

جامعة غرداية
كلية العلوم الاقتصادية
والتجارية وعلوم التسيير



محاضرات

رياضيات 01

موجهة لطلبة السنة الأولى جذع مشترك

ميدان العلوم الاقتصادية والتسيير والعلوم التجارية

من إعداد:

الدكتور: بن جواد مسعود

السنة الجامعية 2025 – 2026

الصفحة	فهرس المطبوعة
1	فهرس المطبوعة
3	تقديم
5	المحور الأول: التحليل التوفيقي
5	• المفاهيم الأساسية في التحليل التوفيقي: المفاهيم.
6	• مبدأ العد الأساسي: الطرق المختلفة لحدوث حدث ما.
9	• العاملي والعمليات الحسابية عليه: المفهوم والاستخدامات.
11	• الترتيبات: المفهوم وطرق الحساب.
14	• التبديلات: المفهوم وطرق الحساب.
16	• التوافيق: المفهوم وطرق الحساب.
17	• طرق النشر ذات الحدين: التعريف، النظرية، طريقة الحساب.
20	• استخدامات التحليل التوفيقي في الحقل الاقتصادي: تطبيقات.
21	• تمارين.
23	• خلاصة.
25	المحور الثاني: المتتاليات العددية
25	• عموميات حول المتتاليات العددية: المفهوم، الاتجاه، التجاور.
29	• المتتاليات الحسابية: التعريف، الحد العام.
32	• تمرين تطبيقي حول الفائدة البسيطة.
34	• المتتاليات الهندسية: التعريف، الحد العام.
36	• تمرين تطبيقي حول الفائدة المركبة.
38	• تمارين.
40	• خلاصة.
42	المحور الثالث: الدوال اللوغاريتمية والأسية
42	• تعريف وأنواع الدوال: تعريف وخصائص.
46	• الدالة اللوغاريتمية: التعريف، الخصائص والتغيرات.
61	• تطبيقات الدوال اللوغاريتمية: النمو السكاني، مرونة الطلب السعرية، التضخم.
63	• الدالة الأسية: التعريف، الخصائص والتغيرات.
77	• تطبيقات الدوال الأسية: الناتج المحلي الاجمالي، استهلاك الموارد.

80	• خلاصة.
82	المحور الرابع: المشتقات والاشتقاقية في الدوال
82	• مفهوم المشتقة: المفاهيم الأساسية والتطبيقات.
83	• العدد المشتق والدالة المشتقة: تعريف وتمثيل هندسي.
84	• الاشتقاقية والاستمرارية.
88	• المشتقات والعمليات على الدوال.
91	• المشتقات المتتابة.
92	• نقطة الانعطاف.
95	• تطبيقات الاشتقاق والاشتقاقية في العلوم الاقتصادية.
95	• تمارين
98	• خلاصة.
100	المحور الخامس: الدوال الأصلية وحساب التكامل
101	• تعريف الدالة الأصلية: مفهوم وخصائص.
103	• التكامل الرياضي: تكامل الدوال الأساسية، التكامل بالتعويض، التكامل بالأجزاء.
103	• التكامل غير المحدد: إيجاد عائلة الدوال الأصلية.
104	• التكامل المحدد: حساب مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى الدالة.
106	• استعمال التكامل في الاقتصاد: تحويل الدوال، تقدير سلوك المستهلك والمنتج، التكامل في تحليل النمو.
108	• تمارين
113	• خلاصة
114	الخاتمة العامة
115	المصادر والمراجع

تقديم

تعد الرياضيات من أهم الأدوات العلمية التي لا يمكن الاستغناء عنها في مجالي الاقتصاد والتسيير، إذ تستخدم كوسيلة دقيقة للتعبير عن العلاقات الاقتصادية وتحليل الظواهر المختلفة بلغة رقمية ومنطقية. فالتحليل الاقتصادي الحديث يعتمد على النماذج الرياضية لتمثيل سلوك المستهلكين والمؤسسات والأسواق، مما يسمح بفهم أعمق لآليات العرض والطلب، وتقدير التوازنات الاقتصادية والتنبؤ بالنتائج المستقبلية.

كما تمكن الرياضيات المسيرين من اتخاذ قرارات رشيدة مبنية على الحساب الكمي والتحليل المنطقي، سواء في مجالات التمويل، التسويق، أو إدارة الإنتاج. فهي تساعد على قياس الأداء، حساب التكاليف، تحليل المخاطر، وتخطيط الموارد.

إن امتلاك الطالب لمهارات رياضية أساسية يعزز قدرته على التعامل مع المفاهيم الاقتصادية المجردة، ويفتح له المجال لفهم المواد اللاحقة مثل الإحصاء، الاقتصاد القياسي، المالية، والبحث العملي، التي تشكل امتدادا مباشرا لتطبيقات الرياضيات في بيئة الأعمال والاقتصاد.

تهدف هذه المطبوعة إلى تسهيل فهم مادة الرياضيات 1 لطلبة السنة الأولى في ميدان العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، من خلال تبسيط المفاهيم النظرية وتقديمها بأسلوب تدريجي مدعوم بالأمثلة والتطبيقات العملية. كما تسعى إلى ربط القواعد الرياضية بالتطبيقات الاقتصادية والإدارية الواقعية، حتى يدرك الطالب أهمية الرياضيات في تحليل الظواهر واتخاذ القرارات في بيئة العمل.

وتأتي هذه المطبوعة أيضا كأداة مساعدة لتحضير الطلبة للامتحانات، عبر تقديم تمارين تطبيقية متنوعة وحلول نموذجية تمكنهم من التدريب الذاتي وتنمية مهارات التفكير التحليلي والمنطقي الضروري لمواصلة دراستهم الجامعية في التخصصات الاقتصادية.

المحور الأول: التحليل التوافقي

المحور الأول: التحليل التوافقي

في حياتنا اليومية، كثيرا ما نواجه مواقف نحتاج فيها إلى حساب عدد الطرق الممكنة لاختيار أو ترتيب عناصر معينة، سواء كانت أرقاما، أشخاصا، أو أشياء. هذا ما يدرسه فرع من الرياضيات يعرف باسم التحليل التوافقي، وهو الأساس الذي يبنى عليه علم الاحتمالات والإحصاء.

من خلال التحليل التوافقي، نتعرف على التباديل والترتيبات التي تهتم بترتيب العناصر، والتوافيق التي تهتم باختيار العناصر دون النظر للترتيب، مما يساعدنا على فهم احتمالات وقوع الأحداث المختلفة وحل المشكلات الرياضية والعملية بطريقة دقيقة وموضوعية.

1. المفاهيم الأساسية في التحليل التوافقي: عند التعامل مع مجموعات من العناصر، غالبا ما نحتاج

إلى معرفة عدد الطرق الممكنة لاختيار أو ترتيب هذه العناصر. بعض المواقف تتطلب أن نهتم بالترتيب الذي تظهر به العناصر، بينما في مواقف أخرى يكون الترتيب غير مهم. فهم هذه الفكرة يساعدنا على تمييز بين الترتيب، التباديل والتوافيق ويعطي قاعدة قوية لحساب الاحتمالات وحل المسائل الرياضية بشكل دقيق. من هنا تكمن أهمية التحليل التوافقي في:

- الحياة اليومية: يستخدم في حل العديد من المشكلات اليومية، مثل حساب عدد الطرق الممكنة لاختيار فريق من مجموعة من الأشخاص، أو حساب عدد الأرقام السرية الممكنة.
- الاحتمالات والإحصاء: هو الأساس لفهم الاحتمالات وحساب الاحتمالات المختلفة.
- علوم الكمبيوتر: يستخدم في تصميم الخوارزميات وحل المشكلات المتعلقة بترتيب وتجميع البيانات.

➤ أمثلة على تطبيقات التحليل التوافقي:

- في الرياضيات: حساب عدد الحلول لمعادلة، إيجاد عدد الأعداد الأولية في فترة معينة.
- في علوم الكمبيوتر: تصميم الخوارزميات، تحليل الأداء، أمن المعلومات.
- في الإحصاء: حساب الاحتمالات، تحليل البيانات، تصميم التجارب.
- في الحياة اليومية: ترتيب جدول الامتحانات، اختيار فريق رياضي، توزيع الجوائز.
- علم الأحياء: لحساب عدد الطرق الممكنة لتسلسل الجينات.
- الكيمياء: لحساب عدد التشكيلات الجزيئية الممكنة.
- الفيزياء: لحساب عدد الحالات الكمية الممكنة لنظام.
- اللغات: لحساب عدد الكلمات التي يمكن تكوينها من مجموعة من الحروف.

➤ أمثلة على مسائل التحليل التوافقي:

- مثال 1: كم طريقة يمكن بها ترتيب 5 كتب على رف؟
- مثال 2: كم فريقا مكونا من 3 لاعبين يمكن اختياره من فريق كرة قدم مكون من 11 لاعبا؟
- مثال 3: كم رقما مكونا من 4 أرقام مختلفة يمكن تكوينه من الأرقام من 0 إلى 9؟

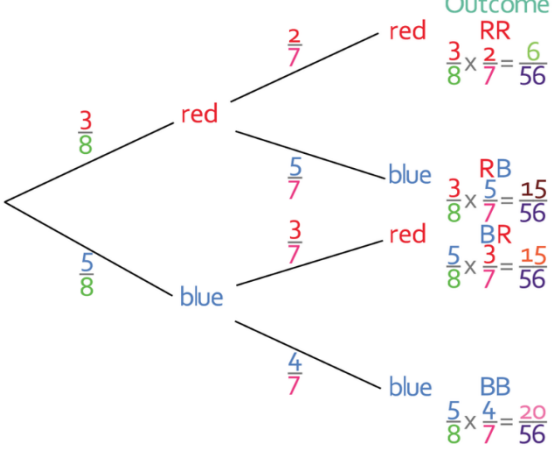
2. مبدأ العد الأساسي في التحليل التوافقي

- مبدأ العد الأساسي هو قاعدة رياضية تساعدنا على حساب عدد الطرق الممكنة لحدوث شيء ما.
- تخيل أنك تختار زيا لارتدائه، لديك 3 قمصان و 2 بنطال، فكم مجموعة مختلفة من الملابس يمكنك تكوينها؟
- هذا هو بالضبط النوع من الأسئلة التي يجيب عليها مبدأ العد الأساسي. وهنا نميز بين:
- الحدث: هو الشيء الذي تريد حساب عدد طرق حدوثه. في مثال الملابس، اختيار الزي هو الحدث.

• الاختيارات: هي الخيارات المتاحة لكل جزء من الحدث. القمصان والبنطال هي الخيارات في مثالنا.

➤ القاعدة الأساسية: إذا كان هناك "A" طرق لحدث شيء ما، و "B" طرق لحدث شيء آخر،

فإن عدد الطرق لحدث كلا الشيئين معا هو $B \times A$.

	مثال الكريات: (الشجرة الاحتمالية) لنفترض أن لدينا كيس يحتوي على 3 كرات حمراء و 5 كرات زرقاء. نريد سحب كرتين على التوالي دون إرجاع. يمكننا تمثيل هذه التجربة بشجرة الاحتمالات كما يلي: • المرحلة الأولى: السحب الأول. لدينا فرعين: أحمر (احتمال $3/8$) وأزرق (احتمال $5/8$). • المرحلة الثانية: السحب الثاني. لكل فرع في المرحلة الأولى، ينشأ فرعان جديان حسب لون الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى.
--	--

ملاحظة: يصلح تطبيق هذا القانون فقط لما الحدثان A و B معا، أما إذا كانا متنافيين فإننا نستخدم قاعدة

الجمع بدل الضرب، ويكون عدد طرق تحقق أحد هاذين الحدثين هو: $n_1 + n_2$.

➤ كيفية قراءة شجرة الاحتمالات:

- الفروع: تمثل النواتج الممكنة لكل مرحلة.
- الأرقام على الفروع: تمثل احتمالات حدوث كل نتيجة.
- مسار كامل: يمثل نتيجة التجربة بأكملها. احتمال المسار هو حاصل ضرب احتمالات الفروع المكونة له.

➤ مثال تطبيقي:

- لديك 5 أنواع مختلفة من الآيس كريم و 3 أنواع مختلفة من التوبينج¹.
- كم عدد الآيس كريم المختلفة التي يمكنك طلبها؟
- الجواب: $15 = 3 \times 5$ نوعا مختلفا.

➤ أمثلة أخرى:

- رمي النرد: إذا رميت نردا مرتين، فكم عدد النواتج الممكنة؟ الجواب: $36 = 6 \times 6$ نتيجة.
- أرقام الهاتف: إذا كان رقم الهاتف يتكون من 7 أرقام، فكم عدد الأرقام المختلفة الممكنة؟ (افتراضا أن الأرقام تتكرر) الجواب: $10.000.000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ رقم.

➤ ملاحظات هامة:

- الأحداث المستقلة: مبدأ العد الأساسي ينطبق بشكل خاص على الأحداث المستقلة، أي أن حدوث أحد الأحداث لا يؤثر على حدوث الآخر.
- الأحداث التابعة: إذا كانت الأحداث مترابطة، فإن الحساب يصبح أكثر تعقيدا وقد يتطلب استخدام قواعد أخرى.

¹ - التوبينج: هو أي مادة تضاف إلى الطعام لتزيينه أو تحسين طعمه. يمكن أن يكون التوبينج حلو أو مالح، ساخن أو بارد، سائل أو صلب.

➤ التطبيقات الشائعة لمبدأ العد الأساسي:

- كلمات السر: حساب عدد كلمات السر الممكنة بناء على طول الكلمة وأنواع الأحرف المستخدمة.
- أرقام الهواتف: تحديد عدد الأرقام الهاتفية الممكنة في نظام معين.
- لوحات الترخيص: حساب عدد لوحات الترخيص المختلفة التي يمكن إصدارها.
- الاحتمالات: حساب احتمالية حدوث حدث معين من خلال تحديد عدد النواتج الممكنة لهذا الحدث وعدد النواتج الممكنة للحدث الكلي.
- الرمز البريدي: تحديد عدد الرموز البريدية الممكنة في نظام معين.
- ألعاب الحظ: حساب عدد الطرق الممكنة للفوز في لعبة الحظ.

3. العامل والعمليات الحسابية عليه

العامل هو أداة أساسية في العديد من مجالات الرياضيات، وفهم كيفية استخدامه يساعد في حل العديد من المسائل المعقدة، العامل لعدد صحيح موجب (طبيعي) n ، ويرمز له بـ $n!$ ، هو حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة من 1 إلى n بمعنى آخر:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

مثال:

- $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
- $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

➤ استخدامات العامل: يستخدم العامل في العديد من مجالات الرياضيات، وخاصة في:

- التحليل التوافقي: لحساب عدد الطرق المختلفة لترتيب مجموعة من العناصر (الترتيبات والتوافقات).
- نظرية الاحتمالات: لحساب احتمالات حدوث أحداث معينة.
- الجبر: في العديد من الصيغ والمعادلات.

➤ العمليات الحسابية على العامل:

- الضرب:

$$n! \times m! = (n \times (n-1) \times \dots \times 1) \times (m \times (m-1) \times \dots \times 1)$$

- القسمة:

$$n! / m! \quad \text{حيث } (n \geq m) \text{ يمكن تبسيطها عن طريق إلغاء العوامل المشتركة.}$$

- الرفع للقوة:

$$(n!)^k \quad \text{يعني ضرب } n! \text{ في نفسه } k \text{ مرات.}$$

➤ ملاحظة هامة:

- $0!$ يتم تعريف $0!$ بأنه يساوي 1.

4. الترتيبات: عدد الطرق لترتيب عناصر مجموعة معينة.

عند التعامل مع مجموعات من العناصر، غالبا ما نحتاج إلى معرفة عدد الطرق الممكنة لاختيار أو ترتيب هذه العناصر. بعض المواقف تتطلب أن نهتم بالترتيب الذي تظهر به العناصر، بينما في مواقف أخرى يكون الترتيب غير مهم.

فهم هذه الفكرة يساعدنا على تمييز بين الترتيب، التباديل والتوافيق ويعطي قاعدة قوية لحساب الاحتمالات وحل المسائل الرياضية بشكل دقيق. سنتعرف الآن على مفهوم الترتيب كأول خطوة في التحليل التوافيقي، ثم ننتقل إلى التباديل والتوافيق مع الأمثلة العملية.

➤ تعريف الترتيب (Arrangement):

الترتيبات هي عدد الطرق المختلفة لترتيب مجموعة من العناصر بحيث يختلف كل ترتيب عن الآخر في ترتيب العناصر. بعبارة أخرى، هي جميع الطرق الممكنة لوضع هذه العناصر في صف واحد. بهذا يمكن القول أن الترتيب هي طريقة لتنظيم أو ترتيب عدد معين من العناصر المميزة في تسلسل محدد، بحيث يعطى كل عنصر موقعا خاصا ضمن هذا الترتيب، ويعتبر الترتيب مختلفا إذا تغير موضع أي عنصر من عناصره.

بعبارة أخرى، الترتيب تعبر عن ترتيب العناصر ترتيبا خطيا، حيث يكون ترتيب العناصر ذا أهمية. فإذا تغير ترتيب عنصرين، نحصل على ترتيب جديد.

مثال: لديك ثلاثة أقلام ملونة (أحمر، أزرق، أصفر). كم طريقة مختلفة يمكنك لترتيب هذه الأقلام في

صف واحد؟

• الحلول:

○ أحمر، أزرق، أصفر

○ أحمر، أصفر، أزرق

○ أزرق، أحمر، أصفر

○ أزرق، أصفر، أحمر

○ أصفر، أحمر، أزرق

○ أصفر، أزرق، أحمر

• كما ترى، هناك 6 طرق مختلفة لترتيب هذه الأعلام.

➤ طريقة الحساب: يتم فيها اختيار جزء k من الكل n ، ويرمز لها بالرمز A_n^k وتتميز بالخصائص

التالية:

- فقط بعض عناصر المجموعة n تستعمل في الترتيب.

- ترتيب عناصرها مهم.

- تكون بتكرار وبدون تكرار.

ومنه يمكن التمييز بين نوعين من الترتيبات:

➤ الترتيب مع التكرار: ترتيب n من العناصر مأخوذة k في كل مرة (مع السماح بالتكرار) هو قائمةمن k من العناصر المختلفة أو المتكررة، مأخوذة من n عنصرا، أين يمكن لكل عنصر أن يتكرر k

مرة، كما يمكن حسابها وفق القانون التالي:

$$A_n^k = n^k$$

مثال: ما هو عدد الكلمات ذات حرفين التي تشكيها من ثلاثة أحرف $a; b; c$ مع إمكانية التكرار؟

الجواب: نلاحظ أن بعض العناصر المجموعة n فقط تستعمل في الترتيب (جزء من الكل)، وأن ترتيبها مهم ويسمح بتكرارها، وكل ذلك يعني أننا أمام ترتيبية مع التكرار.

$$A_n^k = A_3^2 = 3^2 = 9$$

$$(a ; a) (a ; b) (a ; c) (b ; a) (b ; b) (b ; c) (c ; a) (c ; b) (c ; c)$$

يمكن محاكاة الترتيبات مع التكرار بعملية سحب متتالية لـ k كرة من صندوق به n كرة مع الإرجاع.

➤ **الترتيبة بدون تكرار:** ترتيب n من العناصر مأخوذة k في كل مرة (دون السماح بالتكرار) هو قائمة

من k من العناصر المختلفة، مأخوذة من n عنصرا، حيث لا يمكن لكل عنصر أن يظهر إلا مرة

واحدة، كما يمكن حسابها وفق القانون التالي:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

➤ **مثال:** بكم طريقة يمكن تشكيل كلمة ذات حرفين التي تشكيها من ثلاثة أحرف $a; b; c$ دون تكرار؟

الجواب: نلاحظ أن بعض العناصر المجموعة n فقط تستعمل في الترتيب (جزء من الكل)، وأن ترتيبها مهم ولا يسمح بتكرارها، وكل ذلك يعني أننا أمام ترتيبية دون التكرار.

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

$$(a ; a) (a ; b) (a ; c) (b ; a) (b ; b) (b ; c) (c ; a) (c ; b) (c ; c)$$

يمكن محاكاة الترتيبات دون تكرار بعملية سحب متتالية لـ k كرة من صندوق به n كرة دون الإرجاع.

5. التبديلات (Les Permutations)

هي عملية ترتيب عناصر مجموعة في متسلسلة أو بترتيب معين. إذا كانت العناصر مرتبة، فعملية إعادة ترتيب عناصرها تسمى تبديلاً. وفيها يتم اختيار الكل n من الكل n ، ويرمز لها بالرمز P_n^n وتتميز بالخصائص التالية:

- جميع عناصر المجموعة n تستعمل في التبديل بينها.
- ترتيب عناصرها مهم.
- لا يسمح فيها بالتكرار.

يمكن لنا أن نميز بين ثلاثة أنواع من التبديلات:

➤ التبديلات الخطية أو المستقيمة (*rectilignes*): لـ n من العناصر المختلفة فيما بينها:

$$P_n^n = n!$$

➤ مثال: ما هو عدد الكلمات الممكن تشكيلها من الحروف العشرة التالية: $a; b; c; d; e; f; g; h;$ ؟ $i; j$

الجواب: نلاحظ أن كل عناصر المجموعة n تستعمل في الترتيب (الكل من الكل) وأن ترتيبها مهم، وأنها غير دائرية ولا عناصر متكررة فيما بينها، وعلى ذلك فنحن أمام تبديلة خطية مختلفة العناصر.

$$P_{10}^{10} = 10! = 3628800$$

➤ التبديلات الخطية مع وجود مجموعات جزئية من العناصر متكررة: وتحسب باستعمال القانون التالي:

$$P_n^{n_1; n_2; \dots; n_k} = \frac{P_n^n}{P_{n_1}^{n_1} \times P_{n_2}^{n_2} \times \dots \times P_{n_k}^{n_k}} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

➤ مثال: ما هو عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها من حروف كلمة *Statistics*؟

الجواب: نلاحظ أن كل عناصر المجموعة n تستعمل في الترتيب (الكل من الكل) وأن ترتيبها مهم، وأنها غير دائرية، بينما يوجد بينها عناصر متكررة وعلى ذلك نحن بصدد تبديلة خطية ذات عناصر متشابهة، يمكن تصنيفها في المجموعات الجزئية التالية:

$$3s \Rightarrow n_1 ; 3t \Rightarrow n_2 ; 2i \Rightarrow n_3$$

$$P_{10}^{3;3;2} = \frac{P_{10}^{10}}{P_3^3 \times P_3^3 \times P_2^2} = \frac{10!}{3! 3! 2!} = 50400$$

نلاحظ الاختلاف بين المثال والمثال السابق من حيث تكرار العناصر، فرغم أن تبديل في المثالين تم بين 10 حروف، إلا أن التكرار الذي حدث في المثال الأخير قلص عدد الحالات الممكنة من أكثر من 3 ملايين كلمة مختلفة إلى 50400 كلمة فقط، وهذا راجع إلى أن التبديل بين بعض الحروف في المثال الحالي لا ينتج حالات جديدة، ولهذا اخترلنا هذا التبديل ووضعناه في المقام.

➤ التباديلات الدائرية (*Circulaires*) n من العناصر المختلفة فيما بينها:

$$P_n^n = (n - 1)!$$

➤ مثال: بكم طريقة يمكن أن يجلس خمسة أشخاص حول مائدة مستديرة؟

الجواب: نلاحظ أن كل عناصر المجموعة n تستعمل في الترتيب (الكل من الكل) وأن ترتيبها مهم، وأنها دائرية لأن الأشخاص الخمسة يتحلقون حول مائدة مستديرة، وعلى هذا نحن أمام تبديلة دائرية.

$$P_5^5 = (5 - 1)! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

يمكن محاكاة التباديلات عموماً بعملية سحب متتال لجميع كرات صندوق به n كرة بدون إرجاع.

6. التوفيقات (Combination)

هي عدد التشكيلات الممكنة لانتقاء مجموعة جزئية من مجموعة كلية من العناصر عندما يكون ليس هناك أهمية للترتيب. أو بعبارة أخرى، «التوافيق» هي عبارة عن عدد الطرق التي يمكن فيها انتقاء k من العناصر من ضمن n من العناصر المتوفرة دون مراعاة لترتيب تسلسل العناصر المنتقاة ضمن التشكيلات الممكنة للمجموعة الجزئية. $C(n; k)$ عدد التوافيق أي مجموع الكيفيات التي يمكن أن ننتقي بها أفراد المجموعة دون مراعاة الترتيب، ويشير n لعدد أفراد المجموعة التي يراد ترتيبها. و k يرمز إلى كيفية أخذ أفراد المجموعة، ويرمز لها بالرمز C_n^k وتتميز بالخصائص التالية:

– فقط بعض العناصر n تستعمل في اختيار التوفيق.

– ترتيب عناصرها غير مهم.

يمكن التمييز بين نوعين من التوفيقات من حيث إمكانية التكرار:

➤ **التوفيقات بدون تكرار:** وهي استعمال k عنصر مختارة من بين n عنصرا، حيث لا يمكن للعناصر أن تتكرر، ولا أهمية للترتيب بينها وتحسب كمايلي:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{P_k^k}$$

➤ **مثال:** صندوق به ثلاث كريات طبع عليها a, b, c ، سحبنا كرتين دفعة واحدة، كم كلمة ذات حرفين يمكن الحصول عليها؟

الجواب: نلاحظ أن بعض العناصر المجموعة n فقط تستعمل في الترتيب (جزء من الكل)، وأن ترتيبها غير مهم لأن السحب تم مرة واحدة ولا يسمح بتكرارها، وكل ذلك يعني أننا أمام توفيق دون التكرار.

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

$$(a; a) (a; b) (a; c) (b; a) (b; b) (b; c) (c; a) (c; b) (c; c)$$

➤ **التوفيقات مع التكرار:** وهي استعمال لـ k عنصر مختارة من بين n عنصرا، حيث لا يمكن للعناصر أن تتكرر، ولا أهمية للترتيب بينها وتحسب كما يلي:

$$C_{n+(k-1)}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

➤ **مثال:** صندوق به ثلاث كريات طبع عليها $a; b; c$ ، سحبنا كرتين متتاليتين مع الإرجاع، كم كلمة ذات حرفين يمكن الحصول عليها دون الأخذ بعين الاعتبار لقضية الترتيب؟

الجواب: نلاحظ أن بعض العناصر المجموعة n فقط تستعمل في الترتيب (جزء من الكل)، وأن ترتيبها غير مهم ويسمح بتكرارها لأن السحب تم بالإرجاع، وكل ذلك يعني أننا أمام توفيقية مع التكرار.

$$C_{3+(2-1)}^2 = C_4^2 = \frac{(3+2-1)!}{2!(3-1)!} = \frac{(4)!}{2!(2)!} = 6$$

$$(a; a) (a; b) (a; c) (b; a) (b; b) (b; c) (c; a) (c; b) (c; c)$$

➤ **ملاحظة:** التفيقة مع التكرار لـ k عنصرا مختارة من بين n عنصرا، هي نفسها التوفيقية بدون تكرار لـ k عنصرا مختارة من بين $n(k-1)$ عنصرا.

7. طريقة ذات الحدين (Binomial Theorem) طريقة النشر

يعتبر نشر العبارة الجبرية $(a+b)^n$ من المواضيع الأساسية في التحليل التوفيقي والجبر، إذ يهدف إلى إيجاد شكل موسع للعبارة دون الحاجة إلى إجراء عمليات الضرب المتكرر يدويا.

عندما تكون قيمة n صغيرة، يمكننا النشر بسهولة، لكن عند القيم الكبيرة، نلجأ إلى قاعدة عامة تعرف بـ نظرية ذات الحدين (Binomial Theorem).

➤ **تعريف النشر:** نشر العبارة الرياضية $(a + b)^n$ يعني إيجاد جميع الحدود الناتجة عن ضرب $(a + b)$ في نفسه n مرة، ثم جمع الحدود المتشابهة. على سبيل المثال:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

لكن عند القيم الكبيرة لـ n ، يصبح النشر اليدوي معقداً، وهنا نستعمل نظرية نيوتن.

➤ **نظرية ذات الحدين (نظرية نيوتن)**

نظرية نيوتن أو نظرية ذات الحدين هي مبدأ رياضي يبين كيفية نشر قوة مجموع حدين، وتتص على أنه لأي عددين حقيقيين a و b ، وأي عدد طبيعي n ، يمكن كتابة القوة $(a + b)^n$ على شكل مجموع من الحدود المرتبة وفق العلاقة:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

أي أن $(a + b)^n$ هو مجموع حدود (الحد العام للنشر) من الشكل:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

• a^{n-k} : القوة المتناقصة لـ a .

• b^k : القوة المتزايدة لـ b .

• T_{k+1} : الحد العام في النشر.

حيث:

• $\binom{n}{k}$ هو المعامل التوافقي (توافيق k من n) الذي يمثل عدد الطرق الممكنة لاختيار k عناصر

من بين n ، ويعطى بالعلاقة:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

تفترض النظرية وجوباً عدد الحدود في النشر هو: $(n+1)$ لأن قيمة k تتغير من 0 إلى n . مع

وجوب الالتزام بالملاحظات الأساسية التالية:

- في كل حد، مجموع الأسين يساوي n ، أي $(n-k) + k = n$.
- معامل كل حد هو عدد توافيق $\binom{n}{k}$.
- مجموع المعاملات في النشر يساوي 2^n (عند وضع $a = b = 1$).
- القوى في a تتناقص تدريجياً من n إلى 0، بينما القوى في b تزداد تدريجياً من 0 إلى n .

➤ أمثلة تطبيقية

مثال 1: انشر $(a+b)^2$.

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

$$= 1a^2 + 2ab + 1b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مثال 2: انشر $(a+b)^3$.

$$\begin{aligned}
 (a + b)^3 &= \binom{3}{3}a^3 + \binom{3}{2}a^2b + \binom{3}{1}ab^2 + \binom{3}{0}b^3 \\
 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\
 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
 \end{aligned}$$

مثال 3: انشر $(x + 2)^4$

$$\begin{aligned}
 (x + 2)^4 &= \binom{4}{4}x^4 + \binom{4}{3}x^3(2) + \binom{4}{2}x^2(2)^2 + \binom{4}{1}x(2)^3 + \binom{4}{0}(2)^4 \\
 &= 1x^4 + 4x^3(2) + 6x^2(4) + 4x(8) + 1(16) \\
 &= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16
 \end{aligned}$$

8. استخدامات التحليل التوفيقي في الحقل الاقتصادي

يعد التحليل التوفيقي أداة حيوية في الاقتصاد تمكن المحللين من دراسة الخيارات والبدائل الممكنة بشكل منهجي، حيث يستخدم في تحسين توزيع الموارد وتخطيط الإنتاج وتحليل محافظ الاستثمار، من خلال حساب التوافيق والتباديل الممكنة بين العناصر الاقتصادية المختلفة. فمثلاً، عند تصميم محفظة استثمارية من مجموعة أسهم متاحة، يساعد التحليل التوفيقي في تحديد جميع التركيبات الممكنة وتقييمها، كما يطبق في تحسين سلاسل التوريد عبر دراسة المسارات المثلى لتوزيع البضائع، وفي تسعير المنتجات عبر تحليل مجموعة الحزم والعروض الممكنة، مما يوفر إطاراً كمياً دقيقاً لاتخاذ القرارات الاقتصادية الأمثل في ظل الموارد المحددة والاحتياجات المتعددة.

➤ تحليل محفظة الاستثمار: إذا كان لديك 10 أسهم مختلفة وتريد اختيار 4 منها لتشكيل محفظة

استثمارية، فكم عدد محافظ الاستثمار الممكنة؟

الحل:

$$C(10,4) = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

التفسير: يوجد 210 طريقة مختلفة لتشكيل محفظة استثمارية من 4 أسهم من بين 10.

➤ تخصيص الموارد والميزانيات: شركة لديها 5 مشاريع وميزانية 100 مليون دينار. إذا كانت تكلفة

كل مشروع 20 مليون دينار، فكم عدد خيارات تمويل المشاريع الممكنة؟

الحل:

$$C(5, k) \text{ حيث } k = \frac{100}{20} = 5$$

$$C(5,5) = 1$$

لكن إذا كان بإمكانهم تمويل أي مجموعة من المشاريع:

$$\sum_{k=0}^5 C(5, k) = 2^5 = 32$$

التفسير: يوجد 32 طريقة مختلفة لاختيار المشاريع التي سيتم تمويلها.

➤ تحليل سلاسل التوريد: شركة لديها 3 موردين و5 مراكز توزيع. كم طريقة مختلفة لتوزيع المنتجات

من الموردين إلى مراكز التوزيع؟

الحل:

$$3^5 = 243 \text{ طريقة}$$

التفسير: كل مركز توزيع يمكن أن يتعامل مع أي من الموردين الثلاثة.

➤ تخطيط الجدولة والإنتاج: مصنع لديه 6 أوامر إنتاج و3 خطوط إنتاج. كم طريقة مختلفة لتوزيع

الأوامر على الخطوط؟

الحل:

$$3^6 = 729 \text{ طريقة}$$

التفسير: يمكن تعيين كل أمر إنتاج إلى أي خط إنتاج.

➤ تحليل مخاطر الائتمان: إذا كان لدى البنك 10 قروض، واحتمال تخلف كل قرض 5%، ما

احتمال أن يـ/تخلف قرضان بالضبط؟

الحل:

$$C(10,2) \times (0.05)^2 \times (0.95)^8$$

$$45 \times 0.0025 \times 0.6634 = 0.0746 = 7.46\%$$

➤ تسعير المنتجات والحزم: متجر يريد إنشاء 3 باقات مختلفة من 5 منتجات. كم عدد الخيارات

الممكنة؟

الحل:

$$C(5,3) = 10$$

لكن مع مراعاة ترتيب الباقات:

$$P(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

➤ تحليل شبكات النقل والخدمات اللوجستية: شركة شحن لديها 8 مدن تريد زيارة كل منها مرة واحدة.

ما عدد مسارات الرحلة الممكنة؟

الحل:

$$8! = 40,320 \text{ مسار}$$

التفسير: هذه مشكلة البائع المتجول الكلاسيكية.

➤ توزيع العمالة والمهام: قسم لديه 5 موظفين و 7 مهام. كم طريقة مختلفة لتوزيع المهام بحيث يقوم

كل موظف بمهمة واحدة على الأقل؟

الحل:

$$\text{عدد طرق التوزيع} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 3^2 = 22680$$

خلاصة

تناولنا من خلال هذه الوحدة مفهوم التحليل التوافقي باعتباره أحد الفروع الأساسية في الرياضيات التطبيقية، والذي يهتم بدراسة طرق العد وتنظيم العناصر وفق قواعد محددة. يهدف هذا المجال إلى تحديد عدد الإمكانيات الممكنة لحدث معين دون الحاجة إلى سرد جميع الحالات بشكل فعلي، وذلك من خلال استخدام أدوات رياضية دقيقة.

استهل الفصل بعرض المبدأين الأساسيين للعد، وهما مبدأ الجمع ومبدأ الضرب، باعتبارهما القاعدة التي تبنى عليها بقية المفاهيم. بعد ذلك تم التطرق إلى التباديل (*Permutations*)، حيث يؤخذ ترتيب العناصر بعين الاعتبار، مع توضيح حالات التباديل البسيطة والتباديل بوجود تكرار. كما تم عرض التوافيق (*Combinations*)، التي يهمل فيها ترتيب العناصر، مع إبراز الفرق الجوهرى بينها وبين التباديل.

كما تناولنا مفهوم الترتيبات (*Arrangements*) باعتبارها حالة وسطى بين التباديل والتوافيق، إضافة إلى تقديم الصيغ الرياضية المرتبطة بها مثل العاملية (*Factorial*) ومعامل ثنائي الحدين، مع توضيح خصائصه وعلاقته بقانون النشر ذا الحدين (*Binomial Expansion*).

وخلصنا إلى أن التحليل التوافقي يشكل أداة أساسية في عدة مجالات، مثل نظرية الاحتمالات، الإحصاء، بحوث العمليات، والاقتصاد الرياضي، لما له من دور في نمذجة القرارات وتحليل البدائل الممكنة. كما يعد أساساً لفهم العديد من النماذج الكمية المعاصرة.

المحور الثاني: المتتاليات العددية

المحور الثاني: المتتاليات العددية

تعد المتتاليات العددية من المفاهيم الأساسية في الرياضيات، إذ تمثل وسيلة فعالة لدراسة كيفية تغير القيم العددية عبر الزمن أو وفق نظام معين. فهي تعنى بدراسة الأعداد المرتبة وفق قاعدة محددة تربط كل عدد بالذي يليه.

وتظهر أهمية المتتاليات في كونها تمثل نموذجا رياضيا يستخدم في تحليل الظواهر المتكررة أو المتدرجة، مثل تطور رأس المال، أو نمو عدد السكان، أو تغير درجات الحرارة، أو حركة الأجسام، وغير ذلك من الظواهر التي تتطور بانتظام.

فالرياضيات من خلال المتتاليات تمنحنا لغة دقيقة لوصف التغير المنتظم أو المتناقص أو المتزايد، مما يجعلها أداة ضرورية في العديد من المجالات مثل الاقتصاد، والإحصاء، والفيزياء، والهندسة، وحتى في الحياة اليومية.

إذ يمكن اعتبار كل متتالية على أنها قائمة مرتبة من الأعداد يتم توليدها بواسطة قانون محدد، حيث يرمز لكل حد من حدودها عادة بالرمز u_n ، ويمثل n رتبة الحد داخل المتتالية.

وبدراسة المتتاليات العددية يمكن التمييز بين أنواعها، كالمتتاليات الحسابية التي يكون الفرق بين حدودها ثابتا، والهندسية التي يكون خارج قسمة كل حد على سابقه ثابتا، وغيرها من الأنواع التي تساعدنا على فهم سلوك القيم وتطورها المستمر.

1. عموميات حول المتتاليات العددية

المتتالية هي عبارة عن سلسلة من الأعداد مرتبة وفقا لنمط معين أو قاعدة محددة. يمكن تصورها كقائمة من الأرقام حيث لكل رقم مكان محدد في القائمة.

رياضيا نسمي متتالية عددية كل تطبيق من N نحو IR . نرمز عادة للمتتالية بالرمز $(u_n)_{n \in N}$ أو اختصارا (u_n) ، يسمى الحد (u_n) بالحد العام للمتتالية (u_n) .

أمثلة: $(u_n = \sqrt{n})$ ، $(u_n = 2n - 3)$ ، $(u_n = (-1)^n)$.

أمثلة على المتتاليات:

• الأعداد الطبيعية: 1، 2، 3، 4، 5، ...

• الأعداد الزوجية: 2، 4، 6، 8، 10، ...

➤ عناصر المتتالية:

- الحد: كل رقم في المتتالية يسمى حدا.
- الحد الأول: هو الرقم الذي يبدأ به المتتالية.
- الحد العام: هو صيغة رياضية تمثل أي حد في المتتالية بدلالة رقمه.

➤ أنواع المتتاليات:

- المتتالية الحسابية: هي المتتالية التي يكون فيها الفرق بين أي حدين متتاليين ثابتا.
- المتتالية الهندسية: هي المتتالية التي يكون فيها حاصل قسمة أي حد على سابقه ثابتا.
- متتاليات أخرى: هناك أنواع عديدة من المتتاليات، مثل متتاليات فيبوناتشي، المتتاليات المتناوبة، وغيرها.

➤ أهمية دراسة المتتاليات:

- الرياضيات: تستخدم المتتاليات في العديد من فروع الرياضيات، مثل حساب التفاضل والتكامل، ونظرية الأعداد.
- العلوم: تستخدم المتتاليات في نمذجة الظواهر الطبيعية، مثل نمو السكان، وتحلل الإشعاع.
- الاقتصاد: تستخدم المتتاليات في تحليل البيانات المالية والتنبؤ بالأحداث الاقتصادية.
- علوم الكمبيوتر: تستخدم المتتاليات في تصميم الخوارزميات وبناء الهياكل البيانات.

➤ اتجاه تغير متتالية: نقول عن متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ أنها:

- متزايدة (متزايدة تماما) إذا كان: $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} \geq u_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} > u_n)$.
- متزايدة (متزايدة تماما) إذا كان: $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} \leq u_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} < u_n)$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية رتيبة (تماما) إذا كانت متزايدة (تماما) أو متناقصة (تماما).
- هناك متتاليات لا هي متزايدة ولا هي متناقصة (غير رتيبة) مثل المتتالية $(u_n = (-1)^n)$.

أمثلة:

- لتكن المتتالية: $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4} \dots \dots \frac{1}{n}\right)$

$$\forall n \geq 1: u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0 \quad \text{لدينا:}$$

ومنه: $\forall n \geq 1: u_{n+1} < u_n$ إذن (u_n) متناقصة تماما.

- لتكن المتتالية: $(u_n = \sqrt{n})$ $\forall n \in \mathbb{N}$

لدينا: $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$ ، إذن يمكن القول أن (u_n) متزايدة تماماً.

➤ المتتالية المحدودة:

• نقول عن المتتالية (u_n) أنها محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيق $M \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq M$$

• نقول عن المتتالية (u_n) أنها محدودة من الأسفل إذا وجد عدد حقيق $m \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_n \geq m$$

• نقول عن المتتالية (u_n) أنها محدودة من الأعلى والأسفل إذا وجد عدد حقيق $M; m \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists M; m \in \mathbb{R}: m \leq u_n \leq M$$

مثال: لتكن المتتالية: $\forall n \in \mathbb{N}^*: u_n = 3 - \frac{1}{n}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{n} \geq -1 \Rightarrow -\frac{1}{n} + 3 \geq 2 \quad \text{لدينا:}$$

ومنه (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد الحقيق 2.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{n} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{n} + 3 < 3 \quad \text{لدينا:}$$

ومنه (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد الحقيق 3.

وبالتالي نستنتج من خلال العلاقات السابقة أن المتتالية (u_n) محدودة.

➤ المتتالية المتقاربة: المتتالية (u_n) مقاربة إذا كانت تملك نهاية منتهية ووحيدة: $(l \in R)$ أي

يمكن الكتابة رياضياً: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ، إذا كانت المتتالية غير مقاربة فهي متباعدة.

ملاحظات:

- كل متتالية مقاربة فهي محدودة.
 - كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي مقاربة.
 - كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي مقاربة.
- المتتاليات المتجاورة: نقول عن متتاليتين (u_n) و (v_n) أنهما متجاورتين إذا هما متزايدة والأخرى متناقصة مع وجوب تحقق الشرط التالي:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$$

2. المتتاليات الحسابية: نسمي متتالية حسابية ذات الأساس r كل متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تحقق العلاقة:

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = u_n + r$$

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية بـ: $u_n = u_0 + nr$ إذا كان الحد الأول للمتتالية هو u_0 .

وبالعلاقة $u_n = u_0 + (n-1)r$ إذا كان الحد الأول للمتتالية هو u_1 .

مجموع حدود متتالية حسابية إذا الحد الأول للمتتالية هو u_0 يعطى بـ :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (u_0 + u_n) \frac{n+1}{2} = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} (\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$$

مع العلم أن: عدد الحدود = دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول + 1.

➤ اتجاه تغير متتالية حسابية: لتكن المتتالية الحسابية ذات الأساس r . نعلم أن $u_{n+1} = u_n + r$

ومنه $u_{n+1} - u_n = r$ إذن نستنتج أن :

• (u_n) متزايدة إذا كان: $r > 0$.

• (u_n) متناقصة إذا كان: $r < 0$.

• (u_n) ثابتة إذا كان: $r = 0$.

خاصية: لتكن a, b, c بهذا الترتيب حدود متوالية لمتتالية حسابية فإن: $a + c = 2b$ يسمى

الوسط الحسابي لكل من الحدين a و c .

تمرين تطبيقي رقم 01: نعتبر المتتالية الحسابية المعرفة كما يلي: $\forall n \in \mathbb{N}: u_n = 3n + 5$.

• بين أن (u_n) متتالية حسابية ثم حدد أساسها وحدها الأول.

• أحسب u_3 و u_{11} .

• أحسب المجموع: $u_3 + u_4 + \dots + u_{11}$.

الجواب:

لدينا: $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 5 - 3n = 3$ و: $u_0 = 3(0) + 5 = 5$

إذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$ وحدها الأول $u_0 = 5$.

لدينا: $u_3 = 3(3) + 5 = 14$ و $u_{11} = 3(11) + 5 = 38$.

$$u_3 + u_4 + \dots + u_{11} = (11 - 3 + 1) \frac{u_3 + u_{11}}{2} = 9 \frac{52}{2} = 234$$

➤ تمرين تطبيقي رقم 02: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ:

$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} \end{cases}$	1. بين أن $\forall n \in \mathbb{N}: u_n > 2$. 2. أدرس رتبة $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. 3. استنتج أن (u_n) متقاربة. 4. بين أن المتتالية (v_n) حسابية، حدد أساسها وحدها الأول. 5. استنتج $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$
---	--

الجواب:

1. لإثبات أن: $\forall n \in \mathbb{N}: u_n > 2$ نستعمل البرهان بالتراجع.

أولاً: نسمي العلاقة: $\forall n \in \mathbb{N}: u_n > 2$

ثانياً: نتحقق من صحة $p(0)$ أي صحة العلاقة من أجل $n = 0$ حيث لدينا: $u_0 = 3 > 2$ ومنه $p(0)$ محققة.

ثالثاً: نفرض أن $p(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $p(n+1)$.

لدينا:

$$u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} = \frac{5u_n - 4 + 5 - 5}{u_n + 1} = \frac{5u_n + 5}{u_n + 1} - \frac{9}{u_n + 1} = 5 - \frac{9}{u_n + 1}$$

من جهة أخرى:

$$u_n > 2 \Rightarrow u_n + 1 > 3 \Rightarrow \frac{1}{u_n + 1} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{9}{u_n + 1} < 3$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{u_n + 1} > -3 \Rightarrow 5 - \frac{1}{u_n + 1} > 2$$

ومنه: $u_n > 2$ إذن: $p(n+1)$ صحيحة وبالتالي نستنتج أنه: $\forall n \in N: u_n > 2$

2. لدراسة رتبة $(u_n)_{n \in N}$ ، لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 4u_n - 4}{u_n + 1}$$

$$u_n + 1 > 0 \text{ و } -u_n^2 + 4u_n - 4 = -(u_n - 2)^2$$

إذن يمكن كتابة: $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 2)^2}{u_n + 1}$ إذن نستنتج أن (u_n) متناقصة.

3. لدينا: (u_n) محدودة من الأسفل من ج1 ومتناقصة من ج2 ومنة (u_n) متقاربة.

4. لتبين أن المتتالية (v_n) حسابية لدينا:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3}{u_{n+1} - 2} - \frac{3}{u_n - 2} = \frac{3(u_n + 1)}{u_n - 6} - \frac{3}{u_n - 2} = \frac{u_n - 2}{u_n - 2} = 1$$

$$v_0 = \frac{3}{u_0 - 2} = 3 \text{ وحدها الأول } r = 1 \text{ ومنه } (v_n) \text{ متتالية حسابية أساسها}$$

5. لحساب النهاية لدينا:

$$v_n = v_0 + nr = 3 + n \Rightarrow u_n = \frac{2v_n + 3}{v_n} = \frac{2n + 9}{n + 3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+9}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n} = 2 \text{ ومنه:}$$

➤ تمرين تطبيقي حول الفائدة البسيطة:

قام شخص بإيداع مبلغ من المال قدره C_0 لدى بنك بفائدة بسيطة لمدة خمسة سنوات؛ C_1 ، C_2 ، C_3

، C_4 ، C_5 ، هي القيم المكتسبة في نهاية السنوات الخمس المتتالية والتي تأخذ شكل متتالية حسابية أساسها

$r = I$ ؛ (I) هو مبلغ الفائدة السنوية.

1. قم بالتعبير عن $(C_5, C_4, C_3, C_2, C_1)$ بدلالة " C_0 " ؛

2. إذا علمت أن: $C_0 + C_1 = 164000da$ ؛ $C_4 + C_5 = 199200da$ ، احسب مبلغ الفائدة

(والذي هو أساس المتتالية الحسابية)، المبلغ المالي المودع والقيمة المكتسبة في السنة الخامسة.

الجواب: لدينا مبلغ من المال C_0 تم ايداعه لدى بنك بفائدة بسيطة:

1. التعبير عن القيم المكتسبة للخمس سنوات المتتالية بدلالة C_0 . نعلم أن (I) هي الفائدة البسيطة التي

يتحصل عليها المودع بعد نهاية كل سنة، وبالتالي تكون القيم المكتسبة بعد نهاية كل سنة كما يلي:

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I = (C_0 + I) + I = C_0 + 2I$$

$$C_3 = C_2 + I = (C_1 + 2I) + I = (C_0 + I) + 2I + I = C_0 + 3I$$

$$C_4 = C_3 + I = C_0 + 4I$$

$$C_5 = C_4 + I = C_0 + 5I$$

2. حساب كل من مبلغ الفائدة (I) المبلغ المودع (C_0) والقيمة المكتسبة بعد خمس سنوات (C_5).

لدينا:	بتعويض القيم المكتسبة بدلالة C_0 نجد:
$C_0 + C_1 = 164000$	$C_0 + C_0 + I = 2C_0 + I = 164000$
$C_4 + C_5 = 199200$	$C_0 + 4I + C_0 + 5I = 2C_0 + 9I = 199200$

ب طرح المعادلة الأولى من الثانية نجد:

$$2C_0 + 9I - (2C_0 + I) = 199200 - 164000$$

$$8I = 35200$$

$I = 4400$ ومنه فإن الفائدة المتحصل عليها سنويا هي: 4400 دج

لحساب رأس المالي المدخر C_0 نعوض في إحدى المعادلتين السابقتين فنجد:

$$2C_0 + 4400 = 164000$$

$$2C_0 = 159600$$

$$C_0 = 79800$$

أيضا لحساب القيمة المكتسبة للعام الخامس نستعمل العلاقة:

$$C_5 = C_0 + 5I = 79800 + 5(4400) = 101800$$

3. المتتاليات الهندسية: نسمي متتالية هندسية ذات الأساس $q > 0$ كل متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تحقق:

$$\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = u_n q$$

تعطى عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية بـ: $u_n = u_0 q^n$ إذا كان u_0 هو الحد الأول للمتتالية،

وتكتب: $u_n = u_1 q^{n-1}$ إذا كان u_1 هو الحد الأول للمتتالية.

مجموع حدود متتالية هندسية يعطى كم يلي:

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (u_0) \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = (\text{الحد الأول}) \frac{1 - (\text{الأساس})^{n+1}}{1 - (\text{الأساس})}$$

➤ اتجاه تغير متتالية هندسية: لنكن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q . نعلم أن:

$$u_{n+1} = u_0 q^{n+1} \text{ و } u_n = u_0 q^n$$

نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = u_0 q^n (q - 1)$ ومنه:

- إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.
 - إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.
 - إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.
 - إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.
 - إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة.
 - إذا كان $q = 0$ تكون كل حدود المتتالية (u_n) معدومة ابتداء من الحد الثاني.
 - إذا كان $q < 1$ فإن الفرق $u_{n+1} - u_n$ لا يحتفظ بإشارة ثابتة لأن $(q)^n$ لا يحتفظ بإشارة ثابتة، ومنه المتتالية (u_n) ليست رتيبة.
- خاصية:** لتكن a, b, c بهذا الترتيب حدود متوالية لمتتالية هندسية فإن: $a \cdot c = b^2$ يسمى الوسط الهندسي لكل من الحدين a و c .

➤ **تمرين تطبيقي رقم 01:** نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ:

$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 \end{cases}$	1. بين أن المتتالية (v_n) هندسية. 2. استنتج عبارة (v_n) و (u_n) بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. 3. نضع: $S_n = v_0 + v_n + \dots + v_n$ أكتب S_n بدلالة n.
--	--

نضع أن: $v_n = u_n + 3$

الجواب:

1. لدينا:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}+3}{u_n+3} = \frac{\frac{2}{3}u_n-1+3}{u_n+3} = \frac{\frac{2}{3}u_n+2}{u_n+3} = \frac{2}{3} \left(\frac{u_n+3}{u_n+3} \right) = \frac{2}{3}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 + 3 = -2 + 3 = 1$.

2. لاستنتاج عبارة (v_n) و (u_n) بدلالة n لدينا:

$$v_n = v_0 q^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n ; v_n = u_n + 3 = u_n = v_n - 3 = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 ; \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 = -3$$

3. كتابة S_n بدلالة n .

$$s_n = v_0 \frac{1 - (q)^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

➤ تمرين تطبيقي حول الفائدة المركبة: قام شخص بإيداع مبلغ من المال قدره C_0 لدى بنك بفائدة

مركبة لمدة خمسة سنوات ؛ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 ، هي القيم المكتسبة في نهاية السنوات

الخمس المتتالية والتي تأخذ شكل متتالية هندسية أساسها $q = (1 + i)$ ؛

1. قم بالتعبير عن $(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)$ بدلالة " C_0 " ؛

2. إذا علمت أن: $C_0 + C_1 = 164000da$ ؛ $C_4 + C_5 = 199342;5da$ ، احسب معدل الفائدة

(i) ، المبلغ المالي المودع والقيمة المكتسبة في السنة الخامسة.

الجواب: لدينا مبلغ من المال C_0 تم ايداعه لدى بنك بفائدة مركبة:

1. التعبير عن القيم المكتسبة للخمس سنوات المتتالية بدلالة C_0 . نعلم أن $q = (1 + i)$ هو أساس

متتالية القيم المكتسبة ذات الشكل الهندسي التي يتحصل عليها المودع بعد نهاية كل سنة، وبالتالي

تكون القيم المكتسبة بعد نهاية كل سنة كما يلي:

$$C_1 = C_0 q = C_0(1 + i)^1$$

$$C_2 = C_1(1 + i) = C_0(1 + i)(1 + i) = C_0(1 + i)^2$$

$$C_3 = C_2(1 + i) = C_0(1 + i)^2(1 + i) = C_0(1 + i)^3$$

$$C_4 = C_3(1 + i) = C_0(1 + i)^3(1 + i) = C_0(1 + i)^4$$

$$C_5 = C_4(1 + i) = C_0(1 + i)^4(1 + i) = C_0(1 + i)^5$$

حساب كل من مبلغ الفائدة (I) المبلغ المودع (C_0) والقيمة المكتسبة بعد خمس سنوات (C_5) .

لدينا: بتعويض القيم المكتسبة بدلالة C_0 نجد:

$$C_0 + C_0(1 + i)^1 = C_0[1 + (1 + i)] = 164000 \quad C_0 + C_1 = 164000$$

$$C_0(1 + i)^4 + C_0(1 + i)^5 = 199342;5 \quad C_4 + C_5 = 199200$$

$$C_0(1 + i)^4 + C_0(1 + i)^4(1 + i)^1 = 199342;5$$

$$C_0(1 + i)^4[1 + (1 + i)] = 199342;5$$

ب طرح المعادلة الثانية الأولى الثانية نجد:

$$\frac{C_0(1 + i)^4[1 + (1 + i)]}{C_0[1 + (1 + i)]} = \frac{199342;5}{164000} = 1;21550305$$

$$\frac{C_0(1 + i)^4[1 + (1 + i)]}{C_0[1 + (1 + i)]} = \frac{199342;5}{164000} = 1;21550305$$

$$(1 + i)^4 = 1;21550305$$

بحساب الجذر الرابع نجد: $1 + i = 1;05$ أي: $i = 0;05$

ومنه فإن معدل الفائدة: 5%

حساب رأس المالي المدخر C_0 نعوض في إحدى المعادلتين السابقتين فنجد:

$$C_0[1 + (1 + 0; 05)] = 164000$$

$$2; 05C_0 = 164000$$

$$C_0 = 80000da$$

أيضا لحساب القيمة المكتسبة للعام الخامس نستعمل العلاقة:

$$C_5 = C_0(1 + i)^5 = 80000(1; 05)^5 = 102102; 525da$$

➤ تمارين مقترحة:

التمرين الأول: مبلغ من المال قدره 51000 دج تم تقسيمه إلى ثلاث حصص ($P1$ $P2$ $P3$) في شكل متتالية حسابية، الحصة الأولى تساوي $7/10$ الحصة الثالثة، وظفت الحصص الثلاث بمعدلات فائدة مختلفة ($T1$ $T2$ $T3$) التي تتزايد في شكل متتالية هندسية متناقصة كما أنها تشكل في مجموعها 36.4%. الفوائد السنوية للحصتين ($P1$ $P2$) تتناسب مباشرة مع العددين 84 و 85.

• أحسب المعدلات الثلاثة للتوظيف

• أحسب المعدل المتوسط لتوظيف المبلغ المالي (51000 دج)

التمرين الثاني: طالب جامعي قام ببراءة غرفة لمدة (03) سنوات، اقترح عليه طريقتان للسداد.

• الطريقة الأولى: دفع مبلغ 2000 دج للشهر الأول و بعدها زيادة 5 دج شهريا إلى غاية

نهاية المدة.

- الطريقة الثانية: دفع مبلغ 2000 ج للشهر الأول و بعدها زيادة 2% شهريا إلى غاية نهاية المدة.

– أحسب لكلا العرضين: ثمن الكراء للشهر الثاني و الثالث

– أحسب لكلا العرضين: ثمن الكراء للشهر الأخير (الشهر 36)

خلاصة

تناولت هذا المحور مفهوم المتتاليات بوصفها أحد المفاهيم الأساسية في التحليل الرياضي، حيث عرفت المتتالية على أنها دالة عددية يكون مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية، ويرتبط بكل عدد طبيعي حد عددي يسمى الحد العام.

وقد تم في بداية المحور عرض التعريفات الأساسية والتميز بين أنواع المتتاليات، ثم درست المتتاليات الحسابية التي تميزت بثبات الفرق بين حدين متتاليين، مع اشتقاق صيغة الحد العام وصيغة مجموع عدد من حدودها. كما تم تناول المتتاليات الهندسية التي تميزت بثبات النسبة بين حدين متتاليين، مع بيان صيغة الحد العام وصيغة مجموعها في الحالتين: المنتهية وغير المنتهية عند تحقق شرط التقارب.

كما عالج المحور دراسة سلوك المتتاليات من خلال مفاهيم الرتبة (التزايد والتناقص)، والمحدودية، والتقارب أو التباعد، مع إبراز دور مفهوم النهاية في تحليل سلوك المتتالية عند اللانهاية.

وفي الختام، أظهر المحور أن دراسة المتتاليات شكلت أساساً ضرورياً لفهم موضوعات أكثر تقدماً في التحليل الرياضي، كما بينت أهميتها التطبيقية في مجالات متعددة، خاصة في الاقتصاد والمالية من خلال نماذج النمو وحساب الفائدة المركبة.

المحور الثالث:

الدوال اللوغاريتمية والأسية

المحور الثالث: الدوال اللوغاريتمية والأسية

1. مفاهيم عامة حول الدوال

يمكن تعريف الدالة الرياضية على أنها علاقة رياضية تربط بين مجموعتين، بحيث يكون لكل عنصر من المجموعة الأولى (مجموعة المجال) عنصر واحد فقط في المجموعة الثانية (مجموعة المدى). تستخدم الدوال لوصف كيفية تحويل قيمة معينة إلى أخرى وفقاً لقاعدة محددة.

التمثيل الرياضي للدالة: إذا كانت الدالة تسمى f ، يمكن تمثيلها كالتالي:
 $f: x \rightarrow y$ وتكتب: $f(x) = y$ حيث:

– x هي مجموعة المجال (القيم التي تدخل إلى الدالة).

– y هي مجموعة المدى (القيم الناتجة عن الدالة).

هناك أنواع عديدة من الدوال في الرياضيات، تصنف بناءً على العلاقة بين المدخلات والمخرجات أو شكلها الرياضي. فيما يلي أهم أنواع الدوال مع أمثلة:

➤ الدوال الجبرية:

- الدوال الخطية: دوال على الشكل التالي: $f(x) = ax + b$ حيث a و b ثابت.

$$\text{مثال: } f(x) = 2x + 3$$

- الدوال التربيعية: دوال على شكل $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، حيث $a \neq 0$.

$$\text{مثال: } f(x) = x^2 - 4x + 3$$

- الدوال كثيرة الحدود: دوال على شكل مجموع حدود جبرية متعددة.

$$\text{مثال: } f(x) = 2x^3 - x^2 + 4$$

➤ الدوال اللوغاريتمية: الدالة العكسية للدالة الأسية.

الشكل العام: $f(x) = \text{Log}_a(x)$ مع $a > 0$ و $a \neq 1$

مثال: $f(x) = \ln(x)$ في حالة اللوغاريتم النيبيري فإن: $a = e$

➤ الدوال الكسرية: دوال يكون فيها المتغير موجودا في المقام.

الشكل العام: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ مع وجوب الإشارة إلى أن: $Q(x) \neq 0$

مثال: $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$

➤ الدوال المثلثية: تعتمد على الزوايا وتظهر في حساب المثلثات، أهم هذه الدوال:

• دالة الجيب: $f(x) = \sin(x)$

• دالة جيب التمام: $f(x) = \cos(x)$

• دالة الظل: $f(x) = \tan(x)$ $f(x) = \frac{1}{x-2}$

➤ الدوال الجذرية: دوال تحتوي على جذور.

الشكل العام: $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$

مثال: $f(x) = \sqrt{x+3}$

➤ الدوال الأسية: تعتمد على أس المتغير

الشكل العام: $f(x) = a^x$ مع $a > 0$

مثال: $f(x) = e^x$

➤ الدوال المتزايدة والمتناقصة:

- الدالة المتزايدة: تزداد قيم $f(x)$ مع زيادة قيم المتغير x .

مثال: $f(x) = 2x + 1$

- الدالة المتناقصة: تتناقص قيم $f(x)$ مع زيادة قيم المتغير x .

مثال: $f(x) = -x$

➤ الدوال المتشعبة: تعرف بأكثر من قاعدة واحدة حسب قيم المتغير x .

مثال: $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{if } x > 0 \\ -x & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$

➤ الدوال الثابتة: دالة يكون الناتج فيها ثابتا بغض النظر عن المدخل.

مثال: $f(x) = 5$

➤ مجموعة تعريف الدالة:

مجموعة تعريف الدالة (*Domain of a Function*) هي مجموعة القيم التي يمكن للمتغير

المستقل x أن يأخذها بحيث تكون الدالة $f(x)$ معرفة وتعطي نتيجة صحيحة.

يعتمد تحديد مجموعة التعريف على نوع الدالة والعوامل التي قد تسبب مشكلات في التعريف مثل

القسمة على صفر أو الجذور السالبة، ومن الأمثلة عليها نذكر ما يلي:

➤ الدوال الخطية أو كثيرة الحدود: تكون مجموعة التعريف هي جميع الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ لأن هذه

الدوال لا تحتوي على أي قيود.

مثال: $f(x) = 2x + 3$

المجال: $Df = \mathbb{R}$

➤ الدوال الكسرية: يجب استبعاد القيم التي تجعل المقام صفراً.

$$\text{مثال: } f(x) = \frac{1}{x-2}$$

المجال: $Df = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ لأن $x = 2$ يجعل المقام ينعدم مساوياً للصفر.

➤ الدوال الجذرية: إذا كان الجذر زوجياً مثل $(\sqrt{x})$ ، يجب أن تكون القيمة تحت الجذر غير سالبة.

$$\text{مثال: } f(x) = \sqrt{x+3}$$

المجال: $Df =]-\infty; -3]$ لأن $x - 3 \geq 0$.

➤ الدوال اللوغاريتمية: القيمة داخل اللوغاريتم يجب أن تكون موجبة.

$$\text{مثال: } f(x) = \ln(x+1)$$

المجال: $Df =]-1; +\infty[$

➤ الدوال المعرفة بقطع: تعتمد مجموعة التعريف على قواعد تعريف كل قطعة.

$$\text{مثال: } f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{if } x > 0 \\ x^2 & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

المجال: $Df = \mathbb{R}$ لأن الدالة معرفة لجميع القيم.

➤ طرق كتابة مجموعة التعريف:

• رموز المجموعات: $Df = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ تعني جميع الأعداد الحقيقية باستثناء a .

• الفترات: مغلقة: $[a; b]$ ، مفتوحة: $]a; b[$ ، نصف مفتوحة: $]a; b]$ أو $[a; b[$

2. الدالة اللوغاريتمية (Logarithmic Function) :

اللوغاريتم هو عملية عكسية للأسس، تماماً كما أن الطرح هو عملية عكسية للجمع والقسمة هي عملية عكسية للضرب. بمعنى آخر، إذا كان لدينا عدد مرفوع إلى أس، فإن اللوغاريتم يجيب على السؤال: إلى أي أس يجب رفع عدد آخر للحصول على هذا العدد الأول؟، من هنا تأتي أهمية دراسة اللوغاريتم والدالة اللوغاريتمية.

تعرف الدالة اللوغاريتمية بأنها الدالة العكسية للدالة الأسية، وتكتب على الشكل:

$$f(x) = \text{Log}_a(x)$$

حيث:

- a هو الأساس (base) ويجب أن يكون $a \neq 1$ و $a > 0$.
- x هو المدخل (input) ويجب أن يكون $x > 0$ لأن اللوغاريتم غير معرف للقيم السالبة أو الصفر.

➤ خصائص الدالة اللوغاريتمية:

- المجال (Domain): القيم الممكنة لـ x هي $x > 0$ أي: $D_f =]0; +\infty[$
- المدى (Range): القيم التي يمكن أن تأخذها $f(x)$ هي جميع الأعداد الحقيقية، أي: $R_f = \mathbb{R}$
- الأساس (a):

– إذا كان $a > 1$ تكون الدالة متزايدة.

– إذا كان $0 < a < 1$ تكون الدالة متناقصة.

- النقطة الخاصة: عندما يكون $x = 1$ فإن $\text{Log}_a(1) = 0$ لأي أساس a .

➤ القواعد الأساسية للدوال اللوغاريتمية:

- لوغاريتم 1: $\log_{\alpha}(1) = 0$
- لوغاريتم الأساس نفسه: $\log_{\alpha}(\alpha) = 1$
- الضرب داخل اللوغاريتم: $\log_{\alpha}(xy) = \log_{\alpha}(x) + \log_{\alpha}(y)$
- القسمة داخل اللوغاريتم: $\log_{\alpha}\left(\frac{x}{y}\right) = \log_{\alpha}(x) - \log_{\alpha}(y)$
- تغيير الأساس: $\log_{\alpha}(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(\alpha)}$

➤ أمثلة على الدالة اللوغاريتمية:

- الدالة ذات الأساس 10 (اللوغاريتم العشري): تكتب $\log(x)$ أو $\log_{10}(x)$.

مثلا: $\log(100) = 2$ لأن $10^2 = 100$

- الدالة ذات الأساس (e) (اللوغاريتم الطبيعي): $\ln(x)$ أو $\log_e(x)$.

مثلا: $\ln(e^3) = 3$

➤ الدالة اللوغاريتمية الطبيعية (النيبيرية).

الدالة اللوغاريتمية الطبيعية هي دالة رياضية تستخدم بكثرة في العديد من العلوم، وخاصة في الرياضيات والفيزياء والهندسة والاقتصاد. تعرف بأنها اللوغاريتم الذي أساسه هو العدد النيبيري e (الذي يعتبر أساسا طبيعيا للنمو الأسّي واللوغاريتمي). $e \approx 2,718$

➤ خواص الدالة اللوغاريتمية النيبيرية:

من المعروف أن الدالة اللوغاريتمية النيبيرية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ وبالتالي فهي تتميز

بالخصائص التالية:

$$\ln(1) = 0 \quad \bullet$$

$$\ln(e) = 1 \quad \bullet$$

• من أجل كل x و y من المجال $]0; +\infty[$ لدينا:

$$\ln xy = \ln x + \ln y \quad \bullet$$

$$\ln x^r = r \ln x \quad \text{مع } (r \in \mathbb{Q}) \quad \bullet$$

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x \quad \bullet$$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y \quad \bullet$$

$$\ln x = \ln y \quad \text{معناه } x = y \quad \bullet$$

$$\ln x > \ln y \quad \text{معناه } x > y \quad \bullet$$

$$\ln x < \ln y \quad \text{معناه } 0 < x < y \quad \bullet$$

$$\ln x < 0 \quad \text{معناه } 0 < x < 1 \quad \bullet$$

$$\ln x > 0 \quad \text{معناه } x > 1 \quad \bullet$$

$$\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x \quad \bullet$$

• من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$\ln x = y \quad \text{معناه } x = e^y \quad \bullet$$

• من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا:

$$\ln(x)^n = n \ln|x| \quad \text{إذا كان } n \text{ عددا طبيعيا زوجيا فإن:} \quad \bullet$$

➤ أمثلة حسابية:

- $\ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$
- $\ln(-2 \times (-3)) = \ln|-2| + \ln|-3| = \ln 2 + \ln 3$
- $\ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4$
- $\ln\left(\frac{2}{7}\right) = \ln 2 - \ln 7$
- $\ln(x^2) = 2 \ln(x)$

➤ النهايات والنهايات الشهيرة للدالة اللوغاريتمية:

- | | |
|--|---|
| • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{\ln x}{x^n} = 0$ | • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ |
| • $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$ | • $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ |
| • $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ | • $\lim_{x \rightarrow +1} \ln \frac{\ln x}{x-1} = 1$ |

ملاحظة: بما أن $x > \ln x$ فإن نهاية $\ln x$ مهملة أمام نهاية x .

➤ تمرين تطبيقي رقم 01: أحسب نهاية الدالة وفسر النتيجة بيانياً في كل حالة:

$$1) f(x) = x^2 - 1 + \ln x \text{ and } D_f =]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1 + \ln x) = -\infty$$

المنحنى يقبل مستقيم مقارب عمودي

بجوار $-\infty$ معادلته : $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1 + \ln x) = +\infty$$

$$2) f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x^2} \text{ and } D_f =]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln x - \frac{\ln x}{x^2} \right) = -\infty + \infty = \text{ح ع ت}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

المنحنى يقبل مستقيم مقارب عمودي

بجوار $-\infty$ معادلته : $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{\ln x}{x^2} \right) = +\infty$$

$$3) f(x) = x \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) \text{ عند } +\infty$$

$$\text{بوضع: } x = \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = t \text{ ومنه لما } x \rightarrow +\infty : t = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\ln t + 1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$$

ومنه المنحنى يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته : $y = 0$.

➤ الاستمرارية عن الدوال اللوغاريتمية:

- الدالة $x \rightarrow \ln x$ مستمرة على المجال $]0; +\infty[$.
- إذا كانت u دالة مستمرة ومنتزيدة تماما على مجال I فإن الدالة $x \rightarrow \ln[u(x)]$ مستمرة على المجال I .

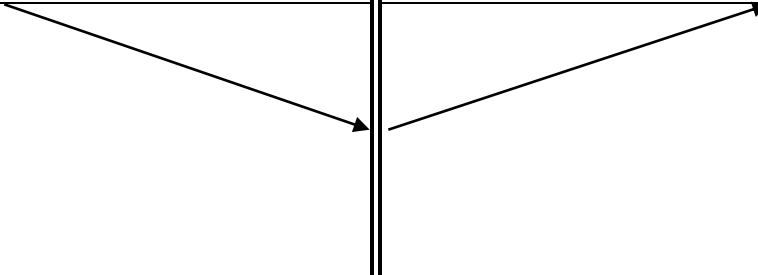
➤ تمرين تطبيقي رقم 01: أدرس تغيرات الدالة $f(x)$ على المجال D_f .

$$1) f(x) = \ln(x-3) \quad D_f =]3; +\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{x-3} > 0$$

ومنه الدالة $f(x)$ منتزيدة تماما على مجال تعريفها $D_f =]3; +\infty[$.

$$2) f(x) = \ln(1-x) \quad D_f =]-\infty; 1[\quad f'(x) = \frac{1}{1-x} = -\frac{1}{x-1}$$

ومنه إشارة المشتق من إشارة المقام

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$			

ومنه الدالة $f(x)$ متزايدة تماما على مجال تعريفها $D_f =]-\infty; 1[$

$$3) f(x) = \ln(2x^2) \quad D_f =]0; +\infty[\quad f'(x) = \frac{4x}{2x^2} = \frac{2}{x} > 0$$

ومنه الدالة $f(x)$ متزايدة تماما على مجال تعريفها $D_f =]0; +\infty[$

➤ مشتقة الدالة اللوغاريتمية:

- الدالة $x \rightarrow \ln x$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$.
- من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ لدينا: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- إذا كانت u دالة مستمرة ومتزايدة تماما وقابلة للاشتقاق على المجال I فإن الدالة $x \rightarrow \ln[u(x)]$ قابلة للاشتقاق على المجال I .
- من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ لدينا القانون العام: $(\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- معلوم أن: $(f(x)^n)' = n f'(x) f(x)^{n-1}$

➤ تمرين تطبيقي رقم 01: أحسب الدالة المشتقة في كل الحالات التالية:

$$1) f(x) = (\ln x)^2 + \ln x$$

$$2) f(x) = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}$$

$$3) f(x) = x \ln|x| - 2x + 3 \quad D =] - \infty; 0[$$

الحل:

$$1) f(x) = (\ln x)^2 + \ln x \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} (\ln x)^1 + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2 \ln x}{x} + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2 \ln x + 1}{x}$$

$$2) f(x) = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} \Rightarrow f'(x) = 2x \ln x + \frac{1}{x} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x \ln x$$

$$3) f(x) = x \ln|x| - 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = 1 \ln|x| + \frac{1}{|x|} \cdot x - 2$$

$$\Rightarrow f'(x) = \ln|x| + \frac{x}{|x|} - 2$$

تمرين تطبيقي رقم 02: أحسب الدالة المشتقة في كل الحالات التالية:

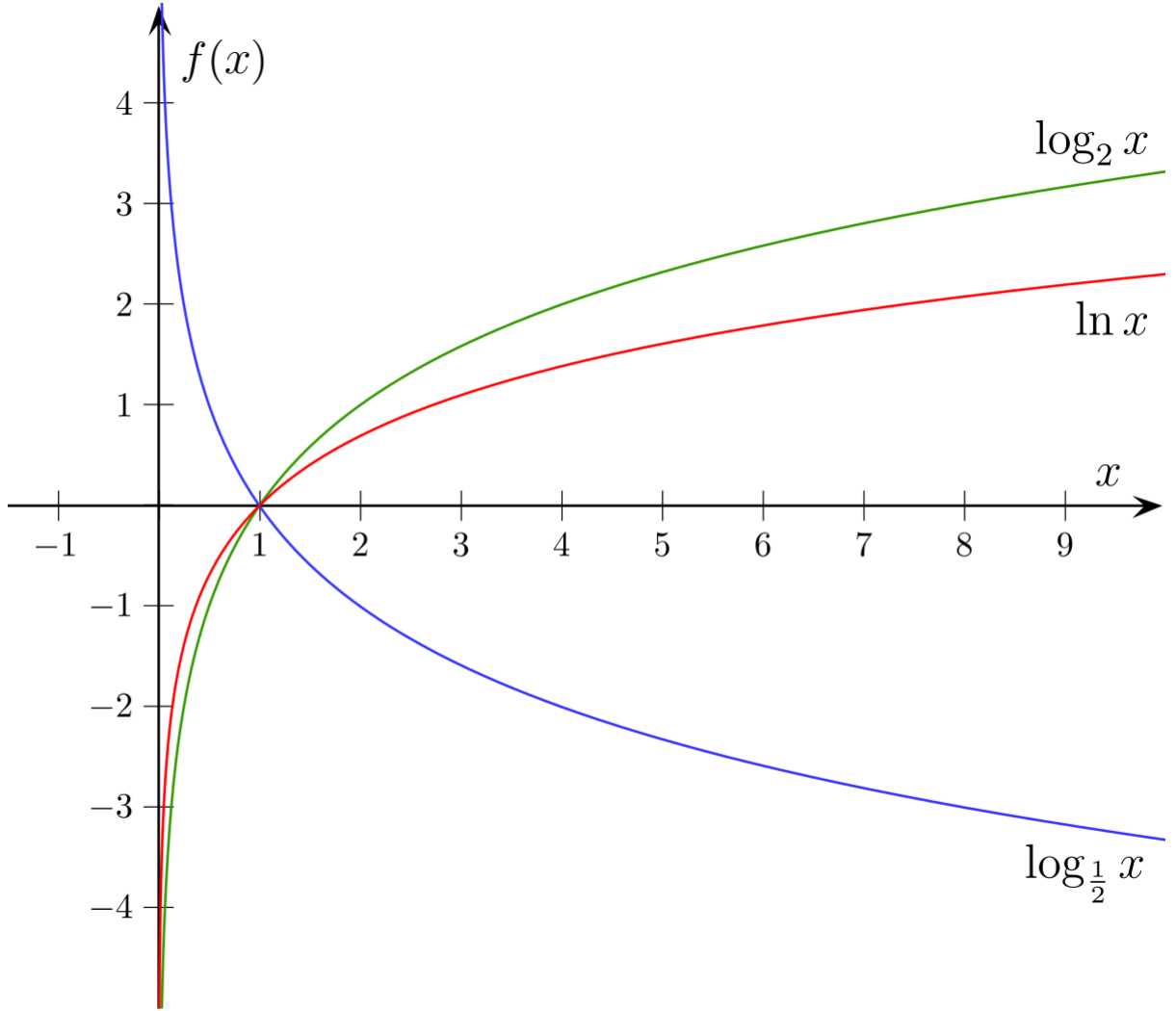
$$1) f(x) = \ln(-2x - 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{2x+1}$$

$$2) f(x) = \frac{1}{2} (\ln(1-x))^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{\ln(1-x)}{x-1}$$

$$3) f(x) = \ln(2x^2 + x - 6) \Rightarrow f'(x) = \frac{4x+1}{2x^2+x-6}$$

➤ التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية: يتم تمثيل الدالة $x \rightarrow \ln x$ على النحو التالي:

الشكل رقم (02): التمثيل البياني لمنحنى الدالة اللوغاريتمية.



➤ المعادلات اللوغاريتمية:

تمرين تطبيقي رقم 01: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$1) \ln x = -3$$

$$3) \ln x + \ln 3 = 0$$

$$2) 2 \ln(x - 3) = \ln 4$$

$$4) \ln x + \ln(x + 1) = \ln 2 + \ln 3$$

الحل:

$$1) \ln x = -3 \Rightarrow e^{\ln x} = e^{-3} \Rightarrow x = e^{-3} \in]0; +\infty[$$

$$2) \ln x + \ln 3 = 0 \Rightarrow \ln x = -\ln 3 \Rightarrow \ln x = \ln \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \in]0; +\infty[$$

$$3) 2 \ln(x - 3) = \ln 4$$

المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $x > 3 \Leftrightarrow x - 3 > 0$ إذن $D_f =]3; +\infty[$

$$2 \ln(x - 3) = \ln 4 \Rightarrow 2 \ln(x - 3) = \ln 2^2 \Rightarrow 2 \ln(x - 3) = 2 \ln 2$$

$$\Rightarrow \ln(x - 3) = \ln 2 \Rightarrow x - 3 = 2 \Rightarrow x = 5 \in D_f \text{ (مقبول).}$$

$$4) \ln x + \ln(x + 1) = \ln 2 + \ln 3$$

تكون الدالة معرفة إذا وفقط إذا كانت: $x + 1 > 0$ و $x > 0$.

$$D_f =]1; +\infty[\text{ ومنه }]0; +\infty[\cap]1; +\infty[$$

$$\ln x + \ln(x + 1) = \ln 2 + \ln 3 \Rightarrow \ln(x(x + 1)) = \ln(2.3) \Rightarrow$$

$$\ln(x^2 - x) = \ln(6) \Rightarrow x^2 - x = 6 \Rightarrow \Delta = 25 \Rightarrow; (x_1 = -2 \notin D_f$$

$$x_2 = 3 \in D_f \Rightarrow x = 3 \text{ هو حل المعادلة}$$

تمرين تطبيقي رقم 02: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية: $4(\ln x)^2 - 4 \ln x - 3 = 0$

الحل: لحل المعادلة السابقة نستعمل الطريقة التالية:

$$\text{بوضع: } \ln x = t \text{ أي: } (\ln x)^2 = t^2$$

$$\text{تصبح المعادلة كمايلي: } 4t^2 - 4t - 3 = 0$$

$$\Delta = 64 \Rightarrow t_1 = \frac{-1}{2} \text{ و } t_2 = \frac{3}{2}$$

بالعودة إلى العملية العكسية نعلم أن $\ln x = t$ نجد:

$$\begin{cases} \ln x = \frac{-1}{2} \\ \ln x = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} e^{\ln x} = e^{\frac{-1}{2}} \\ e^{\ln x} = e^{\frac{3}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e^{\frac{-1}{2}} \\ x = e^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$\text{إذن: } \left\{ e^{\frac{-1}{2}}; e^{\frac{3}{2}} \right\}$$

➤ جملة معادلات لوغاريتمية:

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 16 \dots\dots\dots (1) \\ \ln \frac{x}{y} = -\ln 3 \dots\dots\dots (2) \end{cases} \quad \text{تمرين تطبيقي رقم 01: حل في } \mathbb{R} \text{ الجملة الآتية:}$$

الحل:

$$\ln \frac{x}{y} = -\ln 3 \Leftrightarrow e^{\ln \frac{x}{y}} = e^{\ln \frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{3}$$

$$y = 3x \dots\dots\dots (3)$$

بتعويض (3) في (1) نجد:

$$x^2 + 2(3x) = 16$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$\Delta = 100 \Rightarrow x_1 = -8 ; x_2 = 2$$

$$y = 3x \Rightarrow \begin{cases} y = 3(-8) = -24 \\ y = 3(2) = 6 \end{cases} \text{ بالتعويض بقيمة } x \text{ نجد قيمة :}$$

$$s = \{(-8; -24), (2; 6)\} \text{ منه}$$

➤ المتراجحات اللوغاريتمية:

تمرين تطبيقي رقم 01: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات الآتية:

$$1) \ln(x - 1) - \ln 3 > \ln 2 - \ln(x + 4)$$

$$2) \ln(x^2 - 2x) > \ln(4x - 5)$$

$$3) \ln x + \ln(x + 1) \leq \ln(x^2 - 2x + 2)$$

الحل:

الشرط الأول في حل المعادلة أو المتراجحة هو تعيين مجموعة التعريف، ثم نرفض جميع القيم التي

لا تنتمي إليها.

$$1) \ln(x - 1) - \ln 3 > \ln 2 - \ln(x + 4)$$

تكون المتراجحة معرفة إذا وفقط إذا كانت: $x + 4 > 0$ و $x - 1 > 0$.

أي: $x > -4$ و $x > 1$.

$$]1; +\infty[\cap]-4; +\infty[$$

إذن: $D_f =]1; +\infty[$

$$\ln(x - 1) - \ln 3 > \ln 2 - \ln(x + 4) \Rightarrow \ln\left(\frac{x-1}{3}\right) > \ln\left(\frac{2}{x+4}\right) \Rightarrow \frac{x-1}{3} > \frac{2}{x+4}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{3} - \frac{2}{x+4} > 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x+4)-2(3)}{3(x+4)} > 0 \Rightarrow \frac{x^2+3x-10}{3x+12} > 0$$

ندرس إشارة كل من البسط والمقام:

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 10 = 0 \\ 3x + 12 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 49 \Rightarrow x_1 = -5 ; x_2 = 2 \\ 3x + 12 \neq 0 \Rightarrow x \neq -4 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-5	-4	2	$+\infty$	
$x^2 + 3x - 10$	$+$	ϕ	$-$	$-$	ϕ	$+$
$3x + 12$	$-$		$-$	$+$		$+$
$\frac{x^2 + 3x - 10}{3x + 12}$	$-$	ϕ	$+$	$-$	ϕ	$+$

إذن مجموعة الحلول هي : $]0; +\infty[$

$$2) \ln(x^2 - 2x) > \ln(4x - 5)$$

تكون المتراجحة معرفة إذا وفقط إذا كانت: $4x - 5 > 0$ و $x^2 - 2x > 0$

$$\text{أي: } x > \frac{5}{4} \text{ و } x(x - 2) > 1$$

$$]0; +\infty[\cap]2; +\infty[\cap]\frac{5}{4}; +\infty[$$

إذن: $D_f =]2; +\infty[$

$$\ln(x^2 - 2x) > \ln(4x - 5) \Rightarrow x^2 - 2x > 4x - 5 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$\begin{cases} \Delta = 16 \Rightarrow x_1 = 1 \notin D_f & \text{مرفوض} \\ x_2 = 5 & \text{مقبول} \end{cases}$$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$x^2 - 6x + 5$	$+$	$\underline{\phi}$	$-$	$\underline{\phi}$	$+$

إذن مجموعة الحلول هي : $]5; +\infty[$

$$3) \ln x + \ln(x+1) \leq \ln(x^2 - 2x + 2)$$

تكون المتراجحة معرفة إذا وفقط إذا كانت: $x+1 > 0$ و $x^2 - 2x + 2 > 0$ و $x > 0$.

$$\begin{cases} x > 0 \\ x > -1 \\ x^2 - 2x + 2 > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in]0; +\infty[\\ x \in]-1; +\infty[\\ \Delta = -4 < 0 \Rightarrow]-\infty; +\infty[\end{cases}$$

$$]0; +\infty[\cap]-1; +\infty[\cap]-\infty; +\infty[$$

$$D_f =]0; +\infty[\text{ إذن:}$$

$$\ln x + \ln(x+1) \leq \ln(x^2 - 2x + 2) \Rightarrow \ln(x(x+1)) \leq \ln(x^2 - 2x + 2)$$

$$\Rightarrow \ln(x^2 + x) \leq \ln(x^2 - 2x + 2) \Rightarrow x^2 + x \leq x^2 - 2x + 2 \Rightarrow 3x \leq 2$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{2}{3} \Rightarrow x \in]-\infty; \frac{2}{3}]$$

$$]0; +\infty[\cap]-\infty; \frac{2}{3}]$$

$$D_f =]0; \frac{2}{3}] \text{ إذن مجموعة الحلول هي:}$$

ملاحظة مهمة: لا يمكن حل أي معادلة أو متراجحة قبل تعيين مجموعة التعريف الخاصة بها، وبالتالي

نرفض جميع القيم التي يأخذها x التي لا تنتمي إلى مجموعة التعريف.

➤ الدالة اللوغاريتمية والمستقيم المقارب المائل:

الدالة اللوغاريتمية لا تمتلك مستقيماً مقارباً مائلاً عند $+\infty$ ، لأن نموها أبطأ بكثير من أي دالة خطية،

حيث:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

وبالتالي، يقتصر لها مستقيم مقارب عمودي عند $x=0$ فقط، ولا يظهر أي مستقيم مائل عند نهاية المجال.

تمرين تطبيقي رقم 01: لتكن $f(x)$ المعرفة على المجال $] -\infty; 0]$ كمايلي:

$$f(x) = x + 5 + 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

(1) بين أن المستقيم الذي معادلته $y = x + 5$ مقارب مائل لـ (c_f) .

(2) أدرس الوضع النسبي بين (c_f) و (Δ) .

الحل:

أولاً: نحسب النهاية التالية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 5)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \right] = 0$

ومنه (c_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = x + 5$ بجوار $-\infty$.

ثانياً: ندرس إشارة الفرق بين: $f(x) - (x + 5)$ حيث:

$$f(x) - (x + 5) = 6 \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

بما أن $6 > 0$ فإننا ندرس إشارة $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$$

بإدخال الاسية على الطرفين نجد: $e^{\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)} = e^0$

$$\frac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow \frac{x}{x-1} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x - (x-1)}{x-1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} = 0$$

ومنه إشارة الفرق من إشارة المقام

x	$-\infty$	0
$x - 1$		-
الوضع النسبي		(c_f) يقع تحت (Δ)

من خلال الجدول السابق يمكن الحكم على الوضع النسبي لمنحنى الدالة (c_f) والمستقيم المقارب (Δ) ، حيث يتضح أن المنحنى يقع تحت هذا المستقيم المقارب.

➤ الدالة اللوغاريتمية ومركز التناظر:

تتصف الدالة اللوغاريتمية بعدم وجود تناظر حول محورين أو حول أي مستقيم أفقي أو رأسي. لكنها تتمتع بتناظر بالنسبة لنقطة معينة إذا أنظر إليها كدالة عكسية للدالة الأسية:

إذا اعتبرنا الدالة الأسية $y = a^x$ التي تتماثل مع $y = \log_a(x)$ عبر محور $y = x$ ، فإن مركز التناظر يكون نقطة التقاطع بين الدالة والأسية المعاكسة في الإحداثيات المقابلة.

عملياً، الدالة اللوغاريتمية لا تمتلك مركز تناظر عند الأصل إلا في حالة الدالة اللوغاريتمية الطبيعية المعكوسة للدالة $y = e^x$ ، حيث يمكن اعتبار محور $y = x$ خط تناظر عكسي بين الدالتين.

تمرين تطبيقي رقم 01: لتكن الدالة $f(x)$ المعرفة على R^* كما يلي : $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$

المطلوب: حساب $f(x) + f(-x)$ ماذا تستنتج؟

$$\frac{\ln(-x)^2}{-x} = \frac{\ln x^2}{-x} = -\frac{\ln x^2}{x}$$

$$f(-x) + f(x) = 1 - \frac{\ln(-x)^2}{-x} + 1 - \frac{\ln x^2}{x} = 1 + \frac{\ln x^2}{x} + 1 - \frac{\ln x^2}{x} = 2$$

بالمطابقة نجد:

الاستنتاج:

$$\begin{cases} 2\alpha = 0 \\ 2\beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$$

$$f(0 - x) + f(x) = 2\beta$$

ومنه النقطة (0 ; 1) مركز تناظر للمنحنى (c_f) .

3. استخدام اللوغاريتم في علم الاقتصاد

تستعمل الدالة اللوغاريتمية في نماذج النمو الاقتصادي لتحليل معدلات النمو النسبية اذ يساعد اخذ اللوغاريتمات في تحويل النمو الاسي الى علاقة خطية قابلة للتقدير القياسي. وتظهر اهميتها كذلك في دوال الانتاج حيث تمكن الصيغة اللوغاريتمية من تقدير مساهمة عناصر الانتاج وتفسيرها بطريقة اكثر وضوحا. اضافة الى ذلك تستخدم في تحليل البيانات الاقتصادية لتقليل التباين وتحسين خصائص السلاسل الزمنية خاصة عندما تكون القيم كبيرة او تتسم بتقلبات مرتفعة. وعليه تمثل الدالة اللوغاريتمية اداة محورية في النمذجة والقياس الاقتصادي لما توفره من مرونة تحليلية ودقة تفسيرية.

وفيما يلي بعض الأمثلة التطبيقية الخاصة بهذه الاستخدامات:

- حساب معدلات النمو المركبة: بلغ الناتج المحلي الإجمالي لمصر 100 مليار دينار في 2010

و 150 مليار دينار في 2020. ما معدل النمو السنوي المركب؟

الحل:

$$\ln \left(\frac{150}{100} \right) = \ln (1.5) = 10 \cdot \ln (1 + r)$$

$$0.4055 = 10 \cdot \ln (1 + r)$$

$$\ln (1 + r) = 0.04055$$

$$1 + r = e^{0.04055} = 1.0414$$

$$r = 4.14\%$$

التفسير: معدل النمو السنوي المركب للناتج المحلي 4.14%

- مرونة الطلب السعرية: إذا كانت دالة الطلب على السيارات $Q = 500P^{-1.2}$ ، احسب مرونة

الطلب عند $P = 20,000$ دينار

الحل:

$$\ln Q = \ln 500 - 1.2 \ln P$$

$$\frac{d \ln Q}{d \ln P} = -1.2$$

$$\epsilon = -1.2$$

التفسير: مرونة الطلب ثابتة وتساوي سالب 1.2، أي أن زيادة السعر 1% تقلل الكمية المطلوبة 1.2%.

- نماذج دالة الإنتاج: دالة إنتاج شركة $Y = 2K^{0.6}L^{0.4}$. إذا زاد رأس المال 15% والعمل 10%،

فكم تزيد الإنتاجية؟

الحل:

$$\ln Y = \ln 2 + 0.6 \ln K + 0.4 \ln L$$

$$\Delta \ln Y = 0.6 \Delta \ln K + 0.4 \Delta \ln L$$

$$\Delta \ln Y = 0.6 \times \ln (1.15) + 0.4 \times \ln (1.10)$$

$$\Delta \ln Y = 0.6 \times 0.1398 + 0.4 \times 0.0953 = 0.0839 + 0.0381 = 0.1220$$

$$\frac{\Delta Y}{Y} = e^{0.1220} - 1 = 1.1298 - 1 = 0.1298 = 12.98\%$$

- تحليل التضخم وتكاليف المعيشة: إذا كان مؤشر الأسعار يرتفع بمعدل 12% سنوياً، فكم سنة

يتضاعف مستوى الأسعار؟

الحل:

$$2 = (1.12)^t$$

$$\ln 2 = t \times \ln (1.12)$$

$$0.6931 = t \times 0.1133$$

$$t = \frac{0.6931}{0.1133} = 6.12 \text{ سنوات}$$

التفسير: مستوى الأسعار يتضاعف كل 6 سنوات تقريبا بمعدل تضخم 12%

4. الدالة الأسية (Exponential Function) :

الدالة الأسية ليست مجرد أداة رياضية، بل هي لغة طبيعية تستخدم لوصف العمليات الديناميكية التي تتغير بمعدلات نسبية. هذا يجعلها عنصرا أساسيا في العلوم الطبيعية والاجتماعية، مما يعكس مدى تعقيد وجمال الرياضيات في تفسير الظواهر الواقعية، حيث تعد الدالة الأسية واحدة من أهم الدوال الرياضية المستخدمة في العلوم والرياضيات. تعرف بأنها دالة تعتمد على متغير يظهر كأس لعدد ثابت نعبر عنه في الغالب بالرمز (a) .

الصيغة العامة للدالة الأسية هي:

$$f(x) = a^x$$

حيث:

- a هو الأساس، وهو عدد حقيقي موجب $a > 0$ و $a \neq 1$.
- x هو المتغير.

➤ خصائص الدالة الأسية:

- المجال (Domain) : جميع الأعداد الحقيقية $(x \in R)$.
- المدى (Range) : أي القيم الموجبة فقط $(f(x) > 0)$.
- الأساس (a) :
- إذا كان $(a > 1)$ تكون الدالة متزايدة.
- إذا كان $(1 > a > 0)$ تكون الدالة متناقصة.
- القيمة عند الصفر: $f(0) = a^0 = 1$ أي أن الدالة تمر دائما بالنقطة $(1; 0)$.

➤ الاقتراب من المحاور:

- عندما تكون: $x \rightarrow +\infty$
- $f(x) \rightarrow +\infty$ إذا كانت الدالة متزايدة.
- $f(x) \rightarrow 0$ إذا كانت الدالة متناقصة.
- عندما تكون: $x \rightarrow -\infty$
- $f(x) \rightarrow 0$ في جميع الحالات.

➤ خصائص العمليات على الدوال الأسية:

- جمع الأسس:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

- طرح الأسس:

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

- رفع القوة إلى قوة أخرى:

$$a^{xy} = (a^x)^y$$

- قيمة الأس صفر:

$$a^0 = 1$$

- الأس السالب:

$$\frac{1}{a^x} = a^{-x}$$

➤ الاستخدامات العملية للدالة الأسية:

- النمو والانحلال الأسّي: تستخدم لحساب نمو السكان، أو انحلال المواد المشعة، أو الفائدة المركبة.

$$N(t) = N_0 e^{rt} \quad \blacksquare$$

- حيث N_0 القيمة الابتدائية، و r معدل النمو أو الانحلال، و t الزمن.

- في الفيزياء: لحساب اضمحلال النشاط الإشعاعي أو التغير في شدة الضوء.

- في الاقتصاد: لتقدير الفائدة المركبة والنماذج الاقتصادية.

- في التكنولوجيا: لتحليل النظم الديناميكية والمعادلات التفاضلية.

➤ الدالة الأسية الطبيعية (النيبيرية):

عندما يكون الأساس هو العدد النيبيري e ($e \approx 2,718$)، تسمى الدالة بالدالة الأسية الطبيعية

وتكتب على الشكل:

$$f(x) = e^x$$

تستخدم الدالة الأسية الطبيعية بشكل واسع في الرياضيات والعلوم لحساب النمو أو الانحلال الأسي.

➤ خصائص الدالة الأسية الطبيعية:

من المعروف أن الدالة الأسية الطبيعية معرفة على المجال $]-\infty; +\infty[$ وبالتالي فهي تتميز

بالخصائص التالية:

▪ من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$e^x > 0 \quad \bullet$$

$$e^0 = 1 \quad \bullet$$

▪ من أجل كل عدد x من $0; +\infty[$ لدينا:

$$e^{\ln x} = x \quad \bullet$$

▪ من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}$ من أجل كل y عدد من المجال $0; +\infty[$ لدينا:

$$e^x = y \quad \text{معناه} \quad x = \ln y \quad \bullet$$

▪ من أجل كل عدد x و y من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$e^x = e^y \quad \text{معناه} \quad x = y \quad \bullet$$

$$e^x > e^y \quad \text{معناه} \quad x > y \quad \bullet$$

▪ من أجل كل عدد x و y من $\mathbb{R}$ ومن أجل r من Q لدينا:

$$e^x \times e^y = e^{x+y} \bullet$$

$$(e^x)^y = e^{xy} \bullet$$

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x} \bullet$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \bullet$$

$$e^{\frac{1}{x}} = \sqrt[n]{e} \bullet$$

$$\bullet \text{ إذا كان } e^x > 1 \text{ معناه } x > 0 \text{ وإذا كان } e^x < 1 \text{ معناه } x < 0.$$

➤ أمثلة عن الخواص: قم بتبسيط العبارات التالية:

$$\blacksquare \frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}$$

$$\blacksquare (e^x)^4 \times e^{-3x}$$

$$\blacksquare e^{2x} + e^{-2x} - (e^x + e^{-x})^2$$

$$\blacksquare \frac{e^{3x+4}}{e^{3x+2}}$$

الحل:

$$\blacksquare (e^x)^4 \times e^{-3x} = e^{4x} \times e^{-3x} = e^{4x-3x} = e^x$$

$$\blacksquare \frac{e^{3x+4}}{e^{3x+2}} = \frac{e^{3x+2} \times e^2}{e^{3x+2}} = \frac{e^{\cancel{3x+2}} \times e^2}{e^{\cancel{3x+2}}} = e^2$$

$$\blacksquare \frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}} = e^x(e^x + e^{-x}) = e^{2x} + e^0 = e^{2x} + 1$$

$$\begin{aligned} \blacksquare e^{2x} + e^{-2x} - (e^x + e^{-x})^2 &= e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}} - \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2 \\ &= \frac{e^{4x} + 1}{e^{2x}} - \left(\frac{e^{2x} + 1}{e^x}\right)^2 = \frac{e^{4x} + 1}{e^{2x}} - \frac{(e^{2x} + 1)^2}{(e^x)^2} \\ &= \frac{e^{4x} + 1}{e^{2x}} - \frac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1}{e^{2x}} = \frac{e^{4x} + 1 - (e^{4x} - 2e^{2x} + 1)}{e^{2x}} = \frac{+2e^{2x}}{e^{2x}} = 2 \end{aligned}$$

➤ مجموعة التعريف للدالة الأسية:

- الدالة الأسية $x \rightarrow e^x$ معرفة على $\mathbb{R}$.
- الدالة الأسية $x \rightarrow e^{u(x)}$ معرفة على حسب طبيعة $u(x)$.

تمرين تطبيقي رقم 01: إليك الدوال الأسية التالية: قدم مجموعة تعريف كل دالة

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| ▪ $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ | ▪ $f(x) = \sqrt{e^x - e^{-x}}$ |
| ▪ $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ | ▪ $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - 1}$ |
| ▪ $f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$ | ▪ $f(x) = \sin x e^{\cos x}$ |
| ▪ $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 1}$ | ▪ $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ |

الحل:

- لدينا: $f(x) = \sqrt{e^x - e^{-x}}$ ومنه: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x - e^{-x} > 0\}$ وهي محققة دائماً لأن: $e^x > 0$ و $e^{-x} > 0$ ومنه: $D_f = \mathbb{R}$.
- لدينا: $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - 1}$ الدالة $f(x)$ معرفة على R^* .
- لدينا: $f(x) = \sin x e^{\cos x}$ الدالة $f(x)$ معرفة على $\mathbb{R}$.
- لدينا: $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ الدالة $f(x)$ معرفة على R^* .
- لدينا: $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ حيث: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 \geq 0\}$ ومنه: $e^x - 1 \geq 0$ وعليه: $e^x \geq 1$ وبالتالي: $x \geq 0$ إذن: $D_f =]0; +\infty[$.
- $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ الدالة $f(x)$ معرفة على $\mathbb{R}$.
- $f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$ الدالة $f(x)$ معرفة على $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2-1} \quad \text{الدالة } f(x) \text{ معرفة على } \mathbb{R} - \{-1; 1\}.$$

➤ النهايات عند الدالة الأسية:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^n} \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = 1 \end{cases}$$

تمرين تطبيقي رقم 01: أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 1)e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3e^x - 7x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right)$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right) = 3(0) - 0 = 0$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x}} \right) = 0 \text{ and } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3e^x - 7x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 \frac{e^x}{x} - 7 \right) = +\infty \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}} \right) = \frac{x^3 e^x}{x^2 + 2} = 0 \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^n e^x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right)$$

$$\Rightarrow \text{نضع } t = \frac{1}{x} \quad (x \rightarrow -\infty \Rightarrow t \rightarrow 0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^t - 1}{t} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^t - 1}{t} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \cos x$$

من أجل كل عدد طبيعي x لدينا $-1 \leq \cos x \leq 1$ نضرب في العدد الحقيقي الموجب تماماً e^{-x}

فحصل على

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x} \quad \text{أي} \quad -1e^{-x} \leq e^{-x} \cos x \leq 1e^{-x}$$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ وبالتالي حسب مبرهنة النهايات والحصص تكون

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \right)$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{e^{-x}(e^{2x} - e^{-x})}{\sin x} = e^{-x} \times \frac{(e^{2x} - e^{-x})}{x} \times \frac{x}{\sin x} : x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z}) \text{ من أجل}$$

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow 0} (e^{-x}) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \right) = 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \right) = 2 \times 1 = 2 \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right) = 1 \text{ وكذلك } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{-x} \times \frac{(e^{2x} - e^{-x})}{x} \times \frac{x}{\sin x} \right) = 1 \times 2 \times 1 = 2 \text{ وبالتالي:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)}{x} = 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \right) = 2 \times 1 = 2$$

➤ الاستمرارية عند الدالة الأسية:

- الدالة $x \rightarrow e^x$ مستمرة على المجال $]-\infty; +\infty[$.
- إذا كانت u دالة مستمرة ومتزايدة تماما على مجال I فإن الدالة $x \rightarrow e^{u(x)}$ مستمرة على المجال I .

- من أجل كل عدد x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f(x) = e^x > 0$ وبالتالي $f(x)$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

➤ مشتقة الدالة الأسية:

- الدالة $x \rightarrow e^x$ قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}$.
- من أجل كل x من المجال $\mathbb{R}$ لدينا: $(e^x)' = e^x$.
- إذا كانت u دالة مستمرة ومتزايدة تماما وقابلة للاشتقاق على المجال I فإن الدالة $x \rightarrow e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I .

- من أجل كل x من المجال I لدينا القانون العام: $(e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)}$.

- معلوم أن: $(f(x)^n)' = n f'(x) f(x)^{n-1}$.

تمرين تطبيقي رقم 01: قدم مشتقة الدوال الأسية التالية:

- | | |
|--------------------------------|------------------------------------|
| ▪ $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ | ▪ $f(x) = e^{x^2 - 2x}$ |
| ▪ $f(x) = \sin x e^{\cos x}$ | ▪ $f(x) = x e^{x-1}$ |
| ▪ $f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$ | ▪ $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ |
| ▪ $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 1}$ | ▪ $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ |

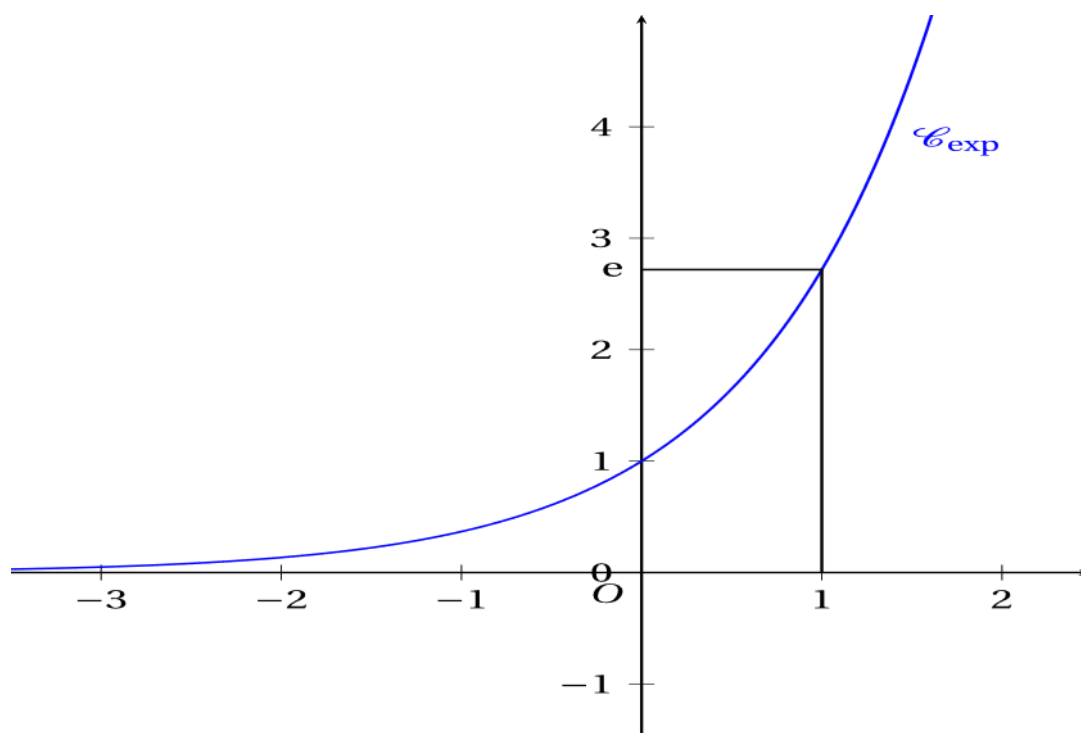
الحل:

- $f'(x) = (e^{x^2-2x})' = (x^2 - 2x)'e^{x^2-2x} = (2x - 2)e^{x^2-2x}$
- $f'(x) = (xe^{x-1})' = 1 \cdot e^{x-1} + xe^{x-1} = e^{x-1}(1 + x)$
- $f'(x) = (e^{\frac{1}{x}})' = \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$
- $f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)' = \frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$
- $f'(x) = (\sqrt{e^x-1})' = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$
- $f'(x) = (\sin x e^{\cos x})' = \cos x \cdot e^{\cos x} + \sin x(-\sin x) \cdot e^{\cos x}$
 $= e^{\cos x}[\cos x + \sin x(-\sin x)] = e^{\cos x}[\cos x - \sin^2 x]$
 $= e^{\cos x}[\cos x - (1 - \cos^2 x)] = (\cos^2 x + \cos x + 1)e^{\cos x}$
- $f'(x) = ((x^2 - 4x + 5)e^x)' = (2x - 4)e^x + e^x(x^2 - 4x + 5)$
 $= (2x - 4 + x^2 - 4x + 5)e^x = (x^2 - 2x + 1)e^x$
- $f'(x) = \left(\frac{e^x}{x^2-1}\right)' = \frac{e^x(x^2-1)-2x \cdot e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{e^x(x^2-2x-1)}{(e^x-1)^2}$

➤ التمثيل البياني للدالة الأسية:

يمثل التمثيل البياني للدالة الأسية منحنى يمر دائما عبر النقطة (0,1) ويختلف شكله حسب قيمة الأساس a . إذا كان $a > 1$ ، كان المنحنى متزايدا ويقترب من محور x عند اللانهاية السالبة دون لمسه، مما يوضح وجود مستقيم مقارب أفقي $y = 0$. أما إذا كان $0 < a < 1$ ، كان المنحنى متناقصا ويقترب من محور x عند اللانهاية الموجبة.

الشكل رقم (02): التمثيل البياني لمنحنى الدالة الأسية.



يعكس التمثيل البياني سرعة نمو الدالة أو انخفاضها ويظهر علاقتها العكسية بالدالة اللوغاريتمية عند عكس المحاور.

➤ المعادلات الأسية: يمكن حل المعادلات الأسية ببساطة عن طريق تبسيط العلاقة حتى نتتمكن من حساب المجهول x .

تمرين تطبيقي رقم 01: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$\blacksquare e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$$

$$\blacksquare e^x = 1$$

$$\blacksquare e^{3x+8} = \frac{1}{e^2}$$

$$\blacksquare e^{x^2+9} = e^{6x}$$

الحل:

$$\blacksquare e^x = 1 \Rightarrow e^x = e^0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow S = \{0\}$$

- $e^{x^2+9} = e^{6x} \Rightarrow x^2 + 9 = 6x \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow S = \{3\}$
- $e^{2x} + 5e^x - 6 = 0 \Rightarrow (e^x)^2 + 5e^x - 6 = 0 \Rightarrow e^x = x$
 $\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \{x = 1; x = -6\} \Rightarrow \{(e^x = 1); (e^x = -6)\}$
 $\Rightarrow (e^x = 1) \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = \{0\}$
- $e^{3x+8} = \frac{1}{e^2} \Rightarrow e^{3x+8} = e^{-2} \Rightarrow 3x - 8 = -2 \Rightarrow S = \{2\}$

➤ المتراجحات الأسية: يمكن حل المتراجحات الأسية ببساطة عن طريق تبسيط العلاقة حتى نتمكن

من حساب المجهول x .

$$\text{▪ } e^x - 5e^{-x} + 4 \leq 0 \quad \text{▪ } (e^x - 1)(e^x + 3) < 0 \quad \text{▪ } e^x > -2$$

الحل:

- $e^x > -2$ دوماً محققة لأن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $e^x > 0$ وبالتالي $S = \mathbb{R}$.
- $(e^x - 1)(e^x + 3) < 0$ لدينا دوماً $(e^x + 3) > 0$ وبالتالي العلاقة $(e^x - 1)(e^x + 3) < 0$ لها نفس إشارة $(e^x - 1)$. حيث $(e^x - 1)(e^x + 3) < 0$ تكافئ $(e^x - 1) < 0$
 تكافئ $e^x < 1$ تكافئ $e^x < e^0$ تكافئ $x < 0$ تكافئ $S =]-\infty; 0[$.
- $e^{2x} + 4e^x - 5 \leq 0$ تكافئ $e^x - \frac{5}{e^x} + 4 \leq 0$ تكافئ $e^x - 5e^{-x} + 4 \leq 0$
 بوضع $e^x = X$ نحصل على $X^2 + 4X - 5 \leq 0$ تكافئ $(X - 1)(X + 5) \leq 0$ حيث:
 $(e^x - 1)(e^x + 5) \leq 0$ لدينا دوماً $(e^x + 5) > 0$ وبالتالي $(e^x - 1)(e^x + 5) \leq 0$ لها نفس إشارة $(e^x - 1)$ تكافئ $e^x - 1 \leq 0$ تكافئ $e^x \leq 1$ تكافئ $e^x \leq e^0$ تكافئ $x \leq 0$ تكافئ
 $S =]-\infty; 0]$

➤ الخاصية العكسية:

- الدالة الأسية: إذا كانت $f(x) = e^x$ ، فإنها تقوم بحساب القوة x للأساس e .
- الدالة اللوغاريتمية: إذا كانت $g(x) = \ln x$ فإنها تعكس العملية، حيث تعطي القوة x التي تجعل $e^x = x$ العلاقة بينهما:

$$e^{\ln x} = x \quad \text{and} \quad \ln e^x = x$$

➤ مفهوم "إلغاء التأثير":

- عندما تطبق الدالة الأسية على عدد معين ثم تأخذ لوغاريتم النتيجة باستخدام نفس الأساس، فإنك تعود إلى العدد الأصلي.
- بشكل مشابه، إذا أخذت اللوغاريتم لعدد ما ثم طبقت الأسية باستخدام نفس الأساس، فإنك تحصل على العدد الأصلي.

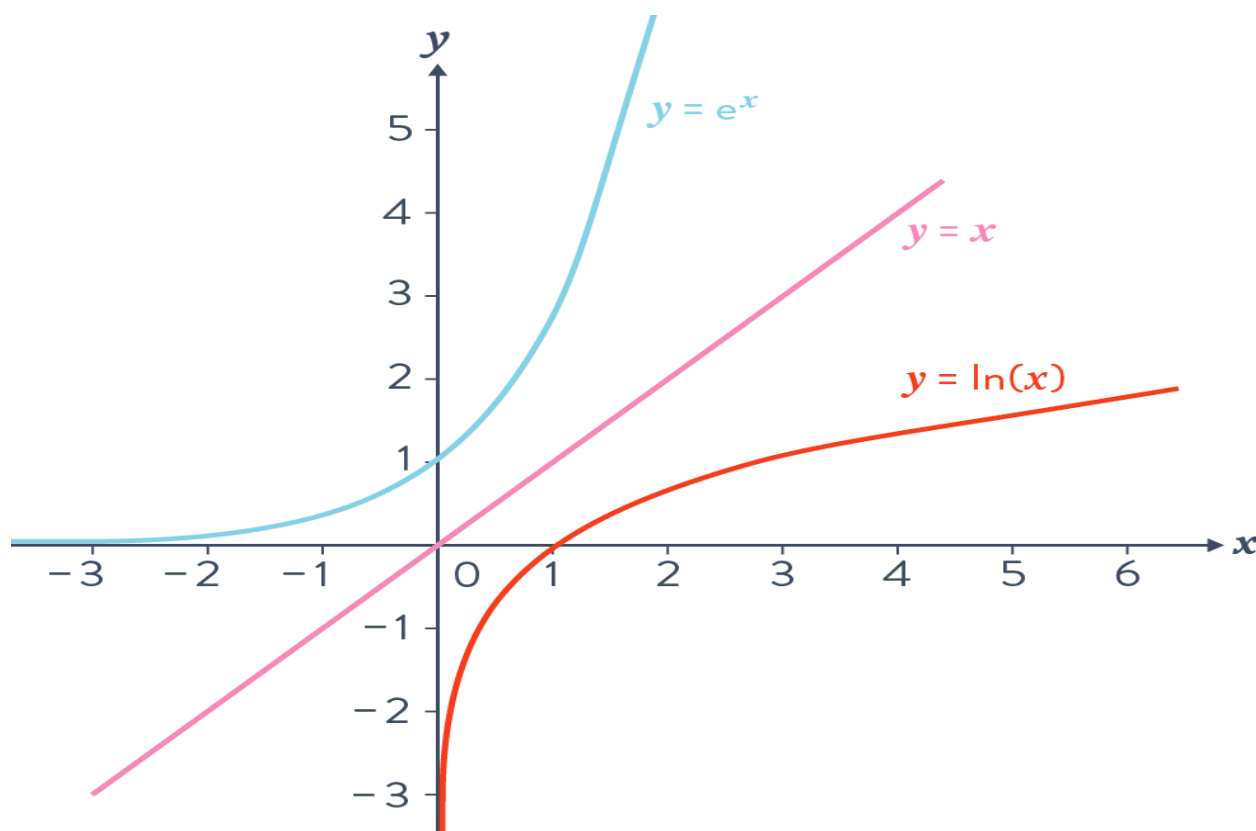
مثال: إذا كان $x = 3$

$$e^{\ln 3} = 3 \quad \text{and} \quad \ln e^3 = 3$$

أما من حيث التمثيل البياني للدالتين اللوغاريتمية والأسية فنلاحظ أن منحنى الدالة الأسية $y = e^x$ ومنحنى الدالة اللوغاريتمية $y = \ln x$ متناظران بالنسبة للخط المستقيم: $y = x$

هذا يعني أن كل نقطة (a, b) على منحنى الدالة الأسية لها نظير (b, a) على منحنى الدالة اللوغاريتمية، والعكس صحيح.

الشكل رقم (03): التمثيل البياني لمنحنى الدالة اللوغاريتمية والأسية.



نلاحظ من الشكل البياني لكل دالة مايلي:

الدالة اللوغاريتمية : $y = \ln x$

الدالة الأسية: $y = e^x$

- | | |
|---|---|
| • تمر بالنقطة $(1, 0)$. | • تمر بالنقطة $(0, 1)$. |
| • تزداد ببطء مع زيادة x . | • تزداد بشكل سريع جدا مع زيادة x . |
| • تقترب من اللانهاية السالبة عندما | • تقترب من الصفر دون أن تبلغه عندما |
| $x \rightarrow 0$ | $x \rightarrow -\infty$ |
| • مجالها: الأعداد الموجبة فقط ($x > 0$) | • مجالها: جميع الأعداد الحقيقية ($x \in R$) |
| • مداها: جميع الأعداد الحقيقية . | • مداها: القيم الموجبة فقط ($y > 0$) . |

$$(x \in R)$$

➤ العلاقة بين النقاط على المنحنيين:

■ إذا كانت النقطة (x, y) تقع على منحنى الدالة الأسية $y = e^x$ ، فإن النقطة (y, x) تقع على

منحنى الدالة اللوغاريتمية $y = \ln x$

■ على سبيل المثال:

• النقطة $(1, e)$ على منحنى $y = e^x$ يقابلها النقطة $(e, 1)$ على منحنى $y = \ln x$.

• النقطة $(0, 1)$ على منحنى $y = e^x$ يقابلها النقطة $(1, 0)$ على منحنى $y = \ln x$.

5. استخدامات الدالة الأسية في العلوم الاقتصادية

تعد الدالة الأسية من أهم الأدوات الرياضية المستخدمة في العلوم الاقتصادية، نظراً لقدرتها على تمثيل الظواهر التي تتسم بالنمو أو التناقص المتسارع عبر الزمن. فهي تستعمل في نمذجة النمو الاقتصادي، حيث يعبر عن تطور الناتج الداخلي الخام أو رأس المال بدالة أسية تعكس التراكم المستمر. كما تستخدم في تحليل النمو السكاني المرتبط بالعرض الكلي والعمل.

وتبرز أهمية الدالة الأسية كذلك في دراسة التضخم وتغير الأسعار، حيث يمكن تمثيل الزيادة التراكمية في المستوى العام للأسعار بصيغة أسية. كما توظف في نماذج الاستثمار والاستهلاك التي تعتمد على مفهوم التراكم الزمني.

وبذلك، تمثل الدالة الأسية أداة أساسية في فهم ديناميكية التغير الاقتصادي، خاصة في الظواهر التي

تتسم بالتراكم المستمر أو النمو النسبي الثابت عبر الزمن. وفيما يلي بعض الاستخدامات:

• نمو الناتج المحلي الإجمالي : نما اقتصاد دولة من 200 مليار دينار إلى 320 مليار دينار خلال

10 سنوات. إذا افترضنا نمواً أسياً، فما معدل النمو السنوي؟

الحل:

$$GDP_t = GDP_0 \times e^{rt}$$

$$320 = 200 \times e^{r \times 10}$$

$$1.6 = e^{10r}$$

$$\ln(1.6) = 10r$$

$$0.470 = 10r$$

$$r = 0.047 = 4.7\%$$

التفسير الاقتصادي : معدل النمو السنوي المستمر 4.7%، مما يعني تضاعف الاقتصاد كل:

$$t = \frac{\ln(2)}{0.047} \approx 14.7 \text{ سنة}$$

• التضخم وتآكل القوة الشرائية: إذا كان معدل التضخم 15% سنوياً، فكم ستتناقص القوة الشرائية لـ

1000 دينار بعد 3 سنوات؟

الحل:

$$P_t = P_0 \times e^{-rt}$$

$$P_3 = 1000 \times e^{-0.15 \times 3}$$

$$P_3 = 1000 \times e^{-0.45}$$

$$P_3 = 1000 \times 0.6376 = 637.6 \text{ دينار}$$

التفسير الاقتصادي: بسبب التضخم، ستقل القوة الشرائية لـ 1000 دينار إلى حوالي 638 دينار خلال 3 سنوات، أي فقدان 36.2% من القيمة.

- استهلاك الموارد غير المتجددة: احتياطي بترولي يبلغ 500 مليون برميل، ويستهلك بمعدل 5% سنوياً من الاحتياطي المتبقي. ما الكمية المتبقية بعد 10 سنوات؟

الحل:

$$R_t = R_0 \times e^{-kt}$$

$$R_{10} = 500 \times e^{-0.05 \times 10}$$

$$R_{10} = 500 \times e^{-0.5}$$

$$R_{10} = 500 \times 0.6065 = 303.25 \text{ مليون برميل}$$

التفسير الاقتصادي: بعد 10 سنوات، سيتبقى حوالي 303 مليون برميل، أي استهلاك 39.4% من الاحتياطي الأصلي.

خلاصة

تناولت هذا المحور دراسة الدوال الأسية واللوغاريتمية من حيث تعريفهما وخصائصهما التحليلية وسلوكهما البياني، مع إبراز العلاقة العكسية التي تربط بينهما. فقد تم تحليل خصائص الدالة الأسية من حيث المجال والمدى والرتابة، وبيان طبيعة نموها المتسارع عندما يكون الأساس أكبر من الواحد، إضافة إلى توضيح وجود مستقيم مقارب أفقي. كما تم تناول الدالة اللوغاريتمية باعتبارها الدالة العكسية للدالة الأسية، مع دراسة مجالها وسلوكها عند حدود المجال ووجود مستقيم مقارب عمودي.

كما عالج المحور دراسة النهايات والمشتقات المرتبطة بهاتين الدالتين، مما سمح بفهم أدق لمفاهيم النمو والتناقص وسرعة التغير، إضافة إلى تحليل التمثيل البياني وتحديد الخصائص التقاربية.

وعلى المستوى التطبيقي، أبرز المحور أهمية الدوال الأسية في تمثيل ظواهر النمو الاقتصادي، مثل النمو السكاني، وتطور رأس المال، حيث يعبر عن النمو التراكمي بسلوك أسي يعكس تزايداً متسارعاً عبر الزمن. في المقابل، استخدمت الدوال اللوغاريتمية في تحليل المرونة الاقتصادية، وقياس معدلات النمو، وتحويل النماذج غير الخطية إلى صيغ خطية تسهل المعالجة الإحصائية والاقتصادية.

وفي الختام، بين المحور أن الدوال الأسية واللوغاريتمية تعد أدوات رياضية أساسية في النمذجة الاقتصادية والمالية، لما توفره من قدرة على تفسير ديناميكية التغير عبر الزمن وتحليل الظواهر الاقتصادية الكمية بدقة منهجية.

المحور الرابع:

المشتقات والاشتقاقية في الدوال

المحور الرابع: المشتقات والاشتقاقية في الدوال

الاشتقاقية هي أحد أهم المفاهيم في الرياضيات، وهي تمثل ببساطة معدل تغير دالة عند نقطة معينة. تخيل أنك تسير بسيارة، فمعدل تغير المسافة بالنسبة للزمن يمثل سرعة السيارة في لحظة معينة، وهذا هو بالضبط ما تعبر عنه الاشتقاقية.

نقوم بدراسة الاشتقاقية من أجل:

- فهم التغير: تساعدنا الاشتقاقية على فهم كيف تتغير القيم بشكل مستمر في العديد من الظواهر الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية.
- حل المسائل: تستخدم الاشتقاقية لحل مجموعة واسعة من المسائل في الفيزياء والكيمياء والهندسة والاقتصاد وغيرها.
- تحسين النماذج: تساعدنا الاشتقاقية على بناء نماذج رياضية أكثر دقة للأنظمة المعقدة.

1. المفاهيم الأساسية: عند معالجة مسألة الاشتقاقية يتم التطرق الى النقاط التالية تحديدا:

- المشتقة: هي قيمة معدل التغير الفوري لدالة عند نقطة معينة.
- مماس المنحنى: هو خط مستقيم يمس منحنى الدالة عند نقطة معينة، وميل هذا المماس يساوي قيمة المشتقة عند تلك النقطة.
- قواعد الاشتقاق: مجموعة من القواعد التي تساعدنا على حساب مشتقات الدوال المختلفة.

➤ تطبيقات الاشتقاقية: تطبق الاشتقاقية في العديد من المجالات منها:

- في الفيزياء: حساب السرعة والتسارع، قوة الدفع، العمل والطاقة.
- في الهندسة: حساب مساحات وحجوم الأشكال، تحليل الحركة، تصميم المنحنيات.
- في الاقتصاد: تحليل العرض والطلب، تحديد النقاط الحرجة، تحسين الإنتاج.

➤ أمثلة على استخدام الاشتقاقية:

- مثال 1: إذا كان لدينا دالة تمثل مسافة جسم متحرك بالنسبة للزمن، فإن مشتقة هذه الدالة تعطي لنا سرعة الجسم في أي لحظة.
- مثال 2: في الاقتصاد، يمكن استخدام الاشتقاقية لتحديد النقطة التي يكون عندها الربح أقصى ما يمكن.

2. العدد المشتق والدالة المشتقة:

نقول عن دالة $f(x)$ المعرفة على المجال I من $\mathbb{R}$ ، أنها قابلة للاشتقاق عند α من I إذا قبلت النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية محدودة لما يكون h يؤول إلى الصفر (0). أي عندما تكون نهاية الدالة $f(x)$ عند العدد (0) تساوي (l) معناه $f(0) = l$ نكتب $\lim_{x \rightarrow 0} = l$.

نسمي هذه النهاية العدد المشتق للدالة $f(x)$ عند a ، ونرمز له بالرمز $f'(a)$ حيث لدينا:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ أو } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ عند وضع: } x = a + h$$

بعبارة أخرى إذا قبلت الدالة $f(x)$ الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من مجال التعريف I نقول إنها تقبل الاشتقاق على ذلك المجال، وتسمى الدالة: $f': x \rightarrow f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة $f(x)$.

- تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند العدد a عندما يكون $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$ أو

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \text{ حيث: } x = a + h$$

- تكون الدالة غير قابلة للاشتقاق عند العدد a عندما يكون $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \infty$

- يسمى العدد $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نسبة التزايد للدالة $f(x)$ بين a و $x = a + h$ ونرمز له بالرمز: $g(h)$.

- الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها D_f معناه أنها قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من مجال التعريف D_f .

مثال:

- الدالة المشتقة للدالة $f': x \rightarrow \frac{1}{x}$ المعرفة على المجال R^* هي الدالة $f': x \rightarrow -\frac{1}{x^2}$.

- الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها.

3. الاشتقاقية والاستمرارية

إذا كانت $f(x)$ تقبل الاشتقاق عند النقطة a ، فإن الدالة $f(x)$ يجب أن تكون أيضا مستمرة عند a على وجه الخصوص، يجب أن تكون أي دالة مختلفة مستمرة في كل نقطة من مجال تعريفها. والعكس غير صحيح: ليست كل دالة مستمرة قابلة للاشتقاق. على سبيل المثال، قد تكون الدالة ذات الانحناء أو الانحدار أو المماس العمودي مستمرة، لكنها تفشل في أن تكون قابلة للتفاضل في موقع الشذوذ.

معظم الدوال التي تظهر في التمارين لها مشتقات في جميع النقاط أو في كل نقطة تقريبا. ومع ذلك، تنص نتيجة ستيفن باناخ على أن مجموعة الدوال التي لها مشتق في نقطة ما هي إلا مجموعة ضئيلة في فضاء جميع الدوال المستمرة. بشكل غير رسمي، هذا يعني أن الدوال القابلة للتفاضل غير نمطية للغاية بين الدوال المستمرة. أول مثال معروف لدالة مستمرة في كل مكان ولكن لا يمكن اشتقاقها في أي مكان هي دالة

$$\text{فايرشتراس: } W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

حيث:

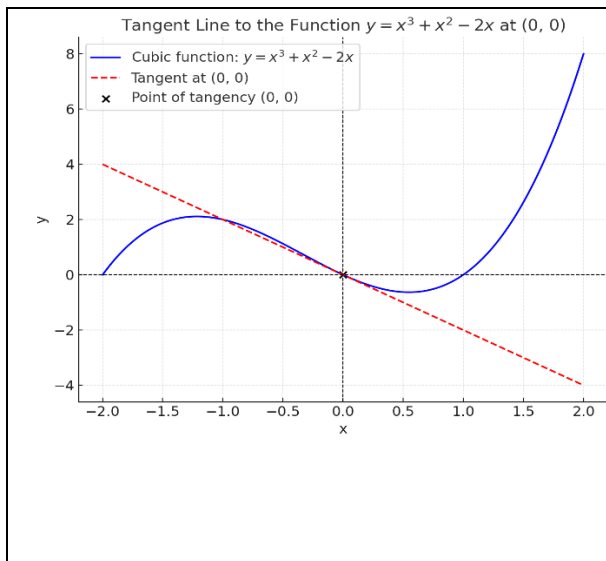
- $1 > a > 0$ هو ثابت يحدد مدى التقارب بين الحدود.
- b هو عدد صحيح موجب بحيث أن $ab < 1 + \frac{3\pi}{2}$ لضمان الخصائص غير القابلة للاشتقاق.

4. التفسير الهندسي للعدد المشتق:

هندسيا يتم الوصول الى العدد المشتق عبر فكرة المستقيم القاطع الذي يمر بنقطتين من المنحنى، وعندما تقترب النقطة الثانية تدريجيا من النقطة الاولى، يقترب المستقيم القاطع من وضعية مستقيم مماس. وعند الحد، يكون ميل هذا المماس هو العدد المشتق .

➤ المماس لمنحنى دالة عند النقطة a :

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على المجال I الذي يشمل النقطة a و (C_f) تمثيلها البياني، فإنه إذا قبلت الدالة $f(x)$ الاشتقاق عند a فإن (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا (T) معامل توجيهه $f'(a)$ ومعادلته: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.



الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x$$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$$

$$f'(0) = -2 \text{ ومنه}$$

إذن (C_f) يقبل مماسا (T) عند النقطة $A(0; 0)$

$$y = -2x \text{ معادلته}$$

5. المشتق من اليمين ومن اليسار عند عدد معين:

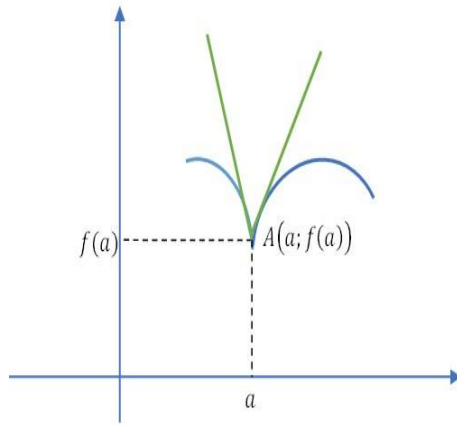
➤ تعريف: لتكن الدالة $f(x)$ المعرفة والمستمرة على المجال I الذي يشمل وجويا a .

• إذا كانت النسبة $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ تقبل النهاية l_1 من اليمين عند a نقول أن $f(x)$ قابلة

للاشتقاق من اليمين عند a .

- إذا كانت النسبة $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ تقبل النهاية l_2 من اليسار عند a نقول أن $f(x)$ قابلة للاشتقاق من اليسار عند a .
- إذا كانت $l_1 = l_2$ فإن $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند a .
- إذا كانت $l_1 \neq l_2$ فإن $f(x)$ غير قابلة للاشتقاق عند a ، والنقطة $A(a; f(a))$ تسمى نقطة زاوية.

➤ التفسير الهندسي:



- إذا كانت الدالة $f(x)$ غير قابلة للاشتقاق عند a وقابلة للاشتقاق من اليمين عند a فإن التمثيل البياني (C_f) للدالة $f(x)$ يقبل نصف مماس من اليمين عند النقطة $A(a; f(a))$ معامل توجيهه l_1 ومعادلته: $y = l_1(x - a) + f(a)$

- إذا كانت الدالة $f(x)$ غير قابلة للاشتقاق عند a وقابلة للاشتقاق من اليسار عند a فإن التمثيل البياني (C_f) للدالة $f(x)$ يقبل نصف مماس من اليسار عند النقطة $A(a; f(a))$ معامل توجيهه l_1 ومعادلته: $y = l_1(x - a) + f(a)$
- أي أن (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ نصفين مماسين يصنعان بينهما زاوية a .

6. المماس العمودي لمنحنى الدالة:

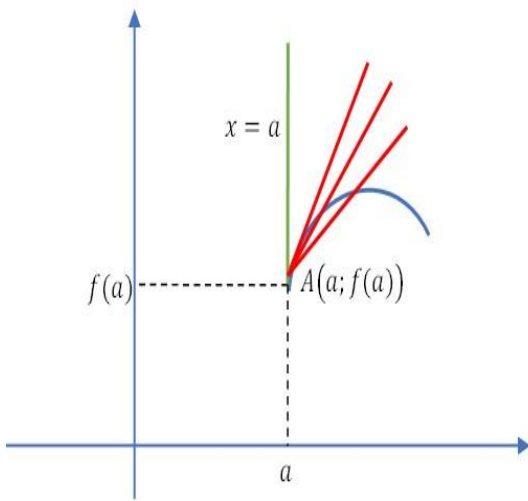
إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة مستمرة عند a و

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \infty$$

فإن الدالة $f(x)$ غير قابلة للاشتقاق عند a والمنحنى

(C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا عموديا

(موازي لمحور الترتيب) معادلته: $x = a$.



تمرين تطبيقي رقم 01:

لتكن الدالة $f(x)$ المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \sqrt{x+1}$ و (C_f)

منحناها البياني، أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f(x)$ عند -1 ، ثم فسر النتيجة المتحصل عليها هندسيا.

الحل:

من أجل $x \geq -1$ لدينا: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = +\infty$ ، ومنه فإن

الدالة $f(x)$ غير قابلة للاشتقاق عند -1 والمنحنى (C_f) يقبل عند النقطة $A(-1; 0)$ مماسا عموديا

معادلته: $x = -1$.

➤ مشتقات دوال مألوفة:

الدالة $f(x)$	الدالة المشتقة $f'(x)$	مجال قابلية الاشتقاق
a	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$ax + b$	a	$\mathbb{R}$
$x^n : n \geq 2 : n \in \mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{k\frac{\pi}{2}\right\} / k \in \mathbb{Z}$

➤ نتيجة:

- الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال محتوي في مجال تعريفها.

7. المشتقات والعمليات على الدوال:

لتكن لدينا: u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ ، و k عدد حقيقي.

الدالة	$u + v$	ku	uv	$\frac{1}{v} : v \neq 0$	$\frac{u}{v} : v \neq 0$
الدالة المشتقة	$u' + v'$	ku'	$u'v + uv'$	$\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v + v'u}{v^2}$

➤ اشتقاق الدالة $u(ax + b)$:

ليكن a و b عدنان حقيقيان حيث $a \neq 0$ ، تكون دالة قابلة للاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ ،

ليكن J المجال المكون من الأعداد الحقيقية حيث x حيث $ax + b$ ينتمي إلى المجال J .

الدالة $f: x \rightarrow u(ax + b)$ قابلة للاشتقاق على المجال J ولدينا من أجل كل x من J :

$$f'(x) = au'(ax + b)$$

➤ مثال:

تعيين الدالة المشتقة للدالة: $f(x) = \sin(2x + 1)$.

• الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x) = 2\cos(2x + 1)$.

➤ اشتقاق دالة مركبة:

• مشتقة الدالة من الشكل $(v \circ u)$: إذا كانت الدالة (u) قابلة للاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$

وقبلت v الاشتقاق على المجال $u(I)$ ، فإن الدالة $(v \circ u)$ تقبل الاشتقاق على المجال I

ولدينا من أجل كل x من I :

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]$$

مثال: عين الدالة المشتقة للدالة: $f(x) = (x^2 + 1)^3$.

• نضع $f(x) = v \circ u$ حيث $u(x) = x^2 + 1$ و $v(x) = x^3$.

• الدالتان u و v قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ومنه فإن $f(x)$ قابلة للاشتقاق أيضا على $\mathbb{R}$.

• من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $u'(x) = 2x$ و $v'(x) = 3x^2$ ومنه فإن:

$$f'(x) = 3 \times 2x(x^2 + 1)^2$$

- مشتقة الدالة من الشكل $(\sqrt{u(x)})$: إذا كانت الدالة (u) قابلة للاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ وكانت موجبة تماما على I ، فإن الدالة $\sqrt{u(x)}$ تقبل الاشتقاق على المجال I ولدينا من أجل كل x من I :

$$(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'}{2\sqrt{u(x)}}$$

مثال: عين الدالة المشتقة للدالة $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

- نضع $f(x) = v \circ u$ حيث $u(x) = x^2 + 1$ و $v(x) = \sqrt{x}$.
- الدالة u قابلة للاشتقاق وموجبة تماما على $\mathbb{R}$ ، والدالة v قابلة للاشتقاق وموجبة تماما على $]0; +\infty[$ ومنه فإن $f(x)$ قابلة للاشتقاق أيضا على $]0; +\infty[$.
- من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا: $u'(x) = 2x$ و $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ومنه فإن:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \text{ ومنه: } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

- مشتقة الدالة من الشكل $\left(\frac{1}{(u(x))^n}\right)$: إذا كانت الدالة (u) قابلة للاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ ولا تنعدم عند I ، فإن الدالة $\frac{1}{(u)^n}$ تقبل الاشتقاق على المجال I ولدينا من أجل كل x من I :

$$\left(\frac{1}{(u)^n}\right)' = \frac{n \times u'}{(u)^{n-1}}$$

مثال: عين الدالة المشتقة للدالة: $f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^4}$

• نضع $f(x) = \frac{1}{(u(x))^4}$ حيث $u(x) = x^2 + x + 1$

• الدالة u قابلة للاشتقاق ومعرفة على $\mathbb{R}$ ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $u(x) > 0$ ومنه
فإن $f(x)$ قابلة للاشتقاق أيضا على $\mathbb{R}$.

• من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $u'(x) = 2x + 1$ ومنه فإن: $f'(x) = \frac{-4(2x+1)}{(x^2+x+1)^5}$

8. المشتقات المتتالية لدالة:

إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ ، فإن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x من I العدد الحقيقي $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة الأولى للدالة $f(x)$.

• إذا كانت الدالة $f'(x)$ قابلة للاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ ، فإن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x من I العدد الحقيقي $(f'(x))'$ تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة $f(x)$ ، ونرمز لها f'' .

• وهكذا إذا قبلت الدالة $f(x)$ الاشتقاق n مرة (حيث $n \geq 2$) على المجال I ، فإن الدالة المشتقة النونية للدالة $f(x)$ ونرمز لها بـ $f^{(n)}$ تكتب كما يلي:
 $f^{(3)} = f'''$. $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]$

مثال: أوجد المشتقات المتتالية للدالة $f(x) = x^4$

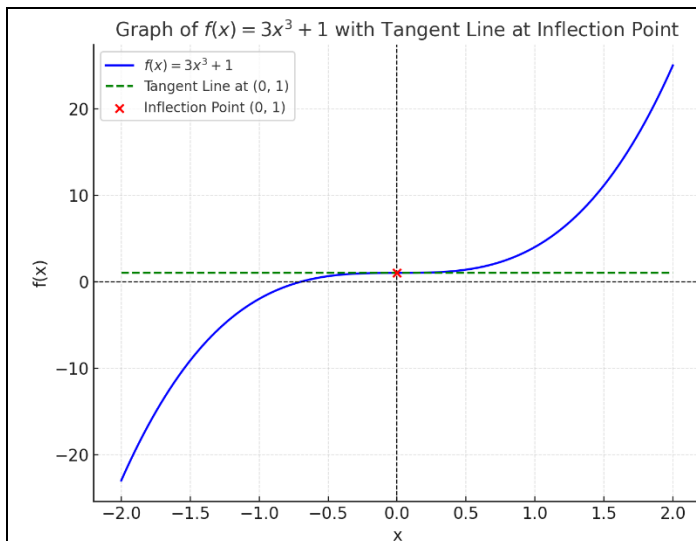
• نلاحظ أن الدالة $f(x) = x^4$ معرفة على $\mathbb{R}$ ، وقابلة للاشتقاق n مرة، وأنه من أجل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f^{(1)}(x) = 4x^3, f^{(2)}(x) = 12x^2, f^{(3)}(x) = 24x, f^{(4)}(x) = 24$$

• ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$ لدينا: $f^{(n)}(x) = 0$

9. نقطة الانعطاف:

إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق مرتين على المجال I من $\mathbb{R}$ ، وكانت $f''(x)$ تنعدم عند x_0 من المجال I وتغير إشارتها في جوار x_0 ، فإن المنحنى البياني (C_f) للدالة $f(x)$ له نقطة انعطاف $A(x_0; f(x_0))$ ، والمماس (T) عند A يخترف (C_f) .



مثال: لتكن الدالة $f(x)$ معرفة على $\mathbb{R}$ ، بالعبارة

$$f(x) = 3x^3 + 1.$$

الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ومن

أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f'(x) = 9x^2, \text{ والمشتقة الثانية:}$$

$$f''(x) = 18x, \text{ يكافئ } f''(x) = 0$$

$x = 0$ إذن $f''(x)$ تنعدم عند $x_0 = 0$

مغيرة إشارتها في جوار 0، ومنه فإن النقطة

$A(0; 1)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

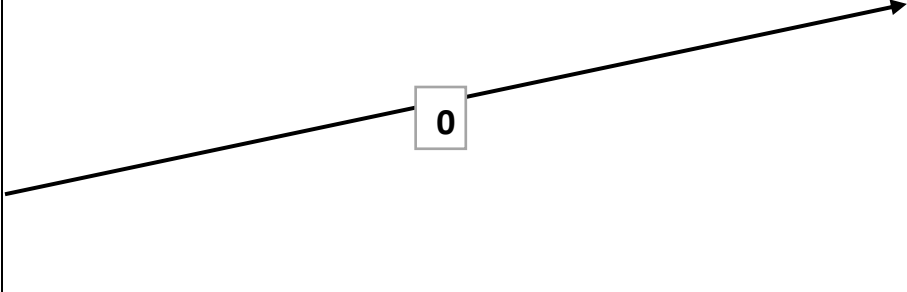
10. تطبيقات الاشتقاق:

➤ اتجاه تغير الدالة: لتكن دالة قابلة للاشتقاق على المجال I من D_f .

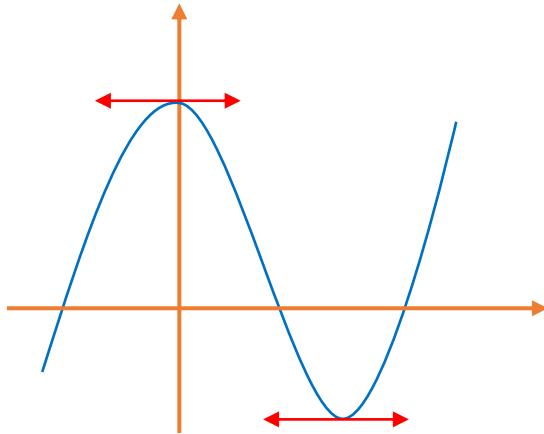
- إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f'(x) > 0$ فإن الدالة $f(x)$ متزايدة تماماً على I .
- إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f'(x) < 0$ فإن الدالة $f(x)$ متناقصة تماماً على I .
- إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f'(x) = 0$ فإن الدالة $f(x)$ ثابتة على I .

مثال: لتكن الدالة $f(x)$ معرفة على $\mathbb{R}$ ، بالعلاقة التالية: $f(x) = x^3$ الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ومن أجل كل عدد x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x) = 3x^2$ ، ومن أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا: $f'(x) > 0$ و $f'(0) = 0$.

إذن الدالة $f'(x)$ موجبة على $\mathbb{R}$ وتتعدم عند 0، وبالتالي فإن $f(x)$ متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$			

➤ تحديد القيم الحدية للدالة:



لتكن $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق على المجال I من $\mathbb{R}$ يشمل c .

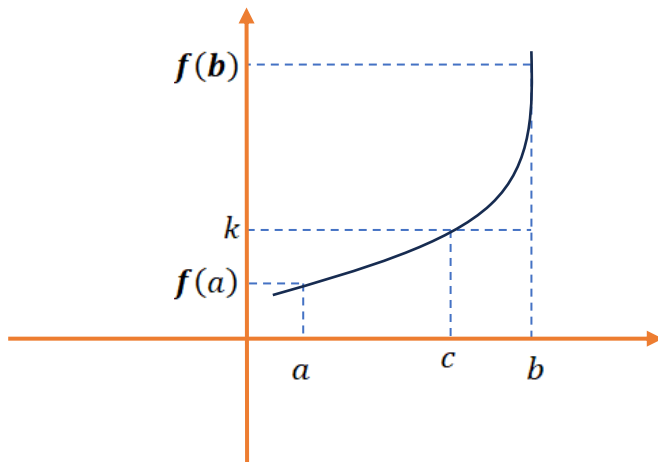
القول أن $f(c)$ قيمة حدية عظمى (صغرى) للدالة

$f(x)$ يعني أنه نستطيع إيجاد مجال مفتوح J

محتوى في المجال I ويشمل c بحيث من أجل كل عدد x من J لدينا:

$$f(x) \leq f(c) \text{ أو } f(x) \geq f(c)$$

➤ حل المعادلات:



لتكن $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق على المجال

$$I = [a; b]$$

إذا كانت $f' > 0$ أو $f' < 0$ على المجال

$[a; b]$ فإنه من أجل k من $[f(a); f(b)]$

أو $[f(b); f(a)]$ ، المعادلة $f(x) = k$

تقبل حل وحيد على المجال $[a; b]$.

➤ استعمال العدد المشتق في حساب النهايات نستطيع استعمال العدد المشتق لتعيين نهاية بعض

الدوال عند a وذلك لإزالة حالة عدم التعيين، إذا كانت لدينا عبارة على الشكل $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ مع

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \text{ فإن } a \text{ عند } f(x) \text{ دالة قابلة للاشتقاق}$$

مثال تطبيقي:

$$\text{لدينا: } g(x) = \frac{\cos x - 1}{x} \text{ نريد حساب } \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

الحل:

• نلاحظ أن $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ومنه فإن $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ هي حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$.

• لإزالة حالة عدم التعيين نستعمل العدد المشتق وذلك بوضع $f(x) = \cos x$ نجد

$f(x) = 1$ وبالتالي فإن $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ، وبما أن $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند 0

$$\text{فإن } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(0)$$

• ومن أجل كل عدد x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x) = -\sin x$ ، ومنه فإن $f'(0) = 0$ ، إذن

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = f'(0) = 0$$

11. تطبيقات الاشتقاق والاشتقاقية في العلوم الاقتصادية

يعد الاشتقاق من الأدوات الأساسية في التحليل الاقتصادي لأنه يمكن من دراسة معدل التغير والعلاقات الهامشية بين المتغيرات الاقتصادية. فالمشتقة تمثل معدل التغير اللحظي، وهو ما يتوافق مع المفاهيم الاقتصادية مثل التكلفة الحدية والإيراد الحدي والمنفعة الحدية.

في نظرية الإنتاج، تستعمل المشتقة لحساب الانتاجية الحدية لعناصر الإنتاج، حيث تعبر مشتقة دالة الإنتاج بالنسبة لأحد العوامل عن مقدار الزيادة في الناتج نتيجة زيادة وحدة إضافية من ذلك العامل مع ثبات العوامل الأخرى.

وفي نظرية المستهلك، تستخدم المشتقات في تحليل المنفعة الحدية ومعدل الاحلال الحدي، مما يساعد على تحديد شروط التوازن الاستهلاكي. كما توظف في دراسة دوال التكلفة والإيراد والربح، حيث يتم تحديد مستوى الإنتاج الذي يعظم الربح من خلال شرط انعدام المشتقة الأولى للربح ومناقشة إشارة المشتقة الثانية.

وفي الاقتصاد الكلي، تستعمل المشتقات في تحليل دوال النمو والتغير عبر الزمن، وكذلك في دراسة الحساسية والمرونة، حيث تقاس مرونة الطلب مثلاً باستعمال المشتقة النسبية.

وعليه يشكل الاشتقاق أداة رياضية محورية في النمذجة الاقتصادية واتخاذ القرار، لأنه يسمح بدراسة التغيرات الدقيقة وتحديد نقاط التوازن والقيم المثلى بدقة علمية.

➤ **تعظيم الربح:** يتحقق تعظيم الربح عندما يكون الفرق بين الإيراد الكلي والتكلفة الكلية في أكبر

قيمة ممكنة. رياضياً يتحقق ذلك عندما يكون:

$$\text{الإيراد الحدي} = \text{التكلفة الحدية}$$

أو عندما تكون المشتقة الأولى لدالة الربح تساوي صفراً والمشتقة الثانية سالبة.

تمرين تطبيقي: لتكن المعطيات التالية:

$$C(x) = 2x^2 + 10x + 100 \text{ دالة التكلفة:}$$

$$R(x) = 50x \text{ دالة الإيراد:}$$

الحل:

2. نحسب المشتقة الأولى

$$\Pi'(x) = -4x + 40$$

1. نحسب دالة الربح

$$\Pi(x) = R(x) - C(x)$$

$$\Pi(x) = 50x - (2x^2 + 10x + 100)$$

$$\Pi(x) = -2x^2 + 40x - 100$$

4. نتحقق من شرط التعظيم

$$\Pi''(x) = -4 < 0$$

3. نساويها بالصفر:

$$-4x + 40 = 0$$

$$x = 10$$

بما أن المشتقة الثانية سالبة إذن يتحقق أقصى ربح عند:

$$x = 10$$

التفسير الاقتصادي: عند إنتاج 10 وحدات يكون الربح في أقصى قيمة.

➤ **التكلفة الحدية:** هي معدل التغير في التكلفة الكلية عند انتاج وحدة اضافية. رياضيا، هي

$$\text{المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية: } C_m(x) = C'(x)$$

حيث $C(x)$ تمثل التكلفة الكلية لإنتاج x وحدة.

تمرين تطبيقي: لتكن دالة التكلفة الكلية: $C(x) = 5x^2 + 20x + 100$ والمطلوب حساب التكلفة الحدية:

التكلفة الحدية عند $x = 5$ وحدات

نحسب التكلفة الحدية

$$C_m(5) = 10(5) + 20 = 50 + 20 = 70$$

$$C_m(x) = C'(x) = 10x + 20$$

التفسير الاقتصادي: عند انتاج الوحدة الخامسة تكون زيادة التكلفة الناتجة عن انتاج هذه الوحدة تساوي 70 وحدة نقدية. التكلفة الحدية تساعد الشركات على اتخاذ قرارات الانتاج :حيث تنتج المؤسسة حتى تكون التكلفة الحدية مساوية للإيراد الحدي لتعظيم الربح.

➤ **مرونة الطلب:** مرونة الطلب تقيس حساسية الكمية المطلوبة لتغير السعر. من الناحية

الرياضية، تعرف مرونة الطلب السعرية بالصيغة:

$$Ed = dQ/dP \times P/Q$$

تمرين تطبيقي: لتكن دالة الطلب: $Q = 120 - 3P$

لحساب مرونة الطلب نتبع الخطوات التالية:

نحسب كمية الطلب عند $P = 20$

نحسب مشتقة الطلب بالنسبة للسعر

$$Q = 120 - 3(20) = 60$$

$$dQ/dP = -3$$

نحسب المرونة

$$Ed = (-3) \times 20/60 = -1$$

إذن الطلب عند هذا السعر وحدوي المرونة لأن القيمة المطلقة للمرونة مساوية للواحد.

خلاصة

تناولت هذ المحور مفهوم الاشتقاق والدوال المشتقة، حيث عرف الاشتقاق على أنه معدل التغير اللحظي لدالة بالنسبة لمتغيرها المستقل أو ميل المماس للمنحنى عند نقطة معينة. وتم استعراض المشتقة الأولى والثانية لتحديد زيادة أو نقصان الدالة وتقرر المنحنى ونقاط الانعطاف، بالإضافة إلى قواعد الاشتقاق للتعامل مع مختلف أنواع الدوال.

وقد أشير بشكل بسيط إلى أن هذه الأدوات تستخدم في تحليل التغيرات الاقتصادية، مثل دراسة معدلات النمو، التغير في الإنتاج، والربح الحدي، مما يوضح أهمية الاشتقاق في فهم سلوك المتغيرات الاقتصادية واتخاذ القرارات المبنية على التغيرات الدقيقة.

المحور الخامس: الدوال الأصلية وحساب التكامل

المحور الخامس: الدوال الأصلية وحساب التكامل

تعد الدوال الأصلية من المفاهيم الأساسية في التحليل الرياضي، إذ تمثل العكس الرياضي لعملية الاشتقاق. فبينما يعنى الاشتقاق بدراسة كيفية تغير الدوال وسرعة هذا التغير، تهتم الدالة الأصلية بإعادة بناء الدالة الأصلية من معرفتنا بمشتقتها.

بعبارة أخرى، إذا كانت لدينا دالة f تعبر عن معدل تغير كمية معينة (كالسرعة، أو التكلفة الحدية، أو الكثافة)، فإن الدالة الأصلية F تمثل القيمة التراكمية لتلك الكمية (كالإزاحة، أو التكلفة الكلية، أو الكتلة). تستخدم الدوال الأصلية أساساً في حساب التفاضل والتكامل، وهي تشكل قاعدة التكامل غير المحدد، حيث نرمز لمجموعة الدوال الأصلية لدالة ما بالرمز:

$$\int f(x) dx$$

وهذا التكامل يمثل جميع الدوال التي مشتقتها هي $f(x)$ ، وتختلف فيما بينها بثابت يرمز له بـ C . من الناحية النظرية، وجود دالة أصلية يعني إمكانية عكس عملية التفاضل على مجال معين، وهو ما يسمح بربط المفاهيم الرياضية بالتطبيقات الفيزيائية والاقتصادية.

إن، تعد دراسة الدوال الأصلية خطوة جوهرية لفهم العمليات التراكمية، وهي تمثل أساس التكامل التحليلي الذي يربط بين التغير والكمية الكلية، وبين الجزء والكل في الظواهر الرياضية والواقعية على حد سواء.

1. التعريف الرياضي للدالة الأصلية

لتكن f دالة معرفة على مجال $I \subset \mathbb{R}$. نقول إن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على المجال I إذا

كانت:

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

أي أن اشتقاق F يعطي الدالة f . الدالة الأصلية هي دالة يعطينا اشتقاقها الدالة الأصلية المعطاة.

ملاحظات أساسية

• إذا كانت F دالة أصلية لـ f ، فإن كل دالة من الشكل: $G(x) = F(x) + C$ ، حيث $C \in \mathbb{R}$ ،

هي أيضا دالة أصلية لـ f . لأن اشتقاق ثابت يساوي صفرا: $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$

وبالتالي، مجموعة جميع الدوال الأصلية لـ f تسمى التكامل غير المحدد، ويرمز إليه بـ:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

حيث C ثابت تكامل يمثل جميع الإمكانيات الممكنة للدالة الأصلية.

• ليست كل دالة تمتلك دالة أصلية يمكن التعبير عنها بدلالة الدوال الابتدائية (مثل كثيرات الحدود،

الأس، اللوغاريتم، المثلثيات...)، لكن من الناحية النظرية، كل دالة متصلة على مجال مفتوح تمتلك

دالة أصلية وفق نظرية أساسية في التحليل.

➤ الخواص النظرية للدوال الأصلية: لتكن f و g دالتين قابلتين للتكامل على مجال I ، و k عددا

حقيقيا ثابتا، فإن الدالة الأصلية تحقق الخصائص التالية:

• خاصية الجمع:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

• خاصية الفرق:

$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

• خاصية الضرب في ثابت:

$$\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx$$

• الخطية العامة:

التكامل غير المحدد (أي إيجاد الدالة الأصلية) عملية خطية على مجموعة الدوال المستمرة.

➤ المبدأ العكسي للاشتقاق: يمكن القول نظريا أن عمليتي الاشتقاق والتكامل (أو إيجاد الدالة

الأصلية) هما عمليتان عكسيتان، بمعنى:

$$\frac{d}{dx} (\int f(x) dx) = f(x)$$

و

$$\int f'(x) dx = f(x) + C$$

وهذا الترابط بين الاشتقاق والتكامل هو الذي يشكل الأساس النظري للتكامل التحليلي، ويعرف بـ نظرية

التحليل الأساسية.

2. التكامل الرياضي (Integration)

التكامل هو إحدى الركائز الأساسية في التحليل الرياضي، ويستخدم لفهم المجموع الكلي للتغيرات. إذا كانت لدينا دالة تعبر عن معدل تغير كمية ما (مثل السرعة، التكلفة الحدية، أو معدل نمو السكان)، فإن التكامل يسمح لنا باسترجاع القيمة الكلية لهذه الكمية على فترة زمنية أو نطاق معين. بمعنى آخر، التكامل هو عملية عكسية للاشتقاق، ويقسم إلى نوعين: التكامل غير المحدد (غير مربوط بنقطتين). والتكامل المحدد (لحساب المساحة تحت منحنى دالة بين نقطتين محددين).

1.2. التكامل غير المحدد: التكامل غير المحدد هو مجموعة كل الدوال الأصلية لدالة معينة:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

➤ القواعد الأساسية للتكامل: لتكن f و g دالتين قابلتين للتكامل، و k عدد ثابت:

1. الخطية:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

2. الضرب في ثابت:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx$$

3. الاشتقاق العكسي:

$$\frac{d}{dx} (\int f(x)dx) = f(x)$$

➤ أمثلة محلولة

$$\text{مثال 1: } \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

$$\text{مثال 2: } \int (2x + 5) dx = \int 2x dx + \int 5 dx = x^2 + 5x + C$$

$$\text{مثال 3: } \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

2.2. التكامل المحدد: التكامل المحدد هو حساب المساحة تحت منحنى دالة f بين نقطتين a و b :

$$\int f(x) dx = F(b) - F(a)$$

حيث F دالة أصلية لـ f .

➤ أمثلة محلولة

مثال 1: أحسب التكامل التالي:

$$\int_0^2 (2x + 1) dx$$

الحل:

$$\int (2x + 1) dx = x^2 + x$$

$$\int_0^2 (2x + 1) dx = [x^2 + x]_0^2 = (4 + 2) - (0 + 0) = 6$$

مثال 2:

$$\int_1^3 x^3 dx$$

الحل:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$$

$$\int_1^3 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

➤ جدول لبعض الدوال الأصلية الأساسية

الدالة $f(x)$	التكامل $\int f(x) dx$
0	C
1	$x + C$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$

3. استعمالات التكامل في الاقتصاد

يعد التكامل أداة رياضية قوية لتحليل الظواهر الاقتصادية التي تتطور تدريجياً أو تتراكم مع الوقت. ففي الاقتصاد، غالباً ما تكون لدينا دوال حدية مثل التكلفة الحدية، الإيراد الحدي، والربح الحدي، ونحتاج إلى إيجاد القيمة الكلية المرتبطة بها.

هنا يأتي دور التكامل، الذي يسمح بتحويل الدوال الحدية إلى دوال كلية تعبر عن إجمالي الكمية أو القيمة.

1.3. استعمال التكامل لتحويل الدوال الحدية إلى كلية:

- **التكلفة الإجمالية (Total Cost):** إذا كانت $C_m(x)$ تمثل التكلفة الحدية لإنتاج وحدة إضافية، فإن التكلفة الكلية لإنتاج n وحدة تحسب بالتكامل:

$$C(x) = \int C_m(x) dx + C_0$$

حيث C_0 هي التكلفة الثابتة.

مثال: أحسب التكلفة الإجمالية إذا كانت التكلفة الحدية $C_m(x) = 50 + 2x$ ، والتكلفة الثابتة $C_0 = 100$:

$$C(x) = \int (50 + 2x) dx + 100 = 50x + x^2 + 100$$

- **الإيراد الإجمالي (Total Revenue):** إذا كان $R_m(x)$ يمثل الإيراد الحدي (إيراد الوحدة الإضافية)، فإن الإيراد الكلي:

$$R(x) = \int R_m(x) dx$$

مثال: أحسب الإيراد الكلي إذا كان $R_m(x) = 20 - x$

$$R(x) = \int (20 - x)dx = 20x - \frac{x^2}{2} + C$$

• الربح الكلي (Total Profit) : الربح الكلي هو الفرق بين الإيراد الكلي والتكلفة الكلية:

$$\Pi(x) = R(x) - C(x)$$

مثال: أحسب الربح الكلي باستخدام المثالين السابقين:

$$\Pi(x) = (20x - \frac{x^2}{2}) - (50x + x^2 + 100) = -\frac{3}{2}x^2 - 30x - 100$$

2.3. استعمال التكامل لتقدير المستهلك والمنتج (Consumer & Producer Surplus)

• فائض المستهلك (Consumer Surplus): يمثل الفارق بين القيمة التي يكون المستهلك مستعدا لدفعها والقيمة المدفوعة فعليا.

يحسب التكامل على منحنى الطلب $D(x)$:

$$CS = \int_0^{x_e} P(x) dx - P_e \cdot x_e$$

• فائض المنتج (Producer Surplus) : يمثل الفارق بين السعر الذي يتلقاه المنتج وتكلفة الإنتاج الحدية.

$$PS = P_e \cdot x_e - \int_0^{x_e} C_m(x) dx$$

3.3. استعمال التكامل في تحليل النمو الاقتصادي

- حساب الناتج الكلي من معدل النمو السنوي:

$$Y(t) = \int g(t)dt + Y_0$$

حيث $g(t)$ معدل النمو و Y_0 الناتج الابتدائي.

- التقديرات الاقتصادية مثل استهلاك الأسرة، الادخار، والاستثمار يمكن ربطها بالتكامل لتحديد الكميات الكلية المتراكمة مع الزمن.

4. سلسلة تمارين محلولة

التمرين الأول (فائض المستهلك والمنتج): إذا كانت دالة الطلب هي $P = 100 - 2Q$ ودالة العرض هي $P = 20 + 3Q$ ، أوجد فائض المستهلك وفائض المنتج عند نقطة التوازن.

الحل: الخطوة 1: إيجاد نقطة التوازن

$$100 - 2Q = 20 + 3Q$$

$$100 - 20 = 3Q + 2Q$$

$$80 = 5Q \Rightarrow Q = 16$$

$$P = 100 - 2(16) = 68$$

نقطة التوازن (16, 68) :

الخطوة 2: فائض المستهلك

$$CS = \int_0^{16} [(100 - 2Q) - 68] dQ$$

$$CS = \int_0^{16} (32 - 2Q) dQ$$

$$CS = [32Q - Q^2]_0^{16}$$

$$CS = [32(16) - (16)^2] - [0] = 512 - 256 = 256$$

الخطوة 3: فائض المنتج

$$PS = \int_0^{16} [68 - (20 + 3Q)] dQ$$

$$PS = \int_0^{16} (48 - 3Q) dQ$$

$$PS = [48Q - \frac{3Q^2}{2}]_0^{16}$$

$$PS = [48(16) - 1.5(256)] - [0] = 768 - 384 = 384$$

النتيجة: فائض المستهلك = 256، فائض المنتج = 384

التمرين الثاني (دالة التكلفة من التكلفة الحدية): إذا كانت التكلفة الحدية $MC = 3Q^2 - 12Q + 20$

والتكلفة الثابتة هي 100، أوجد دالة التكلفة الكلية.

الحل:

$$TC = \int MC dQ + FC$$

$$TC = \int (3Q^2 - 12Q + 20) dQ + 100$$

$$TC = Q^3 - 6Q^2 + 20Q + 100 + C$$

بما أن التكلفة الثابتة معطاة (100)، فإن $C = 0$

$$TC = Q^3 - 6Q^2 + 20Q + 100$$

التحقق: عندما $Q = 0$ ، $TC = 100$

التمرين الثالث (الاستهلاك التراكمي): إذا كانت الدالة الحدية للاستهلاك $MPC = 0.8 - 0.2Y$ والاستهلاك المستقل هو 50، أوجد دالة الاستهلاك الكلي.

الحل:

$$C = \int MPC dY + C_0$$

$$C = \int (0.8 - 0.2Y) dY + 50$$

$$C = 0.8Y - 0.1Y^2 + 50$$

$$\text{النتيجة: } C(Y) = 50 + 0.8Y - 0.1Y^2$$

التمرين الرابع (رأس المال التراكمي): إذا كان الاستثمار يتغير بمعدل $I(t) = 100e^{0.05t}$ ، وأصلي رأس المال $K(0) = 2000$ ، أوجد رأس المال بعد 5 سنوات.

الحل:

$$K(t) = \int I(t) dt + K(0)$$

$$K(t) = \int 100e^{0.05t} dt + 2000$$

$$K(t) = \frac{100}{0.05} e^{0.05t} + C = 2000e^{0.05t} + C$$

$$\text{باستخدام الشرط الابتدائي } K(0) = 2000$$

$$2000 = 2000e^0 + C \Rightarrow 2000 = 2000 + C \Rightarrow C = 0$$

$$K(t) = 2000e^{0.05t}$$

$$K(5) = 2000e^{0.05 \times 5} = 2000e^{0.25} \approx 2000 \times 1.284 = 2568$$

$$\text{النتيجة: رأس المال بعد 5 سنوات } \approx 2568$$

التمرين الخامس (الإيراد الكلي من الإيراد الحدي): إذا كان الإيراد الحدي $MR = 100 - 4Q$ ، أوجد دالة الإيراد الكلي والإيراد عندما $Q = 10$.

الحل:

$$TR = \int MR dQ$$

$$TR = \int (100 - 4Q) dQ$$

$$TR = 100Q - 2Q^2 + C$$

$$\text{عند } Q = 0, TR = 0, \text{ لذا } C = 0$$

$$TR = 100Q - 2Q^2$$

$$\text{عند } Q = 10:$$

$$TR = 100(10) - 2(100) = 1000 - 200 = 800$$

التمرين السادس (فائض المستهلك مع دالة طلب غير خطية): إذا كانت دالة الطلب $P = \frac{100}{\sqrt{Q}}$ وسعر

السوق 20، أوجد فائض المستهلك.

الحل:

الخطوة 1: إيجاد الكمية المطلوبة عند السوق

$$20 = \frac{100}{\sqrt{Q}} \Rightarrow \sqrt{Q} = 5 \Rightarrow Q = 25$$

الخطوة 2: فائض المستهلك

$$CS = \int_0^{25} \left(\frac{100}{\sqrt{Q}} - 20 \right) dQ$$

$$CS = \int_0^{25} (100Q^{-1/2} - 20) dQ$$

$$CS = [200Q^{1/2} - 20Q]_0^{25}$$

$$CS = [200(5) - 20(25)] - [0] = 1000 - 500 = 500$$

خلاصة

تعد الدوال الاصلية والتكامل من المفاهيم الأساسية في الرياضيات، فهي تمثل الأدوات التي تسمح بالانتقال من المعدلات الجزئية الى القيم الاجمالية وفهم العلاقة بين التغير والتراكم. فالدوال الاصلية تمكن من إيجاد الدالة الأصلية لأي دالة مشتقة، مما يوفر القدرة على حل المعادلات وإيجاد الحلول التي تربط المتغيرات المختلفة.

أما التكامل، سواء المحدود او غير المحدود، فهو يوفر وسيلة لحساب المساحات تحت المنحنيات والمناطق بين الدوال، ويساعد على فهم تراكم القيم والتغيرات المستمرة. ومن خلال التكامل يمكن التوصل الى نتائج دقيقة عند التعامل مع مسائل الهندسة، الاحصاء، الفيزياء، وغيرها من فروع الرياضيات التطبيقية.

من الجانب الاقتصادي، تعتبر الدوال الاصلية والتكامل أدوات مهمة لتحليل البيانات الاقتصادية واتخاذ القرارات. فهي تمكن من الانتقال من المفاهيم الحدية، مثل التكلفة الحدية والإيراد الحدي، الى القيم الكلية مثل التكلفة الاجمالية والإيراد الكلي والربح. هذا الربط بين الرياضيات والاقتصاد يساعد على فهم سلوك الأسواق وتقدير النتائج الناتجة عن السياسات المختلفة واتخاذ قرارات مبنية على اسس كمية دقيقة.

باختصار، تعتبر الدوال الاصلية والتكامل أدوات مركزية في الرياضيات والتطبيقات العملية، فهي تتيح الانتقال من المعلومات الجزئية الى النتائج الكلية، وتوفر اساسا قويا لحل المشكلات وتحليل الظواهر الرياضية والاقتصادية بطريقة دقيقة ومنهجية.

الخاتمة العامة

بعد هذه الرحلة المعرفية الشاملة في تطبيقات الأدوات الرياضية في التحليل الاقتصادي، يمكننا الخلوص إلى أن التكامل والدوال الأسية واللوغاريتمية والتحليل التوفيقي تمثل أركاناً أساسية في البنية التحتية للفكر الاقتصادي الكمي. فهذه الأدوات لم تبقى حبيسة الأطر النظرية المجردة، بل تجسدت في حلول عملية لإشكاليات اقتصادية معاصرة، من تحسين تخصيص الموارد إلى نمذجة النمو الاقتصادي، وصولاً إلى إدارة المخاطر المالية.

لقد أكدت الدراسة أن التكامل يظل الأداة الأمثل لتحليل الظواهر التراكمية والمستمرة، بينما برهنت الدوال الأسية واللوغاريتمية على قدرتها الفائقة في نمذجة العلاقات النسبية الخطية. كما أظهر التحليل التوفيقي كفاءة ملحوظة في معالجة مشاكل الاختيار والتوزيع الأمثل.

وتكمن القيمة المضافة لهذه المطبوعة في تقديمها رؤية تكاملية تدمج بين المنظور النظري والتطبيق العملي، مما يخلق جسراً بين العالمين الأكاديمي والميداني. وقد أثمر هذا التكامل عن تطوير أدوات تحليلية متقدمة تمكن الاقتصاديين من مواجهة التحديات المعقدة في ظل اقتصاديات العصر الحديث.

ختاماً، فإن إتقان هذه الأدوات الرياضية لم يعد ترفاً فكرياً، بل ضرورة منهجية لكل باحث وممارس في الحقل الاقتصادي. وتظل هذه المطبوعة نافذة مفتوحة على آفاق البحث والابتكار، داعية إلى مزيد من الاستكشاف والتطوير في هذا الحقل المعرفي الثري.

5. قائمة المصادر والمراجع:

1.2. المراجع العربية:

1. الرياضيات للاقتصاديين - د. محمد عبد العزيز صالح - دار المريخ للنشر - الطبعة الثالثة - السعودية - 2015
2. التحليل الرياضي في الاقتصاد - د. سمير عطوي - دار صفاء للنشر والتوزيع - الطبعة الأولى - الأردن - 2012
3. الرياضيات المالية والإكتوارية - د. خالد عبد الرحمن - دار الكتب العلمية - الطبعة الثانية - مصر - 2018
4. نماذج الرياضيات في الاقتصاد - د. مصطفى العبد الله - دار الشروق للنشر والتوزيع - الطبعة الأولى - مصر - 2010
5. التكامل وتطبيقاته الاقتصادية - د. علي حسين - جامعة دمشق - الطبعة الخاصة - سوريا - 2008
6. الرياضيات المتقدمة لطلبة الاقتصاد - د. إبراهيم أحمد مصطفى - دار المسيرة للنشر والتوزيع - الطبعة الرابعة - الأردن - 2019
7. تطبيقات التفاضل والتكامل في الاقتصاد - د. هشام القاضي - المركز العربي للأبحاث والنشر - الطبعة الأولى - لبنان - 2016
8. الدوال الأسية واللوغاريتمية في التحليل الاقتصادي - د. محمود عبد الفتاح - دار النهضة العربية - الطبعة الثانية - مصر - 2014
9. التحليل التوافقي وتطبيقاته الاقتصادية - د. ياسر محمد علي - دار اليازوري العلمية - الطبعة الأولى - الأردن - 2020
10. النمذجة الرياضية في الاقتصاد - د. ناصر عبد الله - دار الجامعة الجديدة - الطبعة الثالثة - مصر - 2017

2.5. المراجع باللغة الأجنبية:

1. *"Mathematics for Economists"* - Simon & Blume - W.W. Norton & Company - 1st Edition - USA - 1994
2. *"Fundamental Methods of Mathematical Economics"* - Alpha Chiang - McGraw-Hill - 4th Edition - USA - 2005
3. *"Essential Mathematics for Economic Analysis"* - Sydsaeter & Hammond - Pearson Education - 5th Edition - UK - 2016
4. *"Mathematical Economics"* - Kamien & Schwartz - Dover Publications - 2nd Edition - USA - 2012
5. *"Mathematics for Economics"* - Hoy et al. - MIT Press - 3rd Edition - USA - 2011
6. *"Advanced Mathematical Economics"* - Rakesh Vohra - Routledge - 1st Edition - UK - 2005
7. *"Methods of Dynamic Economics"* - David Gale - Oxford University Press - 1st Edition - UK - 1973
8. *"Economic Dynamics: Methods and Models"* - Giancarlo Gandolfo - Springer - 4th Edition - Germany – 2008
9. *"Recursive Methods in Economic Dynamics"* - Stokey & Lucas - Harvard University Press - 1st Edition - USA - 1989
10. *"Mathematical Economics and Finance"* - Michael Harrison - Blackwell Publishing - 1st Edition - USA - 2003
11. *"Calculus for Business, Economics, and Social Sciences"* - Hoffmann & Bradley - McGraw-Hill - 11th Edition - USA - 2013
12. *"Applied Calculus for Business, Economics, and Finance"* - Warren B. Gordon - Baruch College - 1st Edition - USA - 2015
13. *"Integral Calculus in Economics"* - Brian P. Kiernan - Cambridge University Press - 1st Edition - UK - 2009
14. *"Mathematics for Finance and Economics"* - Marek Capinski - Springer - 2nd Edition - Germany - 2017
15. *"Economic Applications of Integral Calculus"* - James Weber - Academic Press - 1st Edition - USA - 2010
16. *"Exponential and Logarithmic Functions in Economics"* - Paul Turner - Wiley - 1st Edition - USA - 2014
17. *"Growth Models in Economics"* - Robert Solow - MIT Press - 3rd Edition - USA - 2000

18. *"Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing"* - Baxter & Rennie - Cambridge University Press - 1st Edition - UK - 1996
19. *"The Mathematics of Money Management"* - Ralph Vince - Wiley - 1st Edition - USA - 1992
20. *"Logarithmic Utility and Risk Analysis"* - John Pratt - Princeton University Press - 1st Edition - USA - 2008
21. *"Combinatorial Optimization"* - Papadimitriou & Steiglitz - Dover Publications - 2nd Edition - USA - 1998
22. *"Combinatorial Methods in Economics"* - H. Peyton Young - MIT Press - 1st Edition - USA - 2004
23. *"Network Flows: Theory and Applications"* - Ahuja, Magnanti & Orlin - Prentice Hall - 1st Edition - USA - 1993
24. *"Combinatorial Auctions"* - Cramton, Shoham & Steinberg - MIT Press - 1st Edition - USA - 2006
25. *"Game Theory and Combinatorial Applications"* - Osborne & Rubinstein - MIT Press - 1st Edition - USA - 1994