb{C}^n$ un vecteur non nul. Considérons le produit ${}^tvv$. C'est la somme des modules au carré des coordonnées de v, donc un réel strictement positif.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine du polynôme caractéristique $P_A(X)$, et v un vecteur propre associé à λ. Alors :

$$ {}^tvAv = \lambda {}^tvv $$

Prenons le conjugué de la transposée de ce produit (rappelons que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA)$:

$$ \overline{{}^tvAv} = {}^tvAv = \lambda {}^tvv $$

puisque A est symétrique. On en déduit que $\lambda = \bar{\lambda}$, donc $\lambda \in \mathbb{R}$.

Considérons l'ensemble des vecteurs orthogonaux à v :

$$ E = \left\{ u \in \mathbb{R}^n \mid {}^tuv = {}^tvu = 0 \right\} $$

L'ensemble E est le noyau d'une application linéaire de rang 1 (car v est non nul). C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension $n-1$.

Soit $u \in E$:

$$ {}^tuAv = {}^t({}^tvAu) = {}^tuAv = \lambda {}^tuv = 0 $$

Donc $Au \in E$, on dit que E est stable par A.

On admet ici que dans tout espace vectoriel de dimension finie, il est possible de choisir une base orthonormale (par exemple grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt).

Soient $u_1, \dots, u_{n-1}$ une base orthonormale de E. Quitte à diviser v par $\sqrt{{}^tvv}$, on peut supposer que ${}^tvv = 1$. Par construction, $(v, u_1, \dots, u_{n-1})$ est donc une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Notons P la matrice de ses vecteurs colonnes : $P^{-1} = {}^tP$.

Au travers du changement de base de matrice de passage P, A est transformée en une matrice diagonale par blocs :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

En effet, la première colonne est nulle après le premier terme car v est un vecteur propre associé à λ. La première ligne est nulle après le premier terme car E est stable par A, donc les images de $u_1, \ldots, u_{n-1}$ appartiennent à E.

De plus :

$$^t(P^{-1}AP) = {}^tP\,{}^tA\,{}^t(P^{-1}) = P^{-1}AP$$

De sorte que $P^{-1}AP$ est symétrique, donc B l'est aussi. D'où le résultat, par récurrence sur n. □

On peut combiner les résultats précédents pour montrer le théorème suivant qui donne une autre condition nécéssaire et suffisante de diagonalisation d'un endomorphisme.

Théorème 4.5. *Soient f un endomorphisme de E et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, (p \in \mathbb{N}^*)$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f. Alors f est diagonalisable si et seulement si l'on a :*

$$E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p} = E.$$

4.3 Pratique de la diagonalisation

Soit à diagonaliser un endomorphisme f de matrice A dans une base finie, on passe par les étapes suivantes :
1. Calculer et Factoriser le polynôme caractéristique :
Dans le but de calculer les valeurs propres de f, on factorise le polynôme caractéristique associé, pour cela on fait des combinaisons des lignes ou des colonnes de A pour voir si le polynôme caractéristique de A est scindé. Supposons pour les autres étapes que le polynôme caractéristique s'écrit sous la forme :

$$P_A(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

2. Trouver une base de chaque sous-espace propre E_{λ_i} :
Pour cela et pour chaque valeur propre λ_i on cherche une base de E_{λ_i}, on a donc k systèmes linéaires à résoudre. Si pour l'une des valeurs propres λ_i, le système $(A - \lambda_i)x = 0$, l'ensemble des solutions est de dimension strictement inférieure à m_i), alors la matrice n'est pas diagonalisable. Supposons qu'on a bien trouvé une base de m_i vecteurs propres pour chaque valeur propre λ_i. On afait arranger les vecteurs qu'on a trouvé pour chaque valeur propre (et on mémorise l'ordre), il y en a n en tout. La matrice dont les colonnes sont ces n vecteurs est la matrice de passage P de la base canonique à la nouvelle base.
3. Calculer l'inverse de P :
Après avoir calculer l'inverse de P, On a explicité la diagonalisation : $P^{-1}AP = D$, avec D est la matrice diagonale cherchée. Attention à respecter le même ordre dans l'écriture des valeurs propres, et dans celle des colonnes de P.
4. Vérifier les calculs :
Le plus simple est de calculer PDP^{-1}, on doit retrouver A. On peut aussi vérifier pour chacun des vecteurs qu'on a trouvé qu'il est bien vecteur propre.

4.3.1 Exemples

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
On montre facilement que le polynôme caractéristique de A, $P_A(x)$ s'écrit :

$$P_A(x) = (x-2)(x-1)(x+4)$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = -4$, et les sous-espaces propres associées sont :

$$E_1 = Vect(1,1,1), E_2 = Vect(4,3,-2) \text{ et } E_{-4} = Vect(2,-3,2).$$

La matrice A est une matrice 3×3 ayant trois valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable et semblable à la matrice diagonale D qui réalise la relation $P^{-1}AP = D$, avec :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -12 & -3 \end{pmatrix}$.
On montre facilement que le polynôme caractéristique de B, $P_B(x)$ s'écrit :

$$P_B(x) = (x+1)(x-1)^2.$$

Les valeurs propres de B sont donc $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$, la valeur propre λ_1 est de multiplicité 1 et la valeur propre λ_2 est de multiplicité 2. Les sous-espaces propres associées sont :

$$E_{-1} = Vect(1,0,2) \text{ et } E_1 = Vect\{(1,0,1),(3,1,0)\}.$$

L'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous espace propre associé, la matrice B est donc diagonalisable et semblable à la matrice diagonale D qui réalise la relation $P^{-1}BP = D$, avec :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.4 Diagonalisaion et puissances d'un endomorphisme

Une des plus importante application de la diagonalisation des endomorphismes est le calcul facile des puissances de cet endomorphisme.

Soit f un endomorphisme diagonalisable représenté par une matrice A, il existe donc une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D et il existe une matrice de passage P telles que $P^{-1}AP = D$, c'est à dire que $A = PDP^{-1}$.

La matrice D associée à l'endomorphisme f relativement à la nouvelle base $\mathcal{B}$ s'écrit :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, p \leq n$ sont les valeurs propres de la matrice A représentant f dans une autre base (généralement canonique).

On peut donc calculer les puissances de A comme suit :

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$$
$$A^3 = A^2A = (PD^2P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^3P^{-1}$$

Et ainsi de suite...

Par récurrence, on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$A^k = PD^kP^{-1} \tag{4.1}$$

Puisque D est une matrice diagonale, il est facile d'élever D à la puissance k :

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Ainsi, le calcul de A^k en fonction de k découle immédiatement de la formule (4.1). Cela simplifie considérablement les calculs dans les applications numériques.

4.5 Exercices

Exercice 4.1. *Expliquer sans calculs pourquoi la matrice suivante n'est pas diagonalisable :*

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.2. *Diagonaliser la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

On donnera aussi la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

Exercice 4.3. *Soit la matrice carrée M donnée par*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer les valeurs propres de M.*
2. *Montrer que M est diagonalisable.*
3. *Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.*
4. *On a $D = P^{-1}MP$. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer M^k en fonction de D^k, puis calculer M^k.*

Exercice 4.4. *Soit m un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1. *Quelles sont les valeurs propres de f ?*
2. *Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme est-il diagonalisable ?*
3. *On suppose que $m = 2$. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.*

Exercice 4.5. *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Factoriser le polynôme caractéristique de A. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Dans $\mathbb{C}$?

Exercice 4.6. *Soit A une matrice carrée d'ordre n. On suppose que A est inversible et que λ est une valeur propre de A.*

1. *Démontrer que $\lambda \neq 0$.*

2. *Démontrer que si v est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, alors il est vecteur propre de A^{-1} de valeur propre $\frac{1}{\lambda}$.*

Exercice 4.7. *Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = \mathrm{Id}_E$.*

1. *Démontrer que les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1.*
2. *Vérifier que pour tout $x \in E$, on a*

$$f(x - f(x)) = -(x - f(x)) \quad et \quad f(x + f(x)) = x + f(x),$$

   et en déduire que f admet toujours une valeur propre.

3. *Démontrer que si 1 et -1 sont valeurs propres, alors E est la somme directe des sous-espaces propres correspondants.*
4. *Traduire géométriquement sur un dessin dans le cas $n = 2$.*

Exercice 4.8. *Etant donnée la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de A.*
2. *Déterminer toutes les valeurs propres de A ainsi que leurs multiplicités algébriques.*
3. *Pour chaque valeur propre, déterminer une base de l'espace propre associé.*
4. *Montrer que A est diagonalisable.*
5. *Trouver une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. On exprimera explicitement la matrice diagonale en fonction des valeurs propres.*

Solution :

1. **Polynôme caractéristique.**
   On calcule le déterminant de $A - \lambda I_4$. En utilisant des opérations ou en observant le bloc de la matrice, on trouve

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 7)^2(\lambda - 3)^2,$$

   ce qui montre que les valeurs propres de A sont

$$\lambda_1 = 7 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 3,$$

   chacune de multiplicité algébrique 2.

2. **Vecteurs propres.**
   — Pour $\lambda = 7$ on résout $(A - 7I)x = 0$. Un calcul donne comme vecteurs propres indépendants

$$v_{7,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{7,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   — Pour $\lambda = 3$ on résout $(A - 3I)x = 0$. On obtient comme vecteurs propres indépendants

$$v_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Les quatre vecteurs ainsi trouvés sont linéairement indépendants.

3. **Diagonalisation.**

La somme des dimensions des sous-espaces propres est $2 + 2 = 4$, ce qui est égal à la dimension de l'espace. Par conséquent A est diagonalisable.

Une matrice de passage P peut être prise comme ayant ces vecteurs propres en colonnes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice diagonale D obtenue par la transformation de similarité $P^{-1}AP = D$ est

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

où les valeurs propres apparaissent selon l'ordre des colonnes choisies dans P.

Ainsi : La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (et évidemment sur $\mathbb{C}$) car elle admet une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres, et on a

$$A = P\,D\,P^{-1}.$$

Chapitre 5

Trigonalisation des endomorphismes

On considère un corps commutatif $\mathbb{K}$ (à notre niveau $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Reppelons la définition d'une matrice triangulaire.

Définition 5.1. *Une matrice $A = (a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite*
1- Triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ si $i > j$
2- Triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ si $j > i$.

Remarque 5.1. *Toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une certaine matrice triangulaire inférieure, et réciproquement.*
En effet, un endomorphisme représenté par une matrice triangulaire supérieure (resp.inférieure) relativement à une certaine base sera représenté par une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) relativement à une nouvelle base que l'on obtient en inversant l'ordre des vecteurs de la première base. Par exemple si T est triangulaire inférieure on peut vérifer qu'elle semblable à une matrice triangulaire supérieure en utilisant la matrice de passage

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

Pour fixer les idées, nous avons préféré ne travailler par la suite qu'avec les matrices triangulaires supérieures. Le choix des matrices triangulaires inférieures est bien sûr également possible, et ces deux choix sont équivalents en vertu de la remarque ci-dessus.

Définition 5.2 (Endomorphisme trigonalisable)**.** *Un endomorphisme f de E est dit **trigonalisable** s'il existe une base $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E suivant laquelle la matrice représentant f est triangulaire supérieure.*

La version matricielle de cette définition est la suivante :

Définition 5.3 (Matrice trigonalisable)**.** *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :*

$$P^{-1}AP \text{ soit triangulaire supérieure.}$$

Dans la pratique, ces deux définitions signifient que :

Définition 5.4. *(Trigonalisation)*

— *Trigonaliser un endomorphisme f de E signifie : trouver une base $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E suivant laquelle la matrice représentant f est triangulaire supérieure.*

— *Trigonaliser une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ signifie : trouver une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.*

5.1 Caractérisation des endomorphismes trigonalisables

La caractérisation des endomorphismes trigonalisables est donnée par le théeorème suivant :

Théorème 5.1. *Un endomorphisme f de E est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique P_f est scindé sur $\mathbb{K}$.*

La version matricielle de ce théorèeme est la suivante :

Théorème 5.2. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique P_A est scindé sur $\mathbb{K}$.*

Démonstration. On travaille sous la version matricielle.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons que A est trigonalisable, et montrons que son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.
Comme A est supposée trigonalisable, elle est semblable à une certaine matrice triangulaire supérieure T, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n-1} & t_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & t_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Puisque T est triangulaire supérieure, son polynôme caractéristique est :

$$P_T(X) = \det(T - XI) = \prod_{i=1}^{n}(t_{ii} - X)$$

Ce polynôme est effectivement scindé (c'est un produit de polynômes de degré 1 sur $\mathbb{K}$).
Or, comme $A \sim T$, on a $P_A(X) = P_T(X)$, donc P_A est scindé.
Inversement, montrons la propriété suivante :

(P) : « Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ est trigonalisable. »

Nous procédons par récurrence sur $n, n \geq 2$.

Cas $n = 2$: Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ tel que P_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire que A possède deux valeurs propres (éventuellement égales) dans $\mathbb{K}$.
Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ associé à A dans la base canonique.
Soit λ_1 une valeur propre de A, et soit V_1 un vecteur propre associé. Complétons V_1 en une base de $\mathbb{K}^2$ avec un vecteur W_2. On a alors :

$$f(V_1) = \lambda_1 V_1 = \lambda_1 V_1 + 0 \cdot W_2$$
$$f(W_2) = aV_1 + bW_2 \quad \text{pour certains } a, b \in \mathbb{K}$$

Dans la nouvelle base (V_1, W_2), la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

C'est une matrice triangulaire supérieure, donc f est trigonalisable, et ainsi A aussi.

Hérédité (passage de $n-1$ à n) : Soit $n \geq 3$, et supposons que la propriété (P) est vraie pour $n-1$. Montrons qu'elle l'est pour n.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que P_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, donc A admet n valeurs propres (comptées avec leurs ordre de multiplicité). On montre que A est trigonalisable.
Soit λ_1 une valeur propre de A, et soit $V_1 \in \mathbb{K}^n$ un vecteur propre associé.
Complétons V_1 en une base de $\mathbb{K}^n$, notée $(V_1, W_2, \ldots, W_n)$. Notons aussi f l'endomorphisme associée à A relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Dans la nouvelle base $(V_1, W_2, \ldots, W_n)$, l'endomorphisme f correspondant à A est repréesentée par la matrice B, où :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

où : $L \in \mathcal{M}_{1,(n-1)}(\mathbb{K})$, (qui est une matrice ligne), et
$M \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, représentant l'action de f sur le sous-espace supplémentaire.

Comme les deux matrices A et B sont semblables (car elles représentent le même endomorphisme f), on a :

$$P_A(\lambda) = P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_n)$$

Or, B étant de la forme bloc :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0 & M \end{pmatrix} \Rightarrow B - \lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & L \\ 0 & M - \lambda I_{n-1} \end{pmatrix}$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs donne :

$$\det(B - \lambda I_n) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot \det(M - \lambda I_{n-1}) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot P_M(\lambda)$$

Ainsi, $P_M(\lambda)$ divise $P_A(\lambda)$. Comme P_A est scindé sur $\mathbb{K}$ par hypothèse, on en déduit que P_M est aussi scindé sur $\mathbb{K}$.
Comme $M \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, l'hypothèse de récurrence s'applique : M est donc trigonalisable. Il existe donc une matrice $Q \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ telle que :

$$Q^{-1}MQ \text{ est triangulaire supérieure.}$$

Définissons la matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$$

Alors on a :

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & LQ \\ 0 & Q^{-1}MQ \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure, car $Q^{-1}MQ$ l'est par construction.
On a donc :

$$A \sim B \sim P^{-1}BP \Rightarrow A \sim P^{-1}BP$$

Ainsi, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Cela montre que A est trigonalisable. Ce qui termine la démonstration par récurrence et la démonstration du théorème. □

Le corps $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos, d'où le Corollaire :

Corollaire 5.1. *Sur $\mathbb{C}$ toutes les matrices sont trigonalisables.*

Exemple 5.1 (Exemple pratique de trigonalisation d'une matrice 3×3). *Soit la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 1 & -X & 1 \\ 0 & 1 & -X \end{vmatrix}$$

Développement par la première ligne :

$$P_A(X) = -X \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -X \end{vmatrix} = -X(X^2 - 1) + X = -X^3 + 2X$$

Donc :

$$P_A(X) = -X(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$$

Alors P_A est scindé sur $\mathbb{R}$.
Comme P_A est scindé, la matrice A est trigonalisable.

Recherche d'une base propre (des sous espaces propres)

— *Pour $\lambda = 0$, on résout $Av = 0$:*

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

— *Pour $\lambda = \sqrt{2}$, on résout $(A - \sqrt{2}I)v = 0$, on trouve :*

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

— *Pour $\lambda = -\sqrt{2}$, on résout $(A + \sqrt{2}I)v = 0$, on trouve :*

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de la forme trigonalée (la matrice T) :

$$T = P^{-1}AP \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Aors la matrice A est semblable à la matrice triangulaire supérieure T dans la base (v_1, v_2, v_3). Elle est donc trigonalisable.

Exemple 5.2. *(d'une matrice non diagonalisable mais trigonalisable) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}$ et soit A la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & -1 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 0 & 2-X \end{vmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = (X-1)^2(X-2)$. *Alors* P_A *est scindé sur* $\mathbb{R}$ *et la matrice A est trigonalisable.*

Recherche des sous espaces propres E_1 ***et*** E_2

— *Pour* E_1, *on résout* $Av = v$, *c'est à dire :*

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow E_1 = Vect(V_1), V_1 = {}^t(1, -1, -1).$$

— *Pour* E_2, *on résout* $(Av = 2v$, *on trouve :*

$$E_2 = Vect(1, -1, -1).$$

Cela prouve que A n'est pas diagonalisable puisque la valeur propre $\lambda_1 = 1$ *est une valeur propre d'ordre 2 mais l'espace propre correspondant* E_1 *est de dimension 1.*

Trigonalisons maintenant la matrice A :

Il est clair que (V_1, e_2, e_3) *est une base de* $\mathbb{R}^3$. *On introduit alors la matrice de passage* P_1 *de* (e_1, e_2, e_3) *à* (V_1, e_2, e_3), *on obtient :*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P_1^{-1}AP_1 = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Posons $A_2' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, *cette matrice est diagonalisable puisqu'elle a deux valeurs propres distinctes. Les deux vecteurs propres associés sont* ${}^t(0,1), {}^t(1,1)$.

Si $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, *alors*

$$Q_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Q_2^{-1}A_2'Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit (en suivant la démonstration du Théorème 5.2) que

$$P_2^{-1}A_1P_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T.$$

On a donc finalemnt si l'on pose

$$P = P_1P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP = P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2 = P_2^{-1}A_1P_2 = T.$$

Les colonnes de P donnent donc une base de $\mathbb{R}^3$ *dans laquelle la matrice A se trigonalise.*

5.2 Trigonalisation et puissances k-ième de certain endomorphismes

Soit $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$. On suppose que la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure, soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de f :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Alors nous avons les propriétées suivantes :

— Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est encore triangulaire supérieure.

— Les éléments diagonaux de T^k sont λ_i^k, c'est-à-dire :

$$(T^k)_{ii} = \lambda_i^k \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, n\}$$

— Si T est strictement triangulaire (diagonale nulle), alors $T^n = 0$, ctte matrice serait donc nilpotente.

On souhaite calculer T^k, avec T triangulaire. On sait que T^k reste triangulaire, et que ses diagonaux sont simplement les puissances des diagonaux de T. Les autres éléments peuvent être obtenus par récurrence ou multiplication matricielle directe.

Nous allons voir dans cette section que lorsque la matrice T d'un endomorphisme f n'est pas diagonalisable mais seulement trigonalisable et possède une unique valeur propre, il est possible d'exprimer les puissances de T, $T^k, (k \in \mathbb{N})$ en fonction de k par le procédé de trigonalisation. La méthode utilisée se sert (en plus de la trigonalisation) de la formule du binôme sous sa forme matricielle, où l'une des deux matrices du binôme en question est nilpotente. Rappelons d'obord la notion d'endomorphisme nilpotent et la formule du binôme matricielle.

5.2.1 Endomorphismes nilpotents et matrices nilpotentes

Définition 5.5. *Un endomorphisme f de E est dit nilpotent s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel k vérifiant cette propriété s'appelle l'indice de nilpotence de f.*

La version matricielle de cette définition est la suivante :

Définition 5.6. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel k vérifiant cette propriété s'appelle l'indice de nilpotence de A.*

Exemple 5.3. *La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice 2. On a en effet $A^2 = 0$ et $A^1 = A \neq 0$.*

Nous allons donner dans les deux propositions suivantes deux propriétées importantes concernant les matrices nilpotentes :

Proposition 5.1. *Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si son unique valeur propre est 0, et celle-ci est de multiplicité n.*

Proposition 5.2. *Toute matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est d'indice de nilpotence au plus égale à n.*

Binôme de Newton matricielle

Nous allons voir que la formule de binôme de Newton qu'on connait sur $\mathbb{R}$ sous la forme :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, (x+y)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i y^{k-i}.$$

reste valable dans l'anneau des matrice sous certaine condition.

Formule du binôme matricielle :

Soient n un entier naturel et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent (c'est -à-dire qui vérifient $AB = BA$). Alors, on a :

$$(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i}.$$

5.2.2 Méthode de calcul de A^k :

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant une unique valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, de multiplicité algébrique n (donc A est trigonalisable). Le polynôme caractéristique P_A de A, de degré n, admet donc λ comme unique racine de multiplicité n.

Cela implique que P_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et s'écrit précisément :

$$P_A(X) = (-1)^n (X - \lambda)^n$$

En appliquant le théorème de Cayley-Hamilton à la matrice A, on obtient :

$$(A - \lambda I_n)^n = 0_n$$

ce qui signifie que la matrice $N := A - \lambda I_n$ est nilpotente d'indice au plus n.

La décomposition $A = \lambda I_n + N$ permet alors de déterminer la forme explicite de A^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$. En effet, étant donné que λI_n et N commutent (car $\lambda I_n N = N \lambda I_n = \lambda N$), on peut appliquer la formule du binôme matricielle pour développer $A^k = (\lambda I_n + N)^k$:

$$A^k = (\lambda I_n + N)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\lambda I_n)^{k-j} N^j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N^j$$

Mais, puisque $N^j = 0_n$ pour $j \geq n$, on aura :

$$A^k = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N^j$$

C'est en utilisant cette dernière formule qu'on détermine une forme explicite de A^k en fonction de k.

Remarque 5.2. *Lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulisable mais possède plus d'une valeur propre, la méthode décrite précédemment, (consistant à écrire $A = \lambda I_n + N$ avec N nilpotente), ne fonctionne plus telle quelle. En effet, l'application de la formule du binôme matricielle exige la commutation des deux matrices concernées, et cette commutation n'est pas vérifiée en général.*
Il est à noter que, même dans le cas général, la formule du binôme matricielle peut servir pour calculer A^k ; toutefois, la décomposition utilisée pour T (ou A) n'est plus triviale comme dans le cas $T = \lambda I_n + N$ et relève d'une stratégie plus élaborée.
On montre plus précisément que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$, il existe deux matrices D et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$A = D + N,$$

avec :

- *D diagonalisable,*
- *N nilpotente,*
- *D et N commutent, c'est-à-dire $DN = ND$.*

Une telle décomposition est, de plus, unique et est connue sous le nom de décomposition de Dunford de A.
Nous allons voir ces détails dans le prochain chapitre (Jordanisation des endomorphismes).

Exemple 5.4. *Soit à calculer la puissance k-ième ($k \in \mathbb{N}$) de la matrice réelle d'ordre 3 suivante :*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(X) = -(X - 2)^3$$

On voit alors que P_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et possède un unique zéro $\lambda = 2$, de multiplicité 3 ; autrement dit, A possède une unique valeur propre $\lambda = 2$, de multiplicité égale à 3.

La méthode décrite précédemment s'applique alors pour déterminer une forme explicite de A^k en fonction de $k \in \mathbb{N}$.

Décomposons A sous la forme :

$$A = 2I_3 + N, \quad \textit{avec} \quad N = A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le théorème de Cayley-Hamilton appliqué à A assure que N est nilpotente d'indice ≤ 3. D'autre part, les deux matrices $2I_3$ et N commutent.
Par conséquent, on peut appliquer la formule du binôme matricielle pour développer $(2I_3 + N)^k$, soit pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k = (2I_3 + N)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (2I_3)^{k-j} N^j$$

Or, $N^j = 0_3$ pour tout $j \geq 3$, donc :

$$A^k = 2^k \binom{k}{0} I_3 + 2^{k-1} \binom{k}{1} N + 2^{k-2} \binom{k}{2} N^2, \ \textit{donc}$$

$$A^k = 2^k I_3 + k \cdot 2^{k-1} N + \frac{k(k-1)}{2} \cdot 2^{k-2} N^2$$

Les calculs donnent :

$$N^2 = 3 \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^k = 2^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + k \cdot 2^{k-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \frac{k(k-1)}{2} \cdot 2^{k-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, en simplifiant les coefficients, on obtient :

$$A^k = \begin{pmatrix} (-3k^2 - k + 8) \cdot 2^{k-3} & (-3k^2 + 11k) \cdot 2^{k-3} & (3k^2 + k) \cdot 2^{k-3} \\ -k \cdot 2^{k-1} & (2-k) \cdot 2^{k-1} & k \cdot 2^{k-1} \\ (-3k^2 - 5k) \cdot 2^{k-3} & (-3k^2 + 7k) \cdot 2^{k-3} & (3k^2 + 5k + 8) \cdot 2^{k-3} \end{pmatrix}$$

Exemple 5.5 (Calcul de A^k en utilisant le polynôme annulateur P_A)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On se propose de caluler les puissances de A, $A^k, (k \in \mathbb{N})$ en fonction de k.

La matrice est triangulaire supérieure, donc son polynôme caractéristique est :

$$P_A(X) = (1 - X)(2 - X)^3 = (X - 1)(X - 2)^3.$$

Les racines de P_A sont $x_1 = 1$ (racine simple) et $x_2 = 2$ (racine triple), donc, la méthode ci-dessus ne marche pas. On procède par les polynômes annulateurs de A.
On effectue la division Euclidienne de X^k par $P_A(X)$ qui s'écrit :

$$X^k = Q_k(X) P_A(X) + R_k(X),$$

où Q_k et R_k sont des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ (qui dépendent à priori de k),avec $\deg R_k < \deg P_A = 4$. *On a donc* $\deg R_k \leq 3$, *ce qui permet d'écrire $R_k(X)$ sous la forme :*

$$R_k(X) = a_k X^3 + b_k X^2 + c_k X + d_k.$$

avec a_k, b_k, c_k et d_k des nombres réels (dépendants à priori de k) que l'on déterminera. On a par suite l'identité :

$$X^k = Q_k(X)P_A(X) + a_k X^3 + b_k X^2 + c_k X + d_k.$$

On substitue dans cette identité et ses dérivées successives l'indéterminée X par chacune des racines de P, qui sont $X = 1$ et $X = 2$ pour trouver :

$$\begin{aligned} X = 1: &\qquad 1^k = a_k + b_k + c_k + d_k \quad \textit{(1)} \\ X = 2: &\qquad 2^k = 8a_k + 4b_k + 2c_k + d_k \quad \textit{(2)} \\ \textit{Dérivée}: &\qquad k2^{k-1} = 12a_k + 4b_k + c_k \quad \textit{(3)} \\ \textit{Seconde dérivée}: &\qquad k(k-1)2^{k-2} = 12a_k + 2b_k \quad \textit{(4)} \end{aligned}$$

Ici Pour la racine $x_1 = 1$, qui est racine simple, nous avons substitué X par $x_1 = 1$ uniquement dans l'identité, mais pour la racine $x_2 = 2$, qui est racine triple, nous avons considéré l'identité ainsi que sa dérivée et sa dérovée seconde et nous avons substitué X par $x_2 = 2$, sans oublier que $P_A(1) = P_A(2) = P'_A(A) = P''_A(2) = 0$. *La résolution du système (1)–(4) donne :*

$$\begin{cases} a_k = (k^2 - 5k + 8) \cdot 2^{k-3} - 1 \\ b_k = (-5k^2 + 29k - 48) \cdot 2^{k-3} + 6 \\ c_k = (2k^2 - 13k + 24) \cdot 2^{k-1} - 12 \\ d_k = (-k^2 + 7k - 14) \cdot 2^{k-1} + 8 \end{cases}$$

On applique l'identité à la matrice A, on trouve :

$$A^k = a_k A^3 + b_k A^2 + c_k A + d_k I_4, (\textit{ puisque } P_A(A) = 0).$$

En calculant A^2 puis A^3 et en les substituant dans le membre droit de cette dernière formule, on aboutit à :

$$A^k = \begin{pmatrix} a_k + b_k + c_k + d_k & -7a_k - 3b_k - c_k & 26a_k + 10b_k + 3c_k & 13a_k + 4b_k + c_k \\ 0 & 8a_k + 4b_k + 2c_k + d_k & -12a_k - 4b_k - c_k & 18a_k + 7b_k + 2c_k \\ 0 & 0 & 8a_k + 4b_k + 2c_k + d_k & 12a_k + 4b_k + c_k \\ 0 & 0 & 0 & 8a_k + 4b_k + 2c_k + d_k \end{pmatrix}.$$

En remplaçant les valeurs de a_k, b_k, c_k et d_k, on obtient l'expression explicite suivante de A^k :

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 - 2^k & (k+4)2^{k-1} - 2 & (k^2 - k + 8)2^{k-3} - 1 \\ 0 & 2^k & -k2^{k-1} & (9k - k^2)2^{k-3} \\ 0 & 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Remarque 5.3. *Remarquons que ni la diagonalisation, ni la trigonalisation ne permettent d'obtenir une telle formule, car A n'est pas diagonalisable et possède plusieurs valeurs propres. La méthode par polynôme annulateur est donc essentielle dans ce cas.*

5.3 Exercices

Exercice 5.1. *Soit $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ un endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Remarquer que la matrice A est déjà triangulaire supérieure.*
2. *Déterminer son polynôme caractéristique et ses valeurs propres.*
3. *Montrer que A est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas diagonalisable.*
4. *Si possible, trouver une base de $\mathbb{C}^3$ donnant une autre forme triangulaire pour A.*

Exercice 5.2. *Soit*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminer le polynôme caractéristique de B et ses valeurs propres.*
2. *Montrer que B est trigonalisable mais pas nécessairement diagonalisable.*
3. *Construire une matrice Q telle que $Q^{-1}BQ$ soit triangulaire supérieure.*

Exercice 5.3. *Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que son polynôme caractéristique se scinde complètement sur $\mathbb{R}$.*

1. *Expliquer pourquoi A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$.*
2. *Donner une procédure pour construire une base adaptée à cette trigonalisation.*
3. *Appliquer cette procédure à une matrice de ton choix (par exemple avec valeurs propres $1, 2, 3$).*

Exercice 5.4. *Soit*

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de D et déterminer ses valeurs propres.*
2. *Montrer que D est trigonalisable dans $\mathbb{C}$.*
3. *Si possible, construire une matrice R telle que $R^{-1}DR$ soit triangulaire supérieure.*

Exercice 5.5. *Soit*

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de E et ses valeurs propres.*
2. *Montrer que E est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.*
3. *Trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}EP$ soit triangulaire supérieure, et écrire explicitement cette matrice triangulaire.*

Exercice 5.6. *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que f est trigonalisable ;*
2. *Montrer que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1. Montrer que $u = (1, 1, 0)$ est un vecteur non-nul de cet espace propre.*
3. *Montrer que $v = (0, 0, 1)$ est tel que $(f - id_{\mathbb{R}^3})(v) = u$;*
4. *Chercher un vecteur propre w associé à la valeur propre 2. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice T de f dans la base (u, v, w) ;*
5. *Calculer $f^k(v)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire T^k ;*
6. *Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Chapitre 6

Jordanisation des endomorphismes

La réduction de Jordan est ce qu'on peut faire de mieux pour une matrice non diagonalisable. Même si elle est difficile à décrire précisément, il est bon de savoir que derrière la fonction `Jordan` des logiciels de calcul formel se cache une méthode utile et puissante.
Cela étant puisqu'il n'est pas demandé de calculer à la main une forme réduite de Jordan en dimension supérieure à 4, il y a des logiciels pour cela. Nous nous contenterons donc d'indiquer la démarche sur des exemples en dimension réduite.

Une des applications la plus importante de la Jordanisation est la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires (à coefficients constants).

Pour mieux comprendre la jordanisation, nous proposons d'entammer une notion plus générale que nous allons utiliser, qui est la notion de de Diagonalisation d'un endomorphisme (ou d'une matrice) par blocs d'une seule valeur propre.

6.1 Diagonalisation par blocs d'une seule valeur propre

Nous allons généraliser dans cette section la notion des espaces propres d'un endomorphisme f de E afin d'obtenir de nouveaux espaces, utiles notamment pour des méthodes de réduction plus approfondies, nous allons donner les résultats sans démonstrations, pour plus de détails voir [4].

Définition 6.1. *Soient f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f de multiplicité algébrique k ($k \in \mathbb{N}^*$). On appelle espace caractéristique (ou espace propre généralisé) de f associé à la valeur propre λ, le sous espace vectoriel de E, noté $\chi_f(\lambda)$ (ou simplement χ_λ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur f) et défini par :*

$$\chi_f(\lambda) = \ker(f - \lambda Id_E)^k.$$

6.1.1 Propriétées des espaces caractéristiques

Théorème 6.1 (Stabilité)**.** *Soient f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f. Alors l'espace caractéristique de f associé à λ est stable par f. Autrement dit, on a :*

$$f(\chi_\lambda) \subset \chi_\lambda.$$

Théorème 6.2 (Supplémentarité)**.** *Soit f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique P_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Soient aussi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, (p \geq 1)$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f et $k_1, k_2, \ldots, k_p$ leurs multiplicités (algébriques) respectives. Alors les espaces caractéristiques de f sont en somme directe et on a :*

$$\chi_{\lambda_1} \oplus \chi_{\lambda_2}, \oplus \cdots \oplus \chi_{\lambda_p} = E.$$

Théorème 6.3 (la dimension, l'endomorphisme restreint)**.** *Soient f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f dont les multiplicités algébrique et minimale (degré du polynôme minimal) sont désignées respectivement par k et m ($1 \leq m \leq k$). Alors, on a :*

$$\dim \chi_f(\lambda) = k.$$

De plus, l'endomorphisme restreint f_λ de f à l'espace caractéristique $\chi_f(\lambda)$ a pour polynôme caractéristique

$$P_{f_\lambda}(X) = (-1)^k (X-\lambda)^k.$$

et pour polynôme minimal

$$\mu_{f_\lambda}(X) = (X-\lambda)^m.$$

6.1.2 Espaces caractéristiques sont limite d'une chaîne de sous-espaces vectoriels

Théorème 6.4. *Soit f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f de multiplicité algébrique k ($k \in \mathbb{N}^*$). Soit aussi m ($1 \leq m \leq k$) la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme minimal de f. Alors, on a :*

$$\ker(f-\lambda Id_E) \underset{\neq}{\subsetneq} \ker(f-\lambda Id_E)^2 \underset{\neq}{\subsetneq} \cdots \underset{\neq}{\subsetneq} \ker(f-\lambda Id_E)^m = \ker(f-\lambda Id_E)^{m+1} = \cdots = \chi_f(\lambda),$$

où $\chi_f(\lambda)$ désigne l'espace caractéristique associé à λ.

6.1.3 Description de la réduction par blocs

Soit f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique P_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Soient aussi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, (p \geq 1)$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f et $k_1, k_2, \ldots, k_p$ leurs multiplicités (algébriques) respectives, et soient $\chi_{\lambda_1}, \chi_{\lambda_2}, \ldots, \chi_{\lambda_p}$ les sous-espaces caractéristiques de f associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_i, 1 \leq i \leq p$. Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, on note f_i l'endomorphisme restreint de f à χ_{λ_i}.

On sait d'après ce qui précède que les sous-espaces caractéristiques χ_{λ_i}, $(1 \leq i \leq p)$ de E sont en somme directe, égale à E. En fixant donc, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, une base $\mathcal{B}_i$ de χ_{λ_i}, on obtient $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ comme base de E.

Par suite, vu que les espaces χ_{λ_i} $(1 \leq i \leq p)$ sont tous stables par f, la matrice associée à f relativement à $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs, égale précisément à :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p}(f_p) \end{pmatrix}.$$

En outre, chaque matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(f_i)$ est d'ordre $m_a(\lambda_i)$ (la multiplicité algébrique de λ_i) et admet λ_i comme unique valeur propre.

Définition 6.2. *Étant donné un endomorphisme f de E, on appelle diagonalisation de f par blocs d'une seule valeur propre le procédé de représentation de f par une matrice diagonale par blocs, où chaque bloc est une matrice carrée possédant une unique valeur propre.*

L'analogue matriciel de cette définition est le suivant :

Définition 6.3. *Étant donnée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle diagonalisation de A par blocs d'une seule valeur propre la recherche d'une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale par blocs, où chaque bloc est une matrice carrée possédant une unique valeur propre.*

Application au Calcul de la puissance k-ième d'un endomorphisme ou d'une matrice

La diagonalisation par blocs d'une seule valeur propre permet toujours de déterminer l'expression explicite de la puissance k-ième d'un endomorphisme f de E (resp. d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), pourvu que P_f (resp. P_A) soit scindé sur $\mathbb{K}$.

Comme la propriété d'être scindé sur $\mathbb{K}$ pour un polynôme n'est réellement pas restrictive, quitte à élargir si nécessaire le corps commutatif $\mathbb{K}$, on en conclut que :

La diagonalisation par blocs d'une seule valeur propre résout définitivement le problème du calcul de la puissance k-ième d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie (resp. d'une matrice carrée).

En effet, supposons donnés $k \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que P_A soit scindé sur $\mathbb{K}$. Le procédé de diagonalisation de A par blocs d'une seule valeur propre montre l'existence d'une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $M := P^{-1}AP$ soit de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_p \end{pmatrix},$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$ et les M_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ sont toutes des matrices carrées, chacune d'une seule valeur propre. Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, désignons par n_i l'ordre de la matrice M_i et par λ_i sa unique valeur propre (de multiplicité n_i).

On peut donc écrire chaque M_i sous la forme :

$$M_i = \lambda_i I_{n_i} + N_i,$$

avec N_i une matrice nilpotente d'ordre n_i, $(n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n)$.

Cela permet, grâce à la formule du binôme matricielle, d'exprimer explicitement chaque puissance M_i^k en fonction de k. D'où l'on déduit l'expression explicite de M^k en fonction de k, grâce à la formule :

$$M^k = \begin{pmatrix} M_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_p^k \end{pmatrix}.$$

Et enfin, l'expression explicite de A^k en fonction de k, grâce à la relation :

$$A^k = PM^kP^{-1}.$$

Définition 6.4. *Soit k un entier strictement positif. On appelle bloc de Jordan d'ordre k toute matrice carrée d'ordre k de la forme :*

$$J_k(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Quelques propriétés simples de la matrice $J_k(\lambda)$.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $J := J_k(\lambda)$. On montre facilement que :

1. $P_J(X) = (-1)^k (X - \lambda)^k$ (polynôme caractéristique),
2. $\mu_J(X) = (X - \lambda)^k$ (polynôme minimal),
3. $\dim E_J(\lambda) = 1$ (dimension de l'espace propre associé).

6.2 Théorème de Jordon

Théorème 6.5 (de Jordan)**.** *Soit f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique possède une unique racine λ, de multiplicité n, soit*

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda)^n.$$

Désignons par ℓ la multiplicité géométrique de la valeur propre λ de f (i.e. $\ell := \dim E_f(\lambda)$) et par m la multiplicité minimale de λ (c'est-à-dire $\mu_f(X) = (X-\lambda)^m$).

Alors, il existe une base ordonnée $\mathcal{B}$ de E suivant laquelle la matrice associée à f est de la forme :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_\ell}(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

avec $k_1 = m \geq k_2 \geq \cdots \geq k_\ell$ des entiers strictement positifs, et $J_{k_1}(\lambda), J_{k_2}(\lambda), \ldots, J_{k_\ell}(\lambda)$ sont des blocs de Jordan d'ordres respectifs $k_1, k_2, \ldots, k_\ell$.

L'analogue matriciel du Théorème 6.5 est le suivant

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique possède une unique racine, de multiplicité n. Alors, il exsite $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ ait la forme (6.1).

Remarque 6.1. *Dans la situation du théorème 6.5, en posant $u := f - \lambda\,\mathrm{Id}_E$, nous obtenons que 0 est une valeur propre de u et que ℓ et m sont respectivement ses multiplicités géométrique et minimale. De plus, la formule (6.1) est équivalente à :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_{k_1}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_\ell}(0) \end{pmatrix}.$$

*Tenant compte de cette dernière remarque, il suffit donc de démontrer le théorème 6.5 pour les endomorphismes **nilpotents** de E (c'est-à-dire pour $\lambda = 0$).*

Nous avons vu précédemment que les endomorphismes nilpotents ne sont pas diagonalisables. Le théorème suivant (qu'on peut consulter la démonstration dans les références bibliographiques) montre que tout endomorphisme se décompose en une partie diagonalisable et une partie nilpotente.

Théorème 6.6 (Décomposition de Dunford)**.** *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Il existe un couple (g,h) unique d'endomorphismes de E tels que :*

— *g est diagonalisable et h est nilpotent,*

— *g et h commutent,*

— *$f = g + h$.*

La version matricielle de ce théorème est le suivant.

Théorème 6.7. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (D,N) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :*

— *$A = D + N$,*

— *D est diagonalisable,*

— *N est nilpotente,*

— *D et N commutent.*

De plus, D et N s'expriment toutes les deux comme application de polynôomes de $\mathbb{K}[X]$ à la matrice A.

C'est donc dans les endomorphismes nilpotents que réside la difficulté. Certes, ils ne sont pas diagonalisables, mais on peut néanmoins simplifier leur forme matricielle. Le lemme suivant nous explique comment, pour le cas particulier où l'indice est maximal (et est considéré comme étant le Théorème 6.5 pour un endomorphisme nilpotent d'indice maximal, voir Remarque 6.1).

Lemme 6.1. *Soit f un endomorphisme nilpotent d'indice n dans un espace vectoriel E de dimension n. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f (qu'on note N_n) est triangulaire supérieure,* *les termes au-dessus de la diagonale valant* 1*, les autres étant nuls :*

$$N_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration. Par hypothèse, f^{n-1} est non nul, donc il existe $v \in E$ tel que $f^{n-1}(v) \neq 0$. Nécessairement les n vecteurs $f^{n-1}(v), f^{n-2}(v), \ldots, f(v), v$ sont tous non nuls.

On montre qu'ils forment une famille libre. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\alpha_1 f^{n-1}(v) + \alpha_2 f^{n-2}(v) + \cdots + \alpha_{n-1} f(v) + \alpha_n v = 0$$

En composant par f^{n-1}, et en utilisant le fait que $f^m = 0$ pour $m \geq n$, on obtient $\alpha_n f^{n-1}(v) = 0$, donc $\alpha_n = 0$. En itérant (en composant par f^{n-i-1}), on conclut que tous les $\alpha_i = 0, i = 1, \ldots, n$, donc la famille $(f^{n-1}(v), f^{n-2}(v), \ldots, f(v), v)$ est libre. Comme $\dim(E) = n$, c'est une base, et la matrice de f dans cette base est N_n. □

Dans le cas général, un endomorphisme nilpotent admet une réduction du même type, mais plus complexe de l'écrire précisément : c'est encore une matrice triangulaire supérieure, les termes au-dessus de de la diagonale valent 1 ou 0, les autres termes sont nuls

$$\begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } b_i \in \{0,1\} \text{ pour tout } i.$$

Le Lemme suivant donne la diagonalisation par blocs d'un endomorphisme nilpotent d'indice quelconque (strictement inférieur à n).

Lemme 6.2. *Soit f un endomorphisme nilpotent d'indice k dans un espace vectoriel E de dimension n. Il existe des entiers $n_1, \ldots, n_h$ tels que $n_1 + \cdots + n_h = n$, et une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, chaque bloc étant N_{n_i}.*

Démonstration. Nous allons démontrer le résultat par récurrence sur l'indice de nilpotence de f.

Initialisation : Si $k = 1$, alors f est identiquement nul, et il n'y a rien à démontrer.

Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un entier $k \geq 1$, et démontrons-la pour f un endomorphisme nilpotent d'indice $k + 1$.

L'endomorphisme f de E dans E induit un endomorphisme de $f(E)$ dans $f(E)$. C'est un endomorphisme nilpotent d'indice k.
Par hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$f(E) = \bigoplus_{i \in I} F_i,$$

où chaque F_i admet une base de la forme

$$\big(v_i, f(v_i), \ldots, f^{k_i - 1}(v_i)\big),$$

avec $v_i \in f(E)$ un vecteur d'indice k_i. Comme $v_i \in f(E)$, il existe un vecteur $w_i \in E$ tel que $v_i = f(w_i)$, et w_i est d'indice $k_i + 1$.

La famille

$$\left(f^{\delta}(v_i)\right)_{i\in I,\, 0\leq\delta\leq k_i-1}$$

est une base de $f(E)$. Donc, la sous-famille

$$\left(f^{k_i}(w_i)\right)_{i\in I}$$

est libre et constituée de vecteurs appartenant au noyau de f.

Complétons cette famille en une base du noyau de f en y ajoutant de nouveaux vecteurs $(w_j)_{j\in J}$, avec $J \cap I = \varnothing$. Posons $k_\mu = 0$ si $\mu \in J$, et $L = I \cup J$.

Alors, par construction, la famille

$$\left(f^{\delta}(w_\mu)\right)_{\mu\in L,\, 0\leq\delta\leq k_\mu}$$

est une base de E.

Dans cette base, la matrice qui représente f est bien de la forme annoncée pour l'indice $k+1$.

Conclusion : La propriété est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par récurrence. □

Remarque 6.2. *La démonstration du théorème qu'on a vu est efficace, mais elle dissimule un aspect important qui est le lien avec les noyaux itérés. Il existe une autre démonstration du théorème de Jordan qui utilise les noyaux itérés qui passe par les deux lemmes ci-dessous. C'est au cours de cette démonstration du théorème de Jordan que nous apprenons la procédure à suivre pour jordaniser un endomorphisme de E possédant une unique valeur propre.*
La procédure à suivre pour jordaniser un endomorphisme quelconque (c'est-à-dire un endomorphisme possédant un nombre quelconque de valeurs propres) s'en déduit immédiatement grâce à la décomposition de E en somme directe des espaces caractéristiques de l'endomorphisme en question vu à la section précédente.

On peut aussi démontrer le théorème de Jordan en passant (comme on a dit dans la remarque précédente) par les deux lemmes suivants :

Lemme 6.3. *Dans la situation du théorème 6.5, posons $u = f - \lambda Id_E$. Alors, il existe des sous-espaces vectoriels $M_1, M_2, \ldots, M_m$ de E tels que :*

$$M_1 = \ker u,$$
$$\ker(u^{i-1}) \oplus M_i = \ker(u^i), \quad \forall\, 2 \leq i \leq m,$$
$$u(M_i) \subset M_{i-1}, \quad \forall\, 2 \leq i \leq m.$$

Lemme 6.4. *Dans la situation du théorème 6.5, posons $u := f - \lambda Id_E$ et soient $M_1, \ldots, M_m$ des sous-espaces vectoriels de E, satisfaisant les propriétés citées au lemme 6.3. Alors, pour tout $i \in \{2, \ldots, m\}$, si L est une partie libre de M_i, on a :*

$$u(L) \text{ est une partie libre de } M_{i-1}.$$

Corollaire 6.1 (Réduction de Jordan)**.** *Soit f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Soient aussi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de f, comptées avec leurs multiplicités.*
Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de E suivant laquelle la matrice associée à f est de la forme :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \delta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \delta_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

avec $\delta_1, \ldots, \delta_{n-1} \in \{0, 1\}$.

Appellations. Dans la situation du corollaire précédent, la base $\mathcal{B}$ de E s'appelle **base de Jordan** et le procédé permettant de la déterminer et d'aboutir à la matrice réduite de Jordan $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ s'appelle la **jordanisation de** f.

Voici la démonstration du corollaire 6.1 :

Démonstration. Notons par $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_p$ $(p \geq 1)$ les valeurs propres, deux à deux distinctes, de f. On a vu à la section 6.1.1 que l'espace vectoriel E se décompose en somme directe des espaces caractéristiques de f, soit :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \chi_{\lambda'_i}.$$

On a vu aussi que chacun de ces espaces caractéristiques $\chi_{\lambda'_i}$ est stable par f et que chacun des endomorphismes restreints $f_i = f|_{\chi_{\lambda'_i}}$ de $\chi_{\lambda'_i}$ possède une unique valeur propre, qui est λ'_i.

On peut alors appliquer le théorème 6.5 à chacun de ces endomorphismes f_i de $\chi_{\lambda'_i}$ $(1 \leq i \leq p)$. On obtient l'existence, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, d'une base $\mathcal{B}_i$ de $\chi_{\lambda'_i}$, suivant laquelle la matrice associée à f_i est de la forme :

$$M_{\mathcal{B}_i}(f_i) = \begin{pmatrix} \lambda'_i & \alpha_1 & & & 0 \\ 0 & \lambda'_i & \alpha_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \lambda'_i & \alpha_{k_i-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda'_i \end{pmatrix},$$

avec $k_i := \dim \chi_{\lambda'_i} = m_a(\lambda'_i)$ (multiplicité algébrique de λ'_i) et $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_i-1} \in \{0, 1\}$.

Il en résulte que la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ de E est de la forme bloc diagonale

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} M_{\mathcal{B}_1}(f_1) & & & 0 \\ 0 & M_{\mathcal{B}_2}(f_2) & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & M_{\mathcal{B}_p}(f_p) \end{pmatrix},$$

ce qui correspond bien à la forme requise dans l'énoncé du corollaire. □

6.3 Jordanisation des endomorphismes en pratique

Etant donné un endomorphisme f de E, de polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$. Soit A une matrice représentant f relativement à une base choisie de E. Pour jordaniser f (ou A), on détermine d'abord le polynôme caractéristique et les valeurs propres, puis on décompose l'espace en somme directe de sous-espaces caractéristiques associés aux valeurs propres. Ensuite, on analyse la structure des sous-espaces nilpotents, tels que $\ker(f - \lambda I)^k$, pour construire une base de Jordan complète (formée par des vecteurs propres généralisés), qui permet de mettre l'endomorphisme sous sa forme la plus simple possible : une matrice diagonale par blocs, où chaque bloc est un bloc de Jordan.

6.3.1 Étapes de l'algorithme de Jordanisation d'un endomorphisme

1. **Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres.** On calcule le polynôme caractéristique :
$$P_A(X) = \det(A - XI)$$
de la matrice A de l'endomorphisme. Ses racines sont les valeurs propres de A, notées λ_i.
2. **Vérifier que le polynôme caractéristique est scindé.** La réduction de Jordan n'est possible que si $P_A(X)$ est scindé, c'est-à-dire qu'il admet toutes ses racines dans le corps de base $\mathbb{K}$.

3. **Analyser les sous-espaces caractéristiques.** Pour chaque valeur propre λ_i, on étudie la suite des noyaux :
$$\ker\big((f-\lambda_i I)^k\big).$$
On pose $d_k = \dim\ker\big((f-\lambda_i I)^k\big)$. On compare les d_k pour $k = 1, 2, \dots$ jusqu'à ce que la suite se stabilise :
$$d_k = d_{k+1} = m_a(\lambda_i) = m_i. \text{ la multiplicité algébrique de } \lambda_i$$
Cette valeur correspond à la dimension de l'espace caractéristique associé à λ_i.
On construit par suite la base de χ_{λ_i}.
4. **Construire les blocs de Jordan.** Pour chaque valeur propre λ_i, de multiplicité algébrique m_i, on construit le bloc de Jordan associé (de taille m_i).
Chaque bloc de Jordan $J_{m_i}(\lambda_i)$ est une matrice de taille m_i :
$$J_{m_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$
5. **Former la base de Jordan.** On a déjà construit pour chaque λ_i dans la troisième étape une base de Jordan de l'espace caractéristique χ_{λ_i}. La base de Jordan complète de E est la concaténation des bases de Jordan pour toutes les valeurs propres. (les vecteurs colonnes de la matrice de passage sont les vecteurs des bases des $\chi_{\lambda_i'}$).
Dans cette base, l'endomorphisme est représenté par une matrice de Jordan J, diagonale par blocs, chaque bloc étant un bloc de Jordan de la forme $J_{m_i}(\lambda_i)$.

Détaillons maintenant la construction des bases de $\chi_{\lambda_i'}$ dans la troisième étape :

Construction d'une base de Jordan de $\chi_{\lambda_i'}$

Après avoir construit la suite des noyaux (pour chaqe valeur propre λ_i) : $\ker\big((f-\lambda_i I)^k\big)$. On pose
$$N_i := A - \lambda_i I_n.$$
On note u l'endomorphisme de E associé à N_i relativement à la base choisie initialement pour E. Soit $m_i = m$ le plus petit entier positif tel que
$$\ker(N_i^{m_i}) = \chi_{\lambda_i}(f).$$

Étape 1 : chaînes de noyaux

On a la suite croissante de sous-espaces :
$$\ker N_i \subsetneqq \ker(N_i^2) \subsetneqq \cdots \subsetneqq \ker(N_i^m) = \chi_{\lambda_i}(f).$$

1. On complète une base de $\ker(N_i^{m-1})$ pour obtenir une base de $\ker(N_i^m)$. Soit $(v_1, v_2, \dots)$ cette complétion. Alors la famille $(N_i(v_1), N_i(v_2), \dots)$ est libre et forme un supplémentaire de $\ker(N_i^{m-2})$ dans $\ker(N_i^{m-1})$.
2. On complète ensuite une base de $\ker(N_i^{m-2}) \oplus \ker\big(N_i(v_1), N_i(v_2), \dots\big)$ pour obtenir une base de $\ker(N_i^{m-1})$. Soit $(w_1, w_2, \dots)$ cette complétion. Alors $(N_i^2(v_1), N_i^2(v_2), \dots, N_i(w_1), N_i(w_2), \dots)$ est libre et forme un supplémentaire de $\ker(N_i^{m-3})$ dans $\ker(N_i^{m-2})$.
3. À l'avant-dernière étape, on complète une base de $\ker N_i \oplus Vect\big(N_i^{m-2}(v_1), N_i^{m-3}(w_1), \dots\big)$ pour avoir une base de $\ker(N_i^2)$. Soit $(y_1, y_2, \dots)$ cette complétion. Alors $(N_i^{m-1}(v_1), N_i^{m-2}(w_1), \dots, N_i(y_1), N_i(y_2$ constitue une partie libre de $\ker N_i$.
4. Enfin, à la dernière étape, on complète cette partie libre de $\ker N_i$ obtenue ci-dessus pour obtenir une base complète de $\ker N_i$. Soit $(z_1, z_2, \dots)$ cette complétion.

Étape 3 : base de Jordan

En réunissant toutes les bases intermédiaires, on obtient une base de $\ker(N_i^m) = \chi_{\lambda_i}(f)$. Mais il faut réordonner les vecteurs pour obtenir une *base de Jordan.*

La réorganisation s'effectue ainsi :

$$\begin{gathered}
(N_i^{m_i-1}(v_1), N_i^{m_i-2}(v_1), \dots, v_1), \\
(N_i^{m_i-1}(v_2), N_i^{m_i-2}(v_2), \dots, v_2), \\
\vdots \\
(N_i^{m_i-2}(w_1), N_i^{m_i-3}(w_1), \dots, w_1), \\
(N_i^{m_i-2}(w_2), N_i^{m_i-3}(w_2), \dots, w_2), \\
\vdots \\
(N_i(y_1), y_1), (N_i(y_2), y_2), \dots, (z_1), (z_2), \dots
\end{gathered}$$

Cette réorganisation regroupe les vecteurs en **chaînes de Jordan** :

$$v,\ N(v),\ N^2(v),\ \dots,\ N^{k-1}(v),$$

chaque chaîne correspondant à un bloc de Jordan de taille m_i.

Étape 4 : base de Jordan globale

Enfin, une base de Jordan de f sur E s'obtient simplement en réunissant toutes les bases de Jordan des restrictions

$$f|_{\chi_{\lambda_i}(f)}, \quad \lambda_i \in Sp(f).$$

Exemple 6.1. *Prenons la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique (normalisé) est

$$\chi_M(X) = -\det(M - XI_3) = -\begin{vmatrix} 4-X & 2 & 0 \\ 1 & 4-X & 1 \\ 1 & 1 & 4-X \end{vmatrix}.$$

Un développement selon la première colonne donne rapidement

$$P_M(X) = (X-4)\big[(X-4)^2 - 1\big] - 2\big[(X-4) + 1\big] = (X-3)^2(X-6).$$

Ainsi, les valeurs propres sont 3 *(de multiplicité* 2*) et* 6 *(de multiplicité* 1*).*

Le théorème de supplémentarité des espaces caractéristiques (appelée aussi le lemme des noyaux *(voir [5] pour les détails) assure que*

$$\mathbb{K}^3 = \ker(M - 3I_3)^2 \ \oplus\ \ker(M - 6I_3).$$

Nous cherchons donc une base de chacun des deux sous-espaces caractéristiques.

Pour $\ker(M - 3I_3)^2$**.** *On calcule*

$$M - 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (M - 3I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

On veut choisir un vecteur $v_2 \in \ker(M-3I_3)^2 \setminus \ker(M-3I_3)$*, puis poser* $v_1 = (M-3I_3)v_2$ *(ainsi* $(M-3I_3)v_1 = 0$*). Un choix commode est*

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = (M-3I_3)v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ce qui fournit une base chaîne de Jordan $\{v_1, v_2\}$ *de* $\ker(M-3I_3)^2$ *(avec* $v_1 \in \ker(M-3I_3)$ *et* $v_2 \notin \ker(M-3I_3)$*).*

Pour $\ker(M-6I_3)$**.** *On a*

$$M - 6I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur propre simple pour $\lambda = 6$ *est*

$$v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \ker(M-6I_3).$$

En posant la matrice de passage $P = [\, v_1 \; v_2 \; v_3 \,]$*, i.e.*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

on obtient par construction la forme de Jordan

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

soit un bloc de Jordan d'ordre 2 *pour* $\lambda = 3$ *et un bloc* 1×1 *pour* $\lambda = 6$.

Remarquons que les calculs pour la Jordanisation d'une matrice deviennent lourds dès que la taille de la matrice dépasse quatre.

Exemple 6.2 (de jordanisation d'une matrice 5×5)**.** *[4] Soit la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$$

Soit g *l'endomorphisme de matrice représentant* B *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^5$.

Polynôme caractéristique. *On calcule*

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_5) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$P_B(\lambda) = (1-\lambda)\cdot \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot (2-\lambda)^2 = (1-\lambda)^3(2-\lambda)^2.$$

Les valeurs propres sont donc

$$\lambda_1 = 1 \text{ (multiplicité algébrique 3)}, \qquad \lambda_2 = 2 \text{ (multiplicité algébrique 2)}.$$

Donc P_B est scindé sur $\mathbb{R}$.

Sous-espace caractéristique pour $\lambda = 1$. *On étudie les noyaux successifs de $B - I_5$.*

$$\ker(B - I_5) = Vect(x_1, x_2), \quad x_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\ker(B - I_5)^2 = Vect(e_1, e_2, e_3), \quad e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Comme $\dim\ker(B - I_5)^2 = 3 = m_a(1)$*, on a* $\chi_1 = \ker(B - I_5)^2$.

On complète la base (x_1, x_2) de $\ker(B - I_5)$ *par $v_1 = e_1$ pour obtenir une base de* $\ker(B - I_5)^2$*. On note*

$$(B - I_5)v_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

On complète ensuite le vecteur $(B - I_5)v_1$ pour obtenir une base de $\ker(B - I_5)$ *en prenant* $v_2 = x_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$*. La base de Jordan qui en résulte pour $g|_{\chi_1}$ est*

$$\mathcal{B}_1 = \big((B - I_5)v_1,\ v_1,\ v_2\big) = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}.$$

Dans $\mathcal{B}_1$, la matrice de $g|_{\chi_1}$ est le bloc de Jordan

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sous-espace caractéristique pour $\lambda = 2$. *De même,*

$$\ker(B - 2I_5) = Vect(y_1), \quad y_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\ker(B-2I_5)^2 = Vect(z_1,z_2), \quad z_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \; z_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Comme $\dim\ker(B-2I_5)^2 = 2 = m_a(2)$*, on a* $\chi_2 = \ker(B-2I_5)^2$*. On complète* y_1 *par* $w_1 = z_1$ *; on vérifie*

$$(B-2I_5)w_1 = \begin{pmatrix}2\\4\\4\\2\\0\end{pmatrix} = 2\,y_1.$$

La base de Jordan pour $g|_{\chi_2}$ *est*

$$\mathcal{B}_2 = \big((B-2I_5)w_1,\; w_1\big) = \left\{ \begin{pmatrix}2\\4\\4\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\2\end{pmatrix} \right\},$$

et la matrice correspondante est

$$J_2 = \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}.$$

Base de Jordan de g et forme de Jordan. *En réunissant les bases précédentes,*

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\4\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\2\end{pmatrix} \right\}.$$

Dans cette base, la matrice de g *est diagonale par blocs :*

$$J = \begin{pmatrix}J_1 & 0\\0 & J_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 2 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Matrice de passage. *La matrice de passage de la base canonique vers* $\mathcal{B}$ *est*

$$P = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 2 & 1\\1 & 0 & 0 & 4 & 0\\1 & 0 & 1 & 4 & 0\\0 & 0 & 0 & 2 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}, \qquad et \qquad J = P^{-1}BP.$$

6.4 Exercices

Exercice 6.1 (Valeur propre simple et double)**.** *Soit*

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de* A*.*

2. *Déterminer les sous-espaces propres associés.*
3. *La matrice A est-elle diagonalisable ?*
4. *Déterminer la forme de Jordan de A.*

Exercice 6.2 (Bloc de Jordan non trivial). *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminer les valeurs propres et leurs multiplicités.*
2. *Calculer* $\dim\ker(A-I)$ *et* $\dim\ker(A-I)^2$.
3. *Déterminer la forme de Jordan de A.*

Exercice 6.3 (Cas non diagonalisable). *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que A est nilpotente.*
2. *Déterminer l'indice de nilpotence de A.*
3. *Donner la forme de Jordan de A.*

Exercice 6.4 (Deux valeurs propres). *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique.*
2. *Étudier la diagonalisabilité de A.*
3. *Déterminer la forme de Jordan de A.*

Exercice 6.5 (Calcul des blocs de Jordan). *Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que*

$$\chi_A(X) = (X-1)^3 \quad \textit{et} \quad \dim\ker(A-I) = 1.$$

1. *Déterminer les tailles des blocs de Jordan.*
2. *Donner toutes les formes de Jordan possibles.*

Exercice 6.6 (Endomorphisme). *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension 3 tel que*

$$f^2 - 2f + \mathrm{Id} = 0.$$

1. *Déterminer les valeurs propres de f.*
2. *Discuter la diagonalisabilité de f.*
3. *Donner la forme de Jordan de la matrice de f.*

Matrices 4×4

Exercice 6.7 (Valeur propre quadruple). *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de A.*
2. *Déterminer* $\dim \ker(A - I)^k$ *pour* $k = 1, 2, 3, 4$.
3. *En déduire la forme de Jordan de A.*

Exercice 6.8 (Deux valeurs propres)**.** *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminer les valeurs propres et leurs multiplicités.*
2. *Étudier la diagonalisabilité de A.*
3. *Déterminer la forme de Jordan de A.*

Chapitre 7

Exponentielle d'une matrice et application aux systèmes différentiels linéaires

La réduction des endomorphismes est très utilisée dans la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires du type :

$$Y'(t) = AY(t).$$

7.1 Exponentielle d'une matrice

Définition 7.1. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On définit l'exponentielle de la matrice A, notée $\exp(A)$ ou e^A, par la série entière :*

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Cette série converge pour toute matrice A (la convergence est absolue pour toute norme matricielle). On retrouve l'analogie avec la fonction exponentielle usuelle, définie par $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

7.1.1 Propriétés fondamentales

Exponentielle de la matrice nulle : Toute matrice d'ordre n vérifie :

$$e^0 = I_n.$$

Inversibilité : Si A est une matrice carrée d'ordre n alors

$$e^A \text{ est toujours inversible et } (e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

Continuité et dépendance polynomiale : L'application $A \mapsto e^A$ est continue et même analytique.

Compatibilité avec la transposée et la conjugaison : Toute matrice carrée vérifie

$$(e^A)^T = e^{A^T}, \qquad (e^A)^* = e^{A^*}.$$

Dérivée (cas d'un paramètre) : Soit A une matrice fixe, si on pose $f(t) = e^{tA}$, alors

$$f'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

Cas commutatif : Si A et B commutent ($AB = BA$), alors

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

(en général, si A et B ne commutent pas, cette formule est fausse).

Cas d'une matrice nilpotente : Si N est nilpotente ($N^m = 0$), alors

$$e^N = I + N + \frac{N^2}{2!} + \cdots + \frac{N^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Cas d'une matrice diagonalisable : Si A est diagonalisable :

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

alors

$$e^A = Pe^D P^{-1}, \quad e^D = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}).$$

Cas d'une matrice trigonalizable : Si A est trigonalizable :

$$A = PTP^{-1}, \quad T \text{ triangulaire supérieure},$$

alors $e^A = Pe^T P^{-1}$, et e^T est triangulaire avec e^{λ_i} sur la diagonale.

Cas général (forme de Jordan) : Si $A = PJP^{-1}$, avec J une matrice de Jordan :

$$e^A = Pe^J P^{-1}.$$

Pour un bloc de Jordan

$$J = \lambda I + N, \quad N^k = 0,$$

on a

$$e^J = e^{\lambda I + N} = e^\lambda e^N = e^\lambda \Big(I + N + \frac{N^2}{2!} + \cdots + \frac{N^{k-1}}{(k-1)!} \Big).$$

Plus généralement : Cas d'une matrice ayant plusieurs blocs de Jordan Soit une matrice J sous forme de Jordan :

$$J = J_{a_1}(\lambda_1) \;\oplus\; J_{a_2}(\lambda_2) \;\oplus\; \cdots \;\oplus\; J_{a_k}(\lambda_k),$$

où $J_{a_i}(\lambda_i)$ est le bloc de Jordan de taille a_i associé à la valeur propre λ_i. Alors :

$$e^J = e^{J_{a_1}(\lambda_1)} \;\oplus\; e^{J_{a_2}(\lambda_2)} \;\oplus\; \cdots \;\oplus\; e^{J_{a_k}(\lambda_k)}.$$

Exemples de Calcul de e^A :

1. Cas diagonal. Si

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix},$$

alors

$$e^A = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix}.$$

2. Cas diagonalisable. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

et

$$D = \mathrm{diag}(-1,\, 2), \qquad A = PDP^{-1}.$$

Alors

$$e^A = P\, e^D\, P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Un calcul explicite donne

$$e^A = \begin{pmatrix} -e^{-1} + 2e^2 & -2e^2 + 2e^{-1} \\ -e^{-1} + e^2 & -e^2 + 2e^{-1} \end{pmatrix}.$$

3. Cas nilpotent. Si N est nilpotente d'indice m ($N^m = 0$), alors la série pour e^N s'arrête :

$$e^N = I + N + \frac{N^2}{2!} + \cdots + \frac{N^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Par exemple, pour

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on a $N^2 = 0$ (indice 2) et donc

$$e^N = I + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque importante. La matrice affichée initialement dans l'énoncé de l'exemple (la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$) *n'est pas* nilpotente : son carré n'est pas la matrice nulle. On vérifie que

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \neq 0,$$

donc on ne peut pas appliquer la formule $e^A = I + A$ dans ce cas. Pour une matrice non nilpotente on doit utiliser la diagonalisation (ou la forme de Jordan) pour calculer e^A.

7.2 Résolution d'EDO linéaires à cofficients constants

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et B une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ continue. Considérons le système d'équations différentielles

$$X'(t) = AX(t) + B(t), X(t_0) = X_0.$$

On a les résultat d'éxistence et d'unicité suivants.

Théorème 7.1 (solution de l'équation homogène). *Pour tout $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t), \\ X(t_0) = X_0, \end{cases}$$

admet une unique solution donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = e^{(t-t_0)A}\, X_0.$$

Théorème 7.2 (Solution de l'équation non homogène). *La solution générale du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + B(t), \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

est donnée par

$$X(t) = e^{tA} X(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} B(s)\, ds.$$

7.2.1 Cas où A est diagonalisable

Supposons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathbb{C}$) soit diagonalisable, c.-à-d. qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

A. Dans le cas d'un système homogène : Considérons le système linéaire autonome

$$X'(t) = AX(t), \qquad X(t_0) = X_0.$$

En remplaçant A par PDP^{-1} on obtient

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t).$$

En multipliant à gauche par P^{-1} et en posant $Y(t) := P^{-1}X(t)$ (donc $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$), on obtient le système équivalent

$$Y'(t) = DY(t), \qquad Y(t_0) = P^{-1}X_0.$$

Étant donné que D est diagonale, le système se décompose en n équations scalaires décorrélées :

$$y_i'(t) = \lambda_i\, y_i(t), \qquad i = 1, \dots, n.$$

Les solutions générales sont

$$y_i(t) = c_i\, e^{\lambda_i(t-t_0)}, \qquad c_i \in \mathbb{K}.$$

Ainsi

$$Y(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1(t-t_0)} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = Y(t_0) = P^{-1}X_0.$$

En revenant à la variable X on obtient la solution du problème de Cauchy :

$$X(t) = PY(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{pmatrix} P^{-1}X_0 = e^{(t-t_0)A}\, X_0,$$

puisque $e^{(t-t_0)A} = P\,\mathrm{diag}\big(e^{\lambda_1(t-t_0)}, \dots, e^{\lambda_n(t-t_0)}\big)\, P^{-1}$.

En particulier, la solution générale du système homogène est donnée par

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, e^{\lambda_i(t-t_0)}\, v_i,$$

où v_i désigne la i-ème colonne de P (vecteur propre associé à λ_i) et les constantes c_i sont déterminées par la condition initiale $X(t_0) = X_0$.

Remarque 7.1. *Si certaines valeurs propres sont égales (multiplicités), la même méthode vaut : D contient alors des valeurs répétées et la solution s'écrit de la même façon en termes des vecteurs propres choisis pour former P. Si A n'est pas diagonalisable, on remplace la diagonalisation par la réduction de Jordan et on utilise la formule $e^{t(\lambda I+N)} = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{m-1}\dfrac{(tN)^k}{k!}$ pour calculer e^{tA}.*

B. Dans le cas d'un système non homogène : Considérons le système différentiel linéaire non homogène :

$$X'(t) = AX(t) + B(t).$$

On a :

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t) + B(t) \iff P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t) + P^{-1}B(t).$$

En posant

$$Y(t) := P^{-1}X(t) \quad \Longrightarrow \quad Y'(t) = P^{-1}X'(t),$$

on obtient le système équivalent :

$$X'(t) = AX(t) + B(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} Y(t) = P^{-1}X(t), \\ Y'(t) = DY(t) + P^{-1}B(t). \end{cases}$$

Exemple de résolution d'un système différentiel par diagonalisation

Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = 3x - 2y - 4z - t, \\ y'(t) = -2x + 3y + 2z + te^t, \\ z'(t) = 3x - 3y - 4z + t - 1. \end{cases} \tag{$Ex - Diag$}$$

Sous forme matricielle :

$$X'(t) = AX(t) + B(t), \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

(i). Polynôme caractéristique et valeurs propres. On calcule

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (2 - \lambda)(\lambda - 1)(1 + \lambda).$$

Ainsi les valeurs propres sont distinctes :

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = -1.$$

(ii). Vecteurs propres et diagonalisation. On associe aux valeurs propres les vecteurs propres suivants :

$$V_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi la matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a bien la relation de similarité :

$$A = PDP^{-1}.$$

(iii). Réduction du système. On a la relation de similarité :

$$A = PDP^{-1}, \qquad \text{où } D \text{ est diagonale.}$$

Ainsi

$$X'(t) = AX(t) + B(t) \iff X'(t) = PDP^{-1}X(t) + B(t).$$

On multiplie à gauche par P^{-1} :

$$P^{-1}X'(t) = D\,P^{-1}X(t) + P^{-1}B(t).$$

On pose

$$Y(t) := P^{-1}X(t).$$

Alors, comme $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$, on obtient un système équivalent pour $Y(t)$:

$$Y'(t) = DY(t) + P^{-1}B(t).$$

En notant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix},$$

on obtient le système découplé :

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) - t, \\ y_2'(t) = y_2(t) + te^t, \\ y_3'(t) = 2y_3(t) + t - 1. \end{cases}$$

(iv). Résolution. Chaque équation se résout indépendamment :

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1e^{-t} + 1 - t, \\ y_2(t) = c_2e^t + \dfrac{1}{2}t^2e^t, \\ y_3(t) = c_3e^{2t} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}t, \end{cases} \qquad (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3.$$

(v). Retour à $X(t)$. Comme $X(t) = PY(t)$, on obtient

$$\begin{cases} x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^t + 1 - t + \dfrac{1}{2}t^2e^t, \\ y(t) = c_2e^t - 2c_3e^{2t} - \dfrac{1}{2} + t + \dfrac{1}{2}t^2e^t, \\ z(t) = c_1e^{-t} + c_3e^{2t} + \dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{2}t, \end{cases} \qquad (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Solution générale. Le système $(Ex - Diag)$ admet pour solution générale :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{-t} + (c_2 + \frac{1}{2}t^2)e^t + 1 - t \\ c_2e^t - (2c_3 - \frac{1}{2}t^2)e^{2t} - \frac{1}{2} + t \\ c_1e^{-t} + c_3e^{2t} + \frac{5}{4} - \frac{3}{2}t \end{pmatrix}, \qquad (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3.$$

7.2.2 Cas où A est trigonalisable

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable, alors il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et une matrice triangulaire supérieure T telles que

$$A = PTP^{-1}.$$

Considérons le système différentiel linéaire

$$X'(t) = AX(t).$$

On a

$$X'(t) = PTP^{-1}X(t) \iff P^{-1}X'(t) = TP^{-1}X(t).$$

En posant

$$Y(t) := P^{-1}X(t) \implies Y'(t) = P^{-1}X'(t),$$

on obtient le système équivalent

$$Y'(t) = TY(t).$$

En notant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

on obtient le système triangulaire suivant :

$$Y'(t) = TY(t) \iff \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n, \\ \quad \vdots \\ y_n' = a_{nn}y_n. \end{cases}$$

On résout ce système différentiel en procédant de la dernière équation vers la première (par récurrence ascendante).

Finalement, la solution générale du système initial s'écrit

$$X(t) = PY(t).$$

Exemple de résolution d'un système différentiel par trigonalisation

Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) - 3y(t) - 4z(t), \\ y'(t) = -x(t) + y(t) - 2z(t), \\ z'(t) = x(t) - 3y(t). \end{cases} \tag{Ex-Trig}$$

La matrice associée est

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i). Polynôme caractéristique et valeurs propres :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -(\lambda + 2)(\lambda - 4)^2.$$

Donc les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{(simple)}, \qquad \lambda_2 = 4 \quad \text{(double)}.$$

(ii). Espaces propres : Pour $\lambda = -2$, on trouve un vecteur propre :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = 4$, on obtient un espace propre de dimension 1 (et non 2), engendré par

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\dim E_4 = 1 \neq 2$, donc A n'est pas diagonalisable.

(iii). Recherche d'un vecteur généralisé : On cherche V_2 et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$AV_2 = 4V_2 + \alpha V_1.$$

En posant $V_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on obtient le système :

$$\begin{cases} a - 3b - 4c = \alpha, \\ -a - 3b - 2c = -\alpha, \\ a - 3b - 4c = \alpha. \end{cases}$$

On peut choisir $b = 1$, $\alpha = 2$, et on trouve :

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(iv). Mise sous forme triangulaire : On a ainsi, $A = PTP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Alors le système (Ex-Trig) se ramène à

$$X' = AX \quad \Longleftrightarrow \quad Y' = TY,$$

avec $Y = P^{-1}X$.

(v). Résolution du système triangulaire : En posant $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, on obtient

$$\begin{cases} u' = 4u + 2v, \\ v' = 4v, \\ w' = -2w. \end{cases} \tag{7.1}$$

La deuxième et la troisième équation de (7.1) sont des équations différentielles à variables séparables donc :
Pour la trisième équation, on a

$$w' = -2w \implies w(t) = c_3 e^{-2t}, \quad c_3 \in \mathbb{R}.$$

Pour la deuxième équation, on a

$$v' = 4v \implies v(t) = c_2 e^{4t}, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

La première équation $u' = 4u + 2v$ est une équation différentielle linéaire non homogène (avec second membre).

Une solution particulière est $u_p = 2c_2 e^{4t}$, la solution homogène est $u_h = c_1 e^{4t}$, donc

$$u(t) = (c_1 + 2c_2)e^{4t}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

(vi). Retour à la solution X : On a donc

$$Y(t) = \begin{pmatrix} (c_1 + 2c_2)e^{4t} \\ c_2 e^{4t} \\ c_3 e^{-2t} \end{pmatrix}, \qquad X(t) = PY(t).$$

Ainsi,

$$X(t) = \begin{pmatrix} (c_1 + 3c_2)e^{4t} + c_3 e^{-2t} \\ -(c_1 + c_2)e^{4t} + c_3 e^{-2t} \\ (c_1 + c_2)e^{4t} + c_3 e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3.$$

7.2.3 Cas où A est mise sous forme de Jordan

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est Jordanisable, alors il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et une matrice de Jordan J telles que

$$A = PJP^{-1}.$$

Considérons le système différentiel linéaire

$$X'(t) = AX(t), X(0) = X_0.$$

On a

$$X'(t) = PJP^{-1}X(t) \iff P^{-1}X'(t) = JP^{-1}X(t).$$

En posant

$$Y(t) := P^{-1}X(t) \quad \Longrightarrow \quad Y'(t) = P^{-1}X'(t),$$

on obtient le système équivalent

$$Y'(t) = JY(t).$$

qui a pour solution $Y(t) = e^{tJ}$, qui a la forme :

$$e^{tJ} = e^{tJ_{a_1}(\lambda_1)} \oplus e^{tJ_{a_2}(\lambda_2)} \oplus \cdots \oplus e^{tJ_{a_k}(\lambda_k)}.$$

On trouve finalement la solution en calculant $X(t) = PY(t)$.

Exemple de résolution par jordanisation

Considérons le système différentiel linéaire homogène

$$X'(t) = A\,X(t), \qquad X(0) = X_0,$$

avec la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est déjà sous forme de *bloc de Jordan* $J_3(3)$: sa seule valeur propre est $\lambda = 3$ de multiplicité algébrique 3, et $N := A - 3I$ est nilpotente d'indice 3.

a. Calcul de l'exponentielle matricielle e^{tA}.
On utilise la décomposition $A = 3I + N$ avec N nilpotente. Alors

$$e^{tA} = e^{t(3I+N)} = e^{3t}\,e^{tN}.$$

Comme $N^3 = 0$ et $N^2 \neq 0$, la série exponentielle s'arrête :

$$e^{tN} = I + tN + \tfrac{t^2}{2}N^2.$$

Calculons N et N^2 :

$$N = A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$e^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et finalement

$$e^{tA} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

2. Solution du système. Pour la condition initiale $X(0) = X_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$, la solution est

$$X(t) = e^{tA} X_0 = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

En multipliant, on obtient les composantes explicites :

$$\begin{cases} x(t) = e^{3t} \left(x_0 + t\, y_0 + \dfrac{t^2}{2}\, z_0 \right), \\ y(t) = e^{3t} (y_0 + t\, z_0), \\ z(t) = e^{3t}\, z_0. \end{cases}$$

Remarque 7.2. *Si la matrice A n'était* pas *déjà en forme de Jordan, alors :*

- *Si elle est similaire à un bloc de Jordan, on écrirait $A = PJP^{-1}$ et utiliserait $e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}$.*
- *Le même procédé s'applique pour une matrice avec plusieurs blocs de Jordan (on calcule e^{tJ} bloc par bloc, en utilisant que chaque bloc s'exprime par $e^{\lambda t} e^{tN_{bloc}}$ avec N_{bloc} nilpotent).*

Exemple de résolution par jordanisation (deux blocs de Jordan de taille 2)

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nous résolvons le système

$$X'(t) = AX(t), \qquad X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^4.$$

La Jordanisation de A est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} J_2(1) & 0 \\ 0 & J_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Considérons les blocs de Jordan

$$J_2(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J_2(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Choisissons la matrice de passage P (en blocs) de la forme

$$P = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ I_2 & I_2 \end{pmatrix},$$

qui est inversible et dont l'inverse s'écrit simplement

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix}.$$

Posons $A = PJP^{-1}$. En calcul bloc à bloc on obtient

$$A = \begin{pmatrix} J_2(1) & 0 \\ J_2(1) - J_2(2) & J_2(2) \end{pmatrix}.$$

Comme $J_2(1) - J_2(2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$, On retrouve l'écriture explicite de A.

a. calcul de e^{tJ} : Chaque bloc $J_k(\lambda) = \lambda I_2 + N$ (avec N nilpotent) donne

$$e^{tJ_2(1)} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad e^{tJ_2(2)} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en blocs :

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^t B(t) & 0 \\ 0 & e^{2t} B(t) \end{pmatrix}, \qquad B(t) := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. obtenir e^{tA} : On utilise la similarité $A = PJP^{-1}$ et la propriété $e^{tA} = P\, e^{tJ}\, P^{-1}$. En effectuant les multiplications en blocs (mêmes blocs $I_2, 0$ que plus haut) on trouve une formule compacte :

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t B(t) & 0 \\ \big(e^t - e^{2t}\big) B(t) & e^{2t} B(t) \end{pmatrix}.$$

7.3 Exercices

Exercice 7.1 (Matrice diagonalisable). *On considère le système différentiel*

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t), \\ y'(t) = x(t) + 2y(t). \end{cases}$$

1. *Écrire le système sous la forme $X'(t) = AX(t)$.*
2. *Calculer les valeurs propres de la matrice A.*
3. *Montrer que A est diagonalisable.*
4. *Résoudre le système différentiel.*

Exercice 7.2 (Bloc de Jordan d'ordre 2). *On considère le système*

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t), \\ y'(t) = y(t). \end{cases}$$

1. *Mettre le système sous la forme $X'(t) = AX(t)$.*
2. *Déterminer la forme de Jordan de A.*
3. *Calculer e^{tA} à l'aide de la jordanisation.*
4. *Résoudre le système différentiel.*

Exercice 7.3 (Valeur propre triple)**.** *On considère le système différentiel*

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t), \\ y'(t) = y(t) + z(t), \\ z'(t) = z(t). \end{cases}$$

1. *Écrire le système sous forme matricielle.*
2. *Déterminer les valeurs propres et la forme de Jordan de la matrice associée.*
3. *Calculer e^{tA}.*
4. *Résoudre le système.*

Exercice 7.4 (Valeur propre double et réelle)**.** *On considère le système*

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t), \\ y'(t) = 3y(t). \end{cases}$$

1. *Écrire le système sous la forme $X'(t) = AX(t)$.*
2. *Montrer que la matrice n'est pas diagonalisable.*
3. *Déterminer la forme de Jordan de A.*
4. *Résoudre le système différentiel.*

Exercice 7.5. *Soit A la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. *Factoriser le polynôme caractéristique de A.*
2. *Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.*
3. *Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est*

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   et trouver une matrice P inversible telle que $AP = PB$ (ou $A = PBP^{-1}$).
4. *Écrire la décomposition de Dunford de B (justifier).*
5. *Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp(tB)$.*
6. *Donner les solutions des systèmes différentiels $y' = By$ et $x' = Ax$, où x et y désignent des fonctions réelles à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.*

Conclusion

L'algèbre linéaire ne se réduit pas à un ensemble de techniques de calcul matriciel. Elle constitue un langage universel pour décrire, analyser et résoudre des problèmes dans de nombreux domaines scientifiques.

Le parcours que nous avons suivi, depuis les rappels sur les applications linéaires jusqu'à l'exponentielle de matrices et ses applications, montre la richesse et la cohérence interne de cette discipline. La diagonalisation, la trigonalisation et la jordanisation illustrent une même idée fondamentale : comprendre un objet en le ramenant à une forme simple dans une base bien choisie. Cette démarche de réduction, qui traverse tout le cours, permet d'extraire l'essentiel des propriétés d'un endomorphisme à partir de ses valeurs propres et de ses espaces caractéristiques.

Le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme minimal et les formes canoniques constituent des piliers de cette théorie. Ils montrent que les polynômes jouent un rôle central dans l'étude des endomorphismes, liant étroitement algèbre linéaire et algèbre polynomiale.

Enfin, l'exponentielle de matrices, qui peut sembler au premier abord une construction purement abstraite, prend tout son sens dans l'étude des systèmes différentiels linéaires. Elle illustre comment des outils algébriques permettent de résoudre des problèmes analytiques concrets, ouvrant ainsi la voie à de nombreuses applications pratiques.

Ce polycopié se veut donc à la fois théorique et pratique. Théorique, car il insiste sur les démonstrations et les résultats fondamentaux. Pratique, car il propose des méthodes de calcul et des exemples concrets. L'étudiant est invité à s'approprier ces notions non seulement comme des savoirs, mais aussi comme des outils, afin de pouvoir les mobiliser efficacement dans ses futurs parcours mathématiques et scientifiques.

Bibliographie

[1] E. Azoulay et J. Avignant. Mathématiques, tome 1. Analyse, *Mc GROW HILL*, 1983.

[2] E. Azoulay et J. Avignant. Mathématiques, tome 4. Algèbre, Cours et exercices, *Mc GROW HILL*, 1984.

[3] C. Deschamps et A. Warusfel. Mathématiques 2e année. Cours et exercices corrigés.

[4] B. FARHI, Réduction des endomorphismes. *Polycpie distinée aux étudiants de la deuxième année licence mathématiques.* 2024

[5] R. Mansuy et R. Mneimné, Algèbre linéaire : Réduction des endomorphismes, *Edition Broché*, 2012.

[6] M.Mignotte et J. Nervi, Algèbre : licences sciences 1ère année, *Ellipses, Paris*, 2004.

[7] S. Lang. Algèbre : Cours et exercices, 3ème édition. *Dunod*, 2004.

[8] H. Roudier. Algèbre linéaire. Cours et exercices. Troisième édition revue et augmentée.