



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة غرداية



كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

ميدان التكوين في العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مطبوعة بيداغوجية في مقياس:

إحصاء 04

موجه لطلبة السنة الثانية ليسانس - كل الشعب -

من إعداد

الأستاذ	المؤسسة الجامعية	البريد الإلكتروني
د. عقبة مخنان	جامعة غرداية	mekhnane.okba@univ-ghardaia.dz okbamekhnane@gmail.com
د. زكريا جرفي	المركز الجامعي ايليزي	djorfi.zakaria@cuillizi.dz zakariadjorfi@gmail.com

السنة الجامعية 2026/2025



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة غرداية



كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

ميدان التكوين في العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مطبوعة بيداغوجية في مقياس:

إحصاء 04

موجه لطلبة السنة الثانية ليسانس - كل الشعب -

من إعداد

الأستاذ	المؤسسة الجامعية	البريد الإلكتروني
د. عقبة مخنان	جامعة غرداية	mekhnane.okba@univ-ghardaia.dz okbamekhnane@gmail.com
د. زكريا جرفي	المركز الجامعي ايليزي	djorfi.zakaria@cuillizi.dz zakariadjorfi@gmail.com

السنة الجامعية 2025/2026

الفهرس

المحور	العنوان	الصفحة
	الفهرس	01
	مقدمة	03
	البطاقة التّقنيّة	04
المحور الأول: نظرية المعاينة		
I.	مفاهيم حول توزيع المعاينة	07
II.	نظرية النهاية المركزية	18
III.	توزيع المعاينة للمتوسطات	19
IV.	توزيع المعاينة للفروق والمجاميع	26
V.	توزيع المعاينة للنسبة والفرق بين نسبتي	32
VI.	توزيع المعاينة للتباين	35
VII.	توزيع المعاينة لنسبة تباين عینتين	36
VIII.	السلسلة رقم 01 مع الحل	38
المحور الثاني: نظرية التقدير		
I.	مفاهيم أساسية حول التقدير الاحصائي	48
II.	فترة الثقة للمتوسطات	50
III.	فترة الثقة للفروق والمجاميع	55
IV.	فترة الثقة للنسبة والفرق بين نسبتي	59
V.	مجال الثقة للتباين المجتمع	63

مقياس إحصاء 04

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

64	مجال الثقة لنسبة تباين مجتمعين	.VI
66	السلسلة رقم 02 مع الحل	.VII
المحور الثالث: اختبار الفرضيات		
76	مفاهيم أساسية حول اختبار الفروض الاحصائية	.I
80	اختبار الفروض للمتوسطات	.II
84	اختبار الفروض للفرق بين متوسطين	.III
85	اختبار الفروض للنسبة والفرق بين نسبتي	.IV
90	اختبار الفروض لتباين المجتمع	.V
92	اختبار الفروض لنسبة تباين مجتمعين	.VI
96	السلسلة رقم 03 مع الحل	.VII
106	قائمة المراجع	

مقدمة

يعتبر علم الإحصاء من العلوم الفنية سواء من حيث تطبيقاته في مختلف شعبه وفروعه، أو من حيث علاقاته المتعددة مع غيره من العلوم. ويعتبر علم الإحصاء علما تطبيقيا يستخدم بشكل مباشر أو غير مباشر في أغلب العلوم التجريبية، ويعتبر علم الاقتصاد والإحصاء من أهم المجالات التي تستفيد من علم الإحصاء، ويستخدمه علماء الاقتصاد وعلم الاجتماع في دراسة خصائص من أكثر المستفيدين من أكثر التخصصات في علم الإحصاء. حيث يلعب التحليل الإحصائي دورا هاما في الوصول إلى الاستنتاجات والاستدلالات من البيانات المتاحة بعد معالجتها بشكل علمي يساعد في اتخاذ القرارات. ويتم ذلك من خلال استخدام طرق الاستدلال الإحصائي (الإحصاء التطبيقي)، والذي يعد أحد فروع علم الإحصاء، وهو من أهم أدوات اتخاذ القرارات في مجالات مثل الاقتصاد أو علم الاجتماع.

تتضمن هذه المطبوعة دروس وأمثلة وتمارين محلولة وفق البرنامج الوزاري لمقياس الإحصاء أو ما يُسمى بالإحصاء الاستدلالي (أو التطبيقي). موجهة لطلبة أقسام السنة الثانية ليسانس جميع الشعب (علوم اقتصادية، وعلوم التسيير والعلوم التجارية والعلوم المالية والمحاسبية)، وقد تم تصميم المطبوعة لتكون سهلة الفهم من خلال تبسيط المفاهيم المدعمة بأمثلة تطبيقية بعيدا عن البراهين المعقدة والمسترسلة، وذلك حتى يتسنى للطلبة استيعاب محاور المقرر الدراسي، حيث يتعلم الطلاب كيفية استخدام الأساليب الإحصائية في حل المشكلات الحياتية، مما يساعد الطلاب على تطوير المهارات اللازمة لتطبيق الإحصاء في الحياة العملية والبحث العلمي. وتم تقسيم المطبوعة إلى 03 محاور أساسية:

- المحور الأول: نظرية المعاينة
- المحور الثاني: نظرية التقدير
- المحور الثالث: اختبار الفرضيات

مقياس إحصاء 04

وحدة التعليم: وحدة تعليم المنهجية

المادة: إحصاء 04

المعامل: 03

الرصيد: 05

أهداف التعليم: يمكن حصر أهم الأهداف فيما يلي:

- التعرف على مختلف المفاهيم الأساسية للمقياس، القدرة على توظيف الأساليب الإحصائية المناسبة لاستدلال الإحصائي؛
 - تمكين الطالب من فهم آلية الانتقال من العينة إلى المجتمع انطلاقا من التقدير النقطي ثم التقدير بالمجال وصولا إلى اختبار الفرضيات، وهذا المقياس جد مهم نظرا لارتباطه بالدراسات الاستطلاعية والمسحية؛
 - استيعاب المفاهيم الرياضية والإحصائية المتعلقة بالعينة والمجتمع وأهم الخصائص؛
 - فهم أهم النظريات الاحتمالية والرياضية للمعينة ومنتاليات المتغيرات العشوائية التي تعتبر بمثابة ركيزة وقاعدة يعتمد عليها الطلبة في فهم محتوى إحصاء 04؛
 - فهم التقديرات المستخرجة من العينة وخصائصها المختلفة؛
 - إكساب الطالب القدرة على تطبيق الاختبارات الإحصائية واتخاذ القرار لمختلف الظواهر؛
 - تنمية القدرة على استخدام بعض البرامج الإحصائية المستخدمة في هذا المجال.
- المعارف المسبقة المطلوبة:** الرياضيات، الإحصاء الوصفي والاحتمالات، التوزيعات الاحتمالية.
- الفئة المستهدفة:** طلبة السنة الثانية ليسانس -السداسي الرابع-.

نمط التكوين: حضوري

المدة: 67.5 س/ 15 أسبوع

نوع التقييم: 60% امتحان نهائي + 40% الاعمال الموجهة

مقياس إحصاء 04

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

محتوى المادة التعليمية					
المحور الأول				نظرية المعاينة وتوزيعاتها	
المحور الثاني				نظرية التقدير	
المحور الثالث				اختبار الفرضيات الإحصائية	
طريقة التقييم					
الوزن النسبي للتقييم			العلامة		التقييم بالنسبة المئوية
60 %	60 %	وزن المحاضرة	20/20		امتحان
14 %	40 %	وزن الأعمال الموجهة	20	7	امتحان جزئي
10 %				5	أعمال موجهة (البحث : إعداد/إلقاء/تطبيقات)
-				-	أعمال تطبيقية
-				-	المشروع الفردي
-				-	الأعمال الجماعية (ضمن فريق)
-				-	خرجات ميدانية
12 %				6	المواظبة (الحضور/ الغياب)
04 %				2	عناصر أخرى (المشاركة)
تدرس المادة في شكل محاضرات وأعمال موجهة/تطبيقية و طبيعة تقييمها امتحان و مراقبة مستمرة يقاس معدل المادة بالوزن الترجيحي للمحاضرة والأعمال الموجهة:					
معدل المادة		نقطة المحاضرة * 0.6 + نقطة الأعمال الموجهة/التطبيقية * 0.4 =			
Moy.M		= (Note Ex * 0.6) + (Note Td * 0.4)			



المحور الأول: نظريّة المعاينة

أولاً: مفاهيم حول نظرية توزيع المعاينة

يعد توزيع المعاينة من المفاهيم الأساسية في الإحصاء التي تدرس كيفية توزيع القيم الملاحظة عبر مجموعة من العينات عند تكرار عملية الاختيار. يساهم توزيع المعاينة في تحليل خصائص العينة لتقدير المتوسطات والانحرافات المعيارية واختبار الفرضيات، مما يوفر إطاراً منطقياً لدراسة استقرائية للمجتمع (Hogg & Tanis, 2013). كما يساعد الباحثين في وضع الفروض بدقة والتوصل إلى استنتاجات موثوقة، ويعد أداة أساسية في تطوير فواصل الثقة وتحديد دقة التقديرات. يعزز قدرة الباحثين على تفسير التباين العشوائي في البيانات، مع مراعاة تأثير حجم العينة على دقة النتائج (DeGroot & Schervish, 2012).

1. المجتمع والعينة

1.1 المجتمع

يعرف المجتمع الإحصائي على أنه مجموعة كاملة من العناصر أو الوحدات التي تشترك في خصائص معينة، والتي يتم دراستها أو تحليلها للحصول على استنتاجات أو تقديرات حول هذه الخصائص. هذه الخصائص قد تكون بيانات قابلة للقياس مثل الطول، الوزن، أو الدخل، أو قد تكون سمات نوعية مثل الجنس أو الحالة الاجتماعية. يعتبر المجتمع هو المرجع الأساسي الذي يهدف الباحثون إلى استكشافه، ولكن في كثير من الأحيان، لا يمكن دراسة المجتمع ككل (بسبب حجمه الكبير أو صعوبة الوصول إلى جميع عناصره) (طعمة وحنوش، 2015)، ولذلك يتم أخذ عينات تمثيلية من المجتمع لإجراء الدراسات، وعادة ما يتم الرمز إلى المجتمع بالرمز (N) . ويقسم المجتمع الإحصائي إلى قسمين هما:

- **المجتمع المحدود:** هو مجموعة تحتوي على عدد محدود من العناصر. على سبيل المثال: مجموعة

الأعداد الصحيحة بين 1 و 10 هي مجموعة محدودة لأنها تحتوي على 10 عناصر فقط؛

- المجتمع غير المحدود: هو مجموعة تحتوي على عدد غير محدود من العناصر، أي لا يوجد حد لعدد العناصر التي يمكن أن تحتوي عليها. مثلاً؛ مجموعة الأعداد الطبيعية (1، 2، 3، 4، ...). هي مجموعة غير محدودة لأنها تمتد إلى ما لا نهاية.

2.1 العينة

تعد العينة أحد العناصر الأساسية في الدراسات الاقتصادية، حيث تمثل مجموعة جزئية من المجتمع الكلي التي يتم اختيارها بهدف تمثيله بشكل دقيق. وتكتسب العينة أهمية كبيرة لأنها الوسيلة التي يستند إليها الباحث في جمع البيانات وتحليلها دون الحاجة لدراسة كامل المجتمع، مما يحقق توفيراً في الوقت والجهود ويجعل البحث أكثر عملية وفعالية. كما أن اختيار العينة بطريقة صحيحة ومتأنية يعزز من جودة النتائج ويقلل من احتمالات الخطأ في التعميم على المجتمع ككل. وظيفة العينة تتمثل في تقديم صورة ممثلة لمجتمع الدراسة، بحيث تكون نتائج التحليل قابلة للتعميم بشكل موثوق. لذلك، يجب أن تتصف العينة بالتنوع والكفاءة، بحيث تتطابق مع خصائص المجتمع من حيث العمر، الجنس، المستويات الاقتصادية والاجتماعية، وغيرها من المتغيرات ذات الصلة (Wooldridge, 2016).

تكمن أهمية العينة في كونها تمثل الوسيلة الوحيدة في الكثير من الحالات لدراسة مجتمعات كبيرة يصعب الوصول إليها بشكل مباشر أو تتجاوز موارد الباحث من حيث الوقت والتكاليف. فبدلاً من استقصاء جميع أفراد المجتمع، يمكن الاعتماد على عينة ممثلة تقدم بيانات كافية للتحليل العلمي الرصين، وتساعد على بناء تصور شامل ودقيق حول الظاهرة محل الدراسة. إضافة إلى ذلك، تساهم العينة في تمكين الباحث من إجراء مناقشات مقارنة بين فئات ذات علاقة بالموضوع، الأمر الذي يدعم صياغة سياسات وأطر عمل ملائمة استناداً إلى نتائج موثوقة (UNECA, 2017).

3.1 أنواع العينات

1.3.1 العينة العشوائية:

في هذا النوع من المعاينة يكون لكل مفردة فرصة أو احتمال معلوم للظهور في العينة وكلمة "عشوائية" هنا لا تعني أنها عينة سحبت بطريقة اعتباطية بل تعني إتاحة فرصة الاختيار لجميع الوحدات أو عناصر الظاهرة المدروسة وتتطلب المعاينة العشوائية أيضا توفر إطار للمعاينة، وعلى العكس من المعاينة غير الاحتمالية فإنها تسمح بتقييم مدى دقة النتائج، حيث أنها لا تسمح فقط بتقدير معالم المجتمع وإنما بقياس الخطأ المحتمل في النتائج أيضا والذي ينتج عادة عن الدراسة الجزئية كبديل لأسلوب الحصر الشامل. 2 وتعمد هذه المعاينة على نظرية الاحتمالات سواء في اختيار مفردات العينة أو في تعميم النتائج المحصل عليها من هذه العينات على المجتمعات التي أخذت منها أو في تحديد درجة الثقة بالنتائج وحساب الأخطاء وتكون المعاينة العشوائية على أنواع عدة أهمها (بوعروري، 2022-2023):

- **العينة العشوائية البسيطة:** في هذه الطريقة، كل فرد من أفراد المجتمع له نفس الفرصة في الاختيار. على سبيل المثال، إذا كنت تدرس طلابا في جامعة، يمكن اختيار مجموعة عشوائية من الطلاب باستخدام أرقام عشوائية؛
- **العينة الطبقية:** في هذه الطريقة، يتم تقسيم المجتمع إلى طبقات (مثل الفئات العمرية أو الجغرافية) ومن ثم يتم اختيار عينات عشوائية من كل طبقة.
- **العينة العنقودية:** يتم تقسيم المجتمع إلى مجموعات، ثم يتم اختيار بعض المجموعات عشوائيا ودراستها بشكل كامل.
- **العينة المنتظمة:** تختار العينة بناءً على نمط معين، مثل اختيار كل عضو ثالث أو خامس في القائمة.

2.3.1 العينة غير العشوائية:

هي الطريقة التي لا تتبع مبدأ تكافؤ الفرص في اختيار مفردات العينة، حيث لا يُعطى لكل مفردة في المجتمع احتمال ثابت ومحدد للاختيار، بل يُؤثر في اختيارها تدخل الباحث الشخصي بناءً على اعتبارات معينة تتعلق بطبيعة المشكلة المدروسة. يتم استخدام المعاينة غير العشوائية في حالات مثل إجراء الاختبارات القبلية لتعديل الأسئلة قبل البدء في المعاينة الرئيسية. وتعتبر النتائج المستخلصة من هذه المعاينة تقريبية وأقل دقة مقارنة بتلك التي يتم الحصول عليها باستخدام المعاينة العشوائية (العلام، 2023-2024). من أبرز أنواع المعاينة غير العشوائية:

- **العينة العمدية أو المقصودة:** تم اللجوء إليها عندما يكون المجتمع كبيراً جداً ولا تتوفر الإمكانات لدراسة عينة كبيرة. في هذه الحالة، يختار الباحث مفردات معينة بناءً على خبرته السابقة معتقداً أنها ستعطي تمثيلاً مقبولاً للمجتمع المدروس. هذه الطريقة غالباً ما تستخدم في البحوث التمهيدية لكنها ليست عملية (طعمة وحنوش، 2015)؛
- **العينة الملائمة (المناسبة):** يتم اللجوء لمثل هذه العينات في حالة وجود ظروف معينة: مثل قربها من مكان عمل الباحث أو سكنه، أو سهولة الوصول أو الحصول عليها، ومن سلبيات الطريقة عدم كون العينة ممثلة للمجتمع بصورة واضحة (أبو عقيل، 2012)؛
- **المعاينة الحصصية:** تعتبر من أكثر أنواع المعاينة غير العشوائية شيوعاً. تقوم على اختيار خصائص معينة للمجتمع ترتبط بموضوع البحث وتسمى "متغيرات المراقبة" مثل السن، المهنة، الحالة الاجتماعية، وغيرها. تستخدم هذه الطريقة كثيراً في استطلاعات الرأي العام في المجتمعات غير المتجانسة، أو في الحالات التي يصعب فيها توفير إطار المعاينة أو عندما تتطلب الدراسة السرية. سميت "حصصية" لأن المجتمع يقسم إلى فئات بناءً على صفاتها الرئيسية، وتمثل كل فئة نسبة وجودها في المجتمع. الفرق بين المعاينة الحصصية والمعاينة العشوائية الطبقية هو أن اختيار

مفردات العينة في المعاينة الطبقية يتم بشكل عشوائي، بينما لا يكون هناك حد لمفردات المجتمع في المعاينة الحصصية (بوعروري، 2022-2023).

❖ وعلى العموم فعلى الباحث أن يتوخى الحذر في تفسيره لنتائج العينة عند اللجوء إلى أساليب المعاينة غير العشوائية، كما ينبغي عليه تبرير أسباب اختياره لأي منها. ولا شك في أن نتائج الدراسة المتوصل إليها وفق طرق العينات العشوائية تكون هي الأكثر مصداقية في مختلف الدراسات الإحصائية لخلوها من عنصر التحيز (سمواك، 2019-2020).

4.1 تحديد حجم العينة:

قبل الشروع في عملية اختيار العينة، يحتاج الباحث إلى تحديد حجم العينة المناسب حتى تزوده بالبيانات والمعلومات التي يعتمد عليها في تعميم النتائج على المجتمع كله. هناك اتجاهان لتحديد حجم العينة وهما (التل و آخرون، 2007):

- **الاتجاه الأول:** وفقاً لهذا الاتجاه، يمكن للباحث أن يعتمد على خبرته العلمية في تحديد حجم العينة المطلوب، أو يسترشد برأي وخبرة الآخرين. يناسب هذا الأسلوب الباحثين الذين يفضلون عدم استخدام الأساليب الرياضية في اختيار العينة. في الدراسات المسحية، يكون من المناسب اختيار 20% من أفراد المجتمع الكلي إذا كان عدد أفراد المجتمع يتراوح بين 200 و 1000، وتتناقص هذه النسبة كلما زاد حجم المجتمع الأصلي لتصل إلى حوالي 5%. وفي الدراسات التجريبية ذات المعالجة الواحدة (متغير مستقل واحد)، يكون حجم العينة مناسباً إذا تجاوز عدد أفرادها 30 فرداً لكل مستوى من مستويات المعالجة. أما في الدراسات التجريبية التي تشمل معالجتين أو أكثر، فينصح بأن لا يقل عدد أفراد الخلية الواحدة في التصميم الإحصائي عن خمسة أفراد.

- **الاتجاه الثاني:** هذا الاتجاه يأخذ بعين الاعتبار بعض القواعد الاحتمالية لتحديد حجم العينة، مثل احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول واحتمال حدوث الخطأ من النوع الثاني، بالإضافة إلى

المحور الأول: نظرية المعاينة

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

بعض الأمور الأخرى المرتبطة بالتكلفة وبعض المقاييس الإحصائية. ومن أهم المبادئ التي يجب

مراعاتها عند تحديد حجم العينة ما يلي (بوعروري، 2022-2023):

- تحديد الهدف من اختيار العينة، وبناءً على هذا الهدف تعطى حدود الخطأ المسموح به، ونوع القرار المتوقع اتخاذه بناءً على البيانات التي ستوفرها العينة؛
- إعطاء علاقة تربط بين حجم العينة المطلوب ومدى الدقة المطلوبة من العينة (حدود الخطأ المسموح به)؛
- في بعض الحالات، مثل العينة الطبقية، تحتاج إلى تقدير حجم العينة في كل طبقة، وبالتالي يكون حجم العينة الكلي هو مجموع الأحجام الجزئية؛
- يجب ربط حجم العينة مع التكلفة المتاحة للدراسة والزمن، وما شابه ذلك من عوامل قد تؤثر في حجم المجتمع؛
- معرفة حجم المجتمع الأصلي مسبقاً، وإن لم يكن هذا الحجم معروفاً، فيمكن تقديره بإجراءات إحصائية معينة.

❖ يعتبر التباين بين أفراد المجتمع من العوامل الرئيسية في تحديد حجم العينة، حيث أن التباين الكبير بين مفردات المجتمع يتطلب زيادة حجم العينة لتحقيق تمثيل دقيق للمجتمع. فعند وجود تباين واسع بين الأفراد، يزداد الحاجة إلى عينة كبيرة لضمان أن النتائج تكون قريبة من الحقيقة العامة للمجتمع. وبالمقابل، في حالة المجتمعات ذات التباين المنخفض أو المتجانسة، يمكن الحصول على نتائج دقيقة من خلال عينة أصغر، حيث لا تتطلب الفروق بين الأفراد في هذه الحالة عينة كبيرة لدراسة المجتمع بفعالية (Sayer, 2010).

❖ من جهة أخرى، يعتمد الخطأ المعياري للمعاينة على حجم العينة؛ إذ كلما زاد حجم العينة، قل الخطأ المعياري، مما يؤدي إلى نتائج أكثر دقة. في حين أن تقليص حجم العينة يزيد من الخطأ المعياري،

مما يقلل دقة النتائج المستخلصة. وبالتالي، يعتمد تحديد حجم العينة بشكل أساسي على مستوى التباين في المجتمع، فكلما كان التباين أكبر، كانت الحاجة إلى عينة أكبر لضمان صحة النتائج (Sayer, 2010).

2. معالم المجتمع

- **المتوسط الحسابي:** يعد المتوسط الحسابي من أهم مقاييس النزعة المركزية وأكثرها استخداما في وصف البيانات أو التوزيعات التكرارية المتجانسة لما يمتاز به من خصائص جيدة وهو مجموع القيم الخاصة بظاهرة معينة مقسوما على عددها (رشيد، 2007)؛
 - **الانحراف المعياري:** يعتبر الانحراف المعياري من أهم مقاييس التشتت وأدقها، ويعرف بأنه الجذر التربيعي لمعدل مجموع مربعات انحرافات القيم عن متوسطها، يتأثر بالقيم المتطرفة (الشاذة) بصورة غير مباشرة، وهو درجة تشتت القيم عن متوسطها أو مقدار بعد المشاهدات عن المتوسط الحسابي في حالة القيم المطلقة أو المبوبة، أي هو عبارة عن مقدار تشتت القيم عن وسطها الحسابي مقاسا بوحدات المتغير نفسه (المنيزل و غرايبة، 2010)؛
 - **التوزيع:** يشير التوزيع إلى الطريقة التي تتوزع بها البيانات عبر مختلف القيم أو الفئات. إذ يعكس التوزيع شكل البيانات، ويمكن أن يكون طبيعيا إذا كانت البيانات موزعة بشكل متماثل حول المتوسط، حيث تتكون معظم القيم من حوله مع تراجع تدريجي في عدد القيم بعيدا عنه. قد يكون التوزيع أيضا مائلا إذا كانت البيانات موجهة إلى جانب واحد من المتوسط، أي أن هناك تكدسا للقيم في أحد الأطراف مع وجود ذيل طويل في الاتجاه الآخر. في حالة التوزيع المتباين، تكون البيانات منتشرة على نطاق واسع حول المتوسط، مما يدل على تباين كبير بين القيم في المجتمع بسبب القيم
- الحرجة (Triola, 2018) ؛

- المتوسط الحسابي للعينة: يُستخدم المتوسط الحسابي للعينة كمؤشر لتمثيل المتوسط في المجتمع بناءً على مجموعة من البيانات المأخوذة من العينة. يُحسب المتوسط الحسابي بجمع قيم العينة وقسمة الناتج على عدد الأفراد في العينة. يُعد المتوسط الحسابي أداة تقديرية تُستخدم عندما لا يكون من الممكن قياس أو جمع بيانات عن جميع أفراد المجتمع. رغم أنه تقدير مفيد للمتوسط العام، إلا أنه يتأثر بالقيم المتطرفة (المنحرفة)، حيث قد يؤدي وجود قيم شاذة إلى تحريفه عن القيمة الحقيقية المتوقعة في المجتمع (Field, 2013).

3. تعريف المعاينة

المعاينة هي عملية تهدف إلى تقدير المعالم الرئيسية للمجتمع بناءً على البيانات التي تم جمعها من عينة تمثل هذا المجتمع مع الاحتفاظ بدقة عالية في تقدير خصائص المجتمع. أي أن العينة يجب أن تعكس خصائص المجتمع الأصلي بشكل دقيق. الهدف من ذلك هو تقليل الأخطاء المحتملة في التقدير إلى أدنى حد ممكن. ويرتبط مدى تمثيل العينة للمجتمع بعوامل متعددة، تشمل حجم العينة، التباين الموجود في المجتمع، بالإضافة إلى الطريقة المتبعة في اختيار العينة (تمار، 2020-2021).

4. توزيع المعاينة

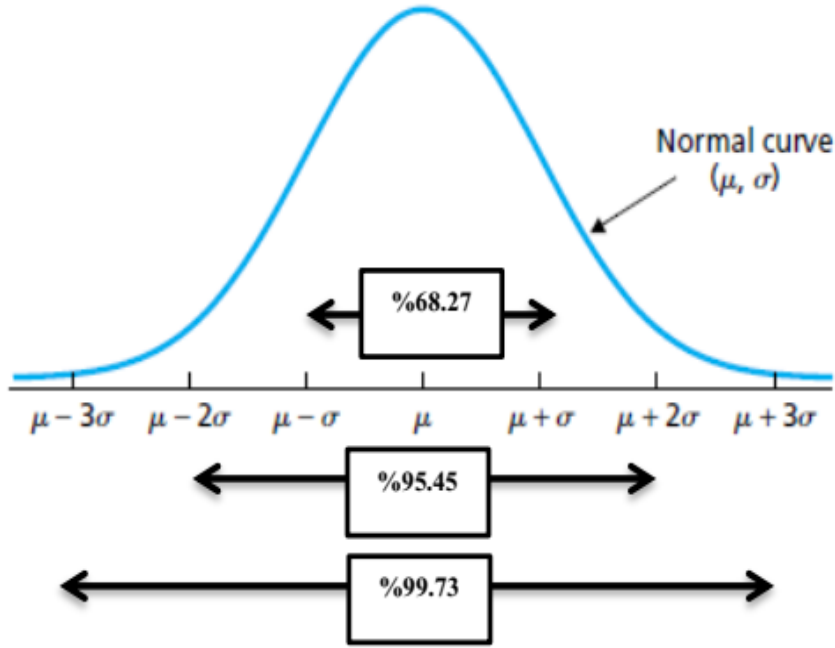
توزيع المعاينة هو التوزيع الاحتمالي لجميع القيم الممكنة لإحصائية العينة (مثل المتوسط الحسابي أو الانحراف المعياري) التي يتم استخراجها من عينات مكررة من نفس المجتمع. ويعبر عن كيفية توزيع النتائج التي يمكن الحصول عليها إذا قمنا بإجراء عدة دراسات باستخدام عينات مختلفة من نفس الحجم (n) (سمواك، 2019-2020). يمثل هذا التوزيع القيم المحسوبة للمقاييس الإحصائية، مثل المتوسطات أو التباين، عبر العينات العشوائية المتعددة التي يمكن سحبها من المجتمع قيد الدراسة، وبالتالي فهو توزيع احتمالي لكل القيم الممكنة لإحصاء معين في كل العينات العشوائية المتاحة (Field, 2013). وفيما يلي بعض التوزيعات الاحتمالية المتصلة الأكثر استخداماً في الإحصاء الاستدلالي وهي:

1.4 التوزيع الطبيعي:

- يعرف التوزيع الطبيعي أيضا بتوزيع غوص، ويعتبر من أكثر التوزيعات الاحتمالية أهمية واستخداما، حيث تشتق منه العديد من التوزيعات أو يمكن أن تتحول إليه (Weiss, 2012). وتعود أهمية التوزيع الطبيعي إلى أربع اعتبارات مهمة هي (الديب و حزين، 2018-2019):
- معظم الظواهر الطبيعية تتبع في توزيعها التوزيع الطبيعي أو تكون قريبة جدا منه، حيث تتركز قياساتها عند قيمتها الوسطى وتبتعد عن هذه القيمة في الاتجاهين؛
 - معظم القياسات التي تتم من خلال العينة: كالوسط الحسابي والانحراف المعياري، والنسبة. لها توزيعات احتمالية تكون مقاربة للتوزيع الطبيعي ويزداد هذا التقارب كلما زاد حجم العينة؛
 - إمكانية تحويل توزيعات كثيرة إلى التوزيع الطبيعي، ولكن وفق شروط معينة تتعلق بحجم العينة وقيمة الاحتمال وطبيعة التوزيع الاحتمالي للمجتمع؛
 - معظم الاختبارات المستخدمة في الاستنتاج الإحصائي مبنية على كون المتغير يتوزع توزيعا طبيعيا. يستخدم التوزيع الطبيعي كثيرا في مجال العينات ويتصف بالخصائص التالية:
 - يعتمد التوزيع الطبيعي على معلمتين هما متوسط المجتمع μ والانحراف المعياري σ وكان x متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي. فإننا نكتب (OpenStax College, 2013): $x \rightarrow N(\mu; \sigma)$
 - المتغير العشوائي المتصل x يأخذ قيما في المجال $[-\infty, +\infty]$ (بوعروري، 2022-2023).
 - يأخذ منحنى التوزيع الطبيعي شكل الجرس، كما انه متناظر، ويكون محور تناظره هو المتوسط μ ، مثلما هو موضح في الشكل الموالي (عبدلي، 2023-2024):

المحور الأول: نظرية المعاينة

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

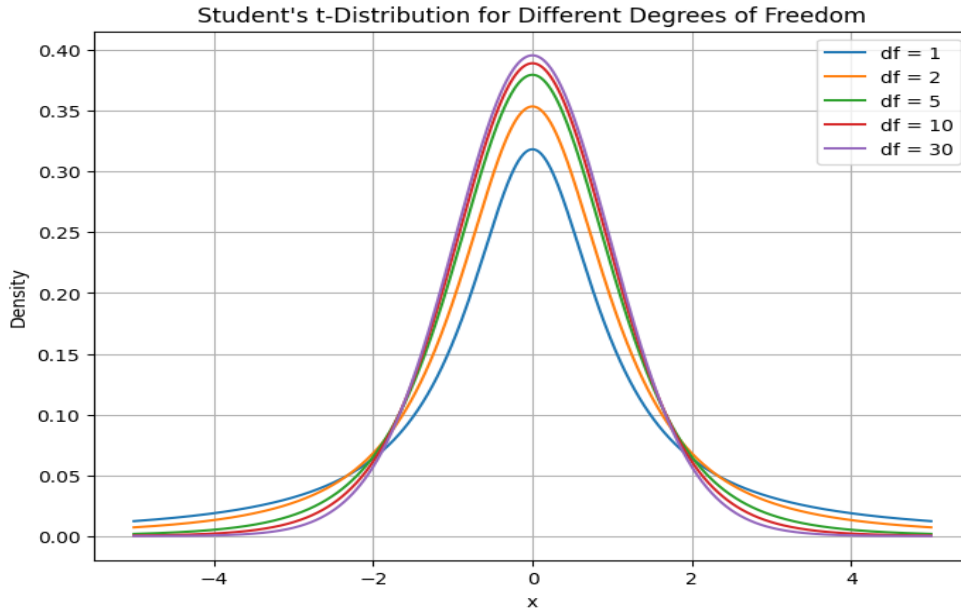


- إذا كان x متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي وكان: $x \rightarrow N(0; 1)$ فإننا ننتقل الى التوزيع

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad \text{الطبيعي المعياري، حيث:}$$

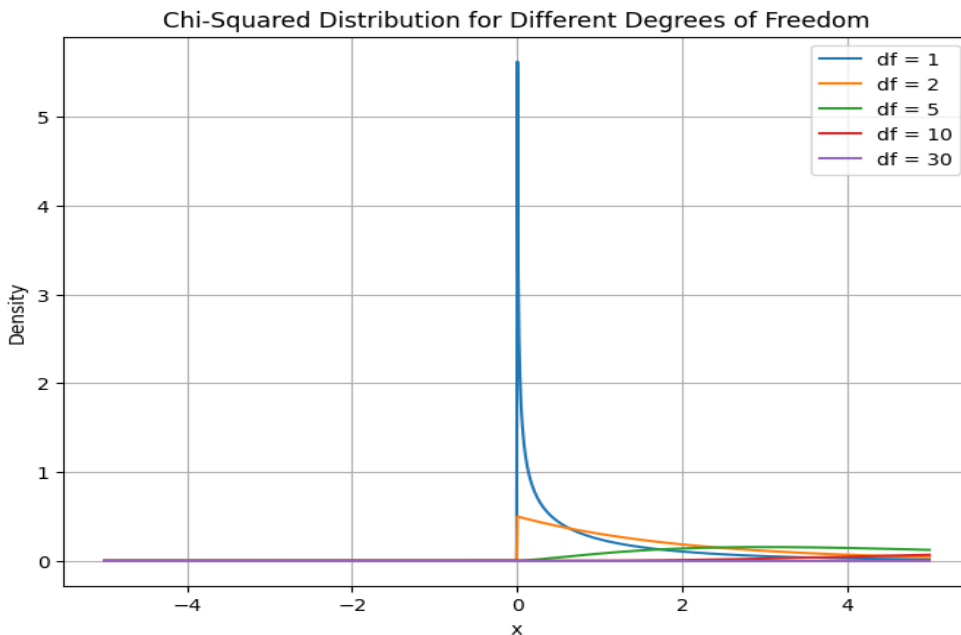
2.4 توزيع ستودنت:

يعد توزيع ستودنت أحد التوزيعات الاحتمالية المتصلة، ويشبه إلى حد كبير التوزيع الطبيعي. وتكمن تطبيقاته (في ظل شروط معينة) بكثرة في تقدير متوسط المجتمع بناء على عينة عشوائية، أو المقارنة بين متوسطي مجتمعين بناء على متوسطي عينيتين مسحوبتين من هذين المجتمعين، كما يستخدم في اختبار الفرضيات (عبدلي، 2023-2024)، حيث يستخدم كبديل للتوزيع الطبيعي في حال كان حجم العينة صغيرا. يتميز هذا التوزيع بأنه أكثر تفرطاً مقارنة بالتوزيع الطبيعي، ويقترّب منه تدريجياً كلما ارتفعت درجة الحرية ($n-1$). كما أن توزيع ستودنت متناظر حول الصفر ويشبه التوزيع الطبيعي المعياري، لكنه أكثر تشبهاً منه. ومع ذلك، يقترب من التوزيع الطبيعي كلما زادت قيمة n . بشكل عام، يعتبر الإحصائيون أن المنحنيات تتطابق تقريباً عند $n \geq 30$. والشكل الموالي يوضح أشكال منحني توزيع ستودنت عند درجات حرية مختلفة (بوعروري، 2022-2023):



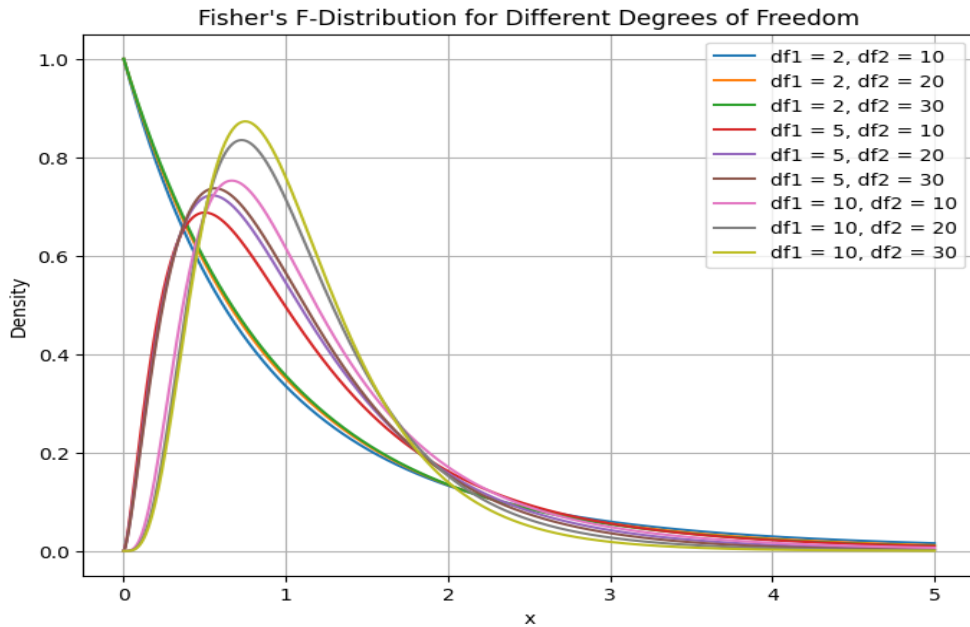
3.4 توزيع كاي تربيع:

يعد توزيع كاي تربيع توزيعاً مستمراً غير متناظر، حيث يكون ملتوياً نحو اليمين. يأخذ المنحنى التكراري لهذا التوزيع أشكالاً مختلفة حسب قيمة درجة الحرية n . وكلما زادت درجة الحرية قل الالتواء ويبدأ توزيع كاي تربيع في الاقتراب من التوزيع الطبيعي (Moore et al., 2012). من المهم أن نلاحظ أن توزيع كاي تربيع هو توزيع موجب، أي أن قيمه تكون دائماً أكبر من أو تساوي صفراً، أي $x \in [0, +\infty[$. والشكل الموالي يوضح الأشكال التي يأخذها توزيع كاي تربيع (بوعروري، 2022-2023):



3.4 توزيع فيشر:

توزيع فيشر توزيع احتمالي مستمر يستخدم بشكل رئيسي في اختبار الفرضيات، وخاصة في اختبار تحليل التباين (ANOVA) واختبار فحص التباين بين مجموعات. يعتبر توزيع فيشر توزيعا غير متناظر ويأخذ شكلا يعتمد على عدد درجات الحرية للمجموعات التي تتم مقارنتها n_1, n_2 ، وكلما زادت هذه القيم كلما اقترب توزيع فيشر من التوزيع الطبيعي (بوعروري، 2022-2023). والشكل الموالي يوضح الأشكال التي يأخذها توزيع فيشر (عبدلي، 2023-2024):



ثانيا: نظرية النهاية المركزية

نظرية النهاية المركزية هي نظرية إحصائية تصف كيف يتصرف التوزيع في العينات المأخوذة من أي توزيع احتمالي عندما يكون حجم العينة كبيرا. تنص النظرية على أنه بغض النظر عن شكل التوزيع الأصلي (سواء كان توزيعا طبيعيا أو غير طبيعي)، فإن التوزيع الناتج لمتوسطات العينات سيكون قريبا من التوزيع الطبيعي كلما كان حجم العينة كبيرا ($n \geq 30$). وبشرط وجود μ و σ^2 . و

$$\mu_{\bar{x}} = \mu / \delta_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n} \quad (\text{Wackerly et al., 2008})$$

تعد نظرية النهاية المركزية ذات أهمية كبيرة في مجالات الإحصاء والبحث العلمي. فهي تستخدم في اختبارات الفرضيات حيث تضمن تقريب المتوسطات للتوزيع الطبيعي، مما يسمح باستخدام اختبارات الفرضيات المعتمدة على التوزيع الطبيعي حتى عندما يكون التوزيع الأصلي غير طبيعي (Montgomery & Runger, 2018). كما توفر هذه النظرية أداة للمحللين والممارسين لتطبيق أدوات إحصائية معتمدة على التوزيع الطبيعي على العينات الكبيرة من أي نوع من البيانات، مما يمكنهم من استنتاج نتائج دقيقة حول المجتمع. وتعتبر هذه النظرية أساسية في البحث العلمي في مجالات متعددة مثل الطب، الاقتصاد، والهندسة، لأنها تتيح استخلاص استنتاجات دقيقة حول المجتمعات بناء على عينات صغيرة، مما يعزز دقة القرارات والتوقعات في الدراسات العلمية (Triola, 2018).

ثالثا: توزيع المعاينة للمتوسطات

نفترض أن لدينا مجتمعا مكونا من المفردات هي: $X_1, X_2, X_3, \dots$ ، ولنفترض أننا سحبنا من هذا المجتمع عينة حجمها n وسطها الحسابي $\bar{x}_1$ ثم سحبنا عينة أخرى بنفس الحجم وسطها الحسابي $\bar{x}_2$ ، ثم عينة ثالثة لها نفس الحجم وسطها الحسابي $\bar{x}_3$ وهكذا بالنسبة لكل العينات التي حجمها n والتي يمكن سحبها من هذا المجتمع. سنجد في النهاية أننا سنحصل على مجموعة جديدة من المفردات هي المتوسطات الحسابية لهذه العينات وهي تكون مجتمعا جديدا يسمى مجتمع المتوسطات الحسابية للعينات التي حجمها n والتي يمكن سحبها من المجتمع الأصلي ويمكن كتابة مفردات المجتمع الجديد على النحو التالي: $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \dots$ (حميدان وآخرون، 2006) وتوجد حالتين لتوزيع المعاينة للمتوسطات هما:

- حالة تباين المجتمع معلوم؛
- حالة تباين المجتمع غير معلوم.

1.3 توزيع المعاينة للمتوسطات في حالة تباين المجتمع معلوم:

يتم حساب متوسط وتباين توزيع المعاينة للمتوسطات وفق ما يلي (Moore et al., 2014):

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n}{N} = \mu$$

$$V(\bar{x}) = \sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

في حالة السحب دون ارجاع من مجتمع محدود حجمه N فان تباين توزيع المعاينة للمتوسطات يحسب

بالعلاقة التالية:

$$V(\bar{x}) = \sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

يسمى: $\frac{N-n}{N-1}$ معامل الإرجاع أو معامل الشمولية أو معامل التصحيح ويظهر دوما في علاقة التباين

لتوزيع المعاينة لأي إحصائية إذا تم السحب بدون إرجاع من مجتمع محدود، وعمليا يهمل هذا المعامل

إذا كان حجم المجتمع كبير جدا أمام حجم العينة (2023-2024). وللتفريق بين حالة السحب

بالإرجاع وبدون ارجاع يتم استعمال معامل ارجاع الانحراف المعياري (ويسمى أيضا معامل الاستقصاء)

كالتالي (تمار، 2020-2021):

$$\frac{n}{N} > 0.05 \text{ معناه السحب بدون ارجاع؛}$$

$$\frac{n}{N} < 0.05 \text{ معناه السحب بالإرجاع.}$$

إذا فرضنا أنه سحبت عينة حجمها $n \geq 30$ من مجتمع حجمه N بطريقة السحب بالإرجاع أو

بطريقة السحب بدون إرجاع و $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن توزيع المعاينة للمتوسطات يمكن إعطاؤه من خلال

الجدول رقم 1 حيث نرمز بـ:

المحور الأول: نظرية المعاينة

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

- $\mu_{\bar{x}}$ للوسط الحسابي لتوزيع المعاينة؛

- $\sigma_{\bar{x}}^2$ لتباين توزيع المعاينة؛

- $\sigma_{\bar{x}}$ للانحراف المعياري لتوزيع المعاينة.

جدول 01: توزيع المعاينة للمتوسطات التباين معلوم و $n \geq 30$

توزيع المعاينة للتباين وللانحراف المعياري	توزيع المعاينة للوسط الحسابي	
$\delta_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$	$\mu_{\bar{x}} = \mu$	حالة السحب بالإرجاع (عينة غير نفادية)
$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$		
$\delta_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$	$\mu_{\bar{x}} = \mu$	حالة السحب بدون إرجاع (عينة نفادية)
$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$		

المصدر: (معتوق، 2015). بتصرف

ملاحظة:

يتم حساب الاحتمالات للمتغير العشوائي $\bar{X}$ من خلال العلاقة التالية:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

مثال 1: عينة عشوائية $n = 20$ سحبت بالإرجاع من مجتمع متوسطه 100 وتباينه 20. أوجد ما يلي:

- المتوسط الحسابي للمعاينة؛

- تباين توزيع المعاينة؛

- الانحراف المعياري للمعاينة.

الحل:

$$\begin{aligned} - \mu_{\bar{x}} &= \mu = 100 \\ - \delta_{\bar{x}}^2 &= \frac{\sigma^2}{n} = \frac{20}{20} = 1 \\ - \sigma_{\bar{x}} &= \sqrt{\delta_{\bar{x}}^2} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

مثال 2: سحبنا عينة عشوائية من مجتمع حجمه $N = 900$ متوسطه 20 وانحرافه المعياري 12.

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة لوسط عينة حجمها 64.

الحل:

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{x}} &= \mu = 20 \\ \frac{n}{N} &= \frac{64}{900} = 0.07 > 0.05 \end{aligned}$$

لحساب الانحراف المعياري نطبق قانون السحب بدون إرجاع:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} = \frac{12}{\sqrt{64}} \sqrt{\left(\frac{900-64}{900-1}\right)} = \frac{12}{8} \sqrt{\frac{836}{899}} = (1.5)(0.96) = 1.44$$

مثال 3: بافتراض أن x متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي يعبر عن الوقت بين إرسال الرسائل

النصية من هاتفك المحمول بمتوسط حسابي $\mu = 15$ وانحراف معياري $\sigma = 15$ ، تم تسجيل 50

رسالة نصية. أحسب $P(\bar{X} > 17)$

الحل:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 15 \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{50}} = 2.12$$

$$x \sim (15, 15) \rightarrow \bar{x} \sim \left(15, \frac{15}{\sqrt{50}}\right)$$

$$P(\bar{X} > 17) = p\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{17 - 15}{2.12}\right) = p(z > 0.94) = 1 - p(z < 0.94)$$

$$P(\bar{X} > 17) = 1 - 0.8264 = 0.1736 \approx 17.36\%$$

2.3 توزيع المعاينة للمتوسطات في حالة المجتمع غير طبيعي:

إذا كان لدينا مجتمع وسطه μ وتباينه معلوم σ^2 ، وأخذت منه جميع العينات العشوائية ذات الحجم n ، فما هو توزيع الوسط الحسابي $\bar{X}$ لهذه العينات حتى لم يكن توزيع المجتمع التوزيع الطبيعي؟ (بلعدي، 2020-2021). في هذه الحالة وإذا كانت حجم العينة كبيراً بما يكفي $n \geq 30$ فيمكننا تطبيق خاصية النهاية المركزية، والتي تنص على أن كل التوزيعات الاحتمالية وفي ظل توفر الشروط تتجه إلى التوزيع الطبيعي (OpenStax College, 2013).

مثال 4: مدة لعب مباراة كرة قدم واحدة لمجموعة من الأشخاص الذين تزيد أعمارهم عن 40 عاماً، مقاسة بالساعات، بمتوسط ساعتين وانحراف معياري قدره 0.5 ساعة. تم سحب عينة عشوائية من هذا المجتمع الإحصائي بحجم $n = 36$. أوجد احتمال أن يكون متوسط العينة بين 1.8 و 2.3 ساعة.

الحل:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 2 \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.5}{\sqrt{36}} = 0.083$$

$$x \sim (2, 0.5) \rightarrow \bar{x} \sim \left(2, \frac{0.5}{\sqrt{36}}\right)$$

$$\begin{aligned} P(1.8 < \bar{X} < 2.3) &= p\left(\frac{1.8 - 2}{0.083} < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{2.3 - 2}{0.083}\right) \\ &= p(-2.41 < z < 3.61) = p(z < 3.61) - p(z < -2.41) \\ &= p(-2.41 < z < 3.61) = p(z < 3.61) - 1 + p(z < 2.41) \\ &= 0.9990 - 1 + 0.9920 = 0.991 \rightarrow P(1.8 < \bar{X} < 2.3) \approx 99.1\% \end{aligned}$$

3.3 توزيع المعاينة للمتوسطات في حالة تباين المجتمع غير معلوم:

في هذه الحالة نقدر تباين المجتمع بتباين العينة المسحوبة منه ونفرض هنا بين حالتين:

- حالة تباين المجتمع غير معلوم و $n \geq 30$
- حالة تباين المجتمع غير معلوم و $n < 30$

1.3.3. حالة تباين المجتمع مجهول و $n \geq 30$

يكون توزيع الوسط الحسابي للعينة هو (إياد، 2017):

$$\bar{x} \sim N\left(\mu; \frac{S^2}{n}\right) \text{ - حالة السحب بالإرجاع:}$$

$$\bar{x} \sim N\left(\mu; \frac{S^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right) \text{ - حالة السحب بدون إرجاع:}$$

S^2 يمثل تباين العينة ويعطى بالعلاقة التالية (Berard & Geneviève, 2008):

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

ويحسب التوزيع المعياري كما يلي:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

مثال 5: اشترى فلاح 125 صندوق نحل (تم اختيار الصناديق بشكل عشوائي) من إحدى المستثمرات لتربية النحل علما أن وزن العسل الذي ينتجه الصندوق الواحد في هذه المستثمرة يتوزع توزيع طبيعي بمتوسط قدره 35 كلغ، ما احتمال ألا يتجاوز متوسط وزن العسل الذي ينتجه الصندوق الواحد في هذه العينة 36 كلغ، مع العلم أن تباين العينة 25 كلغ؟

الحل:

لدينا تباين المجتمع مجهول و $n \geq 30$ فإن توزيع المعاينة لمتوسط العينة يتوزع توزيعا طبيعيا، أي:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu; \frac{S^2}{n}\right) = N\left(35, \frac{25}{125}\right)$$

$$P(\bar{X} < 36) = P\left(z < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right) = P\left(z < \frac{36 - 35}{5 / \sqrt{125}}\right)$$

$$= P(z < 2.22) = 9868$$

$$P(\bar{X} < 36) \approx 98.68\%$$

2.2.3. حالة تباين المجتمع غير معلوم و $n < 30$

في الكثير من التطبيقات المتعلقة باستعمال الوسط الحسابي $\bar{X}$ ، نجد أن الانحراف المعياري للمجتمع لا يكون معلوماً، وبالتالي يكون المتغير z دالة في مؤشر غير معلوم، ومن ثم لا يمكن تحديد قيمته، ولمعالجة هذه المشكلة نقوم باستبدال σ بالتقدير S . وبالتالي نحصل على الإحصاء T ، حيث (قريشي، 2024-2025):

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

ويكون T خاضع لتوزيع ستيودنت على درجات حرية $(v = n - 1)$

مثال 6: إذا علمت أن أطوال الطلبة في قسم السنة الثانية ليسانس علوم اقتصادية تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 160 سم، إذا سحبت عينة عشوائية من 04 طلاب فما هو احتمال أن يكون متوسطها الحسابي محصوراً بين 164 و166 سم، إذا علمت أن الانحراف المعياري للعينة يساوي 10 سم؟
الحل:

لدينا تباين المجتمع مجهول و $n < 30$ فإن توزيع المعاينة لمتوسط العينة يتبع توزيع ستيودنت، أي:

$$\bar{x} \sim t_{\alpha, v} \rightarrow T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$$P(164 < \bar{X} < 166) = P(\bar{X} < 166) - P(\bar{X} < 164)$$

$$= P\left(t < \frac{166-160}{\frac{10}{\sqrt{4}}}\right) - P\left(t < \frac{164-160}{\frac{10}{\sqrt{4}}}\right)$$

$$= P(t < 1.2) - P(t < 0.8) = 0.0861$$

$$P(164 < \bar{X} < 166) \approx 8.61\%$$

جدول 02: توزيع المعاينة للمتوسطات حسب طبيعة توزيع المجتمع، معلومية التباين وحجم العينة

نوع التوزيع	$\sigma_{\bar{x}}$	n	تباين المجتمع	قانون المجتمع
$\bar{x} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	غير مهم	معلوم	طبيعي
$\bar{x} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$\frac{S}{\sqrt{n}}$	$n \geq 30$	غير معلوم	
$\bar{x} \sim t_{\alpha, v}$	$\frac{S}{\sqrt{n}}$	$n < 30$		
$\bar{x} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$n \geq 30$	معلوم	غير معلوم
$\bar{x} \sim N\left(\mu; \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$	$\frac{S}{\sqrt{n}}$	$n \geq 30$	غير معلوم	

المصدر: (خليفة، 2018-2019)

رابعاً: توزيع المعاينة للفروق والمجاميع

في حالة وجود عينتين مأخوذتين من مجتمعين مختلفين، يتم دراسة الفروق والمجاميع بين العينات باستخدام عدة توزيعات واحتمالات، تبعاً للخصائص التي نبحث عنها. يمكن تقسيم دراسة توزيع المعاينة للفروق والمجاميع إلى النقاط التالية:

1.4 الفروق والمجاميع للمتوسط الحسابي والتباين والنسبة لتوزيع المعاينة

إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة مأخوذة من توزيع متوسطه الحسابي μ_1 وانحرافه المعياري σ_1 ، أو له صفة معينة نسبتها هي p_1 وكانت $y_1, y_2, \dots, y_n$ عينة أخرى مأخوذة من توزيع آخر متوسطه الحسابي μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 ، وله صفة معينة نسبتها p_2 . فإنه يمكن الحصول على توزيع الفروق والمجاميع للأوساط الحسابية والتباينات ونسب المعاينة وفق العلاقات التالية (القاضي وآخرون، 2005):

المحور الأول: نظرية المعاينة

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

جدول 03: توزيع الفروق والمجاميع للأوساط الحسابية والتباينات ونسب المعاينة

النسبة	التباين	المتوسط الحسابي	
$\mu_{p\bar{1}-p\bar{2}} = P_1 - P_2$	$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}^2 = \sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2$	$\mu_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \mu_1 - \mu_2$	الفروق
$\mu_{p\bar{1}+p\bar{2}} = P_1 + P_2$	$\sigma_{\bar{x}_1+\bar{x}_2}^2 = \sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2$	$\mu_{\bar{x}_1+\bar{x}_2} = \mu_1 + \mu_2$	المجاميع

المصدر: (بن البار، 2020-2021)

مثال 7: لديك المعطيات التالية:

العينة الثانية	العينة الأولى	
$\mu_2 = 60$	$\mu_1 = 75$	المتوسط الحسابي
$\sigma_2^2 = 15$	$\sigma_1^2 = 25$	الانحراف المعياري
60	30	حجم العينة

أوجد الفروق والمجاميع للمتوسط الحسابي لتوزيع المعاينة للتوزيعين؟

الحل:

أولاً: بالنسبة للفروق:

$$\mu_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 75 - 60 = 15$$

$$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}^2 = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{25}{30} + \frac{15}{60}} = 1.04$$

ثانياً: بالنسبة للمجاميع:

$$\mu_{\bar{x}_1+\bar{x}_2} = \mu_1 + \mu_2 = 75 + 60 = 135$$

$$\sigma_{\bar{x}_1+\bar{x}_2}^2 = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{25}{30} + \frac{15}{60}} = 1.04$$

2.4 طبيعة توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين

1.2.4 توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين مع معلومية تباين المجتمعين:

إذا كانت العينتان المسحوبتان من مجتمعين طبيعيين (أو غير طبيعيين) وحجم كل منهما يساوي أو يفوق 30 مفردة، فإن الفرق بين متوسطي العينتين أو مجموعهما يتبع أو يقترب من التوزيع الطبيعي بفضل نظرية النهاية المركزية؛ التي تنص على أن توزيع المتوسطات لعينة كبيرة من أي مجتمع يتبع توزيعا طبيعيا تقريبا بغض النظر عن شكل توزيع المجتمع الأصلي (أبو صالح و عوض، 2004)،

حيث:

$$E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$$

$$V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \rightarrow N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) \Rightarrow \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \rightarrow N(0, 1)$$

مثال 8: إذا كانت رواتب الموظفين في الوظيفة العمومي تخضع للتوزيع الطبيعي بوسط حسابي 33000

دج وانحرافه معياري 5165 دج، ورواتب العاملين في القطاع الخاص تخضع للتوزيع الطبيعي بوسط

حسابي 25740 دج وانحراف معياري 5663 دج. أخذت عينة عشوائية من الموظفين العموميين حجمها

16، وأخذت عينة عشوائية من عمالي القطاع الخاص حجمها 10: أوجد احتمال أن يزيد الفرق بين

أجور القطاعين بمقدار 8000 دج؟

الحل:

$$P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$$

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq 8000)$$

نريد إيجاد الاحتمال التالي:

المحور الأول: نظرية المعاينة

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

$$P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \geq 8000) = P\left(z \geq \frac{8000 - (33000 - 25740)}{\sqrt{5165^2/16 + 5663^2/10}}\right) = P(z \geq 0.34)$$

$$= P(z \geq 0.34) = 1 - P(z < 0.34) = 1 - 0.6331 = 0.3669$$

$$P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \geq 8000) \approx 36.69\%$$

مثال 9: أجريت دراسة بحثية بسحب عينتين من مجتمعين مختلفين. فحصل على النتائج التالية:

العينة الأولى	العينة الثانية
$\mu_1 = 15$	$\mu_2 = 10$
$\sigma_1^2 = 6$	$\sigma_2^2 = 4.5$
50	40

أوجد احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين محصور بين 4 و 5.5؟

الحل:

نريد إيجاد الاحتمال التالي:

$$P(4 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 5.5)$$

بما أن حجم العينتين أكبر من 30 وحسب نظرية النهاية المركزية فإننا نطبق قانون التوزيع الطبيعي

(OpenStax College, 2013)، حيث:

$$P(4 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 5.5) = P\left(\frac{4 - (15 - 10)}{\sqrt{6/50 + 4.5/40}} \leq z \leq \frac{5.5 - (15 - 10)}{\sqrt{6/50 + 4.5/40}}\right)$$

$$= P(-2.07 \leq z \leq 1.04) = P(z < 1.04) - P(z < -2.07)$$

$$= P(z < 1.04) - (1 - P(z < 2.07)) = 0.8508 - 1 + 0.9808$$

$$P(4 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 5.5) = 0.8316 \approx 83.16\%$$

2.2.4 توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين مع مجهولية تباين المجتمعين:

- حالة تباين المجتمع غير معلوم و $n_1, n_2 \geq 30$

في هذه الحالة، نحتاج إلى استخدام اختبار الفرق بين المتوسطين مع فرضية أن تباين المجتمعين

مجهول. لكن ما دام حجم العينتان المسحوبتان يساوي أو يفوق 30 مفردة، فإن الفرق بين متوسطي

العينتين يتبع أو يقترب من التوزيع الطبيعي بفضل نظرية النهاية المركزية؛ أي (Montgomery &

Runger, 2018)

المحور الأول: نظرية المعاينة

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \rightarrow N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\right) \Rightarrow \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} \rightarrow N(0, 1)$$

مثال 10: مؤسستان تعملان في صيانة الآلات، تم سحب عينة عشوائية تمثل خدمات الصيانة لـ 12

يوم بمتوسط حسابي 6 خدمات يوميا، وتباين العينة 2 خدمة، أما بالنسبة للمؤسسة الثانية فقد تم سحب

عينة عشوائية لـ 10 أيام بمتوسط حسابي 9 خدمات، وتباين العينة 4 خدمات. بعد تحديد التوزيع

الاحتمالي للفرق بين المتوسطين، أحسب الاحتمال $P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 3)$ ؟

الحل:

- التوزيع الاحتمالي:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \rightarrow N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\right) \rightarrow N\left(6 - 9, \sqrt{\frac{2}{12} + \frac{4}{10}}\right) \rightarrow N(-3, 0.75)$$

- إيجاد الاحتمال التالي: $P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 3)$

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 3) = P\left(z < \frac{3 - (-3)}{0.75}\right) = P(z < 8)$$

القيمة الناتجة $z = 8$ أكبر بكثير من قيم التوزيع الطبيعي المعياري، أي الاحتمال يكون تقريبا صفرا.

- حالة تباين المجتمع غير معلوم و $n_1, n_2 < 30$ أو أحدهما

في هذه الحالة، نحتاج إلى استخدام اختبار الفرق بين المتوسطين مع فرضية أن تباين المجتمعين

مجهول. يعتمد توزيع المعاينة هنا على توزيع t بدلا من التوزيع الطبيعي.

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} \sim t(v, \frac{\alpha}{2})$$

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1 - 1)} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2 - 1)}}$$

المحور الأول: نظرية المعاينة

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

مثال 11: سحبت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n_1 = 40$. بتباين 9، وسحبت عينة

عشوائية ثانية مستقلة عن الأولى حجمها $n_2 = 15$ بتباين 16. بعد تحديد التوزيع الاحتمالي للفرق

بين المتوسطين، أحسب الاحتمال $P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 53)$ ؟ إذا علمت أن $\mu_1 = 350, \mu_2 = 300$

الحل:

- التوزيع الاحتمالي: بما أن أحد العينتين أقل من 30 ($n_2 = 15$)، فإن التوزيع الاحتمالي يتبع

توزيع t، حيث:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} \sim t(v, \frac{\alpha}{2}) = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 50}{1.14} \sim t(20)$$

$$\mu_1 - \mu_2 = 350 - 300 = 50$$

$$\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{9}{40} + \frac{16}{15}} = \sqrt{1.29} = 1.14$$

$$v = \left(\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{\left(\frac{s_1^2}{n_1} \right)^2 + \left(\frac{s_2^2}{n_2} \right)^2} \right) = \left(\frac{\left(\frac{9}{40} + \frac{16}{15} \right)^2}{\left(\frac{9}{40} \right)^2 + \left(\frac{16}{15} \right)^2} \right) \approx 20$$

- إيجاد الاحتمال التالي: $P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 53)$

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 53) = P\left(t < \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} = \frac{53 - 50}{1.14} \right)$$

$$= P(t < 2.63) \sim t(20) = 0.99$$

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < 53) \approx 99\%$$

خامسا: توزيع المعاينة النسبة والفرق بين نسبتي

1.5 توزيع المعاينة للنسبة

افترض أن لدينا مجتمعا غير محدود يتبع توزيعا ذا حدين، حيث يمثل احتمال وجود صفة معينة بالرمز $q = 1 - p$ بينما يمثل احتمال عدم وجود هذه الصفة بالرمز p على سبيل المثال، يمكن اعتبار المجتمع هو جميع رميات قطعة عملة متكاملة التوازن، حيث يكون احتمال الحصول على صورة $p = 1/2$. سنعتبر جميع العينات الممكنة ذات الحجم n المسحوبة من هذا المجتمع. وفي كل عينة، نقوم بحساب إحصاء نسبة النجاح p ، الذي يمثل نسبة عدد الصور التي تم الحصول عليها إلى حجم العينة n (Moore et al., 2017). لنحصل على توزيع المعاينة الذي يمتلك $\mu_p = np$ وانحراف معياري $\sigma_p = \sqrt{npq}$ في الصورة. علما أن نسب النجاح يختلف من عينة إلى أخرى نعبر عن نسبة عن النجاح بالمقدر (بوزنورة، 2021-2022):

$$\bar{p} = \frac{x}{n}$$

حيث:

x : عدد محاولات النجاحات؛

n : حجم العينة؛

$\bar{p}$: نسبة النجاح في العينة.

وبالتالي فإن توزيع المعاينة لـ $\bar{p}$ هو توزيع طبيعي كلما كبرت حجم العينة حسب نظرية النهاية المركزية

($n \geq 30$) و ($np > 5$)، ومعلماته الإحصائية كالتالي:

$$\mu_{\bar{p}} = E(\bar{p}) = np = P = \mu_p$$

$$\sigma_{\bar{p}} = V(\bar{p}) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

ويكون التوزيع الاحتمالي، كالتالي (تمار، 2020-2021):

$$\bar{p} \sim N\left(P, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

وتحدد القيمة المعيارية بالعلاقة التالية (زروخي، 2017-2018):

$$Z = \frac{\bar{p} - p}{\sqrt{pq/n}} \sim N(0, 1)$$

مثال 12: أحسب الاحتمال $p(\bar{p} > 0.58)$. إذا علمت أن حجم العينة $n = 250$ ونسبة المجتمع

$$p = 0.6$$

الحل:

$$p(\bar{p} > 0.58) = p\left(z > \frac{\bar{p} - p}{\sqrt{pq/n}} = \frac{0.58 - 0.6}{\sqrt{0.6 \times 0.4/250}}\right) = p(z > -0.64)$$

$$p(\bar{p} > 0.58) = p(z < 0.64) = 0.7389 \approx 73.89\%$$

2.5 توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي

لدينا عينتين n_1, n_2 من مجتمعين مختلفين وكانت نسبة تحقق خاصية معينة $\bar{p}_1, \bar{p}_2$ على

الترتيب، فإن توزيع المعاينة للفرق بين النسبتين يتبع التوزيع الطبيعي إذا تحقق $n_1, n_2 \geq 30$ ومنه

المعلومات الاحصائية للمتغير الاحصائي $(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)$ هي (إياد، 2017):

$$\mu_{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)} = P_1 - P_2$$

$$\sigma_{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)} = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}$$

ويكون التوزيع الاحتمالي، كالتالي (تمار، 2020-2021):

$$(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \sim N\left(P_1 - P_2, \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}\right)$$

وتحدد القيمة المعيارية بالعلاقة التالية (بوزنورة، 2021-2022):

$$Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

ملاحظة:

إذا كان السحب بدون إرجاع أي المجتمع منته يكون التباين للفرق بين نسبتي العينتين كما يلي:

$$\sigma_{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)} = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} \left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \right) + \frac{p_2 q_2}{n_2} \left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \right)}$$

مثال 13: إذا كانت نسبة النجاح في بمعهد التكوين المهني بعين أمناس تساوي 0.9 وكانت نسبة النجاح

في نفس الاختبار بمعهد إيليزي تساوي 0.8 سحبت عينة عشوائية حجمها 140 طالب من معهد عين

أمناس وعينة ثانية عشوائية حجمها 80 من معهد إيليزي. **أوجد** احتمال أن تزيد نسبة النجاح في معهد

عين أمناس عن نسبة النجاح في معهد اليزي بـ 0.15 على الأقل؟

الحل:

$$\mu_{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)} = P_1 - P_2 = 0.9 - 0.8 = 0.1$$

$$\sigma_{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)} = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0.9 \times 0.1}{140} + \frac{0.8 \times 0.2}{80}} = 0.0514$$

$$(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \sim N(0.1, 0.0026)$$

$$p((\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \geq 0.15)$$

$$= P \left(Z \geq \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} = \frac{0.15 - (0.9 - 0.8)}{\sqrt{\frac{0.9 * 0.1}{140} + \frac{0.8 * 0.2}{80}}} \right)$$

$$= P(Z \geq 0.97) = 1 - P(Z < 0.97) = 1 - 0.8384$$

$$p((\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \geq 0.15) = 0.1616 \approx 16.16\%$$

المحور الأول: نظرية المعاينة

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

جدول 04: ملخص توزيع المعاينة للنسبة والفرق بين نسبتي

المعيار	توزيع المعاينة	
$Z = \frac{\bar{p} - p}{\sqrt{pq/n}}$	$\mu_{\bar{p}} = np = P$	متوسط المعاينة للنسبة
	$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$	الانحراف المعياري للنسبة
$Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}}}$	$\mu_{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)} = P_1 - P_2$	متوسط المعاينة للفرق
	$\sigma_{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)} = \sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}}$	الانحراف المعياري للفرق

المصدر: (بوزنورة، 2021-2022)

سادسا: توزيع المعاينة للتباين

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n و S^2 متغيرة عشوائية تمثل تباين العينة المسحوبة، فإن المتغير

العشوائي يعطى بالعلاقة التالية (Wackerly et al., 2008):

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2}$$

أما إذا كان السحب بدون ارجاع فإن (بوعروري، 2022-2023):

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \times \frac{N}{N-1}$$

ملاحظة: عندما يكون N كبيرا جدا $\left(\frac{N}{N-1}\right)$ سيؤول إلى 1.

يخضع توزيع المعاينة للتباين لتوزيع كاي تربيع بدرجة حرية $v = n - 1$:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

مثال 14: نفترض أن هناك آلة تقوم بقطع قطع معدنية لاستخدامها في صنع أجزاء معينة. إذا كان وزن

القطع المنتجة متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 30 غراما وانحراف معياري 0.5 غرام.

تم سحب عينة من 25 قطعة، ما احتمال أن يكون تباينها أكبر من 0.38؟

الحل:

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} &\sim \chi_{n-1}^2 \rightarrow \frac{24 \times S^2}{0.25} \sim \chi_{24}^2 \\ p(S^2 > 0.38) &= P\left(S^2 > \frac{24 \times 0.38}{0.25}\right) = P(\chi_{24}^2 > 36.48) \\ &= 1 - P(\chi_{24}^2 < 36.48) = 1 - 0.95 \\ p(S^2 > 0.38) &= 0.05 \approx 05\% \end{aligned}$$

سابعاً: توزيع المعاينة لنسبة تباين عینتين

يعد هذا التوزيع من التوزيعات الهامة التي تستخدم بشكل رئيسي لدراسة تجانس المجتمعات،

ويعتبر من الأدوات الفعالة في فحص ما إذا كانت العينات تأتي من نفس المجتمع أو مجتمعات متشابهة.

في بعض الحالات، يكون من الأفضل حساب النسبة بين التباينات بدلا من الفرق بينها، وذلك لسهولة

دراسة النسب وفهمها. فإذا سحبت عينة حجمها n_1 وتباينها S_1^2 من مجتمع $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ وعينة أخرى

حجمها n_2 وتباينها S_2^2 . مجتمع $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ مستقل عن المجتمع الأول (إياد، 2017). فإن

:(Wackerly et al., 2008)

$$F = \frac{\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} / n_1 - 1}{\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} / n_2 - 1} = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} = \left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right) \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

- إذا تساوى تباين المجتمعين فإن (بن البار، 2020-2021):

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1, \alpha)$$

مثال 15: أخذت عينة عشوائية حجمها 15 من مجتمع طبيعي تباينه 9، وسحبت عينة أخرى مستقلة عن الأولى حجمها 25 من مجتمع طبيعي غير الأول تباينه 25. أوجد احتمال أن تكون النسبة بين تبايني العينتين أقل من 0.8.

الحل:

$$\left(\frac{S_1^2/9}{S_2^2/25} \right) \sim F(14, 24)$$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < 0.8\right) &= P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < \left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)\right) = P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < 0.8 \left(\frac{25}{9}\right)\right) \\ &= P(F < 2.22) \sim F(14, 24) \end{aligned}$$

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < 0.8\right) = 0.95 \approx 95\%$$

السلسلة رقم 01: نظرية المعاينة

التمرين 01:

إذا كان لدينا مجتمع مكون من المفردات التالية:

$$X_1=1, X_2=2, X_3=3$$

1- أوجد متوسط وتباين المجتمع.

2- أوجد توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينات ذات الحجم $n = 2$ التي يمكن سحبها من هذا المجتمع

في كل من الحالات التالية:

أ. السحب بإرجاع.

ب. السحب بدون إرجاع.

3- أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة في الحالات التالية:

أ. السحب بإرجاع.

ب. السحب بدون إرجاع.

التمرين 02:

إذا كانت علامات طلبة السنة الثانية لمقياس الاحصاء 4 تتبع توزيعا طبيعيا بمتوسط $\mu = 100$

وانحراف معياري $\sigma = 75$ تم اختيار 25 طالبا عشوائيا من بين طلبة الجامعة. أوجد:

1. احتمال أن يكون متوسط العلامات المحسوب من العينة أكبر من 125

2. احتمال أن يكون متوسط العلامات المحسوب من العينة أصغر من 80.

3. احتمال أن يكون متوسط العلامات المحسوب من العينة محصورا بين 70 و 130.

التمرين 03:

ليكن لدينا متغيران مستقلان X_1, X_2 يمثلان مجتمعين 1 و 2 حيث:

$$X_2 \sim N(20, 50) \quad X_1 \sim N(15, 32)$$

1. ما هو توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين الأولى من المجتمع 1 حجمها 16 والثانية من

المجتمع 2 حجمها 25؟

2. ما هو احتمال ألا يزيد الفرق بين المتوسطين عن 2؟

التمرين 04:

إذا كان لدينا البيانات التالية الخاصة بمجتمعين 1 و 2، حيث:

المجتمع 1: متوسطه $\mu_1 = 8.34$ وتباينه $\delta_1^2 = 2.8$.

المجتمع 2: متوسطه $\mu_1 = 6.45$ وتباينه $\delta_1^2 = 2.5$.

إذا تم سحب عينتين مستقلتين من المجتمعين، حيث $n_1 = 50$ و $n_2 = 40$ ، فإذا كانت المتغيرات

قيد الدراسة لا تتبع التوزيع الطبيعي، أوجد الاحتمال التالي:

$$P(1.19 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 2.59)$$

التمرين 05:

إذا كان لدينا البيانات التالية الخاصة بمجتمعين 1 و 2، حيث:

المجتمع 1: متوسطه $\mu_1 = 40.7$ وتباينه $\delta_1^2 = 3.2$.

المجتمع 2: متوسطه $\mu_1 = 39.2$ وتباينه $\delta_1^2 = 2.9$.

إذا تم سحب عينتين مستقلتين من المجتمعين، حيث $n_1 = 17$ و $n_2 = 15$ أوجد الاحتمال التالي

بفرض أنه يخضع للتوزيع الطبيعي:

$$P(0.289 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 2.711)$$

التمرين 06:

ليكن مجتمع طبيعي حجمه 100 نسحب منه عينة حجمها $n = 16$. ما هو احتمال أن يكون تباين العينة S^2 أقل من أو يساوي 10 علما أن تباين المجتمع 80.

التمرين 07:

مجتمع مكون من 70 شخص من بينهم 42 مدخن.

- 1- أوجد التوزيع العيني لنسبة المدخنين في عينة عشوائية حجمها 30 مسحوبة من هذا المجتمع؟
- 2- إذا سحبنا عينة عشوائية حجمها 30 من هذا المجتمع. ما هو احتمال أن تزيد نسبة المدخنين في العينة عن 0.43؟

التمرين 08:

من سجلات الجامعة في السنوات السابقة، وجد أن نسبة النجاح في مادة الاحصاء بالنسبة للطلابات هو 82%، أما بالنسبة للطلاب فكانت 80%.
في الفصل الحالي بلغ عدد المسجلين لهذه المادة 100 طالبة و 150 طالب، باعتبار أن هذه الأعداد تمثل عینتان عشوائيتان مسحوبتان من مجتمع الطالبات والطلبة. أوجد التوزيع العيني للفرق بين نسبتي النجاح في العينة؟

حلولة السلسلة رقم 01

التمرين 01:

لدينا مجتمع يتكون من 3 وحدات $N=3$

$$X_1=1, X_2=2, X_3=3$$

1. متوسط وتباين المجتمع:

$$\mu = \frac{1+2+3}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\sigma^2 = V(x) + \frac{nx}{1!} + \frac{\Sigma(X_1 - \mu)^2}{N} = \frac{(1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2}{3} = \frac{2}{3} = 0.66$$

2. إيجاد توزيع المعاينة للوسط الحسابي وللعينة ذات حجم 2:

أ. حالة السحب بالإرجاع:

عدد العينات تحسب بالقائمة:

$$\Omega = N^n = 3^2 = 9$$

- يمكن توضيح ذلك من خلال الجدول التالي:

	1	2	3
1	(1.1)	(1.1)	(1.3)
2	(2.1)	(2.2)	(2.3)
3	(3.1)	(3.2)	(3.3)

- المتوسط الحسابي لكل عينة هو:

$$\bar{X}_1 = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\bar{X}_2 = \frac{1+2}{2} = 1,5$$

$$\bar{X}_3 = \frac{1+3}{2} = 2$$

المحور الأول: نظرية المعاينة

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

- تصح نتائج المتوسطات في الجدول التالي:

1	1.5	2
1.5	2	2.5
2	2.5	3

- المتوسط الحسابي لتوزيع المعاينة:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu \rightarrow \mu_{\bar{X}} = 2$$

- من الجدول:

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}_1}{\Omega} = \frac{1 + 2 + 1.5 + 3 + 1.5 + 2 + 2.5 + 2 + 2.5}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

- تبين متوسط توزيع المعاينة:

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{0.66}{2} = 0.33$$

- الانحراف المعياري:

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{0.33}$$
$$\sigma_{\bar{X}} = 0.57$$

ب. في حالة السحب بدون إرجاع: عندما لا يذكر نوع الترتيب في السحب بدون إرجاع نعتبره ترتيب

غير مهم. وفي هذه الحالة نحسب التوفيق لإيجاد عدد العينات:

$$\Omega = C_N^n = C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

لأن السحب بدون إرجاع لا يوجد فيه تكرار (عينة تفادية) وعليه:

$$\bar{X}_1 = 1.5 \quad \bar{X}_2 = 2 \quad \bar{X}_3 = 2.5$$

- المتوسط الحسابي للعينات:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 2$$

المحور الأول: نظرية المعاينة

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{1.5+2+2.5}{3} = \frac{6}{3} = 2 \quad - \text{ للتأكيد:}$$

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} = \left(\frac{N-n}{N-1} \right) \quad - \text{ التباين:}$$

$$\sigma^2_{\bar{X}} = 0.33 \left(\frac{3-2}{3-1} \right) = 0.33 \left(\frac{1}{2} \right) = 0.165$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{0.165} = 0.406 \quad - \text{ الانحراف المعياري:}$$

التمرين 02:

$$x \sim N(100, 75^2)$$

$$\mu = 100$$

$$\sigma^2 = 75^2, \quad \sigma = 75$$

$$n = 25$$

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 100$$

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{75^2}{25} = 225$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{225} = 15$$

1- احتمال أن يكون متوسط العلامات المحسوبة من العينة أكبر من 125

$$P(\bar{X} > 125) = P\left(z > \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(z > \frac{125 - 100}{15}\right) = P(z > 1.66)$$

$$P(\bar{X} > 125) = 1 - P(Z < 1.66) = 1 - 0.9515 = 0.0485 \approx 04.85\%$$

2- احتمال أن يكون متوسط العلامات المحسوبة من العينة أصغر من 80.

$$P(\bar{X} < 80) = P\left(Z < \frac{80 - 100}{15}\right) = P(Z < -1.33) = 1 - P(Z < 1.33)$$

$$P(\bar{X} < 80) = 1 - 0.9082 = 0.0918 \approx 09.18\%$$

3- احتمال أن يكون متوسط العلامات محسوب من العينة محصورين بين 70 و 130.

$$P(70 \leq \bar{X} \leq 130) = P(\bar{X} \leq 130) - P(\bar{X} \leq 70)$$

$$\begin{aligned}
 &= P\left(Z < \frac{130 - 100}{15}\right) - P\left(Z < \frac{70 - 100}{15}\right) = P(Z < 2) - P(Z < -2) \\
 &= P(Z < 2) - [1 - P(Z < +2)] = 2(0.9772) - 1 \\
 &P(70 \leq \bar{X} \leq 130) = 0.9544 \approx 95.44\%
 \end{aligned}$$

التمرين 03:

$$\begin{aligned}
 X_1 &\sim N(15, 32) \\
 \mu_1 &= 15 \quad \sigma_1^2 = 32 \quad \sigma_1 = 5.65 \\
 X_2 &\sim N(20, 50) \\
 \mu_2 &= 20 \quad \sigma_2^2 = 50 \quad \sigma_2 = 7.07 \\
 n_1 &= 16 \quad n_2 = 20
 \end{aligned}$$

1- توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين:

$$\begin{aligned}
 \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} &= (\mu_1 - \mu_2) = 15 - 20 = -5 \\
 \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} &= \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{32}{16} + \frac{50}{25}} = \sqrt{4} = 2 \\
 (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) &\rightarrow N(-5, 4)
 \end{aligned}$$

2- احتمال أن لا يزيد الفرق بين المتوسطين عن 2:

$$\begin{aligned}
 P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 2) &= P\left(Z \leq \frac{2 - (-5)}{2}\right) \\
 P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 2) &= P(Z \leq 3.5) = 0.99976 \approx 99.98\%
 \end{aligned}$$

التمرين 04:

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= 8.34 \quad \sigma_1^2 = 2.8 \quad n_1 = 50 \\
 \mu_2 &= 6.45 \quad \sigma_2^2 = 2.25 \quad n_2 = 40
 \end{aligned}$$

نلاحظ أن n_1 و $n_2 > 30$ وبما أن المجتمعين غير طبيعيين إلا أنه وفق نظرية النهاية المركزية فإن:

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = (\mu_1 - \mu_2) = 8.34 - 6.45 = 1.89$$

$$\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{2.8}{50} + \frac{2.25}{40} = 0.11$$

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{0.11} = 0.33$$

$$P(1.19 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 2.59) = P\left(\frac{(1.19 - 1.89)}{0.33} \leq Z \leq \frac{(2.59 - 1.89)}{0.33}\right)$$

$$= P(-2.12 \leq Z \leq 2.12) = P(Z < 2.12) - P(Z < -2.12)$$

$$= P(Z < 2.12) - [1 - P(Z < -2.12)] = 0.966$$

$$P(1.19 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 2.59) \approx 96.66\%$$

التمرين 05:

$$X_1 \sim N(40.7, 3.2)$$

$$\mu_1 = 40.7 \quad \sigma_1^2 = 3.2 \quad \sigma_1 = 1.78 \quad n_1 = 17$$

$$X_2 \sim N(39.2, 2.9)$$

$$\mu_2 = 39.2 \quad \sigma_2^2 = 2.9 \quad \sigma_2 = 1.7 \quad n_2 = 15$$

1- توزيع المعاينة لفرق المتوسطين:

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 = (40.7 - 39.2) = 1.5$$

$$\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{3.2}{17} + \frac{2.9}{15} = 0.38$$

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{0.38} = 0.61$$

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \sim N(1.5, 0.38)$$

2- حساب الاحتمال المطلوب:

$$P(0.289 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 2.711) = P\left(\frac{0.289 - 1.5}{0.61} \leq Z \leq \frac{2.711 - 1.5}{0.61}\right)$$

$$= P(-1.98 \leq Z \leq 1.98) = P(Z < 1.98) - P(Z < -1.98)$$

$$P(0.289 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 2.711) = 0.9522 \approx 95.22\%$$

التمرين 06:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2 \rightarrow \frac{15 \times S^2}{80} \sim \chi_{15}^2$$

$$p(S^2 \leq 10) = P\left(\chi_{15}^2 \leq \frac{15 \times 10}{80}\right) = P(\chi_{15}^2 \leq 1.88)$$

$$p(S^2 \leq 10) = 0.0005$$

التمرين 07:

- النسبة في المجتمع $P = \frac{42}{70} = 0.6$

- توقع النسبة في العينة هو المتوسط $\mu_{\bar{p}} = 0.6$

- تباين النسبة في العينة $\sigma_{\bar{p}}^2 = \frac{pq}{n} = \frac{(0.6)(0.4)}{30} = \frac{0.24}{30} = 0.008$

1- التوزيع العيني لنسبة المدخنين في العينة يقترب من التوزيع الطبيعي كما يلي:

$$P \sim N(0.6; 0.008)$$

2- إذا سحبنا عينة عشوائية حجمها 30، إيجاد احتمال أن تزيد نسبة المدخنين في العينة عن 0.43:

$$P(P^* > 0.43) = 1 - P(P^* \leq 0.43) = 1 - P\left(Z \leq \frac{0.43 - 0.6}{\sqrt{0.008}}\right)$$

$$= 1 - P(Z \leq -1.9) = 1 - P(Z > 1.9) = P(Z < 1.9)$$

$$P(P^* > 0.43) = 0.9713 \approx 97.13\%$$

التمرين 08:

$$\mu_{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)} = P_1 - P_2 = 0.82 - 0.8 = 0.02$$

$$\sigma_{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}^2 = \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2} = \frac{0.82 \times 0.18}{100} + \frac{0.8 \times 0.2}{150} = 0.0025$$

$$(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \sim N(\mu_{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}, \sigma_{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}^2) \sim N(0.02, 0.0025)$$

بمعنى أن التوزيع العيني للفرق بين نسبتي النجاح في العينة يقترب من التوزيع الطبيعي، لأن حجم

العينة كبير.

المحور الثاني: نظرية التقدير

أولاً: مفاهيم أساسية حول التقدير الإحصائي

1.1 مفهوم التقدير

تستند التوزيعات الإحصائية إلى معالم معينة، فعلى سبيل المثال، يعتمد التوزيع ذو الحدين على المعلمة P (نسبة النجاح في التجربة)، بينما يعتمد توزيع بواسون على معلمة واحدة تسمى الوسط الحسابي λ ، ويعتمد التوزيع الطبيعي على المعلمتين μ ، σ^2 (أي الوسط الحسابي والتباين). وفي العديد من الحالات، تكون هذه المعالم غير معروفة، ويهدف الإحصائي إلى تحديد قيمتها. ومع ذلك، فإن معرفة هذه القيم بدقة ليس بالأمر السهل، مما يدفعنا إلى اللجوء إلى تقديرها (Wackerly et al., 2008)، حيث أن هناك طريقتين للتقدير هما:

1.1.1 التقدير بنقطة "Point Estimation": والذي يعني تمثيل معلمة المجتمع بقيمة واحدة يعني

أننا نحاول تحديد قيمة المعلمة باستخدام تقديرات مأخوذة من العينة (Montgomery & Runger, 2018). على سبيل المثال، يعتبر أفضل تقدير للوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي هو الوسط الحسابي المحسوب من عينة عشوائية مأخوذة من هذا المجتمع. ويرجع ذلك إلى أن هناك احتمالاً كبيراً بأن يكون الوسط الحسابي للعينة قريباً جداً من الوسط الحسابي للمجتمع غير المعلوم. وينطبق نفس الشيء على المعالم الإحصائية الأخرى. فمثل نقدر العمر الافتراضي للمصابيح المنتجة في مصنع ما بأن نقول إن العمر الافتراضي للمصباح يقدر بـ 300 ساعة. (بوزنورة، 2021-2022).

2.1.1 التقدير بفترة "Interval Estimation": من الطبيعي أن التقدير بنقطة لأي معلمة لا نتوقع

فيه أن يقدر تلك المعلمة بدون خطأ؛ أي لا نتوقع أن يكون تقدير أي معلمة مطابقاً تماماً لقيمة المعلمة المطلوب تقديرها (قريشي، 2024-2025). أما في تقدير المجال فننتحصل على مجال معرف بحدين (حد أدنى وحد أعلى) نحصل عليهما من العينة فمثلاً إذا قدرنا الوسط الحسابي

لأعمار العمال يتراوح ما بين 20 و45 سنة أي يتراوح بين 20 سنة كحد أدنى و45 سنة كحد أعلى نكون قد حصلنا على تقدير مجال للوسط الحسابي لأعمار العمال في المجتمع (قدسية، 2018). تحتوي على أكثر من قيمة بل قد يكون عدد القيم غير محدود أو لا نهائيا في كثير من الحالات، ويسمى التقدير بمجال الثقة أيضا لأنه هذه الفترات تعتمد في تكوينها الإحصائي على درجات أو مستويات ثقة معينة مثل 95% أو 99%.

2.1 خصائص المقدّر الجيد

من أهم الخصائص التي يجب أن تتوفر في المقدّر الجيد هي:

1.2.1 خاصية عدم التحيز:

عادة ما يكون من الممكن الحصول على أكثر من مُقدّر غير متحيز لنفس المعلمة المستهدفة θ . أي (Wackerly et al., 2008):

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

ويعتبر شرط عدم التحيز أهم شروط التقديرات الوسيطة (تمار، 2020-2021).

وكما درسنا سابقا في توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة هو نفسه الوسط الحسابي للمجتمع الأصلي أي أن (طشوش، 2012):

$$E(\bar{X}) = \mu \quad \bar{X} = \mu$$

2.2.1 خاصية الكفاءة:

تعرف الكفاءة باستخدام تباين المقدّر، فالمقدّر الأقل تباينا هو الأكثر كفاءة. ويعرف المقدّر الكفء بأنه ذلك المقدّر الذي يكون تباينه أقل من تباين أي مقدر آخر لنفس المعلمة من نفس العينة (بلعدي، 2020-2021). إذ تقاس الكفاءة بين المقدّرين $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ بحساب النسبة بين تباينيهما (Wackerly et al., 2008):

$$eff = \frac{V(\hat{\theta}_1)}{V(\hat{\theta}_2)}$$

نقول إن المقدّر $\hat{\theta}_1$ يكون أكثر كفاءة من المقدّر $\hat{\theta}_2$ إذا كان $\frac{V(\hat{\theta}_1)}{V(\hat{\theta}_2)} \leq 1$

3.2.1 خاصية الاتساق:

يقال بأن المقدّر $\hat{\theta}$ متسق للمعلمة θ إذا كانت $\hat{\theta}$ تقترب من θ كلما زاد حجم العينة واقترب من

المالانهاية، فإن تباينه يؤوّل الى الصفر، أي (بوعروري، 2022-2023):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\theta}) = 0$$

3.2.1 خاصية الكفاية:

يقال بأن المقدّر $\hat{\theta}$ هو مقدّر كاف إذا استخدم في حساب قيمته كل معلومات المعلمة θ والتي

تتوفر في العينة (عطية، 2004). فبالنسبة لمقاييس النزعة المركزية الثلاث: الوسيط والمنوال والوسط

الحسابي، نجد أن الوسيط لا يستخدم في حسابه سوى قيم المفردات التي تقع في وسط العينة، كذلك

الأمر بالنسبة للمنوال حيث يتم الاعتماد على القيم الأكثر شيوعا عند حسابه، أما الوسط الحسابي فإنه

يأخذ بعين الاعتبار كل القيم عند حسابه، ولهذا يعتبر المتوسط الحسابي مقدرا كافيا لمعلمة المجتمع μ

(سمواك، 2019-2020).

ثانيا: فترة الثقة للمتوسّطات

تقدير وسط المجتمع باستخدام فترة الثقة يتضمن أولا حساب تقدير نقطي لوسط المجتمع، ومن ثم

استخدام هذا التقدير لحساب قيمتين تعتمدان على التوزيع الاحتمالي للمقدّر ومعامل الثقة. هذه القيم

تمثل الحد الأدنى والحد الأعلى لفترة الثقة المطلوبة.

عندما يكون وسط المجتمع μ غير معلوم وأردنا إيجاد فترة ثقة للمعلمة μ نقوم باستخدام وسط

العينة كأداة لتقدير المعلمة. ثم نستخدم توزيع المعاينة للإحصاء لتحديد الحد الأدنى والحد الأعلى لفترة

المحور الثاني: نظرية التقدير

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

الثقة المطلوبة بناءً على هذا التقدير (قريشي، 2024-2025). والجدول التالي يوضح بعض قيم مستوى

الثقة ومعامل الثقة:

جدول 06: بعض قيم مستوى الثقة ومعامل الثقة

0.5	0.80	0.90	0.95	0.98	0.99	مستوى الثقة $1 - \alpha$
0.5	0.2	0.10	0.05	0.02	0.01	مستوى المعنوية α
0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	الاحتمال $1 - \alpha/2$
0.674	1.282	1.645	1.96	2.326	2.58	معامل الثقة $z_{1-\alpha/2}$

المصدر: (تمار، 2020-2021)

1.2 فترة الثقة لمتوسط المجتمع عندما يكون تباين المجتمع معلوما

في هذه الحالة لا نكتفي بتقدير معمة المجتمع بنقطة فلجاً باستخدام عينة من المجتمع لحساب

فترة نأمل أن تقع فيها معلمة المجتمع بمستوى ثقة محدد مسبقاً يرمز لو بالرمز $(1 - \alpha)$ حيث تسمى

α بمستوى المعنوية ويطلق على هذه الفترة فترة الثقة للمعلمة بمستوى ثقة $(1 - \alpha)\%$. (إياد، 2017)

ونستطيع إيجاد فترة الثقة للوسط μ من العبارة الاحتمالية التالية (خليفة، 2018-2019):

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

وبهذا فإن فان فترة ثقة $(1 - \alpha)\%$ - 100% للمعلمة μ هي:

$$IC_{\mu} = \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$$IC_{\mu} = \left[\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

أما في حالة السحب بدون ارجاع، فإنه (بوزنورة، 2021-2022):

$$IC_{\mu} = \left[\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \right]$$

مثال 1: شركة مختصة في صناعة العجلات يخضع قطرها للتوزيع الطبيعي بانحراف معياري 8، أخذت

عينة عشوائية حجمها 9، وسطها الحسابي 52. أوجد فترة ثقة 95% للوسط μ ؟

الحل:

$$1 - \alpha = 95\% \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow Z_{1-\alpha/2} = 1.96$$

إذن بالتعويض في فترة الثقة نجد أن فترة ثقة 95% للوسط μ هي:

$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$52 - 1.96 \cdot \frac{8}{\sqrt{9}} \leq \mu \leq 52 + 1.96 \cdot \frac{8}{\sqrt{9}}$$

$$52 - 5.227 \leq \mu \leq 52 + 5.227$$

$$46.773 \leq \mu \leq 57.227$$

$$IC_{\mu} = [46.773, 57.227]$$

2.2 اختيار حجم العينة المناسب لتقدير متوسط المجتمع

إذا تصورنا أننا بصدد سحب عينة عشوائية بهدف حساب وسط حسابي $\bar{x}$ على ألا تختلف عن

الوسط الحسابي للمجتمع μ ، أي أننا بصدد البحث عن حجم العينة الذي يؤدي إلى عدم الاختلاف في

قيمة الوسط الحسابي للعينة عن الوسط الحسابي للمجتمع، أي أن (الديب و حزين، 2018-2019):

$$d \leq z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

حيث أن d هو حد المقدار الأكبر المسموح به لهذا الخطأ، وينتج من ذلك أن (العلام، 2023-2024):

$$n \geq \left[\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{d} \right]^2$$

المحور الثاني: نظرية التقدير

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

مثال 2: أراد مدير مستشفى تحديد حجم العينة اللازمة لحساب متوسط زمن الانتظار للمرضى في قسم الطوارئ، وذلك ألا يزيد الخطأ في هذا المتوسط عن 0.3 دقيقة، وهذا بدرجة ثقة 95% على أساس أن الانحراف المعياري يساوي 1.5 دقيقة.

الحل: لتحديد حجم العينة اللازمة، فإننا سوف نطبق العلاقة التالية:

$$n \geq \left[\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{d} \right]^2 \geq \left[\frac{1.5 \times 1.96}{0.3} \right]^2 \rightarrow n \approx 96$$

مثال 3: يريد قسم الموارد البشرية في إحدى الشركات تحديد متوسط الوقت الذي يقضيه الموظفون في التنقل من وإلى العمل. قام القسم بجمع عينة عشوائية من 150 موظف، ومن المعلومات المتوفرة لدى تلك المجموعة ان الانحراف المعياري σ يساوي 6.2 دقيقة. احسب الحد الأقصى للخطأ لهذا التقدير بدرجة ثقة 99%.

الحل:

$$d = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{6.2}{\sqrt{150}} \quad z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$d \approx 1.30$$

3.2 فترة الثقة لمتوسط مجتمع غير طبيعي

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع غير طبيعي، فإنه بإمكاننا استعمال نظرية النهاية المركزية لمعرفة توزيع الوسط إذا كان حجم العينة كبير، ومن ثم تكون فترة ثقة هي (بن البار، 2020-2021):

$$IC_{\mu} = \left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

وفي حالة عدم معرفة σ نستعمل S بدلا منها، شريطة أن تكون n كبيرة.

مثال 4: أخذت عينة عشوائية حجمها 81 ووسطها 3.6 وانحراف معياري قدره 0.9 من مجتمع إحصائي. أوجد فترة ثقة 99% لوسط المجتمع.

المحور الثاني: نظرية التقدير

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

الحل:

بما أن حجم العينة كبير فإننا نطبق قانون التوزيع الطبيعي، وبما أن الانحراف المعياري للمجتمع غير

معلوم فإننا نعتمد على الانحراف المعياري للعينة، أي (قريشي، 2024-2025):

$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

بالطبيق نجد:

$$3.6 - 2.57 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{81}} \leq \mu \leq 3.6 + 2.57 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{81}}$$

$$3.6 - 0.257 \leq \mu \leq 3.6 + 0.257$$

$$3.343 \leq \mu \leq 3.85$$

$$IC_{\mu} = [3.343, 3.85]$$

4.2 فترة الثقة لمتوسط المجتمع عندما يكون تباين المجتمع غير معلوم و $n \geq 30$:

في هذه الحالة يعطى مجال الثقة لمتوسط المجتمع بالعلاقة التالية (خليفة، 2018-2019):

$$IC_{\mu} = \left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right] = \left[\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

مثال 5: سحبت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي لمعدلات الطلبة مؤلفة من 36 طالبا في إحدى

الجامعات بمتوسط حسابي 66.3 وتباين 12. أوجد فترة ثقة 95% لمعدل جميع الطلبة الجامعة؟

الحل:

نلاحظ أن تباين المجتمع مجهول، وحجم العينة كبير بدرجة كافية فإن فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

بالتعويض في فترة الثقة نجد أن فترة ثقة 95% للوسط μ هي:

$$66.3 - 1.96 \cdot \frac{12}{\sqrt{36}} \leq \mu \leq 66.3 + 1.96 \cdot \frac{12}{\sqrt{36}}$$

$$66.3 - 3.92 \leq \mu \leq 66.3 + 3.92$$

$$62.38 \leq \mu \leq 70.22$$

$$IC_{\mu} = [62.3, 70.22]$$

5.2 فترة الثقة لمتوسط المجتمع عندما يكون تباين المجتمع غير معلوم و $n < 30$:

إذا كانت العينة المدروسة من مجتمع توزيعه مجهول وكان حجم العينة $n < 30$. فإن توزيع

المعينة هو توزيع ستودينت إذ يمكننا استنتاج تباين المعينة للمجتمع من خلال تباين العينة الغير

متحيز. ويمكن كتابة مجال الثقة لمتوسط المجتمع كما يلي (بلعدي، 2020-2021):

$$IC_{\mu} = \left[\bar{x} - t_{(1-\alpha/2, n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right] = \left[\bar{x} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{(1-\alpha/2, n-1)} \right]$$

مثال 6: دخول مجموعة من الافراد تتبع التوزيع الطبيعي وسحبت منه عينة عشوائية حجمها 7، وسطها

الحسابي 11.2، وانحرافها المعياري 0.4. أوجد فترة ثقة 95% لمعدل المجتمع μ ؛

الحل:

$$IC_{\mu} = \left[\bar{x} - t_{(1-\alpha/2, n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

$$t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)} = t_{(0.975, 6)} = 2.447$$

إذن فترة الثقة 95% للمعدل μ هي:

$$11.2 - 2.447 \cdot \frac{0.4}{\sqrt{7}} \leq \mu \leq 11.2 + 2.447 \cdot \frac{0.4}{\sqrt{7}}$$

$$11.2 - 0.37 \leq \mu \leq 11.2 + 0.37$$

$$10.83 \leq \mu \leq 11.57 \rightarrow IC_{\mu} = [10.83, 11.57]$$

ثالثا: فترة الثقة للفروق والمجاميع

1.3 تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 معلومين

إذا كان: $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ فإن (حميدان وآخرون، 2006):

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

المحور الثاني: نظرية التقدير

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

ويكون توزيع المعاينة للفرق بن وسطي مجتمعين تباينهما معلوم بالشكل التالي:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

وتكون فترة الثقة $(1 - \alpha) \%$ كالتالي:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$IC_{\mu_1 - \mu_2} = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

$$IC_{\mu_1 - \mu_2} = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

مثال 7: سحب عينتان عشوائيتان من مجتمعين مستقلين فكانت النتائج المتحصل عليها كما يلي:

$n_2 = 9$	$n_1 = 8$
$\bar{x}_2 = 25.11$	$\bar{x}_1 = 21.25$
$\sigma_2^2 = 12$	$\sigma_1^2 = 6$

المطلوب: حدد مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين عند مستوى معنوية 5%؟

الحل:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.05}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$

$$(21.25 - 25.11) - 1.96 \sqrt{\frac{6}{8} + \frac{12}{9}} < \mu_1 - \mu_2 < (21.25 - 25.11) + 1.96 \sqrt{\frac{6}{8} + \frac{12}{9}}$$

$$IC_{\mu_1 - \mu_2} = [-6.99, -1.03]$$

المحور الثاني: نظرية التقدير

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

2.3 تباين المجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين

1.2.3 : $n_1, n_2 \geq 30$

في هذه الحالة نقدر تباين كل مجتمع بتباين عينة عشوائية تسحب منه ونستبدل تباين المجتمعين

σ_1^2 و σ_2^2 بتباين العينتين المسحوبتين S_1^2 و S_2^2 فتصبح العلاقة السابقة كما يلي (سلفاتور، 2011):

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$IC_{\mu_1 - \mu_2} = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

$$IC_{\mu_1 - \mu_2} = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

مثال 8: أوجد فترة ثقة 98% للفرق بين وسطي مجتمعين طبيعيين مستقلين إذا علمت أن حجم العينة

الأولى 160 ووسطها 81.2 والانحراف المعياري لها 7.6 وحجم العينة الثانية 90 ووسطها 76.4

وبانحراف معياري لها 8.2.

الحل:

لدينا المعطيات التالية:

$$n_1 = 160, \quad \bar{X}_1 = 81.2, \quad S_1^2 = 7.6$$

$$n_2 = 90, \quad \bar{X}_2 = 76.4, \quad S_2^2 = 8.2$$

$$1 - \alpha = 0.98 \quad \alpha = 0.02, \quad z_{1-\alpha/2} = 2.33$$

فتكون فترة الثقة كما يلي:

$$4.8 - 2.33 \sqrt{\frac{7.6}{160} + \frac{8.2}{90}} < \mu_1 - \mu_2 < 4.8 + 2.33 \sqrt{\frac{7.6}{160} + \frac{8.2}{90}}$$

$$3.933 < \mu_1 - \mu_2 < 5.567$$

$$IC_{\mu_1 - \mu_2} = [3.93, 5.57]$$

المحور الثاني: نظرية التقدير

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

2.2.3 إذا كان $n_1, n_2 < 30$ (أو أحدهما أقل من 30):

في حالة العينة الصغيرة والتباين غير المعروف، يجب افتراض شكل توزيع المجتمع لضمان صحة الإجراء. في العديد من الحالات، يمكن افتراض أن التوزيع تحت الدراسة طبيعي. في هذه الحالة، يتم استبدال σ بالانحراف المعياري للعينة S ، مما يؤدي إلى استخدام التوزيع t بدلاً من التوزيع الطبيعي. عندما يكون حجم العينة صغيراً، يجب استخدام توزيع t لبناء فترات الثقة بدلاً من التوزيع الطبيعي (Montgomery & Runger, 2018). إذا فإن فترة الثقة تكون بالعلاقة التالية (سلفاتور، 2011):

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n_1 + n_2 - 2)} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2$$

$$< (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n_1 + n_2 - 2)} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$IC_{\mu_1 - \mu_2} = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n_1 + n_2 - 2)} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}, (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n_1 + n_2 - 2)} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right]$$

$$IC_{\mu_1 - \mu_2} = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n_1 + n_2 - 2)} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right]$$

$$v = \left(\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} \right)^2}{(n_1-1)} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{(n_2-1)}} \right)$$

مثال 9: سحبت عينتان عشوائيتان من مجتمعين مستقلين فكانت النتائج المتحصل عليها كما يلي:

$n_2 = 12$	$n_1 = 8$
$\bar{x}_2 = 1200$	$\bar{x}_1 = 1680$
$S_2^2 = 600$	$S_1^2 = 500$

المطلوب: حدد مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين عند مستوى معنوية 1%؟

الحل:

$$\begin{aligned} (1680 - 1200) - t_{(0.995,18)} \sqrt{\frac{500}{8} + \frac{600}{12}} &< \mu_1 - \mu_2 \\ &< (1680 - 1200) + t_{(0.995,18)} \sqrt{\frac{500}{8} + \frac{600}{12}} \\ t_{(0.995,18)} &= 2.878 \end{aligned}$$

$$480 - 2.878 \times 10.61 < \mu_1 - \mu_2 < 480 + 2.878 \times 10.61$$

$$IC_{\mu_1 - \mu_2} = [449.46, 510.54]$$

رابعاً: فترة الثقة للنسبة والفرق بين نسبتي

1.4 فترة الثقة للنسبة

إن تقدير نسبة وجود خاصية أو صفة في مجتمع ما عادة ما يتم من خلال تقدير نسبة تلك الخاصية أو الصفة في عينة عشوائية مأخوذة منه، فتقدير النسبة أيضاً إما أن يكون نقطياً، أو بفترة.

1.1.4 تقدير النسبة بنقطة:

إذا أردنا تقدير نسبة الطلبة الذين يمتلكون الحاسوب النقال في الجامعة الجزائرية فإنه يمكن أن نختار كلية من جامعة ما عشوائياً ثم نقوم بحساب نسبة الطلبة الذين يمتلكون الحاسوب النقال بالكلية، وتستعمل تلك النسبة في العينة كتقدير نقطي للنسبة في الجامعة الجزائرية.

فإذا كانت لدينا عينة عشوائية مأخوذة من مجتمع برنولي $B(1, P)$ ، وكانت قيم مفرداتها هي:

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ فإن نسبة النجاح في العينة تكون كما يلي: $\bar{p} = \frac{\sum X_i}{n}$ وتمثل تلك النسبة في

العينة التقدير النقطي للنسبة في المجتمع (أبو صالح و عوض، 2004).

مثال 10: لتقدير نسبة المواطنين الراضين عن الخدمات المقدمة لهم من البلدية. تمت مقابلة 80 مواطناً

فوجد من بينهم 50 عبروا عن رضاهم عن نوع تلك الخدمات. ما هي نسبة المواطنين الراضين عن تلك

البلدية؟

الحل:

$$\bar{p} = \frac{50}{80} = 0.625 = 62.5\%$$

ومنه تقدر نسبة الراضين عن الخدمات الحكومية في البلدية بـ: 62.5%.

2.1.4 تقدير النسبة بفترة:

من الضروري في كثير من الأحيان بناء فترات الثقة لنسبة معينة في المجتمع (Montgomery & Runger, 2018)، على الرغم من أن التوزيع الاحتمالي المستخدم في النسب هو التوزيع الثنائي، فإن كثرة الحسابات وتعقيدها عند تحديد فترة ثقة لنسبة المجتمع غير المعروفة دفع العديد من المراجع إلى استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيع الثنائي. يتم ذلك عندما تكون العينات كبيرة الحجم وعندما لا تكون نسبة النجاح قريبة جدًا من الصفر أو الواحد (بوعروري، 2022-2023).

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{p} - p}{\sqrt{pq/n}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$\bar{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{pq/n} \leq P \leq \bar{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{pq/n}$$

$$IC_p = \left[\bar{p} \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{pq/n} \right]$$

مثال 11: أخذت عينة عشوائية حجمها 200 عامل من مصنع الحليب طاسيلي باليزي فوجد أن 40

منهم حصلوا على شهادة الكفاءة المهنية.

1. قدر نسبة العمال الحاصلين على شهادة الكفاءة المهنية؟

2. أوجد فترة ثقة 99% للعمال الحاصلين على شهادة الكفاءة المهنية؟

الحل:

1. نسبة العمال الحاصلين على شهادة الكفاءة المهنية:

$$\bar{p} = \frac{40}{200} = 0.2 = 20\%$$

2. إيجاد فترة الثقة:

$$1 - \alpha = 99\% \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow Z_{1-\alpha/2} = 2.58$$

إذن بالتعويض في فترة الثقة نجد أن فترة ثقة 99% للوسط μ هي:

$$\bar{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{pq/n} \leq P \leq \bar{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{pq/n}$$

$$0.2 - 2.58 \cdot \sqrt{0.2 \times 0.8 / 200} \leq P \leq 0.2 + 2.58 \cdot \sqrt{0.2 \times 0.8 / 200}$$

$$0.127 \leq P \leq 0.273$$

$$IC_p = [0.127, 0.273]$$

مثال 12: نريد تقدير نسبة الطلبة الذين يتم توجيههم إلى السنة الثانية في كلية العلوم الاقتصادية وفقا

لرغباتهم، ما هو عدد الطلبة الذين يجب اختيارهم كي نكون واثقين بنسبة 98% أن الخطأ في تقدير

هذه النسبة لا يزيد عن 0.04 في كل حالة مما يلي:

1. إذا لم نكن على علم مسبق عن هذه النسبة؟

2. إذا كانت نسبة أولئك الطلبة هي 80%؟

الحل:

الحالة الأولى:

$$1 - \alpha = 98\% \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow Z_{1-\alpha/2} = 1.645$$

$$d = 0.04$$

بما أن النسبة غير معلومة فإننا نأخذ أسوأ حالة لما تكون قيمتها هي: 0.5. ويكون عدد الطلبة هو:

$$n \geq \left(\frac{Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}}}{d} \right)^2 \Rightarrow n \geq \frac{1.645^2}{4(0.04)^2} \Rightarrow n \geq 164.5$$

$$n \approx 165$$

الحالة الثانية:

بما أن النسبة P معلومة فإن عدد الطلبة يحسب كما يلي:

$$n \geq \left(\frac{Z_{0.5-\frac{\alpha}{2}}}{d} \right)^2 \times pq \Rightarrow n \geq \frac{1.645^2}{4(0.04)^2} \times 0.8 * 0.2 \Rightarrow n \geq 270.6$$

$$n \approx 271$$

2.4 فترة الثقة للفرق بين نسبتي مجتمعين

إذا كانت $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n1}$ عينة عشوائية من مجتمع برلوني $B(1 - P_1)$ وكانت

$y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n2}$ عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى من مجتمع برلوني $B(1 - P_2)$ ، فإن فترة

الثقة للفرق بين النسبتين تعطى بالعلاقة التالية (بن البار، 2021-2020):

$$IC_{P_1-P_2} = \left[(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}_1 \bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2 \bar{q}_2}{n_2}} \right]$$

مثال 13: في عينة عشوائية مؤلفة من 400 بالغ و 600 طفل يزورون حديقة الحامة بالعاصمة، أشار

100 بالغ و 300 طفل بأنهم يحبون الحديقة. أوجد حدود الثقة 95% للفرق تناسب كل الأطفال والبالغين

الذين زاروا الحديقة وأحبوها؟

الحل:

نرمز بـ n_1 لعدد عناصر عينة الأطفال، و n_2 لعدد عناصر عينة البالغين. وبالتالي فإن نسبة

الأطفال والبالغين الذين زاروا الحديقة وأحبوها في العينتين هو:

$$\bar{p}_1 = \frac{300}{600} = 0.5, \quad \bar{p}_2 = \frac{100}{400} = 0.25$$

تقدير الفرق بين نسبتي كل الأطفال والبالغين الذين زاروا الحديقة وأحبوها هو:

$$((\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}_1 \bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2 \bar{q}_2}{n_2}} < P_1 - P_2 < (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}_1 \bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2 \bar{q}_2}{n_2}}$$

المحور الثاني: نظرية التقدير

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

$$1 - \alpha = 95\% \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow Z_{1-\alpha/2} = 1.96$$

$$0.25 - 1.96 \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{600} + \frac{0.25 \times 0.75}{400}} < P_1 - P_2$$

$$< 0.25 + 1.96 \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{600} + \frac{0.25 \times 0.75}{400}}$$

$$0.25 - 0.058 < P_1 - P_2 < 0.25 + 0.058$$

$$IC_{P_1-P_2} = [0.192, 0.308]$$

خامسا: مجال الثقة للتباين المجتمع

بالإضافة إلى حصولنا على فترة ثقة لمتوسط ونسبة خاصة معينة، يكون من المفيد أن نحصل

على نتائج العينة على فترة للتباين حتى يمكننا ذلك من الحصول على فترة الثقة للتباين المقدرات التي

تم الحصول عليها، ولوضع صيغة فترة ثقة لهذا الغرض يتم استخدام توزيع مربع كاي (تمار، 2020-

2021): الذي يفترض أن تكون العينة العشوائية n المأخوذة من مجتمع طبيعي تباينه σ^2 وتم وتباين

المعينة S^2 ، ويمكن الانطلاق من العلاقة التالية (OpenStax College, 2013):

$$x^2 = \frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2}$$

وتعطى فترة الثقة لتقدير تباين المجتمع بالعلاقة الرياضية التالية (سمواك، 2019-2020):

$$\frac{(n-1) \cdot S^2}{x^2_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}} < \sigma^2 < \frac{(n-1) \cdot S^2}{x^2_{(n-1, \frac{\alpha}{2})}}$$

$$IC_{\sigma^2} = \left[\frac{(n-1) \cdot S^2}{x^2_{(n-1, \frac{\alpha}{2})}}, \frac{(n-1) \cdot S^2}{x^2_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}} \right]$$

$$IC_{\sigma} = \left[\sqrt{\frac{(n-1) \cdot S^2}{x^2_{(n-1, \frac{\alpha}{2})}}}, \sqrt{\frac{(n-1) \cdot S^2}{x^2_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}}} \right]$$

المحور الثاني: نظرية التقدير

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

حيث:

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \text{ : تمثل قيمة تباين العينة محسوب بالصيغة غير المتحيزة:}$$

$$x^2_{(n-1, \frac{\alpha}{2})} \text{ : تستخرج من جدول توزيع كاي مربع بدرجة حرية } n-1$$

مثال 14: تبين من إحدى الدراسات على عينة تحوي 20 برميل نفط أن الانحراف المعياري لنسبة

الكبريت في النفط هو 1.6%، علما أنها تتبع التوزيع الطبيعي. أوجد تقدير لتباين المجتمع والانحراف

المعياري للمجتمع بدرجة ثقة قدرها 95%.

الحل:

$$\frac{(n-1) \cdot S^2}{x^2_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}} < \sigma^2 < \frac{(n-1) \cdot S^2}{x^2_{(n-1, \frac{\alpha}{2})}} \rightarrow \frac{(20-1) \cdot 1.6^2}{x^2_{(19, 0.975)}} < \sigma^2 < \frac{(20-1) \cdot 1.6^2}{x^2_{(19, 0.025)}}$$

$$\frac{48.64}{32.9} < \sigma^2 < \frac{48.64}{8.907} \rightarrow 1.48 < \sigma^2 < 5.46$$

$$IC_{\sigma^2} = [1.48, 5.46]$$

$$IC_{\sigma} = [\sqrt{1.48}, \sqrt{5.46}] = [1.22, 2.34]$$

سادسا: مجال الثقة لنسبة تباين مجتمعين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$:

العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم n_1 ، وحسبنا منها قيم المتغير S_1^2 ، ثم سحبنا من المجتمع

الثاني الذي تباينه σ_2^2 كل العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم n_2 ، وحسبنا منها قيم المتغير S_2^2

وكانت العينات المسحوبة من المجتمع الأول مستقلة عن العينات المسحوبة من المجتمع الثاني، فإن

المتغير F يمكن تعريفه كما يلي (قريشي، 2024-2025):

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

إذا كان S_1^2 هو تباين عينة عشوائية حجمها n_1 تم سحبها من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا ذو

تباين σ_1^2 ، وكان S_2^2 هو تباين عينة عشوائية حجمها n_2 مستقلة عن الأولى تم سحبها من مجتمع

يتوزع توزيعا طبيعيا ذو تباين σ_2^2 فإن فترة الثقة $1 - \alpha$ 100% للنسبة بين تبايني المجتمعين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ تأخذ

الشكل التالي (طشوش، 2012):

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} F_{(\frac{\alpha}{2}, U_1, U_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{(1-\frac{\alpha}{2}, U_1, U_2)}$$

$$IC_F = \left[\frac{S_1^2}{S_2^2} F_{(\frac{\alpha}{2}, U_1, U_2)}, \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{(1-\frac{\alpha}{2}, U_1, U_2)} \right]$$

مثال 15: في دراسة لأعمار المرضى الذين يعانون من قصر النظر، سحبنا من مجتمع الذكور عينة عشوائية تشمل 25، ومن الاناث عينة عشوائية تشمل 21 فتاة. وكانت العينتان مستقلتين، ووجدنا أن تباين العمر لعينة الذكور يساوي 64، وتباين العمر لعينة الاناث يساوي 36. أوجد فترة الثقة لنسبة تباين مجتمع طول الطالبات إلى تباين مجتمع طول الطلبة، وذلك باستخدام مستوى ثقة 95%.

الحل:

بما أن المجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا، والعينتين مستقلتان، إذن فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} F_{(\frac{\alpha}{2}, U_1, U_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{(1-\frac{\alpha}{2}, U_1, U_2)}$$

$$v_2 = n_2 - 1 = 20, v_1 = n_1 - 1 = 24 \quad \text{لدينا:}$$

$$1 - \alpha = 95\% \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$\frac{64}{36} F_{(0.025, 24, 20)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{64}{36} F_{(0.975, 24, 20)}$$

$$0.7639 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 4.2801$$

$$IC_F = [0.76, 4.28]$$

المحور الثاني: نظرية التقدير

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

السلسلة رقم 02: نظرية التقدير

التمرين 01:

أراد مصنع لإنتاج أجهزة الكترونية قياس متوسط عمر الأجهزة المنتجة لو في عينة من 16 جهاز سجلت النتائج التالية:

1.35	1.32	1.30	1.25	1.15	1.10	1.08	1.05	المدة: 1000 ساعة
2	1	2	2	3	1	3	2	عدد الأجهزة

1- أعط تقدير نقطي ل μ .

2- أعط تقدير ل μ مجال ثقة تحت مستوى ثقة 0.95 ثم 0.99 على الترتيب علما أن عمر الأجهزة يخضع للقانون الطبيعي.

3- أعط تقدير ل μ في حالة كون الانحراف المعياري لعمر الأجهزة هو 90 ساعة.

التمرين 02:

لدينا مصنع يعبئ علب السكر المسحوق بحيث الوزن يعبر عنه بالغرام (غ) هو متغير عشوائي X بمتوسط μ وانحراف معياري σ .

1- المتوسط μ غير معروف ومقدر من خلال حجم 10 من X ، الانحراف المعياري ل X معروف ويساوي 1 غ، نقبل بأن X يتبع التوزيع الطبيعي، وزن 10 علب اخذت عشوائيا وصلت إلى وزن إجمالي قدره 9994 غ.

- أوجد المقدر النقطي ل μ ، بين قانونه الاحتمالي وأذكر خصائصه.

- أوجد مجال الثقة ل μ بمستوى ثقة 0.95 وأيضا عند 0.90.

2- نفرض الآن أن μ و σ غير معروفين وأن X يتبع القانون الطبيعي وقمنا بوزن 10 علب مأخوذة كانت أوزانها حسب النتائج المحصل عليها بالغرام كما يلي:

المحور الثاني: نظرية التقدير

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

997.8; 998.2; 1000: 999.2: 999,8; 1000.5;999.6; 999.4; 1001; 999.5

- أعط التقدير النقطي σ^2 .

- أوجد مجال الثقة للمتوسط μ عند مستوى الثقة 0.95، هذا المجال مختلف عن سابقه؟ عل؟

- أوجد مجال الثقة لـ σ^2 عند مستوى الثقة 0.90.

التمرين 03:

في دراسة خاصة بمقارنة متوسط الدخل الشهري لموظفي الولاية، بمتوسط الدخل الشهري لموظفي البلدية، كان تباين الدخل في الولاية 6400 وتباين الدخل في البلدية 3600، فإذا اخترنا من الولاية عينة عشوائية تحتوي على 400 موظف، بمتوسط لدخل الشهري يساوي 25000 دج، واخترنا من البلدية عينة عشوائية مستقلة تحتوي على 300 موظف وكان متوسط الدخل الشهري 21000 دج.

- أحسب فترة ثقة 90% للفرق بين متوسطي الدخل في الهيئتين $(\mu_1 - \mu_2)$.

التمرين 04:

أخذت عينتين مستقلتين من مجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا وكانت المشاهدات كما يلي:

العينة الأولى : 7 ، 9 ، 6 ، 7 ، 5 ، 8 العينة الثانية: 6 ، 7 ، 4 ، 6 ، 2

- أحسب فترة ثقة 90% للفرق بين الوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$. إذا كان تبايني المجتمعين مجهولين وغير متساويين.

التمرين 05:

في أحد ورشات النجارة يتم فحص القطع المصنوعة حيث يتم استبعاد كل القطع التي لا توافق معايير التسويق، يريد صاحب الورشة معرفة نسبة هذه القطع، قام بفحص عينة من 125 قطعة فوجد أن 10 منها لا توافق المعايير.

1- ماهي نسبة القطع التي لا يمكن تسويقها في العينة.

المحور الثاني: نظرية التقدير

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

2- قدر نسبة القطع المصنوعة في هذه الورشة والتي لا يمكن تسويقها.

3- عين مجال الثقة لهذه النسبة بمستوى ثقة 95%

4- ما هو حجم العينة اللازم حتى يكون الخطأ في التقدير 0.02

التمرين 06:

عينتان عشوائيتان مستقلتان، الأولى تشمل 250 رجلا، والثانية تشمل 300 امرأة، فإذا كان عدد المرضى

بالسكري في العينة الأولى 120 مريضا، و150 في العينة الثانية.

المطلوب: أحسب فترة ثقة 95% للفرق بين نسبة المرضى في العينتين.

التمرين 07:

في محطة بنزين تخضع كمية البنزين التي تعبأ بها السيارات للقانون الطبيعي $N(\mu, \sigma)$ أعطت نتائج

معاينة تعبئة 50 سيارة متوسط تعبئة يقدر بـ 28 لتر وانحراف معياري يقدر بـ 10 لتر.

1- عين مجال الثقة للانحراف المعياري لكمية البنزين المعبئة تحت مستوى معنوية بـ 0.05.

2- قدر أصغر قيمة لعدد السيارات التي يجب معاينتها للحصول على خطأ في تقدير المتوسط يقدر بـ

3 لتر من أجل مستوى معنوية 0.05.

التمرين 08:

إذا سحبنا عينة عشوائية حجمها 6 من مجتمع طبيعي وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 ، ثم سحبنا عينة عشوائية

أخرى مستقلة عن العينة الأولى حجمها 5 من مجتمع طبيعي آخر مستقل عن المجتمع الأول وسطه

μ_2 وتباينه σ_2^2 ، وكانت بيانات العينتين كما يلي:

العينة الأولى : 4 ، 9 ، 5 ، 7 ، 8 ، 9 العينة الثانية : 5 ، 4 ، 7 ، 6 ، 3

المطلوب: اعتمادا على هذه البيانات، حدد فترة الثقة لنسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع

الثاني وذلك باستخدام مستوى ثقة 99%.

حلولة السلسلة رفع 02

التمرين 01:

1- التقدير النقطي غير المتغير لـ μ هو $\bar{X}$

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{(1.05 \times 2) + (1.08 \times 3) + (1.10) + (1.15 \times 3) + (1.25 \times 2) + (1.30 \times 2) + 1.32 + (1.35 \times 2)}{16} \\ &= 1.188\end{aligned}$$

2- تعيين مجال الثقة لمتوسط عمر الأجهزة:

عمر الأجهزة يخضع للتوزيع الطبيعي، حجم العينة أقل من 30 وتباينه مجهول. ومنه:

$$IC_{\mu} = \left[\bar{x} - t_{(1-\alpha/2, n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

عند 95%:

$$\hat{s}^2 = \frac{\sum ni (x_i - \bar{x})^2}{15} = 0.0125 \Rightarrow \hat{s} = \sqrt{0.0125} = 0.112$$

$$t_{0.975, 15} = 2.131$$

$$IC_{\mu} = \left[1.188 - 2.131 \times \frac{0.112}{\sqrt{16}}, 1.188 + 2.131 \times \frac{0.112}{\sqrt{16}} \right]$$

$$IC_{\mu} = [1.228, 1.247]$$

عند 99%:

$$t_{0.995, 15} = 2.947$$

$$IC_{\mu} = \left[1.188 - 2.947 \times \frac{0.112}{\sqrt{16}}, 1.188 + 2.947 \times \frac{0.112}{\sqrt{16}} \right]$$

$$IC_{\mu} = [1.105; 1.210]$$

3- تعيين مجال الثقة في الحالة الثانية:

$$\delta = \frac{90}{1000} = 0.09$$

المحور الثاني: نظرية التقدير

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

عند 95%:

$$z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$$

$$IC_{\mu} = \left[1.188 - 1.96 \times \frac{0.09}{\sqrt{16}}, 1.188 + 1.96 \times \frac{0.09}{\sqrt{16}} \right]$$

$$IC_{\mu} = [1.144, 1.232]$$

عند 99%:

$$z_{1-\alpha/2} = z_{0.995} = 2.58$$

$$IC_{\mu} = \left[1.188 - 2.58 \times \frac{0.09}{\sqrt{16}}, 1.188 + 2.58 \times \frac{0.09}{\sqrt{16}} \right]$$

$$IC_{\mu} = [1.130, 1.246]$$

التمرين 02:

1- المقدّر النقطي لـ μ هو $\bar{X}$ حيث:

$$\bar{X} = \frac{\sum Xi}{n} = \frac{9994}{10} = 999.4$$

2- مجال الثقة لـ μ :

$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

عند 95%:

$$z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$$

$$IC_{\mu} = \left[999.4 - 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{10}}, 999.4 + 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{10}} \right]$$

$$IC_{\mu} = [998.78; 1000.02]$$

عند 90%:

$$z_{1-\alpha/2} = z_{0.95} = 1.645$$

$$IC_{\mu} = \left[999.4 - 1.645 \times \frac{1}{\sqrt{10}}, 999.4 + 1.645 \times \frac{1}{\sqrt{10}} \right]$$

المحور الثاني: نظرية التقدير

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

$$IC_{\mu} = [998.88 ; 999.92]$$

- 3- μ و δ غير معروفين:

- التقدير النقطي لـ δ^2 هو $\hat{s}^2$:

$$\hat{s}^2 = \frac{\sum_{i=10}^{10} (Xi - \bar{X})^2}{n-1} = 0.9533$$

$$\hat{s} = \sqrt{0.9533} = 0.9763$$

- إيجاد مجال الثقة للمتوسط μ عند 95%:

$$t_{0.975,9} = 2.262$$

$$IC_{\mu} = \left[999.4 - 2.262 \times \frac{0.9763}{\sqrt{10}}, 999.4 + 2.262 \times \frac{0.9763}{\sqrt{10}} \right]$$

$$IC_{\mu} = [998.7, 1000.1]$$

هذا المجال أوسع من المجال السابق لأن δ غير معروف فأقل معلومة ومنه دقة أقل.

- 3.3 مجال الثقة لـ δ^2 عند مستوى الثقة 90%:

$$\frac{(n-1).S^2}{x^2_{(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}} < \sigma^2 < \frac{(n-1).S^2}{x^2_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}} \rightarrow \frac{9 \times 0.9533^2}{x^2_{(9,0.95)}} < \sigma^2 < \frac{9 \times 0.9533^2}{x^2_{(9,0.05)}}$$

$$0.507 < \sigma^2 < 2.576$$

$$IC_{\sigma^2} = [0.507, 2.576]$$

التمرين 03:

بما أن العينتين كبيرتا الحجم، وتبايني المجتمعين معلومين، فإن فترة الثقة هي على الشكل التالي:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.05}{2}} = Z_{0.975} = 1.645$$

$$4000 - 1.645 \sqrt{\frac{6400}{400} + \frac{3600}{300}} < \mu_1 - \mu_2 < 4000 + 1.645 \sqrt{\frac{6400}{400} + \frac{3600}{300}}$$

$$IC_{\mu_1 - \mu_2} = [3991.30, -4008.70]$$

المحور الثاني: نظرية التقدير

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

التمرين 04:

حساب فترة ثقة 90% للفرق بين الوسطين $\mu_1 - \mu_2$ إذا كان تبايني المجتمعين مجهولين:

- بعد القيام بمختلف العمليات الحسابية يتوفر لدينا البيانات التالية:

$n_2 = 5$	$n_1 = 6$
$\bar{x}_2 = 5$	$\bar{x}_1 = 7$
$S_2^2 = 4$	$S_1^2 = 2$

بنا أن المجتمعين يتوزعان توزيعا طبيعيا بتباينين غير متساويين، والعينتين مستقلتان وصغيرتين، فإن

فترة الثقة المطلوبة في هذه الحالة هي:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{(1-\frac{\alpha}{2}, v)} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{(1-\frac{\alpha}{2}, v)} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}, v} = z_{0.95, 5) = 1.895$$

$$v = \left(\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} \right)^2}{(n_1-1)} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{(n_2-1)}} \right) = \left(\frac{\left(\frac{2}{6} + \frac{4}{5} \right)^2}{\frac{\left(\frac{2}{6} \right)^2}{(6-1)} + \frac{\left(\frac{4}{5} \right)^2}{(5-1)}} \right) = 7$$

$$(7 - 5) - 1.895 \sqrt{\frac{2}{6} + \frac{4}{5}} < \mu_1 - \mu_2 < (7 - 5) + 1.895 \sqrt{\frac{2}{6} + \frac{4}{5}}$$

$$IC_{\mu_1 - \mu_2} = [-0.017, 4.017]$$

التمرين 05:

1- نسبة القطع التي لا يمكن تسويقها في العينة:

$$\bar{p} = \frac{10}{125} = 0.08$$

2- قدر نسبة القطع المصنوعة في هذه الورشة والتي لا يمكن تسويقها:

$$E(\bar{p}) = \mu_p = P$$

3- عيّن مجال الثقة لهذه النسبة بمستوى ثقة 95%:

$$1 - \alpha = 95\% \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow Z_{1-\alpha/2} = 1.96$$

إذن بالتعويض في فترة الثقة نجد أن فترة ثقة 95% للوسط μ هي:

$$\begin{aligned} \bar{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{pq/n} \leq P \leq \bar{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{pq/n} \\ 0.08 - 1.96 \cdot \sqrt{0.08 \times 0.92 / 125} \leq P \leq 0.08 + 1.96 \cdot \sqrt{0.08 \times 0.92 / 125} \\ IC_p = [0.0324, 0.1276] \end{aligned}$$

4- حجم العينة اللازم حتى يكون الخطأ في التقدير 0.02:

$$\begin{aligned} E = Z_{0.975} \cdot \sqrt{\frac{0.08(0.92)}{n}} = 0.02 \\ n \approx 707 \end{aligned}$$

التمرين 06:

نسبة الرجال والنساء المرضى بالسكري في العينتين هو:

$$\bar{p}_1 = \frac{120}{250} = 0.48, \quad \bar{p}_2 = \frac{150}{300} = 0.50$$

تقدير الفرق بين نسبة المرضى في العينتين عند فترة الثقة 95%:

$$\begin{aligned} (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}_1 \bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2 \bar{q}_2}{n_2}} < P_1 - P_2 < (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}_1 \bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2 \bar{q}_2}{n_2}} \\ 1 - \alpha = 95\% \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow Z_{1-\alpha/2} = 1.96 \\ -0.02 - 1.96 \sqrt{\frac{0.48 \times 0.52}{250} + \frac{0.50 \times 0.50}{300}} < P_1 - P_2 \\ < -0.02 - 1.96 \sqrt{\frac{0.48 \times 0.52}{250} + \frac{0.50 \times 0.50}{300}} \\ -0.10 < P_1 - P_2 < 0.06 \\ IC_{P_1-P_2} = [-0.10, 0.06] \end{aligned}$$

المحور الثاني: نظرية التقدير

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

التمرين 07:

1- تعيين مجال الثقة للإنحراف المعياري تحت مستوى معنوية 0.05:

$$\frac{(n-1) \cdot S^2}{\chi^2_{(n-1, 1-\frac{\alpha}{2})}} < \sigma^2 < \frac{(n-1) \cdot S^2}{\chi^2_{(n-1, \frac{\alpha}{2})}} \rightarrow \frac{(49)10^2}{\chi^2_{(49, 0.975)}} < \sigma^2 < \frac{(49)10^2}{\chi^2_{(49, 0.025)}}$$

$$\frac{(49)10^2}{70.22} < \sigma^2 < \frac{(49)10^2}{31.555} \rightarrow 69.78 < \sigma^2 < 155.28$$

$$IC_{\sigma^2} = [69.78, 155.28]$$

$$IC_{\sigma} = [\sqrt{69.78}, \sqrt{155.28}] = [8.35, 12.46]$$

2- حجم العينة أكبر من 30 و δ مجهول إذا:

$$E = Z_{0.975} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}} < 3 \Rightarrow n \approx 44$$

التمرين 08:

- بعد القيام بمختلف العمليات الحسابية يتوفر لدينا البيانات التالية:

$n_2 = 5$	$n_1 = 6$
$S_2^2 = 2.5$	$S_1^2 = 4.4$

بنا أن المجتمعين يتوزعان توزيعاً طبيعياً، والعينتين مستقلتان وصغيرتين، فإن فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} F_{(\frac{\alpha}{2}, \nu_1, \nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{(1-\frac{\alpha}{2}, \nu_1, \nu_2)}$$

$$\nu_2 = n_2 - 1 = 4, \quad \nu_1 = n_1 - 1 = 5$$

$$1 - \alpha = 99\% \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005$$

$$\frac{4.4}{2.5} F_{(0.005, 5, 4)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{4.4}{2.5} F_{(0.995, 5, 4)}$$

$$0.1131 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 19.5233$$

$$IC_F = [0.11, 19.52]$$

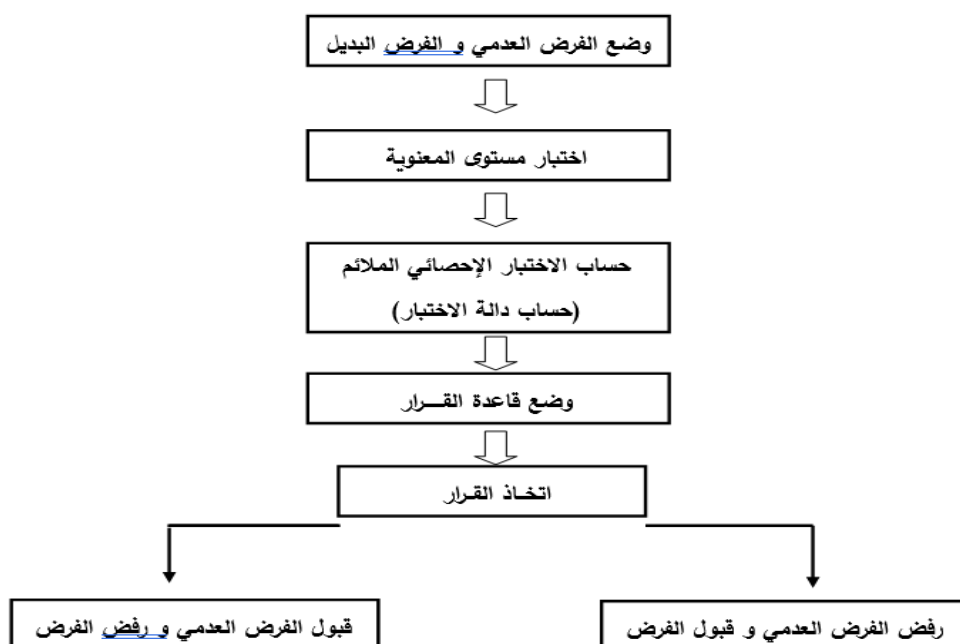
المحور الثالث:
إختبار الفرضيات
الاحصائية

أولاً: مفاهيم أساسية حول اختبار الفروض الإحصائية

بالرغم من أهمية موضوع تقدير المعالم الذي تناولنا دراسته في المحور السابق إلا أنه غالب ما يكون الاهتمام منصبا ليس على مجرد تقدير المعالم ولكن على عملية وضع القواعد التي تسمح بالتوصل إلى قرار بقبول أو رفض فرض عن معالم مجتمع أو أكثر وهذا ما يسمى باختبارات الفروض (OpenStax College, 2013).

فمثلا يمكن للمسؤول عن الرقابة الإحصائية على جودة المنتجات أن يقرر ما إذا كانت الوحدات المنتجة من صنف معين تحقق المواصفات المطلوبة أم لا، فإذا كانت المواصفات المطلوبة تحدد أن وزن الوحدة المنتجة من صنف معين تساوي 1 كلغ، وبالتالي فإن المسؤول عن الرقابة الإحصائية في هذه الحالة يرغب في اختبار الفرض التالي: $\mu = 1$ ، حيث μ يرمز لمتوسط مجتمع الوحدات المنتجة من هذا الصنف. وعلى العموم فإن الفرض الإحصائي هو ادعاء أو اعتقاد يتعلق بقيمة غير معلومة للمؤشر (أي للمعلمة) ويراد اختبار مدى صحتها. كذلك فإن الفرض الإحصائي هو كل عبارة صحتها أو عدم صحتها بحاجة إلى قرار (قريشي، 2024-2025).

عادة لإجراء اختبار الفروض هناك خمس خطوات يجب القيام بها، ويمكن توضيحها في المخطط التالي:



1.1 الفرض العدمي والفرض البديل:

الفرض العدمي يرمز له بالرمز H_0 ، وهو صفة مميزة لا تحتاج إلى إثبات، فنحن نفترض أنه صحيحاً ما لم يظهر بوضوح أنه غير صحيح، فمثلاً عادة ما تكون عملية تعبئة المنظف في الأكياس بمتوسط 500 غ. في أي وقت من عملية التعبئة، نفترض أن هذا هو المتوسط ما لم يكن دليل العينة يشير بشكل واضح إلى أن المتوسط قد انحراف عما هو محدد. وبالتالي يوضع الفرض العدمي على النحو التالي (بوزنورة، 2021-2022):

$$H_0: \mu = 500$$

وعلى العموم، الفرض العدمي يتصف بحقيقة أننا نعامله وكأنه صحيح ما لم يكن ادعائه يتناقض بوضوح مع بيانات العينة، لذا إذا كان الفرض العدمي غير مناقض بوضوح، فإنه لا يوجد سبباً كافياً لرفضه. وغالباً ما ننظر إلى الفرض العدمي على أنه نقطة البداية في عملية التحليل.

أما **الفرض البديل** فيرمز له بالرمز H_1 ، وهو بديل لحالة الفرض العدمي، أي هو الفرض الذي يمكن قبوله عند رفض الفرض العدمي، ففي مثال عملية التعبئة، يكون الفرض البديل هو أن متوسط العملية الحالي ليس 500 غ. وبالتالي يوضع الفرض البديل على النحو التالي (تمار، 2020-2021):

$$H_1: \mu \neq 500$$

والفرض البديل يأخذ ثلاثة أشكال وهي (إياد، 2017):

- **الفرض البديل ذو الذيلين (الطرفيين):** وفيه تكون معلمة المجتمع θ لا تساوي قيمة معينة θ_0 ففي مثال عملية التعبئة دائماً يكون $H_1: \mu \neq 500$ هذا من جهة. ومن جهة أخرى نضع نصف قيمة α في كل من طرفي توزيع دالة الاختبار، أي تكون $\frac{\alpha}{2}$ على كل طرف. فنقبل الفرض H_0 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة قبول H_0 ، ونرفض H_0 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة رفض H_0 .

- **الفرض البديل ذو الطرف الأعلى (الطرف الأيمن):** وفيه تكون معلمة لمجتمع θ أكبر من قيمة معينة θ_0 ، ففي المثال السابق يكون الفرض البديل $H_1 : \mu > 500$ هذا من جهة. ومن جهة أخرى نضع قيمة α في الطرف الأيمن (الأعلى) من توزيع دالة (اقتران) الاختبار. فنقبل H_0 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة قبول H_0 ، ونرفض H_0 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة رفض H_0 .

- **الفرض البديل ذو الطرف الأدنى (الطرف الأيسر):** وفيه تكون معلمة المجتمع θ أصغر من قيمة معينة θ_0 ، ففي المثال السابق يكون الفرض البديل: $H_1 : \mu < 500$ ، ونضع قيمة α في الطرف الأيسر من توزيع دالة الاختبار. فنقبل H_0 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة قبول H_0 ، ونرفض H_0 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة رفض H_0 .

2.1 الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني:

من المعلوم أنه عند اتخاذ أي قرار إحصائي فإن ذلك ينطوي على أخطاء بنسب معينة، حيث أنه من المحتمل أن نرفض فرضية معينة في حين أنها صحيحة، والعكس صحيح. لهذا فإن هناك نوعان من الأخطاء الإحصائية وهي:

- **الخطأ من النوع الأول (α):** هو الخطأ الذي نقع فيه عندما نرفض الفرضية الصفرية H_0 بالرغم من صحتها، ويرمز لاحتمال وقوع هذا الخطأ بالرمز α ، ونسميه "مستوى دلالة الاختبار" أو "مستوى معنوية الاختبار".

- **الخطأ من النوع الثاني (β):** هو الخطأ الذي نقع فيه عندما نقبل الفرضية الصفرية بالرغم من عدم صحتها، ويرمز إلى احتمال هذا الخطأ بالرمز β .

وعموماً يمكن توضيح نوعي الخطأ من خلال الجدول التالي:

المحور الثالث: اختبار الفرضيات الإحصائية

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

جدول 07: جدول توضيحي لنوعي الخطأ

القرار الفرض العدمي	قبول الفرض العدمي H_0	رفض الفرض العدمي H_0
الفرض العدمي H_0 صحيح	قرار صحيح	خطأ من النوع الأول (α)
الفرض العدمي H_0 خاطئ	خطأ من النوع الثاني (β)	قرار صحيح

المصدر: (قريشي، 2024-2025)

استنادا إلى هذا الجدول فإن الفرض العدمي إما أن يكون صحيحا أو غير صحيحا وهو الظاهر في العمود الأول، وفيما يتعلق بالقرار، فإننا إما نقبل الفرض العدمي أو نرفضه، وبالتالي هناك أربع احتمالات في هذا الشأن وهي:

- قبول H_0 وهو صحيح، وهذا يمثل بالطبع قرارا صحيحا.
 - رفض H_0 وهو صحيح، ولاشك أن هذا القرار خطأ، ويطلق عليه خطأ من النوع الأول.
 - قبول H_0 وهو غير صحيح، هذا بدوره قرار خاطئ، ويسمى الخطأ من النوع الثاني.
 - رفض H_0 وهو غير صحيح، و هذا يمثل قرارا صحيحا.
- بصفة عامة يمكن توضيح الخصائص التالية للعلاقة بين الخطأين:
- يرتبط الخطأ من النوع الأول (α) ارتباطا عكسيا مع الخطأ من النوع الثاني (β) ، أي أن انخفاض احتمال أحدهما يؤدي إلى زيادة احتمال الآخر.
 - زيادة حجم العينة يؤدي إلى تناقص كلا النوعين من الخطأ.
 - إذا كان الفرض العدمي H_0 غير صحيح، فإن قيمة الخطأ من النوع الثاني (β) تكون أكبر ما يمكن عندما تكون القيمة الحقيقية للمعلمة تكاد تتطابق مع القيمة الافتراضية لها، والعكس صحيح عندما يكون الفرق بين القيمتين الحقيقية والافتراضية، فإن قيمة الخطأ من النوع الثاني (β) تقل.

3.1 مستوى المعنوية أو مستوى الدلالة:

في اختبار فرضية معينة، فإن أقصى احتمال والذي يمكن أن نتحمل به خطأ من النوع الأول يسمى **مستوى المعنوية للاختبار**، هذا الاحتمال يرمز له بالرمز α ويحدد بشكل عام قبل سحب أي عينة، لكي لا تتأثر النتائج التي حصلنا عليها في اختبارنا. ومن الناحية العملية فإننا نستخدم عادة مستوى المعنوية 0.05 أو 0.01، وإذا كان هناك قيم أخرى يتم استخدامها (بن البار، 2020-2021). إن استخدامنا لمستوى المعنوية 0.05 أو 5 % في اختبار فرضية معينة، فهذا يعني أن هناك حوالي 5 فرص من 100 أننا سوف نرفض الفروض وهي صحيحة؛ بمعنى أننا سنكون واثقين بنسبة 95 % في أننا سنتخذ القرار الصحيح، وبالمقابل فإنه من الممكن أن نكون على خطأ باحتمال قدره 0.05. (بلعدي، 2020-2021)

4.1 إحصاء الاختبار Test Statistic:

إحصاء الاختبار هو اقتران إحصائي يساعدنا على اتخاذ قرار حول فرضية إحصائية معينة، ويتم حساب قيمته من بيانات العينة، وبالتالي فهو عبارة عن متغير عشوائي تتغير قيمته بتغير بيانات العينة الإحصائية التي نأخذها من المجتمع الإحصائي. ومن القيمة التي نحصل عليها لإحصاء الاختبار نقرر ما إذا كان هناك سببا قويا لرفض H_0 وقبول H_1 أم لا (Montgomery & Runger, 2018).

ثانيا: اختبار الفروض للمتوسطات

يتناول هذا الاختبار متوسط المجتمع μ ، مثل متوسط الدخل، متوسط وزن منتج معين، ويؤكد اختبار المتوسط فرضية مساواته لقيمة ما μ_0 ، وللقيام بالاختبار نعلم عينة عشوائية نحسب فيها المتوسط $\bar{X}$ ثم نستخدم التوزيع الاحتمالي $\bar{X}$ لقياس قرب أو بعد هذه القيمة من μ_0 . نعلم في اختبار المتوسط على الخطوات الخمسة السابقة والمتمثلة فيما يلي (لعلام، 2023-2024):

1.2 صياغة الفرضية الصفرية والفرضية البديلة وهذا حسب نوع الاختبار:

- اختبار ذو اتجاهين:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

- اختبار ذو حد (ذيل) واحد من اليمين:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu > \mu_0$$

- اختبار ذو حد (ذيل) واحد من اليسار:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu < \mu_0$$

2.2 تحديد نوع التوزيع:

- إذا كان تباين المجتمع σ^2 معلوم نستخدم على توزيع Z .

- إذا كان تباين المجتمع σ^2 مجهول هنا نستخدم على التوزيع Z إذا كان حجم العينة أكبر من 30،

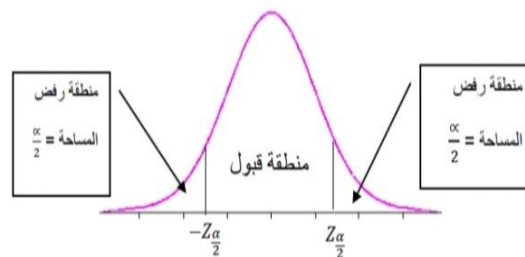
أو نستخدم على توزيع ستودنت t إذا كان حجم العينة أقل من 30.

3.2 حساب القيمة الجدولية: وهذا اعتمادا على التوزيع الذي اعتمدنا عليه وبالتالي في هذه الخطوة

نحدد أيضا منطقة قبول الفرضية الصفرية ومنطقة الرفض اعتمادا على شكل الفرضية كما يلي:

- منطقة القبول والرفض في حالة اختبار ذو حدين:

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$



المحور الثالث: اختبار الفرضيات الإحصائية

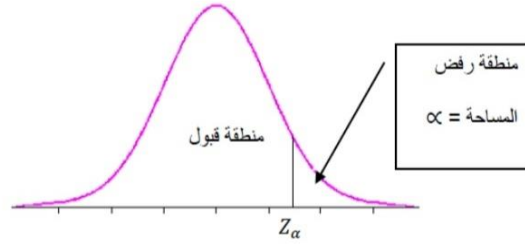
السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

من الشكل فإن: منطقة قبول H_0 تنتمي إلى المنطقة: $\left[-Z_{\frac{\alpha}{2}}, Z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$

منطقة رفض H_0 تنتمي للمنطقة: $\left]-\infty, -Z_{\frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[Z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right[$

- منطقة القبول والرفض في حالة اختبار ذو حد واحد من اليمين:

$$H_1: \mu > \mu_0$$

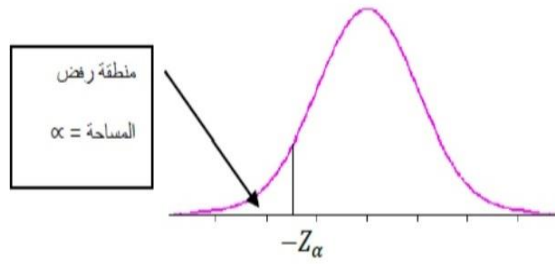


من الشكل فإن: منطقة قبول H_0 تنتمي إلى المنطقة: $\left]-\infty, -Z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$

منطقة رفض H_0 تنتمي للمنطقة: $\left[Z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right[$

- منطقة القبول والرفض في حالة اختبار ذو حد واحد من اليسار:

$$H_1: \mu < \mu_0$$



من الشكل فإن: منطقة قبول H_0 تنتمي إلى المنطقة: $\left]-\infty, -Z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$

منطقة رفض H_0 تنتمي للمنطقة: $\left[Z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right[$

4.2 تحديد القيمة المحسوبة (الفعلية) للإحصائية:

يتم تحديد القيمة المحسوبة اعتمادًا على شكل التوزيع الذي اعتمدنا عليه والذي تم تحديده في

الخطوة الثانية (سمواك، 2019-2020).

- إذا كان التوزيع المعتمد عليه هو Z وكان تباين المجتمع معلوم فإن القيمة المحسوبة تحسب بالعلامة التالية:

$$Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

- إذا كان التوزيع المعتمد عليه هو Z وكان تباين المجتمع مجهول و $n \geq 30$ فإن القيمة المحسوبة تحسب بالعلامة التالية:

$$Z_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

- إذا كان التوزيع المعتمد عليه هو t فإن القيمة المحسوبة تحسب بالعلامة التالية:

$$t_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

5.2 اتخاذ القرار:

يتم اتخاذ القرار من خلال المقارنة بين القيمة المحسوبة والقيمة الجدولية (بوعروري، 2022-2023):

- إذا وقعت القيمة المحسوبة في منطقة القبول نقبل الفرضية الصفرية H_0 ونرفض الفرض البديل H_1 .

- إذا وقعت القيمة المحسوبة في منطقة الرفض نرفض الفرضية الصفرية H_0 ونقبل الفرض البديل H_1 .

مثال 01: عينة عشوائية حجمها 36 شخصا اختيرت من أفراد حي معين، فإذا كان الوسط الحسابي

لدخول الأفراد الأسبوعية في العينة هو 550 دينار، كيف يمكن اختبار الفرض البديل بأن متوسط الدخل

الأسبوعي لمواطني الحي يساوي 530 دينار مقابل الفرض البديل أنه لا يساوي 530 دينار بمستوى

معنوية 5%. إذا علمت أن الانحراف المعياري لدخول الأفراد يساوي 140 ديناراً.

الحل:

لدينا:

$$n = 36, \quad X = 550, \quad \mu_0 = 530, \quad \alpha = 0.05 \quad \sigma = 140$$

1. صياغة الفرضيات:

$$H_0: \mu = 530$$

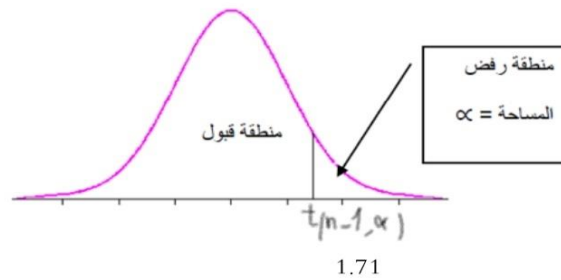
$$H_1: \mu \neq 530$$

2. نوع التوزيع: لدينا σ معلوم وبالتالي نعتمد على توزيع Z

3. القيمة الجدولية:

$$\alpha = 0.05 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0.05}{2}} = Z_{1-0.025} = Z_{0.975} = \pm 1.96$$

تحديد منطقة القبول والرفض



4. تحديد القيمة المحسوبة t_{cal} :

$$t_{cal} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{520 - 500}{75/\sqrt{25}} = +1.33$$

5. القرار الإحصائي: نلاحظ أن القيمة المحسوبة تقع في منطقة القبول بالتالي H_0 ونرفض الفرض

البديل (وبالتالي يمكن القول بأن مسحوق الصابون يحتوي على 500 غ من المادة الفعالة).

ثالثا: اختبار الفروض للفرق بين متوسطين

نظرية: في حالة $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$ ، يقترب توزيع المتغيرة المعيارية للفرق بين متوسطين من التوزيع

الطبيعي المعياري (خليفة، 2018-2019). ونكتب: $\mu_{\mu_1 - \mu_2} \approx N(0,1)$

مثال 02: ليكن المجتمع U_1 : 3، 7، 8. والمجتمع U_2 : 2، 4. تحقق من أن:

U_1			$U_1 - U_2$	
8	7	3	2	U_2
6	5	1		
4	3	-1		

الحل:

$$\sigma_{U_1-U_2}^2 = \sigma_{U_1}^2 + \sigma_{U_2}^2$$

$$\mu_{U_1-U_2}^2 = \mu_{U_1}^2 - \mu_{U_2}^2$$

$$\mu_{U_1} = \frac{(3 + 7 + 8)}{3} = 6; \mu_{U_2} = \frac{(2 + 4)}{2} = 3$$

$$\Rightarrow \mu_{U_1} - \mu_{U_2} = 6 - 3 = 3$$

$$\mu_{U_1-U_2} = \frac{(1 + 5 + 6 - 1 + 3 + 4)}{6} = 3$$

$$\sigma_{U_1}^2 = \frac{(3^2 + 7^2 + 8^2)}{3 - 6^2} = \frac{14}{3}; \sigma_{U_2}^2 = \frac{(2^2 + 4^2)}{2} = 3^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sigma_{U_1}^2 + \sigma_{U_2}^2 = \frac{17}{3}$$

$$\Rightarrow \sigma_{U_1-U_2}^2 = \frac{(1^2 + 5^2 + 6^2 - 1^2 + 3^2 + 4^2)}{6} = 3^2$$

$$= \frac{(1 + 25 + 36 + 1 + 9 + 16)}{6 - 9} = \frac{17}{3}$$

رابعاً: اختبار الفروض للنسبة والفرق بين نسبتي

1.4 اختبار الفروض للنسبة:

إن الخطوات المتبعة في اختبار الفرضيات المتعلقة بالوسط الحسابي هي نفسها التي سيتم

استخدامها في اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة، حيث نهتم بدراسة النسبة p ، وهي النسبة في العينة

التي تملك الخاصية المطلوبة (بن البار، 2020-2021).

المحور الثالث: اختبار الفرضيات الإحصائية

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

وكما ذكرنا آنفاً أن توزيع المعاينة بالنسبة يتبع إما التوزيع الثنائي أو التوزيع الهندسي الزائد، لكن عندما يكون حجم العينة كبيراً ومع توفر الشروط ($n.p > 5$, $n.q > 5$)، وبالاعتماد على نظرية النهاية المركزية فإنه يمكن تقريب توزيع المعاينة بالنسبة من التوزيع الطبيعي. لذلك سوف نستخدم التوزيع الطبيعي دائماً في اختبار الفرضيات حول النسبة (P). وتكون قيمة الإحصاء Z كما أشرنا لها في فصل توزيع المعاينة كما يلي (بوعروري، 2022-2023):

$$Z = \frac{\bar{p} - p}{\sqrt{pq/n}}$$

أما الفرضية الصفرية فتكون كما يلي: $H_0: P = p_0$

في حين أن الفرضية البديلة تأخذ الحالات الثلاث كما رأينا في اختبار الفرضيات المتعلقة بالوسط، وذلك حسب نوع الاختبار، تبعاً لذلك يتم استخراج قاعدة القرار كما يلي:

جدول 08: قاعدة القرار لاختبار النسبة في الحالات الثلاث

نوع الاختبار	الفرضية البديلة	قاعدة القرار
أحادي الاتجاه من اليمين	$H_1: P > p_0$	عدم رفض $H_0 \Rightarrow Z_C \leq +Z_{0.5-\alpha}$ رفض $H_0 \Rightarrow Z_C > +Z_{0.5-\alpha}$
أحادي الاتجاه من اليسار	$H_1: P < p_0$	عدم رفض $H_0 \Rightarrow Z_C > +Z_{0.5-\alpha}$ رفض $H_0 \Rightarrow Z_C \leq +Z_{0.5-\alpha}$
ثنائي الاتجاه	$H_1: P \neq p_0$	عدم رفض $H_0 \Rightarrow -Z_{0.5-\alpha/2} \leq Z_C \leq +Z_{0.5-\alpha/2}$ رفض $H_0 \Rightarrow Z_C < -Z_{0.5-\alpha/2} < Z_C > +Z_{0.5-\alpha/2}$

المصدر: (قريشي، 2024-2025)

المحور الثالث: اختبار الفرضيات الإحصائية

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

مثال 03: أبدت إدارة التسويق في مؤسسة ما فكرة جديدا يسمى " البيع بروح الفريق " وفيه تستخدم الهاتف في عرض السلع على الزبائن قبل البيع، يدعي فريق البيع أنه يمكنه زيادة نسبة مكالمات البيع الناجحة إلى أكثر من 18 %، وهي نسبة البيع الحالية والمحقة، ارتأت الإدارة أن تستخدم فريق البيع ولكن في البداية اشترطت أن تكون نسبة مكالمات البيع الناجحة يجب أن تتعدى النسبة الحالية للمبيعات. في اختبار ما، جرب فريق البيع مع عينة من 100 مكالمات بيع نجح في إتمام 22 عملية بيع. هل هذه العينة تظهر أن هناك تحسناً قد حدث مع فريق البيع عند مستوى معنوية 0.05؟

الحل:

الخطوة الأولى: صياغة الفرضيات

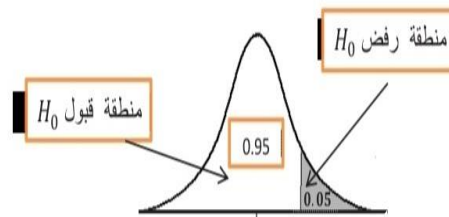
بما أن المسألة تضمنت اتجاها محددًا وهو زيادة نسبة مكالمات البيع الناجحة، فإنه يتم استعمال فرضية بديلة ذات اتجاه واحد ومن اليمين (أكبر من)، وتكون صياغة الفرضيتين كما يلي:

$$H_0: P = 0.18 \quad \leftrightarrow \quad H_1: P > 0.18$$

الخطوة الثانية: تحديد مستوى الدلالة (مناطق القبول والرفض لفرضية العدم)

مستوى الدلالة هو 0.05، وبما أن الاختبار أحادي الاتجاه من اليمين فإن منطقة الرفض ستكون

على جانب واحد ومن اليمين كما هو موضح في الشكل الموالي:



الخطوة الثالثة: تحديد قاعدة القرار

بما أن حجم العينة أكبر من 30 فإنه يتم التقريب للتوزيع الطبيعي وسنحدد قاعدة القرار بناء

على الاحصاء Z ، وكون الاختبار أحادي الاتجاه من فإن قاعدة القرار تكون كما يلي:

$$Z_C \leq +Z_{0.5-\alpha} \Rightarrow H_0 \text{ رفض}$$

$$Z_C > +Z_{0.5-\alpha} \Rightarrow H_0 \text{ رفض}$$

الخطوة الرابعة: حساب القيمة الجدولية والفعلية لإحصاء الاختبار

أولاً: القيمة الجدولية

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{0.5-\alpha} = 1.645$$

ثانياً: القيمة الفعلية

$$\bar{p} = \frac{22}{100} = 0.22$$

$$Z_C = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} = \frac{0.22 - 0.18}{\sqrt{\frac{0.18(1 - 0.18)}{100}}} = 1.05$$

الخطوة الخامسة: المقارنة واتخاذ القرار

$$Z_C < +Z_{0.5-\alpha} : 1.05 < 1.645 \text{ أي أن}$$

وهذا يعني عدم رفض الفرضية الصفرية H_0 ورفض الفرضية البديلة أي أن الفكر الجديد في

البيع المنتهج من قبل إدارة التسويق لم يؤد إلى تحسن حقيقي.

2.4 اختبار الفروض للفرق بين نسبتي

لاختبار فرضية فروق بين نسبتي مجتمعين كبيرين، فإن صياغة هذه الفرضية تكون بإحدى

الصيغ الثلاثة التالية (العتوم، 2015):

- اختبار ذو اتجاهين:

$$H_0: P_1 = P_2$$

$$H_1: P_1 \neq P_2$$

- اختبار ذو حد (ذيل) واحد من اليمين:

$$H_0: P_1 = P_2$$

$$H_1: P_1 > P_2$$

- اختبار ذو حد (ذيل) واحد من اليسار:

$$H_0: P_1 = P_2$$

$$H_1: P_1 < P_2$$

وتحسب إحصاء الاختبار بالصيغة التالية (إياد، 2017):

$$\sigma_{cal} = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (P_1 - P_2)}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}} = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}}$$

حيث أن قيمة نسب المجتمع مجهولة، وحيث أن فرض العدم يقول بعد وجود فروق بين نسبي المجتمع،

فإن توزيع المعاينة للفرق بين النسبتين يعطى بالشكل:

$$\sigma_{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)} = \sqrt{\bar{p}\bar{q} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

$$\bar{p} = \frac{n_1 \bar{p} + n_2 \bar{p}}{n_1 + n_2}$$

مثال 04: يوضح الجدول أدناه تصريح بالدخل لعينتين مستقلتين يعرضها مكتبان:

مكتب 2	مكتب 1	
300	250	حجم العينة
27	35	عدد التصريحات

- هل يوجد فرق في التصريحات الخاطئة بين المكتبين عند مستوى معنوية 10%.

الحل:

- صياغة الفرضيات:

$$H_0: P_1 = P_2 \rightarrow P_1 - P_2 = 0$$

$$H_1: P_1 \neq P_2 \rightarrow P_1 - P_2 \neq 0$$

- نوع التوزيع:

لدينا $n_1, n_2 > 30$ وبالتالي فإن التوزيع المعتمد هو التوزيع الطبيعي المعياري Z .

- تحديد القيمة الجدولية:

$$\alpha = 0.01 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.01}{2}} = Z_{0.995} = \pm 1.65$$

- القيمة المحسوبة:

$$\sigma_{cal} = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (P_1 - P_2)}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}}$$

$$\hat{p}_1 = \frac{35}{250} = 0.14 \quad , \quad \hat{p}_2 = \frac{27}{300} = 0.09$$

$$\bar{p} = \frac{n_1 \bar{p} + n_2 \bar{p}}{n_1 + n_2}$$

$$\bar{p} = \frac{250(0.14) + 300(0.09)}{250 + 300} = \mathbf{0.113}$$

$$\sigma_{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)} = \sqrt{\bar{p}q \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} = \sqrt{(0.113)(0.887) \left(\frac{1}{250} + \frac{1}{300} \right)} = 0.0271$$

$$\sigma_{cal} = \frac{(0.14 - 0.09) - 0}{0.0271} = 1.85$$

• القرار:

نلاحظ أن القيمة المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية وبالتالي نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1 ومنه فإن نسبة تصريحات الداخل الخاطئة تعتبر مختلفة.

خامسا: اختبار الفروض لتباين المجتمع

في الكثير من الأحيان يكون من الأهمية بما كان معرفة تباين مجتمع من المجتمعات. ففي عملية التصنيع يلزمنا معرفة التباين في أوزان المنتجات أو في أحجامها، لأن هذا التباين يعكس مستوى الدقة ومستوى الجودة في عملية التصنيع. ولهذا كثيرا ما يقوم مهندسو الإنتاج بقياس التباين في المنتجات من حين لآخر ويحاولون أن يبقوا ذلك التباين ضمن حدود معينة (بلعدي، 2020-2021).

المحور الثالث: اختبار الفرضيات الإحصائية

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

إذا كان لدينا مجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً بتباينه σ^2 ، وأردنا إجراء اختبارات حول المعلمة σ^2 ، فإن إحصاء الاختبار المناسب في هذه الحالة هو الإحصاء الذي يعتمد على أفضل مقدر للمعلمة σ^2 ، وهو تباين العينة S^2 ، وهذا الإحصاء هو المتغير العشوائي χ^2 ، حيث (Wackerly et al., 2008):

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

والتوزيع الاحتمالي لهذا المتغير يسمى توزيع كأي تربيع بدرجة حرية: $u = n - 1$

وبالتالي أردنا اختبار الفرضية الصفرية $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ مقابل الفرضية البديلة:

1- $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$\chi^2 < \chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2}, u)} \quad \text{أو} \quad \chi^2 > \chi^2_{(\frac{\alpha}{2}, u)}$$

2- $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$\chi^2 > \chi^2_{(\alpha, u)}$$

3- $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$\chi^2 < \chi^2_{(1-\alpha, u)}$$

مثال 05: يدعى مدير أحد المصانع أن منتجاته لا يزيد الانحراف المعياري لأطوالها عن 0.2 سم. أراد أحد الزبائن أن يتأكد من هذا الادعاء، فأخذ عينة عشوائية مكونة من 10 منتجات فوجد أن الانحراف المعياري فيها كان 0.4 سم.

المطلوب: هل تعطينا هذه النتيجة مبرراً قوياً لرفض إدعاء البائع مستخدماً في ذلك مستوى الدلالة 0.05.

الحل:

$$H_0: \sigma^2 = 0.04$$

$$H_1: \sigma^2 > 0.04$$

$$\alpha = 0.05$$

نلاحظ أن الفرضية البديلة ذات طرف واحد، إذن القيمة الحرجة يتم إيجادها كما يلي:

$$\chi^2_{(\alpha, \nu)} = \chi^2_{(0.05, 9)} = 16.919$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كان: $\chi^2 > 16.919$

والآن نقوم بحساب إحصاء الاختبار:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(10-1)0.16}{0.04} = 36$$

بما أن: $36 > 16.919$ فإننا نرفض الفرض العدمي H_0 ونقبل الفرض البديل عند مستوى الدلالة 0.05؛ أي أن هذه النتيجة تعطينا مبررا قويا لرفض ادعاء البائع وبالتالي فإن الانحراف المعياري يزيد عن 0.2 سم.

سادسا: اختبار الفروض لنسبة تباين مجتمعين

إذا كان لدينا مجتمعان يتوزعان طبيعيا، وسحبنا من المجتمع الأول الذي تباينه σ_1^2 عينة عشوائية حجمها n_1 ، وكان تباينها s_1^2 ، ثم سحبنا من المجتمع الثاني الذي تباينه σ_2^2 عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها n_2 ، وكان تباينها s_2^2 ، وأردنا إجراء اختبار خاص بمقارنة σ_1^2 و σ_2^2 ، فإن إحصاء الاختبار المناسب هو المتغير العشوائي F، حيث (سموك، 2019-2020):

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

والتوزيع الاحتمالي لهذا المتغير يسمى **توزيع فيشر** بدرجتي حرية: $n_1 - 1$ و $n_2 - 1$ (درجة حرية البسط) و $n_2 - 1$ (درجة حرية المقام).

وعليه أردنا اختبار الفرضية الصفرية: $H_0: = 1 \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ أو $H_0: = \sigma_2^2 \sigma_1^2$

مقابل الفرضية البديلة:

$H_1: \neq \sigma_2^2 \sigma_1^2$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$F < F_{(1-\frac{\alpha}{2}, \nu_1, \nu_2)} \text{ أو } F > F_{(\frac{\alpha}{2}, \nu_1, \nu_2)}$$

H_0 نرفض $H_1: \sigma_2^2 > \sigma_1^2$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$F > F_{(\alpha, v_1, v_2)}$$

H_0 نرفض $H_1: \sigma_2^2 < \sigma_1^2$ ؛ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت:

$$F < F_{(1-\alpha, v_1, v_2)}$$

وما يجب الإشارة إليه هو أن:

- $F_{(\frac{\alpha}{2}, v_1, v_2)}$: هي نقطة على المحور الأفقي لتوزيع فيشر ذي درجتي حرية: $(v_1 = n_1 - 1)$

و $(v_2 = n_2 - 1)$ ، والتي يقع إلى يمينها مساحة $(\frac{\alpha}{2})$.

- $F_{(1-\frac{\alpha}{2}, v_1, v_2)}$: هي نقطة على المحور الأفقي لتوزيع فيشر ذي درجتي حرية: $(v_1 = n_1 - 1)$

و $(v_2 = n_2 - 1)$ ، والتي يقع إلى يمينها مساحة $(1 - \frac{\alpha}{2})$.

- $F_{(\alpha, v_1, v_2)}$: هي نقطة على المحور الأفقي لتوزيع فيشر ذي درجتي حرية: $(v_1 = n_1 - 1)$

و $(v_2 = n_2 - 1)$ ، والتي يقع إلى يمينها مساحة (α) .

- $F_{(1-\alpha, v_1, v_2)}$: هي نقطة على المحور الأفقي لتوزيع فيشر ذي درجتي حرية: $(v_1 = n_1 - 1)$

و $(v_2 = n_2 - 1)$ ، والتي يقع إلى يمينها مساحة $(1 - \alpha)$.

مثال 06: إذا علمت أن مجتمع طول الطالبات، ومجتمع طول الطلبة في جامعة محمد خيضر، يتوزع

توزيعاً طبيعياً، وسحبنا من المجتمع الأول عينة عشوائية حجمها 25 طالبة، ومن المجتمع الثاني عينة

عشوائية حجمها 21 طالبا، وكانت العينتان مستقلتان، ووجدنا أن تباين الطول لعينة الطالبات يساوي

64، وتباين الطول لعينة الطلبة يساوي 36. اختبر ما إذا كان هناك فرق بين تباين مجتمع طول

الطالبات وتباين مجتمع طول الطلبة، وذلك باستخدام مستوى معنوية 0.05.

الحل:

نريد اختبار ما يلي:

$$H_0: \sigma_2^2 = \sigma_1^2$$

$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$\alpha=0.05$$

بما أن الفرضية البديلة لا تحدد اتجاهها واحدا، فإن الاختبار المناسب هو ذو طرفين، والقيم الحرجة:

$$F_{(0.025,24,20)} = F_{(\frac{\alpha}{2}, \nu_1, \nu_2)} = 2.40$$

$$F_{(1-\frac{\alpha}{2}, \nu_1, \nu_2)} = F_{(0.975,24,20)} = 0.43$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.05 إذا كانت:

$$F < 0.43 \text{ أو } F > 2.40$$

ومن ثم فإن منطقة قبول H_0 تقع بين القيمتين 0.43 و 2.40.

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{64}{36} = 1.78 \text{ إحصاء الاختبار:}$$

نلاحظ أن قيمة إحصاء الاختبار F تقع في منطقة قبول الفرضية الصفرية، إذن القرار هو قبول

H_0 ورفض الفرضية البديلة عند مستوى الدلالة 0.05؛ ومنه الاختبار ليس له معنوية إحصائية؛ أي أن

تباين مجتمع طول الطالبات يساوي تباين مجتمع طول الطلبة ولا يوجد فرق حقيقي بينهما، والفرق

الظاهر بين تبايني العينتين هو فرق ليس ذو أهمية، وسببه خطأ الصدفة.

مثال 07: بفرض أنه لدينا البيانات التالية:

$$n_1 = 16, n_2 = 20, s_1^2 = 20.25, s_2^2 = 11.56$$

أختبر الفرضيات عند مستوى الدلالة $\alpha=0.10$.

الحل:

$$H_0: \sigma_2^2 = \sigma_1^2$$

$$H_1: \sigma_2^2 \neq \sigma_1^2$$

$$\alpha = 0.10$$

بما أن الفرضية البديلة لا تحدد اتجاهها واحداً، فإن الاختبار المناسب هو ذو طرفين، والقيم الحرجة:

$$F_{(\frac{\alpha}{2}, \nu_1, \nu_2)} = F_{(0.05, 15, 19)} = 2.23$$

$$F_{(1-\frac{\alpha}{2}, \nu_1, \nu_2)} = F_{(0.95, 15, 19)} = 0.43$$

نرفض H_0 عند مستوى الدلالة 0.10 إذا كانت:

$$F < 0.43 \text{ أو } F > 2.23$$

ومن ثم فإن منطقة قبول H_0 تقع بين القيمتين 0.43 و 2.23.

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{20.25}{11.56} = 1.75$$

والآن نقوم بحساب إحصاء الاختبار:

نلاحظ أن قيمة إحصاء الاختبار F تقع في منطقة قبول الفرضية الصفرية، إذن القرار هو قبول H_0

ورفض الفرضية البديلة؛ أي أن تبايني المجتمعين متساويين عند مستوى الدلالة 0.10.

السلسلة رقم 03: اختبار الفرضيات الإحصائية

التمرين 01:

أجريت دراسة في مجتمع معين لتحديد ما إذا كان متوسط مصروف الأسرة في الأسبوع يختلف عن متوسط المصروف الوطني الذي يساوي 52 دج، أخذت عينة عشوائية من 101 أسرة من هذا المجتمع، ووجد متوسطها وانحرافها المعياري المصروف أسبوعيا يساوي 53 دج و 10.28 على التوالي. هل هذه البيانات تعطي أدلة كافية بأن متوسط المصروف أسبوعيا لهذه الأسرة يختلف عن المصروف الوطني؟ مع العلم أن $(\alpha=0.05)$.

التمرين 02:

يعرف مركز تجنيد بالجيش من الخبرة الماضية أن وزن المجند يتبع التوزيع الطبيعي بوسط $\mu = 80\text{kg}$ وانحراف معياري $\delta = 10$. ويرغب مركز التجنيد أن يختبر، عند مستوى معنوية 1%، ما إذا كان متوسط وزن مجند هذا العام أكبر من 80kg. ولعمل هذا، فقد أخذ عينة عشوائية من 25 جندا حيث وجد أن متوسط الوزن في العينة 85kg. كيف يمكن إجراء هذا الاختبار؟

التمرين 03:

متوسط قوة مقاومة حبال القطع من إنتاج أحد المصانع هو 1.8 طن، باستخدام طريقة جديدة للتصنيع ادعى أحد المنتجين أن قوة مقاومة الحبال ستزداد. الاختبار هذا الادعاء أخذت عينة من 20 حبال، ووجد أن متوسط مقاومتها للقطع هو 1.85 طن وانحرافها المعياري هو 0.10 طن. هل يمكن تأييد هذا الادعاء عند مستوى المعنوية $(\alpha = 0.5)$ ؟

التمرين 04:

يرغب مشتر كبير للمصابيح الكهربائية أن يقرر، أي صنف يشتري من بين صنفين لهما نفس السعر. لعمل هذا، فإنه يأخذ عينة عشوائية من 100 مصباح من كل صنف فيجد أن الصنف الأول يعيش في

المتوسط $\bar{X} = 890$ ساعة و $\sigma^2 = 120$ ساعة. أي الصنفين يجب شراؤه إذا كان المشتري يرغب في أن يصل إلى قرار عند مستوى معنوية 5% و 1%؟

التمرين 05:

أجريت التجربة التالية لمقارنة نوعين من الأعلاف، خصص لكل علف 10 أبقار وكان معدل الزيادة في أوان الأبقار كما يلي:

32	30	34	38	35	32	26	29	34	31	علف (1)
29	31	26	29	30	29	28	24	26	28	علف (2)

إذا كان المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي، ولهما نفس التباين. هل هناك فرق معنوي بين نوعي العلف، وذلك بمستوى معنوية $(\alpha = 0.5)$ ؟

التمرين 06:

تشرط مقالة لأشغال التحميم والترصيص على مورديها ألا يزيد الانحراف المعياري في قطر خرطوم المياه نوعية 6 على 0.5 سم.

عملية قص لقطر الخرطوم بعينة من 12 خرطوم عرضها أحد الموردين أعطت النتائج الآتية بالسنتيمتر:
5.8-5.4-6.6-6.4-6.6-5.8-5.3-6.6-6.7-6.7-5.3-5.5

أدرس تحت مستوى معنوية 0.05 مدى استجابة عرض المرد لشروط المقالة؟ علما أن قطر الخرطوم يخضع للتوزيع الطبيعي.

التمرين 07:

أبدى العديد من أساتذة مادة الإحصاء 2 ملاحظة حول تدني مستوى الطلبة الذين حصلوا على شهادة البكالوريا شعبة تسيير واقتصاد مقارنة بنظراتهم من الحاصلين عليها شعبة علوم تجريبية. أردنا تبيان صحة الملاحظة في عينة من 20 طالب تحصلوا على شهادة بكالوريا علوم تجريبية كان متوسط علامة

المحور الثالث: اختبار الفرضيات الإحصائية

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة غرداية

الإحصاء 2 هو 10 بانحراف معياري 3. وفي عينة من 18 طالب تحصلوا على شهادة البكالوريا شعبة تسيير واقتصاد كان متوسط علامة الإحصاء هو 2 هو 8 بانحراف معياري 2.5. أدرس عند تحت مستوى معنوية 0.05 صحة الملاحظة؟

التمرين 08:

كانت نسبة النجاح من السنة الثانية إلى السنة الثالثة جامعي في إحدى الجامعات 10%، ثم أحدثت بعض التغييرات في المناهج مع إضافة وحذف بعض المواد، وكانت النتيجة بعد التعديلات أن نجاح ثمانية آلاف طالب من مجموعة عشرة آلاف طالب جلسوا لذلك الامتحان. هل تحسنت نسبة النجاح بعد التعديلات ($\alpha = 10\%$).

حلولة سلسلة رفع 03

التمرين 01:

أ- الفرضيات:

$$H_0 = \mu = 52$$

$$H_1 = \mu \neq \mu_0$$

ب- بالرغم من عدم معرفة σ_X ، إلا أن حجم العينة 101 يعتبر كافياً لاستخدام التوزيع الطبيعي لأنه أكبر من 30 ($n > 30$) بمستوى معنوية 5% حيث H_1 لها صفة لا معناه اختبار ذات اتجاهين،

القيمة المجدولة عندما $\alpha = 5\% \Rightarrow Z = 1.96$

$$[-1.96, 1.96] = \left[-Z \frac{\alpha}{2}, Z \frac{\alpha}{2}\right]$$

ج- استخدام بيانات العينة لحساب Z في ظل الفرضية H_0

$$\text{أن } \delta_{\bar{X}} \text{ تعوض العبارة: } \delta_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} \text{ بـ } \delta_{\bar{X}} = \frac{\delta_X}{\sqrt{n}}$$

$$Z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\delta_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{56 - 52}{\frac{10.28}{\sqrt{100}}} = 3.89$$

بما أن القيمة المحسوبة من العينة أكبر من القيمة المجدولة، نرفض الفرضية الصفرية، بمعنى أن هنالك ما يشير إلى أن الوسط الحسابي لهذا المجتمع يختلف عن الوسط الحسابي المصروف الوطني.

التمرين 02:

$$\mu = 80, b = 10, \alpha = 1\%, \bar{X} = 25$$

حيث أن المركز يرغب في اختبار ما إذا كان ($\mu > 80$) فإنه يضع الفرضيتان التاليتان:

- الفرضية البديلة: $H_1 = \mu > 80$

- الفرضية الصفرية: $H_0 = \mu = 80$

وحيث أن المجتمع الأصل يتبع التوزيع الطبيعي وكذلك δ معلومة، فيمكن استخدام التوزيع الطبيعي القياسي لتحديد منطقة الرفض للاختبار، وحيث:

$(H_0 = \mu = 80)$ ، فإننا بصدد اختبار من الطرف الأيمن حيث تقع منطقة الرفض إلى اليمين من عند مستوى معنوية 1%. وعليه:

$$Z_C = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\delta_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} = \frac{85 - 80}{\frac{10}{\sqrt{25}}} = 2.5$$

حيث أن قيمة $z_C = 2.33$ المحسوبة تقع داخل منطقة الرفض، فإننا نرفض H_0 ، ونقبل $H_0(\mu > 80)$ ويعني هذا أنه إذا كانت $\mu = 80$ فإن الاحتمال أن عينة عشوائية مأخوذة من هذا المجتمع تعطي متوسطاً $\bar{X} = 85$ أقل من 1% ومثل هذه العينة تكون بالتأكيد غير عادية، وعليه فإننا نرفض H_0 عند مستوى معنوية (1%) بمعنى أننا واثقون بنسبة 99% من اتخاذ القرار السليم.

التمرين 03:

أ- الفرضيات:

$$H_0 = \mu = 1.80$$

$$H_1 = \mu > 1.80$$

ب- نموذج الاختبار: نسبة عدم معرفة δ وأصغر حجم العينة ($n < 30$) تكون القيمة الحرجة.

- بما أن $n < 30$ والانحراف المعياري للمجتمع مجهول التوزيع يتبع ستودنت.

$$t_{(x,n-1)} \Rightarrow t_{(0.01,25)}$$

$$t = 2.485$$

ج- حساب t من العينة:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{1.85 - 1.80}{\frac{0.1}{\sqrt{26-1}}}$$

نرفض الفرضية عدم H_0 ونميل إلى قبول الادعاء بأن الطريقة الجديدة تزيد من مقاومة الحبال للقطع.

التمرين 04

$$\begin{aligned} n_1 &= 100 & \bar{X}_1 &= 980 & S_1 &= 80 \\ n_2 &= 100 & \bar{X}_2 &= 1010 & S_2 &= 120 \end{aligned}$$

أ- عند مستوى معنوية 5%: هذا الاختبار من الطرفين وتقع منطقة القبول في حدود (± 1.96) تحت المنحنى الطبيعي المعياري ومن ثم:

$$H_0 = \mu_1 = \mu_2 \Rightarrow H_0 = (\mu_1 - \mu_2) = 0$$

$$H_1 = \mu_1 \neq \mu_2 \Rightarrow H_1 = (\mu_1 - \mu_2) \neq 0$$

$$\delta = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(80)^2}{99} + \frac{(120)^2}{99}} = \sqrt{64,64 + 145,45} = 14.49$$

$$\begin{aligned} Z_c &= \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\delta_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{(14.49)} \\ &= \frac{980 - 1010}{14.49} = \frac{-30}{14.49} = -2.07 \end{aligned}$$

إن قيمة Z المحسوبة تقع داخل منطقة الرفض للفرضية H_0 يعني أننا نقبل الفرضية H_1 بمعنى أن $\mu_1 \neq \mu_2$ عند مستوى 5%.

ب- عند مستوى معنوية فإن قيمة المحسوبة تقع في منطقة القبول للفرضية H_0 لأن $Z_t \pm 2.58$ وعليه نقول إنه لا يوجد فرق لاختلاف جوهري بين μ_1 و μ_2 عند مستوى 1%. وعليه يمكن للمشتري أن يشتري أي من الصنفين.

التمرين 05:

بما أنه حجم العينتين صغير (أقل من 30) والمجتمعين طبيعيين فإن التوزيع ستيودنت.

$$t_c = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)\hat{s}_1^2 + (n_2 - 1)\hat{s}_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

أ- الفرضيات:

$$H_0 = \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 = \mu_1 \neq \mu_2$$

$$\bar{X}_1 = 32.1 \quad \bar{X}_2 = 28$$

$$\hat{s}_1^2 = 937.65 \quad \hat{s}_2^2 = 709.6$$

$$S_1 = 30.62 \quad S_2 = 26.63$$

$$t_{18} = 2.10$$

$$t_c = \frac{32.1 - 25.2}{\sqrt{\frac{9(10.31)\hat{s}_1^2 + 9(12.36)\hat{s}_2^2}{18} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right)}}$$

$$t_c = \frac{6.9}{\sqrt{0.67}} = \frac{6.9}{0.81} = 8.51$$

القرار: نرفض الفرضية الصفرية، وتقبل الفرضية البديلة.

التمرين 06:

يستجيب عرض المورد لشرط المقابلة إذا كان $\delta < 0.5$ بمعنى $\delta^2 < 0.5$ إذا كنت بصدد اختبار

المطابقة لتباين:

- الفرضية الصفرية: $H_0 = \delta^2 = 0.25$

- الفرضية البديلة: $H_1 = \delta^2 < 0.25$

- أحادي الجانب من اليسار

- إحصائية الاختبار: $d^2 = \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\delta_0^2}$

- تحت الفرض $\delta^2 = 0.25$

- d^2 يخضع لتوزيع χ^2_{n-1} ، قيمة مستوى المعنوية α المعطاة في نص المسألة هي $\alpha = 0.05$
- من جدول الإحصاء لتوزيع كاي تربيع

$$\chi_{\alpha, n-1} = \chi_{0.05, 11} = 4.57$$

ومنه:

$$I Rejet =]0, \chi_{\alpha, n-1}[=]0, 4.57[$$

نحسب قيمة إحصائية الاختبار d^2 في العينة:

$$d^2 = \frac{(n-1)\hat{s}^2}{0.25} = \frac{n s^2}{0.25} = \frac{11 \times 0.35}{0.25} = 15.14$$

إذن $d^2 \notin I Rejet$ وبالتالي نقبل H_0 ونرفض H_1 .

نستنتج أن عرض التاجر لا يستجيب لشرط المقابلة تحت مستوى معنوية 0.05.

التمرين 07:

ليكن X المتغير العشوائي لعلامات الطلبة الحاصلين على البكالوريا شعبة علوم تجريبية في مادة

الإحصاء 2. حجم العينة المسحوبة من المجتمع $n_1 = 20$ ولدينا $\bar{X} = 10$ و $S_X = 3$

y المتغير العشوائي لعلامات الطلبة الحاصلين على البكالوريا شعبة تسيير واقتصاد في مادة الإحصاء

2. حجم العينة المسحوبة من المجتمع $n_2 = 18$ ولدينا $\bar{X} = 8$ و $S_y = 25$

نريد التأكد من صحة الملاحظة التي أبدتها الأساتذة والتي تنص على أن $\mu_X > \mu_y$

حجم العينات أقل من 30 وتبايني المجتمعين مجهولين نستخدم اختبار ستودنت وهو مشروط بتساوي

التباينين. ولكون المعطيات لا تتضمن تساوي التباينين لذا نقوم أولاً باختبار المقارنة لتبايني المجتمعين.

اختبار فيشر:

- الفرضية الصفرية: $H_0 = \delta_X^2 = \delta_y^2$

- الفرضية البديلة: $H_1 = \delta_X^2 \neq \delta_y^2$

$$F = \frac{\hat{s}_X^2 / \delta_X^2}{\hat{s}_y^2 / \delta_y^2}$$

- تحت الفرض $\delta_X^2 = \delta_Y^2$ لدينا:

$$F_C = \frac{\hat{S}_X^2 / \delta_{C_X}^2}{\hat{S}_Y^2 / \delta_{C_Y}^2} = \frac{\hat{S}_X^2}{\hat{S}_Y^2}$$

يخضع لقانون فيشر ذو 19 و 17 درجتي حرية.

- مستوى المعنوية $\alpha=0.1$ وبالتالي:

$$I \text{ accept} = \left[F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1}, F_{\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1} \right] \\ = [F_{0.95, 19, 17}, F_{0.05, 19, 17}] = [0.44, 2.21]$$

- نحسب القيمة F_C في العينتين المسحوبتين من خلال إحصائية الاختبار:

$$F_C = \frac{\hat{S}_X^2}{\hat{S}_Y^2} = \frac{n S_X^2}{n-1} \bigg/ \frac{n_2}{n_2-1} S_Y^2 = \frac{20}{19} \times 3^2 \bigg/ \frac{18}{17} \times 2.5^2 = 1.43$$

$$F_C = 1.43 \notin I \text{ accept}$$

لا يمكننا رفض H_0 : في ظل المعلومات الإحصائية التي لدينا نقبل أن التباينين متساويان ونجري

اختبار المقارنة للمتوسطين.

اختبار مقارنة المتوسطين:

- الفرضية الصفرية: $H_0 = \mu_X = \mu_Y$

- الفرضية البديلة: $H_1 = \mu_X > \mu_Y$

- إحصائية اتخاذ القرار:

$$t_C = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{S \rho \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} / S_\rho = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\hat{S}_X^2 + (n_2 - 1)\hat{S}_Y^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$t_C = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S \rho \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \text{ يخضع لتوزيع ستودنت بدرجة حرية } (n_1 + n_2 - 2 = 36)$$

- قيمة مستوى المعنوية α المعطاة هي $\alpha = 0.1$ وبالتالي:

$$t_{\alpha, n_1+n_2-2} = t_{0.1, 36} = 1.306$$

$$I \text{ Rejet} =]t_{\alpha, n_1 + n_2 - 2}, +\infty[$$

$$=]t_{0.1, 36}, +\infty[=]1.3, +\infty[$$

- نحسب قيمة إحصائية الاختبار t من معطيات العينتين:

$$S_{\rho} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\hat{S}_X^2 + (n_2 - 1)\hat{S}_Y^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{n_1\hat{S}_X^2 + n_2\hat{S}_Y^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$= \sqrt{\frac{20 \times 9 + 18 \times 2.5^2}{20 + 18 - 2}} = 2.85$$

$$t_c = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_{\rho} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{11 - 8}{2.85 \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{18}}} = 6.64$$

- $6.64 \notin I \text{ Rejet}$ نرفض H_0 ونقبل H_1 .

نستنتج أن ملاحظة أساتذة مادة الإحصاء 2 في محلها وصحيحة.

التمرين 08:

- الفرضيات:

$$H_0 = \rho = 0.72$$

$$H_1 = \rho > 0.72$$

- حساب Z من العينة:

$$\mu \bar{p} = \frac{8000}{10000} = 0.8$$

$$Z_c = \frac{\bar{p} - \rho_0}{\sqrt{\frac{\rho q}{n}}} = \frac{0.8 - 0.72}{\sqrt{\frac{(0.28)(0.72)}{10000}}} = 17.81 > 1.28$$

القرار: نرفض فرضية العدم ويكون القرار أن نسبة النجاح قد تحسنت بعد التعديلات.

قائمة المراجع

I. المراجع باللغة العربية

- إبراهيم أبو عقيل. (2012). **مبادئ في الإحصاء**. دار أسامة للنشر والتوزيع، الأردن.
- أحمد معتوق. (2015). **الإحصاء الرياضي والنماذج الإحصائية**. ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر.
- ادريس عبدلي. (2023-2024). **دروس عبر الخط في مقياس الإحصاء 03**. السنة الثانية ليسانس علوم التسيير، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة البليدة 02.
- أسماء بوزنورة. (2021-2022). **دروس وأعمال موجهة في الإحصاء 3**. مطبوعة موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة الجزائر 3.
- الحاج خليفة. (2018-2019). **دروس وأعمال موجهة في الإحصاء 3**. مطبوعة لطلبة السنة الثانية ليسانس LMD علوم اقتصادية، علوم التسيير والعلوم التجارية، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة مستغانم.
- تمار، أ. (2021-2020). **محاضرات وتمارين في الإحصاء 3**. مطبوعة موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس جميع الشعب، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة البليدة 02.
- حسين ياسين طعمة، و إيمان حسين حنوش. (2015). **الإحصاء الاستدلالي**. عمان، الأردن: دار صفاء للنشر والتوزيع.
- دلال القاضي، سهيلة عبد الله، و محمود البياتي. (2005). **الإحصاء للإداريين والاقتصاديين**. دار الحامد، الأردن.
- دومينيك سلفاتور. (2011). **نظريات ومسائل في الإحصاء والاقتصاد القياسي**، ترجمة سعدية حافظ منتصر. الدار الدولية للنشر والتوزيع، مصر.
- رامز قدسية. (2018). **الاحتمالات و الإحصاء**.. منشورات الجامعة الافتراضية السورية، سوريا.

زروخي، ص. (2017-2018). **محاضرات في مادة الإحصاء الاستدلالي (الاحصاء 3)**. مطبوعة

موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة

المسيلة.

سعيد التل، و آخرون. (2007). **مناهج البحث العلمي، تصميم البحث والتحليل الإحصائي**. دار

المسيرة، الأردن.

سليمان محمد طشطوش. (2012). **أساسيات الإحصاء الرياضي**. دار اليازوري للنشر، الأردن.

شفيق العتوم. (2015). **شفيق العتوم، طرق الإحصاء باستخدام SPSS**. دار المناهج للنشر والتوزيع،

الأردن.

عبد القادر محمد عبد القادر عطية. (2004). **الحديث في الاقتصاد القياسي بين النظرية و التطبيق**.

الدار الجامعية، مصر.

عبد الله بلعيدي. (2020-2021). **محاضرات وتمارين في مقياس الاحصاء التطبيقي**. مطبوعة لطلبة

السنة الثانية ليسانس علوم مالية ومحاسبية، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير،

جامعة خنشلة.

عبد الله فلاح المنيزل، و عايش موسى غرابية. (2010). **الإحصاء التربوي تطبيقات باستخدام الرزم**

الإحصائية للعلوم الاجتماعية. دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، الأردن.

عدنان عباس حميدان، مطانيوس مخول، فريد جاعوني، و عمار ناصر آغا. (2006). **الإحصاء**

التطبيقي. منشورات جامعة دمشق.

علي السيد عبده الديب، و محمد عبد المنعم جودة حزين. (2018-2019). **الإحصاء في مجال**

الأعمال. منشورات كلية التجارة القاهرة، مصر.

فاطمة بوعروري. (2023-2022). **محاضرات في مقياس الإحصاء 03**. مطبوعة بيداغوجية لطلبة

السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة سطيف 1.

قريشي، م. (2024-2025). **محاضرات في الإحصاء الإستدلالي**. مطبوعة لطلبة السنة الثانية ليسانس

تدريب رياضي وتربية رياضية، معهد علوم وتقنيات النشاطات البدنية والرياضية، جامعة بسكرة.

لامية لعلام. (2024-2023). **محاضرات في الإحصاء 4**. مطبوعة بيداغوجية موجهة لطلبة السنة

الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة سطيف 1.

محمد الهوبي إباد. (2017). **الإحصاء التطبيقي، ط1**. الكلية الجامعية للعلوم والتكنولوجيا، خان يونس.

محمد حسين محمد رشيد. (2007). **الإحصاء الوصفي والتطبيقي والحيوي**. دارصفاء، عمان، الأردن.

محمد صبحي أبو صالح، و عدنان محمد عوض. (2004). **مقدمة في الإحصاء مبادئ وتحليل**

باستخدام SPSS. دار المسيرة، عمان، الأردن.

موسى بن البار. (2021-2020). **محاضرات في الإحصاء 3**. موجهة لطلبة السنة الثانية علوم

التسيير، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة المسيلة.

نوال سموك. (2020-2019). **محاضرات في الإحصاء 3: مدعمة بأمثلة وتمارين محلولة**. مطبوعة

بيداغوجية موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير،

جامعة الجزائر 3.

II. المراجع باللغة الأجنبية

Berard, V., & Geneviève, s.-p. (2008). *Statistique et probabilités*. Berti édition, Alger.

DeGroot, M., & Schervish, M. (2012). *Probability and Statistics (4th ed.)*. Pearson.

Field, A. (2013). *Discovering Statistics Using IBM SPSS Statistics (4th ed.)*. SAGE Publications.

Hogg, R., & Tanis, E. (2013). *Probability and Statistical Inference (9th ed.)*. Pearson.

- Montgomery, D., & Runger, G. (2018). *Applied Statistics and Probability for Engineers* (7th ed.). Wiley.
- Moore, D. S., McCabe, G. P., & Craig, B. A. (2014). *Introduction to the Practice of Statistics* (8th ed.). W.H. Freeman and Company.
- Moore, D. S., McCabe, G. P., & Craig, B. A. (2017). *Introduction to the Practice of Statistics* (9th ed.). W.H. Freeman and Company.
- Moore, D., McCabe, G., & Craig, B. (2012). *Introduction to the Practice of Statistics* (7th ed.). W.H. Freeman and Company.
- OpenStax College. (2013). *Introductory Statistics*. OpenStax College.
- Sayer, A. (2010). *Method in Social Science: Revised 2nd Edition*. Routledge.
- Triola, M. (2018). *Elementary Statistics* (13th ed.). Pearson.
- UNECA. (2017). *Statistical Techniques for Economic Research*. United Nations Economic Commission for Africa.
- Wackerly, D., William, M., & Scheaffer, R. (2008). *Mathematical statistics with applications* (7th ed.). Thomson Brooks/Cole.
- Weiss, N. (2012). *Introductory Statistics* (9th ed.). Pearson Education.
- Wooldridge, J. (2016). *Introductory Econometrics: A Modern Approach*. 6th edition. Cengage Learning.