جامعة غرداية

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

قسم: العلوم المالية والمحاسبية

مطبوعة بعنوان:

رياضيـات المؤسســة

موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس

"علوم مالية ومحاسبية"

من إعداد:

الدكتور: بن جواد مسعود

السنة الجامعية 2022 – 2023

CONTENTS	جدول المحتويات
The first axis: general concepts about Enterprise Mathematics	- المحور الأول: مفاهيم عامة حول رياضيات المؤسسة.
The second axis: linear programming	- المحور الثاني: البرمجة الخطة
The third axis: solving programming (the graphic method)	- المحور الثالث: حل البرمجة الخطية (الطريقة البيانية)
– The fourth axis: solving linear programming (the simplex method)	- المحور الرابع: حل البرمجة الخطية (طريقة السامبلكس)
– The fifth axis: duality (the corresponding model)	- المحور الخامس: الثنائية (النموذج المقابل)
he sixth axis: sensitivity analysis	- المحور السادس: تحليل الحساسية
The seventh axis: transportation models	- المحور السابع: نماذج النقل

مقدمة:

تعتبر المعضلة الكبرى لدى صانعي السياسات والمجالس التنفيذية في المنظمات هي اتخاذ القرار الأنسب الذي من شأنه أن يعظم من العوائد ويدني التكاليف وفق الاستراتيجية المتبعة، والتي تقتضي الوصول إلى الهدف الأسمى والمعبر عنه بالحل الأمثل في معالجة انظمة المنشأت او المعامل او المؤسسات الحكومية، عبر اتخاذ القرار المناسب او البديل الامثل من بين مجموعة البدائل او القرارات العلمية المتاحة باستخدام مختلف العلوم الاقتصادية والادارية والاحصائية.

من هنا تظهر أهمية رياضيات المؤسسة (Enterprise Mathematics) كمدخل من مداخل بحوث العمليات (Operation Research) والذي يدخل استخدامه في مختلف الفعاليات والنشاطات الاقتصادية للمنظمات الانتاجية والخدمية على حد سواء وخاصة فيما يتعلق بمشكلات الانتاج والتوزيع والتخزين والنقل وغيرها من المشكلات التي يتطلب حلها اتخاذ مجموعة من القرارات الادارية الحاسمة من قبل متخذي القرار وذلك باعتماد الاسس العلمية والبرامج الجاهزة بعيدا عن مبدأ الحدس(intuition) والتخمين (guessing).

تعتبر البرمجة الخطية (linear programming) الأداة الاقوى في بحوث العمليات، كونها أداة مهمة يمكن أن تحل عددًا كبيرًا من المشكلات، بمجرد ما يتم نمذجة (Modeling) المشكلة في شكل معادلات خطية، تضمن منهجية البرمجة الخطية الوصول إلى حل دقيق للمشكلة المطروحة، وإحدى الطرق الأكثر شهرة لحل البرامج الخطية هي طريقة (سمبلكس) (Simplex). قد يعتقد من الناحية النظرية أن هذه الطريقة معقدة وغير فعالة، بينما من الناحية العملية فهي على العكس من ذلك فقد تبين أنها طريقة جيدة.

تم الاعتماد في هذه المطبوعة على استخدام الامثلة الواقعية ذات البعد الاقتصادي، وكذلك تم اعتماد مبدأ السلاسة والوضوح لأجل ايصال مضمون المادة العلمية وفق قالب مبسط

يجمع بين الصياغة الرياضية المختصرة والتعابير النثرية الواضحة التي ترسم الفكرة بوضوح في ذهنية الطالب.

تتضمن المطبوعة سبعة محاور، حيث تناول المحور الأول فصلا تمهيديا يتضمن المفاهيم النظرية المتعلقة برياضيات المؤسسة، والبرمجة الخطية، في حين تناول المحور الثاني مفهوم وبناء وصيغ نماذج البرمجة الخطية بشكل واضح ومبسط مع اعطاء أمثلة توضيحية لكل صيغة وتناول المحور الثالث كيفية الحل والطرق المستخدمة في حل النماذج وفق الطريقة البيانية والطريقة الجبرية ليتم في المحور الرابع عرض طريقة السمبلكس (Simplex) في حل البرنامج الخطي في حالة كون دالة الهدف من نوع تعظيم (Maximize)، ودالة الهدف من نوع تقليل (Minimize)، وتناول المحور الخامس الثنائية (Duality) في البرمجة الخطية من ناحية المفهوم وطريقة الحل للنموذج المقابل، فيما تطرق المحور السادس الى تحليل الحساسية (Sensitivity Analysis) وحل ما بعد الأمثلية، اذ تناول جميع الحالات التي تتغير فيها مكونات نموذج البرمجة الخطية وهي (التغيرات في الطرف الايمن ، التغيرات في معاملات دالة الهدف ، التغيرات في متغيرات القرار في القيود ، اضافة متغير او متغيرات جديدة ، وأخيرا اضافة قيد او قيود جديدة) في حين تناول المحور السابع نماذج النقل ومشاكل التخصيص والتي كثيرا ما يستفاد منها الباحثين، اذ بدأ الفصل بكيفية موازنة نموذج النقل ثم كيفية الحصول على الحل الاولي الابتدائي المقبول بأستخدام ثلاثة طرق هي الركن الشمالي الغربي، طريقة اقل كلفة، وطريقة فوجل، بعد ذلك انتقلنا للحصول على الحل الامثل لنماذج النقل باستخدام طريقتين هما المسار المتعرج وطريقة عوامل الضرب.

المحور الأول: فصل تمهيدي (INTRODUCTION)

نتناول من خلال هذا المحور الإطار النظري والمرجعي لرياضيات المؤسسة من خلال تقديم مفعوم لهذه المادة العلمية، إضافة إلى التطرق إلى أهم المفاهيم والمصطلحات الرياضية ذات الصلة بهذه المادة.

1. مفهوم رياضيات المؤسسة

- رياضيات المؤسسة: هي تطبيق لأساليب رياضية علمية لغرض حل المشاكل المعقدة داخل المؤسسة الصناعية والمشاكل المحيطة بها أو هي
- رياضيات المؤسسة هي أساليب رياضية تستعمل قيم كمية من أجل تحديد أحسن نشاط لحل مشكلة ما في ظل قيود متاحة وموارد محدودة.

من مجموعة التعاريف السابقة وغيرها من التعاريف التي لم نوردها، نجد أنها تشترك وتشكل في مجموعها أهم الخصائص والسمات التي تحدد إطار رياضيات المؤسسة وهي[1]:

- **أولا :** رياضيات المؤسسة تنطلق من النظرة والطريقة العلمية كأساس ومنهج في البحث والدراسة، هذا يعني توفر المنهجية في البحث لأن المواضيع التي تعالجها تكون بشكل عام على مراحل، وهذه المراحل عادة ما تكون متداخلة ومتتابعة فيما بينها بشكل مستمر وتقتضي السير في الخطوات التالية:
  - تحديد أبعاد المشكلة بكل دقة.
  - إعطاء تفسير ممكن للمشكلة على أساس الفرضيات القائمة.
  - اختبار صحة الفرضيات واستنتاج البدائل التي يمكنها المساهمة في حل المشكلة.
  - اختبار الحل الأفضل من بين مجموعة الحلول الممكنة، ثم وضعه تحت التطبيق والمراقبة .

[1]- بوقرة رابح، سلسلة دروس رياضيات المؤسسة، جامعة المسيلة.

- **ثانيا :**رياضيات المؤسسة تهتم ببناء النماذج الرياضية (Modeling) من أجل تحليل واستنتاج ووضع علاقات بين متغيرات معينة، بحيث يمكن تحقيق هذه العلاقات عن طريق استخدامها في صورة وصفية أو في طرق تنبئية مستقبلية حول ظاهرة ما، بناء النماذج وحلها يمكَن متخذي القرار من الوصول إلى نتائج ما كان يمكن الوصول إليها دونها.
- **ثالثا :**رياضيات المؤسسة تأخذ بالنظرة الشاملة أي بمفهوم النظام ككل، هذا يعني الدراسات لن تكون خاصة بكل وظيفة داخل المؤسسة على حدة، وإنما تشمل العلاقات المتداخلة فيما بينها، إلا في بعض الحالات الخاصية أين يتطلب الأمر معالجة ظاهرة معينة في وظيفة إدارية ما أو مجموعة من الوظائف دون أخرى
- **رابعا :**إن رياضيات المؤسسة في طبيعتها تعتبر من البحوث التي يجريها متعاونين في آن واحد وفي اختصاصات مختلفة (من رياضيين، إحصائيين، اقتصاديين، سياسيين واجتماعيين... الخ)، لذا فهي تستفيد من التقدم والخبرة والمعرفة من مجموع العلوم في مختلف التخصصات.

هذه الميزة تسهم دوما في التوصل إلى أحسن الحلول وأفضلها، الناتج من التكامل في المفاهيم التي تعطي تفسيرا للظواهر متكامل الأبعاد، فمثلا يمكن القول أن نظم العامل والآلة لها أبعادها المختلفة منها الطبيعية والبيولوجية والسيكولوجية والاجتماعية والاقتصادية والرياضية، لذلك فإن فهم هذه النظم فهما صحيحا وتطبيقها في ميدان رياضيات المؤسسة تتطلب تعاونا من المتخصصين في هذه العلوم.

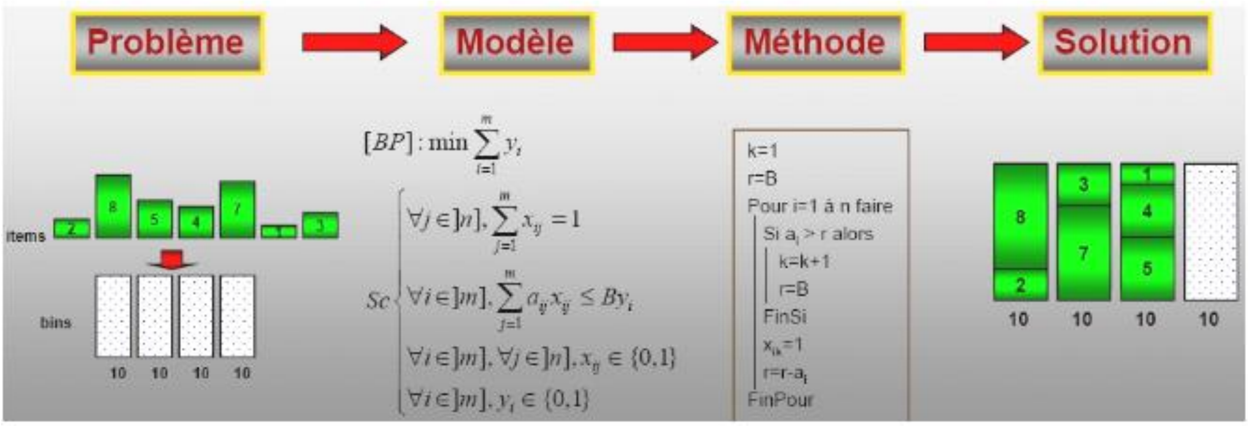
2. **النموذج :**هو تمثيل أو تجريد مبسط للواقع العملي في صورة مجموعة من المعادلات، والرموز الرياضية، أي هو تمثيل رياضي للواقع من خلال التجريد والتبسيط،(لأن الواقع أعقد من أن يصب في قالب رياضي دون أن يكون هناك تضحية بحقائق ملموسة،

والتجريد والتبسيط يتم من خلال وضع الفرضيات(الفرضية هي حكم مؤقت نعتقد هو الأصوب لبلوغ ما نصبو إليه[2])

1.2 مكونات النموذج :يتكون النموذج من :

- **الثوابت** :هي قيم ثابتة تم اكتشافها ويعمل بها إلا في حالة إثبات عكس ذلك علميا مثل (π=3.14) وهي قيمة معتمدة منذ اكتشافها من طرف الفراعنة غداة تأسيس الاهرامات، و (e=2.718) وهي قيمة ثابتة منذ اكتشافها من طرف النيبر الألماني؛
- **المعالم** :هي عبارة عن قيم ثابتة يتم اعتمادها وفق الغرض خلال أداء النموذج؛
- **المتغيرات** :هناك عدة تصنيفات :المتغيرات الداخلية والخارجية فالداخلية تتحدد قيمها من داخل النموذج وهي تؤثر في بعضها البعض مع تأثرها بالمتغيرات الخارجية ولا تؤثر فيها أما المتغيرات الخارجية فهي تتحدد من خارج النموذج وهي تؤثر في المتغيرات الداخلية ولا تتأثر بها.
- **القيود** :عادة ما يعبر عنها في صورة متباينات و/أو معادلات.

2.2 خطوات تصميم نموذج :يمر تصميم أي نموذج عبر الخطوات الآتية:



Source : La Recherche Opérationnelle, www.roadef.org.

- **صياغة المشكلة (Formulating the problem)**: تتجلى المشكلة في وجود خلل يتمثل في اختلاف الحالة القائمة عن الحالة المرغوبة، بينما صياغة المشكلة هو اتخاذ الخطوات اللازمة لتحويل المشكلة من مسميات وصفية إلى رموز رياضية وصياغتها

[2] - سليم مجلخ، محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة، جامعة قالمة.

وفقا للعلاقة التي تربطها، سواء كانت خطية أو غير خطية من خلال هدف المشكلة والقيود التي تشترطها، والخلاصة في هذه المرحلة يجب أن تكون: المشكلة بصورة كمية مع تحديد واضح للهدف والقيود المفروضة عليه.

- **بناء النموذج الرياضي (Building the model)**: يقصد ببناء النموذج الرياضي إيجاد العلاقة بين معاملات المشكلة (الثابتة والمتغيرة) في صورة رياضية صحيحة والتي يمكن بواسطة حلها تحقيق الهدف المرغوب فيه.

- **تحليل المعلومات (Information Analysis)**: يقصد بتحليل المعلومات حساب المتغيرات المطلوبة وتطبيق طريقة حساسية المتغيرات في مجال الحل الأمثل والتأكد من مصداقية المعلومات من الناحية التطبيقية.
- **تنفيذ نتائج المعلومات (Implementation of information)**: يقصد بتنفيذ نتائج الحل تنفيذ قيم المتغيرات التي تحقق الحل الأمثل في اتخاذ القرارات وفقا لهذه النتائج.

3. تصنيفات النماذج الرياضية:

وتقسم النماذج الرياضية بموجب هذا التصنيف الى ما يلي:

- **النماذج الرياضية الخطية:** وهي تلك النماذج الرياضية التي تكون فيها العلاقة بين المتغيرات (x_j) وقيمة دالة الهدف (Z) يمكن تمثيلها بشكل خط مستقيم.
- **النماذج الرياضية غير الخطية:** وهي تلع النماذج الرياضية التي تكون فيها العلاقة بين المتغيرات (x_j) وقيمة دالة الهدف (Z) يمكن تمثيلها على شكل منحنى.

4. تطبيقات رياضيات المؤسسة

تتعدد التطبيقات والمجالات التي تكون فيها المنشأة بحاجة إلى أساليب رياضيات المؤسسة وذلك وفقا لاختلاف طبيعة المنشأة في حد ذاتها ومجال نشاطها وكذلك بيئة الاعمال العامة وخطط واستراتيجيات الادارة التنفيذية، وعلى العموم يمكن ان تطبق أدوات رياضيات المؤسسة فيمايلي:

Materials transportation	مشكلة نقل الموارد
Assigment problem	مشكلة التعيين والتخصيص
Production planning	تخطيط الإنتاج
Financial planning	تخطيط المالية
Selection of capital budgeting	اختيار الموازنة العامة
Energy planning	تخطيط أنماط استهلاك الطاقة
Facility location and layout	تحديد المواقع الخدمية والإنتاجية
Airline, railway planning	تخطيط رحلات الطيران و السكك الحديدية
Inventer management	إدارة المخزونات
Network design	تصميم الشبكات المختلفة
Project planning	تخطيط المشروعات
Fore casting	التنبؤ
Investment evaluation	تقييم الاشتثمارات
Conditions of risk and uncertainty	ظروف المخاطر وعدم التأكد

المحور الثاني: البرمجة الخطية (Linear Programming)

تعبر البرمجة الرياضية عن ذلك العلم الذي يبحث في تحديد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة محددة تسمى دالة الهدف objective function، والتي تعتمد على عدد نهائي من المتغيرات، هذه المتغيرات قد تكون مستقلة عن بعضها، أو قد تكون مرتبطة مع بعضها بما يسمى القيود constraints.

- بفرض أن دالة الهدف وجميع دوال القيود هي دوال خطية، فيطلق على هذا النظام البرمجة الخطية Linear Programming.
- البرمجة الخطية تسمى برمجة صحيحة Integer Programming إذا كانت المتغيرات عبارة عن أعداد صحيحة.
- بفرض أن دالة الهدف أو القيود أو كلاهما هي دوال غير خطية، فيطلق على هذا النظام البرمجة الغير الخطية Non-Linear Programming.

ظهرت البرمجة الخطية عام 1947م وبالأخص بعد الحرب العالمية الثانية على يد عالم الرياضيات George B. Dantzig الذي كان يعمل خبيرا في الجيش الأمريكي، وفي عام 1949م نشر جورج دانزيج الطريقة المبسطة Simplex Algorithm لحل البرامج الخطية (المسائل الخطية)، ومنذ هذا الوقت انهالت الاسهامات في تحسين حل البرامج الخطية بطرق جديدة.

ومع أن الطريقة المبسطة Simplex Method لحل البرامج الخطية تعتبر خوارزمية آسية Exponential time algorithm بواسطة Klee- Minty، ومع ذلك تعتبر هذه الطريقة من أفضل 10 خوارزميات في الرياضيات على الإطلاق، لماذا ؟ لأن في الحقيقة الطريقة المبسطة وجدت لحل مسائل حياتية واقعية Real world Problems ويكون سلوك الخوارزمية المبسطة سلوك كثيرة الحدود في الزمن Polynomial time Algorithm في حل مثل هذه المسائل، ونادرا أن تقابلنا في الواقع مسائل Klee – Minty.

1. تعريف البرمجة الخطية:

- يقصد بكلمة برمجة التخطيط (برمجة خطية) ويقصد بكلمة خطية أن يكون هذا التخطيط نموذجا رياضيا خطيا، أي معادلات أو علاقات أو دوال رياضية خطية من الدرجة الأولى تمثل بخط مستقيم.
- البرمجة الخطية هي طريقة أو أسلوب رياضي يساعد على الوصول إلى الحل الأمثل.

البرمجة الخطية: أسلوب أو أداة أو طريقة تسهم في مساعدة المديرين على اتخاذ قرارات إدارية سليمة تتعلق بالاستخدامات المتاحة للموارد بهدف يهدف تعظيم العوائد الممكنة أو بهدف تحقيق أدنى تكلفة ممكنة.

البرمجة الخطية: أسلوب علمي يهدف الى استخدام الموارد المتاحة المحدودة أفضل استخدام من أجل تحقيق أهداف المؤسسة.

2. متطلبات استخدام نموذج البرمجة الخطية: تتطلب مشكلة البرمجة الخطية خمس خصائص أساسية، هي:

- **تحديد الهدف (دالة الهدف) (Objective Function) :** أي ما تسعى لتحقيقه وهو إما زيادة الأرباح أو تقليل التكلفة، معبر عنه بصيغة رياضية يطلق عليها دالة الهدف وتصاغ دالة الهدف بالشكل التالي:

حالة التعظيم	حالة التدنئة
Max Z= 2X+3Y	Min Z/W= 2X+3Y

- **توفر عدد من البدائل:** تستخدم البرمجة الخطية عندما تكون لدينا بدائل لحل المشكلة فإذا كان هناك بديل واحد لحل المشكلة فلا داعي لاستخدام البرمجة الخطية.
- **محدودية الموارد (Constraints):** عندما تكون الموارد محدودة (نادرة) كالموارد البشرية، أو المواد، أو ساعات اشتغال الآلات وهي بمثابة شروط لتحقيق الهدف، فإذا

كان لدينا 300 ساعة في القسم الأول وكنا نحتاج لساعتين لإنتاج المنتوج الأول وثلاثة ساعات لإنتاج المنتوج الثاني، فيعبر عن المشكلة كالأتي: $X1+ 3X2 \leq 300$.

- **وجود علاقة خطية :**الخطية في البرمجة يجب أن تتوفر في دالة الهدف وفي القيود (الموارد)، بحيث أن أي تغير في كميات الإنتاج يؤدي إلى زيادة الأرباح أو تقليل التكاليف بشكل خطي (طردي) مع زيادة كمية الإنتاج، وكذلك الموارد تستنفذ بشكل خطي مع زيادة كمية الإنتاج.
- **القيود غير السالبة (Non - Negativity):** إن هذا الشرط يلبي إحدى فرضيات البرمجة وهو شرط عدم السلبية. ولذلك لا يمكن أن يكون أحد القيود ينتج متغيرات سالبة.

3. مجالات تطبيق البرمجة الخطية:[3]

الصناعة: لوضع جدول إنتاج وسياسة مخزون لمقابلة الطلب مستقبلا، الحالة المثلى أن يقابل كل من الجدول والسياسة والطلب، وفي الوقت ذاته تخفض تكاليف الإنتاج والمخزون إلى أقصى حد ممكن.

- **التحليل المالي (Financial analysis):** يحتاج المحلل المالي إلى اختيار سياسة استثمارية من بين عدة خيارات، ويهدف المحلل هنا إلى اختيار السياسة التي تحقق أقصى عائد ممكن.
- **التسويق (Marketing):** يحتاج مدير التسويق إلى معرفة ما هي أفضل طريقة لتوزيع ميزانية الإعلان بين أنواع وسائل الإعلان المختلفة، ويهدف المدير هنا إلى تحديد المزيج الإعلاني الذي يحقق أعلى عائد من الإعلان.
- **توزيع البضائع ونقلها(distribution and transportation)** : قد يكون لدى المؤسسة أكثر من مستودع موزعين على القطر الوطني ويقابل ذلك عدد من الزبائن

[3]- زين العابدين عالم مصطفى، بحوث العمليات، جامعة العلوم التكنولوجيا، صنعاء 2012.

الذين يطلبون بضائع المؤسسة، تهدف المؤسسة إلى معرفة كمية البضائع الواجب شحنها إلى كل زبون بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن.

- **قياس الكفاءة النسبية للوحدات الإدارية المتماثلة الأهداف (Measure relative efficiency):** في كثير من الأحيان تحتاج المؤسسة إلى مقارنة أداء فروعها كما هو الحال في مقارنة أداء فروع بنك واحد منتشر على كامل الوطن.

4. صياغة نموذج البرمجة الخطية

الهدف الأساسي من استعمال نماذج البرمجة الخطية هو حل مشكلة ما تواجه الإدارة ولذلك يتم الاستعانة بالبرمجة الخطية وهنا يستلزم الأمر نقل المشكلة من حالتها الأولية (حالة الكلام أو الحالة الإنشائية والمتمثلة بالسرد الكلامي لتفاصيل المشكلة كافة) إلى حالة المعادلات والمتباينات المعبرة عن المشكلة قيد الدرس، وهنا يجب أن يوضح نموذج البرمجة الخطية أبعاد المشكلة الأصلية وبتفاصيلها كافة، وبالأخير يمكن إيجاد الحل الرياضي لنموذج البرمجة الخطية (والذي يمثل أصلا حل للمشكلة المبحوث) وللحصول على الحل الأمثل وبعد أن يتم تحويل المشكلة من حالتها الأولية إلى نموذج البرمجة الخطية (مجموعة من المعادلات والمتباينات بالإضافة إلى دالة الهدف) وهنا يتم الحصول على حل النموذج بالطرق الرياضية

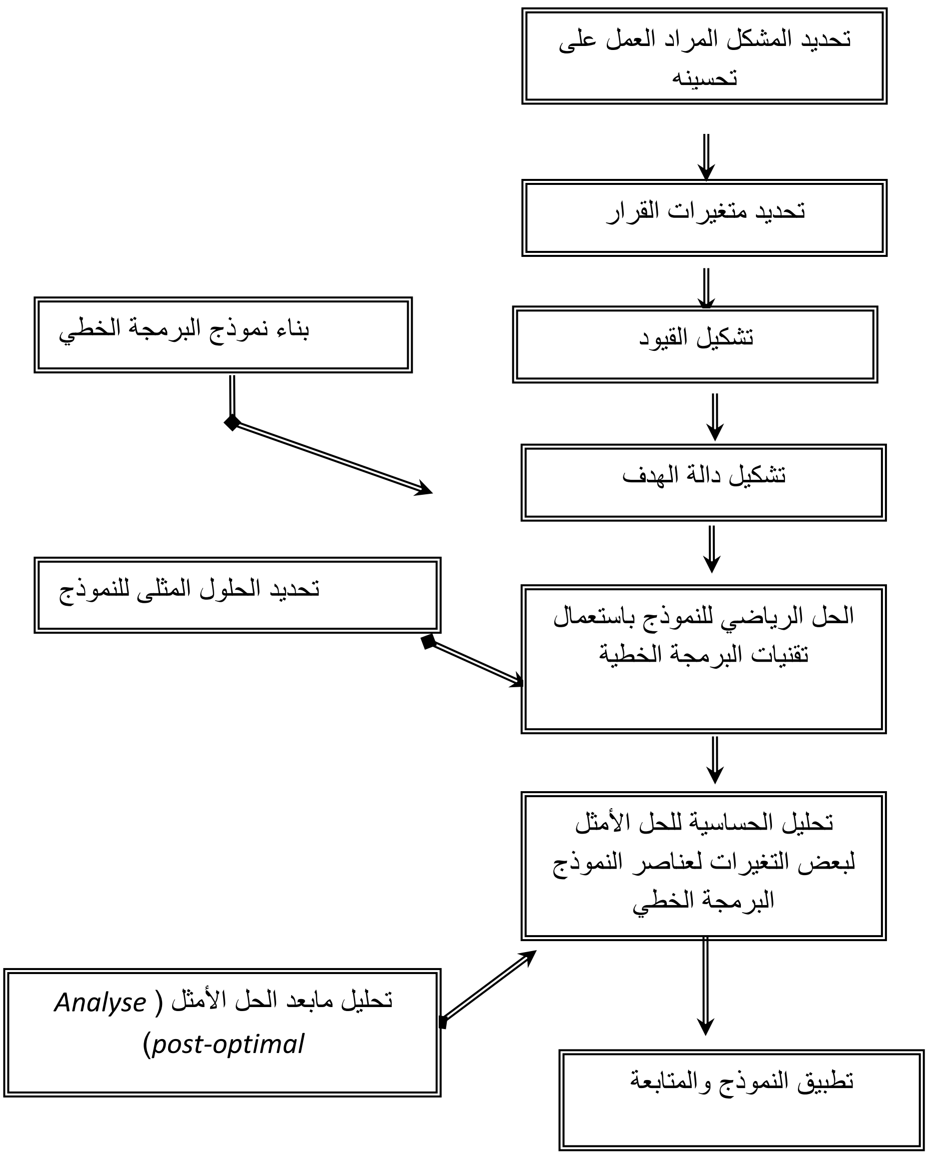
5. أسس بناء النموذج الرياضي:

- ألا يكون النموذج معقد
- أن يكون النموذج معبرا عن المشكلة وليس العكس أي تطويع المشكلة لتناسب النموذج.
- فهم حدود وقابلية النموذج عند التطبيق بحيث لا يمكن أن يحوي كل المتغيرات وخاصة السياسية والاجتماعية
- النموذج هو وسيلة وليس الحقيقة نفسها ولا يمكن أن يكون أفضل من المعلومات التي تدخل في تكوينه ولهذا فهو لا يحل محل صاحب القرار بأي حال.

6. الصيغة العامة انموذج البرمجة الخطية:

تستخدم البرمجة الخطية لإيجاد أفضل توزيع للموارد والإمكانات المحدودة على الاستخدامات المختلفة لتحقيق هدف معين كتعظيم الربح أو الإنتاج أو تخفيض التكاليف في ظل قيود وعوامل ثابتة، حيث تصاغ المشكلة الاقتصادية وتكتب على شكل علاقات رياضية خطية، أي معادلات من الدرجة الأولى، والشكل رقم (1) يوضح باختصار خطوات النمذجة والحل لنموذج البرمجة الخطي.

<u>شكل (1)</u>: " طريقة النمذجة والتحليل في البرمجة الخطية ".



Source : Gérald Baillageon، Programmation linéaire appliquée : outils d'optimisation et d'aide à la décision، Les Editions SMG، France، 1996، P : 06.

الشكل السابق يمثل تلخيص خطوات اتخاذ القرار باستخدام البرمجة الخطية، وتكون البداية ببناء النموذج الرياضي للمسالة من البيانات المجمعة من الواقع الفعلي، وهذا يستدعي تحديد الهدف المطلوب تحقيقه وتعريف جميع المتغيرات التي تأثر فيه وذلك من خلال النظام ككل.

– ثم فحص ودراسة الحلول البديلة المتاحة وتطوير عمليات نظامية لعلاجها والوصول إلى الهدف المطلوب تحقيقه.

– وأخيرا تطوير الحل للوصول إلى الحل الأمثل.

من الناحية الشكلية يتكون نموذج البرمجة الخطية من العناصر التالية:

المتغيرات	وهي العناصر المعبرة عن المسألة الخطية
المعاملات	$\leq$ ، $\geq$، 〉، 〈، =
معاملات المتغيرات	Variables Parameters
دالة الهدف	Objective Function
القيود	Constraints
قيود عدم السلبية	Non– Negative Constraints
S.T	Subject to

1.4. كتابة دالة الهدف: يتم تحديد دالة الهدف من خلال تحديد هدف قابل للقياس كميا أو تحديد نموذج لكفاءة الاختيار ولذلك يتم التعبير عن الهدف المنشود من خلال دالة يطلق عليها دالة الهدف ويرمز لها بالرمز Z في حالة التعظيم والرمز W في حالة التدنئة والتي يمكن أف نعبر عنها جبريا كما يمي:

$$\textbf{Max Or Min } Z=C_1X_1+C_2X_2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots C_nX_n$$

2.4. كتابة القيود: عند صياغة أي نموذج للبرمجة الخطية دائما هناك جملة من القيود التي تتوجب حل المشكلة في حدودها و التي تأخذ الصورة العامة التالية:

$$A_{11}X1+A_{12}X2+\dots\dots\dots\dots A_{1n}X_n \leq B1$$

$$A_{21}X1+A_{22}X2+\dots\dots\dots\dots\dots A_{2n}X_n \geq B2$$

3.4. شرط اللا سالب: يشترط البرنامج الخطي أن تكون جميع المتغيرات غير سالبة وهو ما يعبر عنه في النموذج بالصيغة التالية:

$$X1، X2، X3\dots\dots\dots\dots\dots Xn\geq 0$$

وبالنهاية الصيغة الرياضية العامة لنموذج البرمجة الخطية هي عبارة عن مصفوفة تأخذ الشكل التالي:

حالة التعظيم	حالة التصغير
– $Max\ Z=\sum C_i.X_i$	– $Max\ Z=\sum C_i.X_i$
– $A_{ij}.X_j\leq B$	– $A_{ij}.X_j\geq B$
– $X_j\geq 0$	– $X_j\geq 0$

مثال رقم 01 :

تنتج إحدى الشركات ثلاث أنواع من المنتجات A.B.C وترغب في تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها يوميا من كل منتج بحيث تحصل على أكبر ربح ممكن.

ويتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من كل منتوج المرور على ثلاث عمليات انتاجية 1و2و3، الجدول الموالي يعرض الزمن المطلوب (بالدقائق) لإنتاج الوحدة الواحدة بالنسبة لكل عملية إنتاجية وكذا الربح المحقق من الوحدة الواحدة والزمن الكلي المتاح للعملية الإنتاجية.

الجدول 01: معطيات العمليات الانتاجية

العملية	الزمن المطلوب لكل وحدة إنتاجية من المنتوجات الثلاثة في كل عملية إنتاجية			الزمن المتاح للإنتاج
	منتوج A	منتوج B	منتوج C	
1	2	2	3	**420**
2	5	0	4	**440**
3	3	6	0	**465**
ربح الوحدة الواحدة	5	4	7	

المطلوب: صياغة البرنامج الخطي الذي يحقق أكبر ربح ممكن.

الحل:

يمكن صياغة البرنامج الخطي بإتباع المراحل التالية:

أولا: تحديد المتغيرات:

يتطلب الأمر إنتاج أكبر حد ممكن من المنتجات الثلاث، خلال الوقت المتاح للعملات الأولى، الثانية والثالثة لآجل الحصول على أكبر ربح ممكن.

- نفرض أن عدد الوحدات المنتجة من المنتوج A هي X1.
- نفرض أن عدد الوحدات المنتجة من المنتوج B هي X2.
- نفرض أن عدد الوحدات المنتجة من المنتوج C هي X3.

ثانيا: تحديد دالة الهدف:

نريد في هذه الحالة تحقيق أكبر ربح ممكن، فيكون الربح الاجمالي هو ضرب الوحدات المنتجة لكل منتوج في ربح الوحدة الواحدة، ثم نجمع الربح المتحصل عليه من كل منتوج، ونعبر عن ذلك رياضيا:

$$MAX\ Z = 5X_1 + 4X_2 + 7X_3$$

ثالثا: تحديد القيود: نقوم بتحديد القيود كما يلي:

- **القيد الأول:** من خلال الجدول أقصى زمن متاح للعملية الأولى هو 420 دقيقة يوميا. وحيث أن: الوحدة الواحدة من المنتوج A تحتاج لتصنيعها في العملية الأول 2 دقيقة. الوحدة الواحدة من المنتوج B تحتاج لتصنيعها في العملية الأولى 2 دقيقة.

الوحدة الواحدة من المنتوج C تحتاج لتصنيعها في العملية الأولى 3 دقيقة. وبالتالي: يمكن صياغة القيد الأول كمايلي: $2X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 420$

- **القيد الثاني:** بنفس الطريقة يصاغ القيد الثاني:

$$5X_1 + 0X_2 + 2X_3 \leq 440 \quad \text{أي:} \quad 5X_1 + 2X_3 \leq 440$$

- **القيد الثالث:** بنفس الطريقة يصاغ القيد الثالث:

$$3X_1 + 6X_2 + 0X_3 \leq 465 \quad \text{أي:} \quad 3X_1 + 6X_2 \leq 465$$

رابعا: شرط عدم السلبية:

إن عدد الوحدات ($X_1\ X_2\ X_3$) من الممكن أن تكون سالبة وهذا لا يجوز منطقيا لأنها تعبر عن عدد الوحدات التي سيتم انتاجها، وبالتالي يجب أن تكون ذات قيم موجبة أو لا تقوم المؤسسة بالإنتاج نهائيا فتكون مساوية للصفر، لذلك يوضع شرط عدم السلبية كالتالي:

$$X_3، X_2، X_1 \geq 0$$

وعلية نخلص بالنهاية إلى كتابة البرنامج الخطي التالي:

$$\text{MAX } Z = 5X_1 + 4X_2 + 7X_3$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 420 \\ 5X_1 + 2X_3 \leq 440 \\ 3X_1 + 6X_2 \leq 465 \end{cases}$$

$$X_1، X_2، X_3 \geq 0$$

مثال رقم 02:

تعاقدت إحدى المزارع مع إحدى المؤسسات الإنتاجية المتخصصة في صناعة المواد الغذائية لحيوانات وينص العقد على أن كل تركيبة وجبة غذائية يجب أن تحتوي على70 وحدة من البروتين و 100 وحدة من الكاربوهيدرات و 20 وحدة من الدهون، كما أن لهذه المؤسسة 3أنواع من الغذاء تحتوي على المطلوب بمقادير مختلفة كما يوضح ذلك الجدول التالي:

الغذاء	بروتين (وحدة/كغ)	كاربوهيدرات (وحدة/كغ)	دهون(وحدة/كغ)	التكلفة
A	20	50	4	**2**
B	30	30	9	**3**
C	40	20	11	**5**

المطلوب :صياغة المشكلة رياضيا صياغة نظامية.

نرمز بـ : X_1 X_2 X_3 للأغذية،

- ✓ لإنتاج كلغ واحد من X_1 يلزمنا 4 وحدات دهون و 50 وحدة الكاربوهيدرات و 20 وحدة بروتين وبتكلفة 2 ون،
- ✓ لإنتاج كلغ واحد من X_2 يلزمنا 9 وحدات دهون و 30 وحدة الكاربوهيدرات و 30 وحدة بروتين وبتكلفة 3 ون،

✓ لإنتاج كلغ واحد من X_3 يلزمنا 11 وحدات دهون و 20 وحدة الكاربوهيدرات و 40 وحدة بروتين وبتكلفة 5 ون،

صياغة المشكلة رياضيا :

- **دالة الهدف:** وبما أن الغاية هي التصغير فنكتب:

$$\text{Min } W = 2X_1 + 3X_2 + 5X_3$$

- **القيود** :من خلال معطيات المسألة نلاحظ أنه لدينا 3 قيود :وعليه القيد الأول يمكن كتابته على الشكل التالي :كمية البروتين الموجودة بالغذاء الأول مضافا إليه كمية البروتين الموجودة في الغذاء الثاني والموجودة في الغذاء الثالث حيث يجب ألا يقل عن المطلوب وهذا ما يمكن أن نعبر عنه كما يلي:

$$20X_1 + 30X_2 + 40X_3 \geq 70$$

نلاحظ أن القيد جاء أكبر من أو يساوي لأن إجمالي البروتين المقدم لا يمكن أن يقل عما هو ضروري في الوجبة الغذائية .بنفس الطريقة تتحصل على القيد الثاني الخاص بالكربوهيدرات في هذه المؤسسة

$$50X_1 + 30X_2 + 20X_3 \geq 100$$

والقيد الثالث الخاص بالدهون

$$4X_1 + 9X_2 + 11X_3 \geq 20$$

- **شروط عدم السلبية** :قبل البدء في حل المشكلة لا بد من التأكيد على ألا ننسى على ألا تكون أرقام التركيبة أرقاما سالبة فمن غير المعقول أن يتم إدخال كميات في التركيبة بصورة سالبة أي أن كل من المواد الغذائية الثلاث الداخلة في التركيبة يمكن أن تكون صفرا أو أكثر من الصفر ويعبر عن ذلك كما يلي:

$$X_1.\ X_2.\ X_3 \geq 0$$

يمكن عرض إجمالي هذه المشكلة كما يلي:

Min W= $2X_1 + 3X_2 + 5X_3$

S.T

$$\begin{cases} 20X_1 + 30X_2 + 40X_3 \geq 70 \\ 50X_1 + 30X_2 + 20X_3 \geq 100 \\ 4X_1 + 9X_2 + 11X_3 \geq 20 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0. \quad X_2 \geq 0، \; X_3 \geq 0$$

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

مؤسسة للتجارة تنتج 3 أنواع من المنتجات هي: الكراسي، الطاولات، الخزائن، عملية الإنتاج تستدعي مرور هذه المنتجات بثلاث ورشات:

- **الورشة 01:** يتم على مستوى هذه الورشة صناعة الهياكل، طاقة العمل القصوى بها تقدر بـ 130 ساعة؛
- **الورشة 02:** يتم على مستوى هذه الورشة تركيب الملحقات، عدد ساعات العمل المتاح لهذه الورشة يقدر بـ 90 ساعة؛
- **الورشة 03:** يتم على مستوى هذه الورشة الإنهاء، طاقة العمل القصوى بها تقدر بـ 80 ساعة.

إنتاج الكرسي الواحد يتطلب 14 سا في الورشة 01، و 14 سا في الورشة 02، و 10 سا في الورشة 03، و إنتاج طاولة واحدة يتطلب 18 سا في الورشة 01، و 20سا في الورشة 02، و 5سا في الورشة 03، و إنتاج خزانة واحدة يتطلب 25سا في الورشة 01، و 20سا في الورشة 02، و 10سا في الورشة 03. الكرسي الواحد يتطلب صفيحة خشبية واحدة في حين أن الطاولة تتطلب صفيحتين، أما بالنسبة للخزانة الواحدة فتتطلب 4 صفائح خشبية، علما أن المتاح من الصفائح الخشبية على مستوى المؤسسة يقدر بـ 125 صفيحة، سعر بيع: الكرسي الواحد 450 دج، الطاولة الواحدة 1000 دج والخزانة الواحدة 1500 دج، علما أن تكلفة: الكرسي الواحد 400 دج، الطاولة الواحدة 900 دج، الخزانة الواحدة 1000 دج.

المطلوب:

1. صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يسمح بتحديد الكميات الواجب إنتاجها من الكراسي، الطاولات والخزائن، والذي يسمح للمؤسسة بتحقيق أعظم ربح ممكن.
2. صياغة النموذج بافتراض أن هذه المنتجات الثلاث تخزن في مخزن طاقته الاستيعابية تقدر ب 500 وحدة وبافتراض أن الحجم التخزيني للمنتجات الثلاثة متساوي.

التمرين الثاني:

تحاول مؤسسة IFRI إنتاج أكبر عدد من منتجين اثنين: مياه معدنية و عصائر، و ذلك في ظل القيود التي تفرضها الطاقة الإنتاجية و الطاقة التمويلية، و الجدول أدناه يوضح البيانات الخاصة بالمنتجين.

المنتجات	سعر بيع الوحدة	تكلفة الوحدة	عدد الساعات المطلوبة لإنتاج وحدة واحدة		
			القسم أ	القسم ب	القسم ج
المياه المعدنية	14	10	0,5	0,3	0,2
العصائر	11	8	0,3	0,4	0,1
الطاقة المتاحة بالأقسام	–	–	500	400	200

حيث أن المؤسسة تتوفر على مبلغ 30000دج، علما أنه يتم تخزين هذه المنتجات قبل تسويقها في مخزن طاقته الاستيعابية 300 وحدة، حيث أن الحجم التخزيني للعصائر ضعف المياه المعدنية.

المطلوب: بناء النموذج الرياضي لهذه المسألة.

التمرين الثالث:

تنتج مؤسسة ما 3 أنواع من المنتجات P_1، P_2، P_3 باستخدام نوعين من المنتجات الأولية M_1، M_2، استهلاك الوحدة الواحدة من كل منتج من كل نوع من المواد الأولية ومعلومات أخرى متعلقة بالمشكل موضوع الدراسة مبينة في الجدول أدناه:

المواد الأولية / المنتجات	M_1	M_2	سعر البيع
P_1	01	02	04
P_2	02	02	01
P_3	01	–	03
المتاح من المواد الأولية	100	150	

المطلوب: أكتب النموذج الرياضي لهذا المشكل علما أن الطاقة التخزينية المتاحة هي 500 وحدة.

المحور الثالث: حل البرنامج الخطي (الطريقة البيانية)

يقصد بحل البرنامج الخطي إيجاد قيم المتغيرات التي تجعل دالة الهدف في أمثل قيمة لها دون تجاوز حدود القيود، حيث يمكن ايجاد حل للبرنامج الخطي بإحدى الطريقتين:

- **الطريقة البيانية:** وهي شائعة الاستخدام فقط في البرامج الخطية والتي تحتوي على متغيرين على الاكثر.
- **طريقة السمبلكس (Simplex):** وهي طريقة عامة تستخدم مهما كان عدد المتغيرات في البرنامج الخطي.

1. وصف الطرية البيانية:

الطريقة البيانية هي عبارة عن رسم بياني لنموذج البرمجة الخطية و تعد الطريقة البيانية من أسهل طرق حل مشاكل البرمجة الخطية إلا أنها غير كافية لمعالجة جميع مسائل البرمجة الخطية لان المسائل العملية تحوي غالبا عددا كبيرا من المتغيرات وينحصر استخدام الطريقة البيانية في الحالات التالية التي يكون فيها البرنامج يحتوي على متغيرين لا أكثر، وتكمن فائدة الطريقة البيانية في إعطاء الدارس معلومات جيدة تساعد على إدراك خصائص البرمجة الخطية وفهمها كما تساعده في استيعاب الطرق الأخرى والوقوف على تفاصيل الحل وكيفية معالجة وتطوير الحل لمسائل البرمجة الخطية التي تحوي أكثر من متغير.

2. خطوات حل البرنامج الخطي.

وتعتبر هذه الطريقة من الطرق البسيطة والتي تعطي نتائج دقيقة إلا أنها طريقة غير كفوءة في معالجة مشكلات البرمجة الخطية في الحياة العملية.

- ✓ صياغة المشكلة في شكل نموذج رياضي، ثم على الشكل القياسي؛
- ✓ نحول القيود من متراجحات إلى معادلات وذلك بتحويل كل من ($\leq$ و $\geq$) إلى (=)، بما يجعل القيود في صيغة يمكن تمثيلها بخط مستقيم.

- ✓ رسم المحاور الإحداثية المقابلة لمتغيرات المسألة؛
- ✓ التمثيل البياني لجميع القيود، والتي قد تشكل لنا مضلع متعدد الرؤوس؛
- ✓ تحديد منطقة الحلول المسموح بها، وهي التي تحقق جميع القيود؛
- ✓ تمثيل دالة الهدف في مجال الإحداثيات؛
- ✓ الحصول على الحل الأمثل إن وجد بواسطة انسحابات للخط الممثل لدالة الهدف بالاتجاه الذي يحقق القيمة المثلى (تقيم الدالة عند كل زاوية) أو عن طريق تقييم النقط رأس الزاوية.

3. مثال تطبيقي01: حالة التعظيم

أوجد حل للبرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$\textbf{MAX Z} = 4X_1 + 5X_2$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 \leq 12 \\ 2X_1 + X_2 \leq 8 \end{cases}$$

$$X_1، X_2 \geq 0$$

الحل البياني:

- نرسم معلم متعامد، يوضع على المحور الأفقي X_1 و على المحور العمودي X_2.
- نحول كل متراجحات القيود إلى معادلات، ونسمي المستقيمين C_1. و C_2:

المستقيم C_1 ..... $2X_1+3X_2=12$ .... $2X_1+3X_2\leq12$

المستقيم C_2 ..... $2X_1+X_2=8$ .... $2X_1+X_2\leq8$

- نرسم الخطوات المستقيمة لمعادلات القيود:

	المستقيم C1		المستقيم C2	
X1	0	6	0	**4**
X2	4	0	8	**0**

1) نشطب المناطق التي لا تحقق القيود، توجد على يمين كل مستقيم، كما تشطب المناطق التي لا تحقق شرط عدم السالبية.

2) نحدد المنطقة التي تحقق جميع القيود (منطقة الحلول الممكنة (region of feasible solutions)، والتي هي محصورة في المضلع ABCD.

3) نجعل دالة الهدف معدومة، نرسم المستقيم على نفس المعلم حيث يمر بالمبدأ، ونسميه (Z).

المستقيم Z: $Z = 0$ .... $4 X1 + 5 X2 = 0$

X1	**0**	**5**
X2	0	**-4**

4) نحرك المستقيم (Z) بصفة متوازية اتجاه رؤوس المضلع ABCD وتكون آخر نقطة يصل اليها المستقيم (Z) وهي النقطة B كما يوضحه الشكل.

5) نجد احداثيات هذه النقطة إما هندسيا عن طريق الاسقاط على المحاور حيث نلاحظ النقطة B ذات الاحداثيات B(X1 ;X2) هي B(2 ;3)، أو عن طريق الجبر بواسطة استعمال المعادلات الآنية.

و نتحقق من الحل جبريا:

حيث أن النقطة B تمثل تقاطع مستقيمين C1.C2 نقول بحل جملة معادلتي المستقيمين:

$$2X_1+3X_2=12 \ \ldots\ldots \ (1)$$

$$2X_1+ X_2= 8 \ \ldots\ldots \ (2)$$

ومنه نجد قيم كل من X_1 X_2...... حيث $X_2= 3$ $X_1=2$

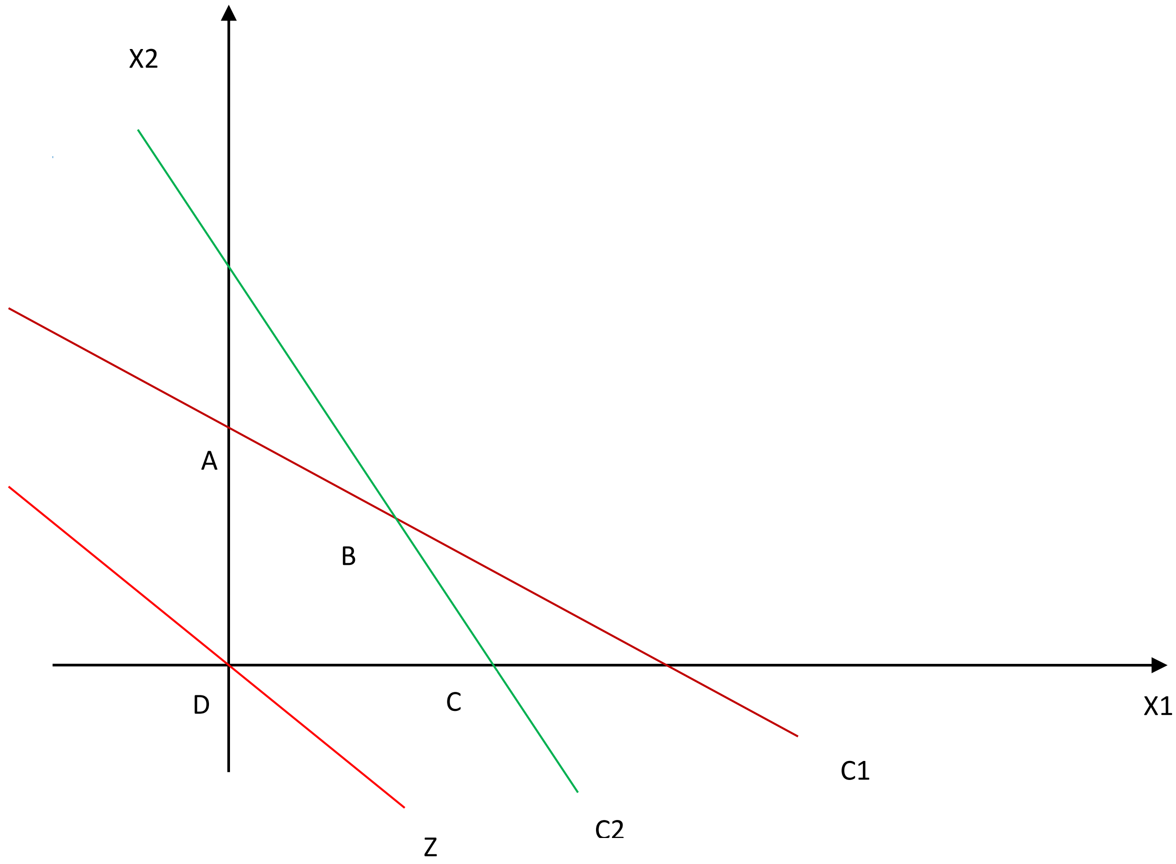
هذا الحل يتطابق مع الحل الهندسي.

6) للتحقق من الحل نعوض قيم كل نقاط رؤوس المضلع في معادلة دالة الهدف.

- ✓ A.......... $Z = 4\ (0)+ 5\ (\ 4\ ) = 20$
- ✓ B.......... $Z = 4\ (3)+ 5\ (2) = 22$
- ✓ C.......... $Z = 4\ (4) + 5\ (0) = 16$

نلاحظ أن النقطة B حققت أكبر قيمة لـ Z

7) نستنتج أن $Z=22$ هي أكبر قيمة لدالة الهدف



مثال تطبيقي رقم 02:

لدينا البرنامج الخطي التالي:

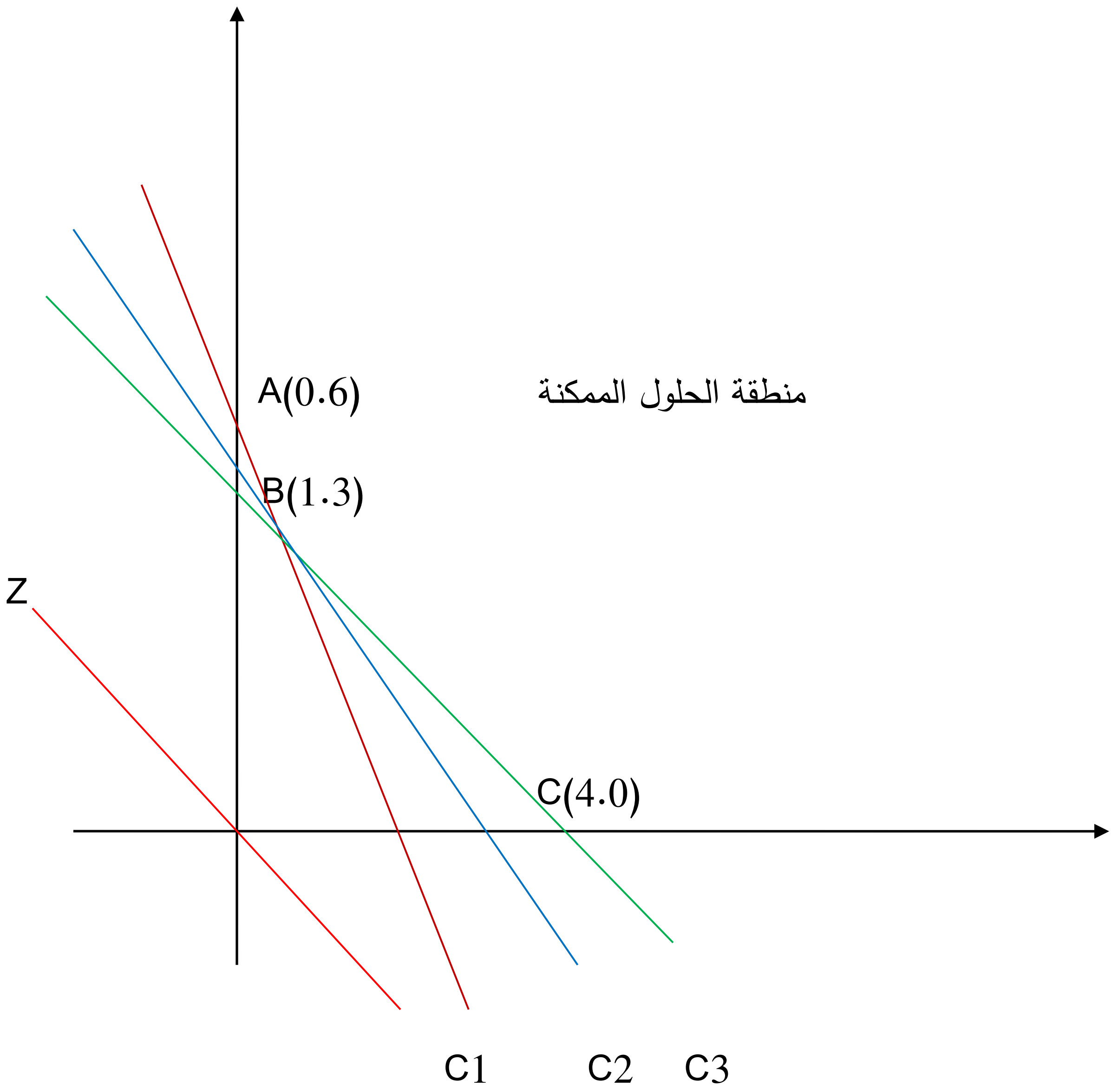
المطلوب: حل البرنامج الخطي باستعمال الحل البياني:

$$\text{Min} \quad Z = 100\,X1 + 80\,X2$$

$$\begin{cases} 6X1 + 2X2 \geq 12 \\ 2X1 + 2X2 \geq 8 \\ 6X1 + 4X2 \geq 18 \end{cases}$$

$$X1 ، X2 \geq 0$$

الرسم البياني:



بعد إسقاط النقطة B على المعلم تعطي لنا الإحداثيات التالية: B(1.3)، أي أن أخد وحدة من X1 و ثلاث وحدات من X2 كفيلة بتحقيق الهدف الذي هو في مثالنا تدنئة و ليس تعظيم.

للتحقق من الحل نعوض قيم كل نقاط التي تحصر المساحة المفتوحة على يمين النقاط الثلاث ABC.

- ✓ A………. $Z = 100\ (0) + 80(\ 6\ ) = 480$
- ✓ **B……….** $\mathbf{Z} = 100\ (1) + 80\ (3) = 340$
- ✓ C………. $Z = 100\ (4) + 80\ (0) = 400$

نلاحظ أن النقطة B حققت أكبر قيمة لـ Z، إذن نستنتج أن $Z=340$ هي أصغر قيمة لدالة الهدف.

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

مؤسسة لإنتاج المنتجات البلاستيكية، تركز على إنتاج منتجين P1، P2، خلال السنة القادمة وذلك لكثرة الطلب عليهما من جهة وقلة تكاليفهما من جهة أخرى. تستخدم المؤسسة لإنتاج هذين المنتجين مادتين خام هما: Mat-1، Mat-2 بكميات متفاوتة، بالإضافة إلى ذلك تستخدم المؤسسة آلتين:Machine-1 ، Machine-2. الجدول أدناه يوضح استهلاك المواد الخام وكذا الوقت المستغرق على مستوى كل آلة.

	Mat-1	Mat-2	Machine-1	Machine-2
المنتج P1	01	05	02	00
المنتج P2	01	06	01	03

المؤسسة لا تتوفر إلا على 400 وحدة من المادة الخام الأولى أما المادة الخام الأخرى فإنها تستجيب لأي برنامج إنتاجي. فيما يخص الطاقة القصوى للآلتين فهي على التوالي 600 و 900 ساعة، و حسب مدير المبيعات لهذه المؤسسة فإن هذه الأخيرة يجب عليها على الأقل إنتاج 150 وحدة من P1، أما عن الربح المترتب عن المنتجين فهو على التوالي: 300 و 200 دج.

المطلوب:

1. حدد الكميات الواجب إنتاجها من المنتجين بغرض تحقيق أعظم ربح؛
2. حدد كمية المادتين الخام Mat-1 وMat-2 المستخدمتين لإنتاج P1، حدد كمية المادتين الخام Mat-1 وMat-2 المستخدمتين لإنتاج P2، ثم حدد كمية المادتين الخام الكلية المستخدمة وغير المستخدمة؛
3. حدد الوقت المستخدم لإنتاج P1 على مستوى Machine-1 ثم على مستوى Machine-2؛

4. حدد الوقت المستخدم لإنتاج P2 على مستوى Machine-1 ثم على مستوى Machine-2؛

5. حدد الوقت المستخدم وغير المستخدم على مستوى الآلتين؛

6. حدد القيود المشبعة وغير المشبعة بيانيا وجبريا.

التمرين الثاني:

ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Min\ Z = 300x_1 + 400x_2$$

Subject to

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 \leq 60 \\ x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 6 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب:

1. باستخدام الطريقة البيانية أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أعلاه؛
2. هل الحل الأمثل يحقق القيود الوظيفية و قيود عدم سلبية المتغيرات ؟
3. حدد القيود المشبعة و القيود غير المشبعة بيانيا و جبريا، و ماذا يعني كل منها ؟
4. حدد الربح المترتب عن الكمية المنتجة من المنتج الأول ثم الربح المترتب عن الكمية المنتجة من المنتج الثاني.

المحور الرابع: حل البرنامج الخطي بواسطة طريقة السمبلكس (Simplex)

كون الطريقة البيانية لا تستخدم إلا في حالة و جود متغيرين فقط، ويرجع ذلك إلى صعوبة بل إستحالة الرسم البياني عندما يزيد عدد المتغيرات الواجب إتخاذ قرار بشأنها عن إثنين، و طالما أن معظم التطبيقات العلمية تتضمن عدد كبير من المتغيرات و القيود، فإننا نحتاج إلى أسلوب آخر صمم خصيصا لذلك يعرف بأسلوب السمبلكس Simplex Méthod.

يقوم أسلوب السمبلكس الذي قدمه G.B.Dantzig الأمريكي في عام 1947 م(18)، على مجموعة من الخطوات الجبرية التي تؤدي إلى الوصول إلى الحل الأمثل، في حالة وجود حل، وذلك في عدة مراحل متتابعة ومحددة، ويتم تحقيق ذلك عن طريق تقييم النقط الركنية للمنطقة الممكنة في خطوات متتابعة تؤدي إلى الوصول إلى حلا أفضل في كل مرحلة، وذلك إلى الحد الذي لا يمكن معه تحقيق تحسين في الحل، عندئذ نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل.

1. منهجية حل البرنامج الخطي وفق طريقة السمبلكس

ويمكن تلخيص الخطوات التي تتضمنها طريقة السمبلكس في الخطوات الخمس التالية:

أ. ضع مشكلة البرمجة الخطية في الصيغة المعيارية (النمطية) Forme Standard.

ب. اختيار حل مبدئي ممكن وهو عبارة عن نقطة ركنية في المنطقة الممكنة.

ت. تقييم إمكانية تحسين الحل القائم.

إذا كان التحسين ممكنا يتم العمل الخطوات التالية:

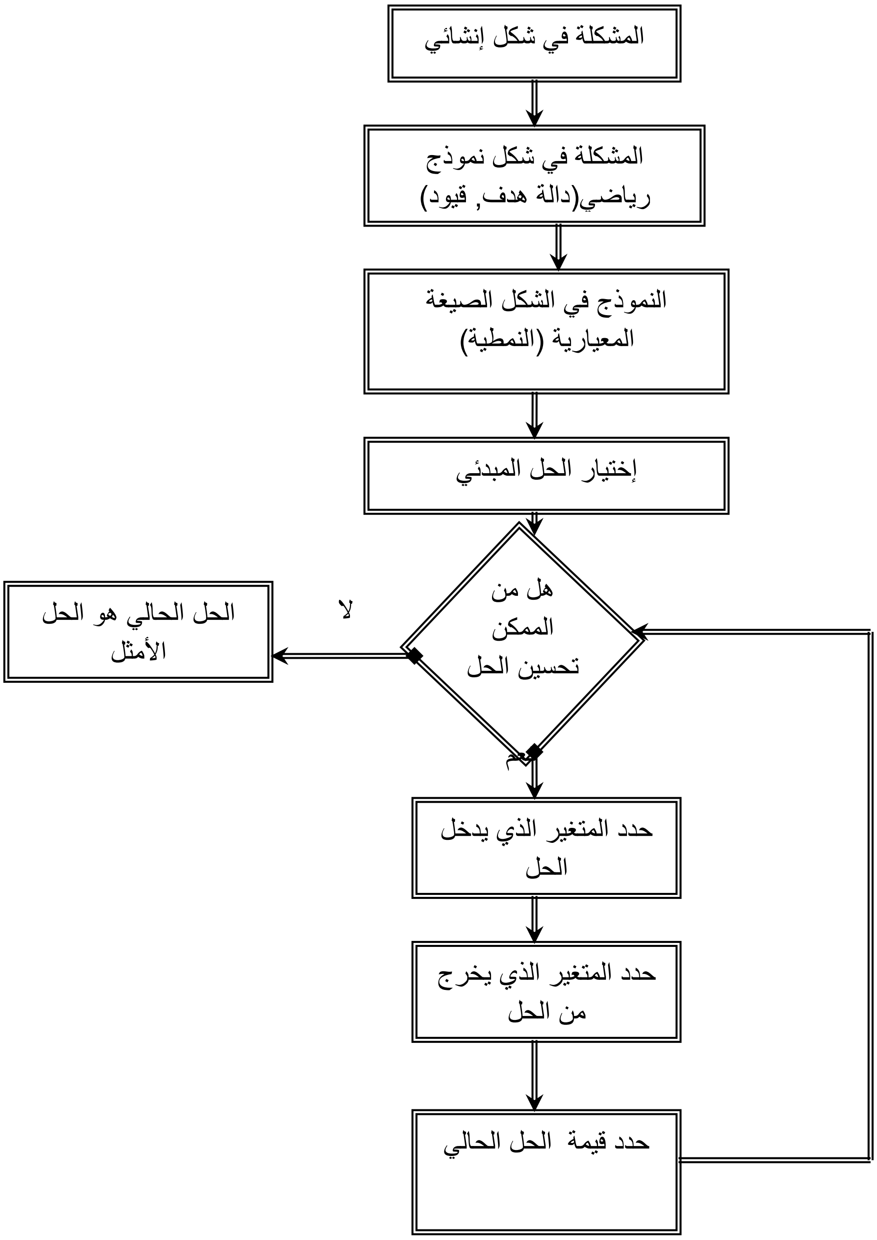
- ✓ حدد المتغير الغير أساسي الغير موجود في الحل الحالي والواجب إدخاله في الحل، واعتباره متغيرا أساسيا.
- ✓ حدد المتغير الأساسي الموجود في الحل الحالي والواجب خروجه من الحل، واعتباره متغيرا غير أساسي.

✓ حدد قيم المتغيرات الموجودة في الحل الجديد، وهو يعبر عن نقطة ركنية في المنطقة الممكنة، و ذلك حدد قيم المعاملات الجديدة في معادلات القيود.

✓ أرجع إلى الخطوة الرابعة وكرر عملية التقويم.

إذا كان التحسين غير ممكن فإن الحل الذي توصلت إليه يكون هو الحل الأمثل.

الشكل (2):يوضح خطوات الحل بطريقة السمبلكس:



Source : Yves Noobert. Roch Ouellet. Réges Parent : **La recherche opérationnelle**، gaitan morin éditeur 1995،P :170.

2. أنواع الحلول في أسلوب البرمجة الخطية.

عند حلنا لمسائل البرمجة الخطية نلاحظ هناك نوعان من الحلول:

أ. **الحلول الغير محققة:** هي الحلول التي تقع خارج منطقة الحلول الممكنة،فهي لا تحقق قيود المسألة.

ب. **الحلول المحققة :** هي مجموع القيم (X_j) التي تحقق القيود وشرط عدم السلبية وهي تكون إما :

- **الحلول المسموح بها:** هي كل النقاط التي تقع ضمن منطقة الحل، وعلى محيطها والتي تحقق قيود المسألة بالإضافة إلى شرط عدم السلبية $(X_j \geq 0)$.
- **الحلول الأساسية المسموح بها:** هي مجموعة النقاط التي تقع عند تقاطعات مستقيمات القيود، والتي تمثل النهايات المتطرفة في حالة تعدد المتغيرات، والتي يمكن أن تشكل إحداها حلا يحقق دالة الهدف.
- **الحل الأمثل:** هو الحل الذي يتم اختياره من بين الحلول الأساسية المسموح بها، والذي يتحقق معه الحصول على أكبر قيمة للدالة في حالة ما إذا كانت هذه الدالة دالة تعظيم (*MAX*)، والحصول على أدنى قيمة للدالة في حالة ما إذا كانت هذه الأخيرة دالة تخفيض التكاليف (*MIN*).

3. حالات خاصة[4].

يمكن أن نستخلص الحالات الخاصة التي قد نواجهها عند استخدامنا للبرمجة الخطية في حل بعض المسائل والمشاكل، ومن تلك الحالات:

أ- **حالة تعذر الحل(Infeasibility):** تظهر هذه الحالة عندما تحتوي مسألة البرمجة الخطية على بعض القيود المتعارضة وفي مثل هذه الحالة يكون من المستحيل تحديد منطقة الحل الممكنة، وهذا يعني عدم وجود حل لمسألة البرمجة الخطية.

[4]- بوسهمين أحمد، طافر زهير: فعالية استخدام أسلوب البرمجة الخطية في مؤسسة الأعمال، الملتقى الوطني السادس، الأساليب الكمية ودورها في اتخاذ القرارات الادارية، جامعة سكيكدة، 24/23ديسمبر 2008.

ب-حالة القيد الفائض (Redundancy): نواجه هذه المشكلة بالعادة عندما تحتوي مسألة البرمجة الخطية قيدا فائضا،و القيد الفائض هو القيد الذي لا يؤثر على منطقة الحل الممكن فلا يخفضها ولا يعمل على زيادتها.

ت-حالة عدم توفر الحدود (Uboundness): تحدث هذه الحالة عندما تكون منطقة الحل الممكن مفتوحة من إحدى الجهات، ولا يمكن أن نحدد الحل الأمثل للمسألة، من الناحية الاقتصادية نلاحظ أن هذه الحالة هي حالة غير واقعية، لأنه ليس هناك مؤسسة لا تواجه حالة محدودية الموارد فالموارد المتاحة دوما محددة، لذلك فإن صادفنا مثل هذه الحالة فإن ذلك يعني أن المسألة البرمجة الخطية قد تم صياغتها بشكل خاطئ أو هناك نقص في القيود.

ث-حالة تعدد الحلول المثلى (Alternate Optimal Solution): تحدث هذه الحالة عندما تحتوي مسألة البرمجة الخطية على عدة حلول مثلى، أو بصياغة أخرى أن الحل الأمثل يقع على عدة نقاط، تؤدي جميعها إلى نفس الربح في حالة التعظيم، ونفس التكاليف في حالة تخفيض التكاليف.

4. المثال التطبيقي:

لغرض شرح خطوات حل البرنامج الخطي وفق طريقة السمبلكس، نستعين بالمثال التالي :

$$\text{Max } Z = X_1 + 3X_2$$

$$\begin{cases} X_1 \leq 5 \\ X_1 + 2X_2 \leq 10 \\ X_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$X_1 . X_2 \geq 0$$

أولا: تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى النموذج القياسي: يتم تحويل نموذج البرمجة الخطية أعلاه إلى النموذج القياسي وذلك بإضافة المتغيرات المكملة، أي تحويل المتراجحات إلى معادلات كميا يلي:

$$\text{Max } Z - X_1 - 3X_2 = 0$$

$$\begin{cases} X_1 + S_1 = 5 \\ X_1 + 2X_2 + S_2 = 10 \\ X_2 + S_3 = 4 \end{cases}$$

$$X_1 .\ X_2 .\ S_1 .\ S_2 .\ S_3 \geq 0$$

مسائل عند تحويل القيود:

المسألة الأصلية	المسألة بعد التحويل
$X1 + 2X2 \leq 10$	$X1 + 2X2 + S_2 = 10$
$X1 + 2X2 \geq 10$	$X1 + 2X2 - S_2 = 10$
$X1 + 2X2 \geq -10$ $-X1 - 2X2 \leq 10$	$X1 + 2X2 + S_2 = 10$

ثانيا: تكوين الجدول الأساسي: يتم تشكيل الجدول الأساسي وترتب البيانات حيث تمثل المتغيرات المكملة متغيرات أساسية ومتغيرات القرار متغيرات غير أساسية كما في الجدول الموالي:

V.B	X1	X2	S1	S2	S3	RHS	ratio
S1	1	0	1	0	0	5	5/0
S2	1	2	0	1	0	10	10/2
S3	0	1	0	0	1	4	4/1
Z	−1	−3	0	0	0	0	

ثالثا: تحديد المتغير الداخل: لغرض تحديد المتغير الداخل و ما دامت المشكلة عي تعظيم فإننا نبحث عن أكبر قيمة بالسالب في صف دالة الهدف و نلاحظ أكبر قيمة بالسالب هي (-3) و التي تمثل معامل X2 لذلك فإن X2 سيكون المتغير الداخل عمود يسمى X2 العمود الداخل.

رابعا: تحديد المتغير الخارج: يتم تحديد المتغير الخارج بعد قسمة عناصر نواتج المعادلات (RHS) على العناصر المناظرة لها في العمود الداخل X2 (مع اهمال القيم السالبة والصفرية) عدا دالة الهدف. حيث نحصل على المؤشر (RATIO) : 1/4 - 2/10 - 0/5.

إن أقل نسبة هي 4 لذلك فإن الصف S3 هو المتغير الخارج، و أن القيمة (1) في الصف S3 هو العنصر المحوري (العنصر المحوري هو نقطة تقاطع عمود المتغير الداخل و صف المتغير الخارج).

خامسا: إيجاد قيم الصف المحوري: لغرض ايجاد قيم الصف المحوري، يتم تقسيم قيم الصف للمتغير الخارج على العنصر المحوري، و ذلك للحصول على الصف المحوري، و في مثالنا نقسم قيم الصف للمتغير الخارج S3 على العنصر المحوري (1) و ذلك للحصول على الصف المحوري X2، حيث يصبح الصف المحوري كمايلي:

S3	0	1	0	0	1	4

ثم يتم ترتيب النتائج في جدول

سادسا: إيجاد بقية صفوف الجدول: لإيجاد بقية صفوف جدول الحل الجديد نستخدم الصيغة التالي:

عناصر الصف الجديد = عناصر الصف القديم – (عنصر الصف القديم الواقع في عمود المتغير الداخل) x عناصر الصف المحوري.

بتطبيق الصيغة تكون قيم S1 هي نفسها كما هو مبين في الجدول ذلك أن عنصر الصف الواقع في عمود المتغير الداخل مساو للصفر.

بالنسبة لعناصر الصف للمتغير S2 فيتم ايجادها وفق الصيغة و ذلك بضرب عنصر الصف S2 و الواقع في عمود المتغير الداخل في عناصر الصف المحوري ثم طرحها من عناصر الصف S2 القديم.

S2	1	2	0	1	0	10
S3*2	0	2	0	0	2	8
	1	0	0	1	−2	2

نقوم بإيجاد قيم الصف Z بنفس الطريقة

Z	−1	−3	0	0	0	0
S3*−3	0	−3	0	0	−3	−12
	−1	0	0	0	3	12

وعليه نحصل على الجدول التالي:

V.B	X1	X2	S1	S2	S3	RESULTS	RATIO
S1	1	0	1	0	0	5	5/1
X1	1	0	0	1	−2	2	2/1
X2	0	1	0	0	1	4	4/0
Z	−1	0	0	0	3	12	

بما أن دالة الهدف لا تزال تحتوي على القيم السالبة فإننا لم نصل بعد إلى الحل الأمثل وبذلك نستمر بالحل بتكرار الخطوات التي نصل إلى الحل الامثل.

وعليه من الجدول نجد أن المتغير الداخل هو X_1. و لتحديد المتغير الخارج نقسم النواتج على العناصر المناظرة لها في العمود الداخل X_1.

نجد أن اقل قيمة 2 لذلك المتغير الخارج هو S2 كما العنصر (1) هو العنصر المحوري.

باتباع نفس الخطوات السالبة نجد:

الصف المحوري هو:

2	−2	1	0	0	1	S2/1

<u>الصف S1</u>

5	0	0	1	0	1	S1
2	−2	1	0	0	1	S2*(1)
3	2	−1	1	0	0	

<u>الصف S3</u>

4	1	0	0	1	0	S3
0	0	0	0	0	0	S2*(0)
4	1	0	0	1	0	**X2**

<u>دالة الهدف Z</u>

12	3	0	0	0	−1	Z
−2	2	−1	0	0	−1	S2*−(1)
14	1	1	0	0	0	**Z**

نلاحظ أن جميع قيم Z أصبحت موجبة أي $Z_{ر} \geq 0$ وكما هو موضح في الجدول وبذلك نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل.

V.B	X1	X2	S1	S2	S3	RHS
S1	0	0	1	−1	2	**3**
X1	1	0	0	1	−2	**2**
X2	0	1	0	0	1	**4**
Z	0	0	0	1	1	**14**

الحل الأمثل هو : $X1 = 2$. $X2 = 4$. $S_1 = 3$. $S_2 = 0$. $Z = 14$

مثال رقم 2: حالة التدنية:

$$\mathbf{Min\ Z = 2X1 - 3X2 + 3X2}$$

$$\begin{cases} \mathbf{3X1 - X2 + 2X3 \leq 7} \\ \mathbf{2X1 + 4X2 \geq -12} \\ \mathbf{-4X1 + 3X2 + 8X3 \leq 10} \end{cases}$$

$$\mathbf{X1 .\ X2 . X3 \geq 0}$$

- **التحويل للصيغة القياسية:**

$$\mathbf{Min\ Z} = 2X1 - 3X2 + 6X2$$

$$\begin{cases} 3X1 - X2 + 2X3 \leq 7 \\ 2X1 + 4X2 \geq -12 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad -2X1 - 4X2 \leq +12 \\ -4X1 + 3X2 + 8X3 \leq 10 \end{cases}$$

$$X1 .\ X2 . X3 \geq 0$$

$$\text{Min } Z - 2X1 + 3X2 - 6X2 + 0S1 + 0S2 + 0S3 = 0$$

$$\begin{cases} 3X1 - X2 + 2X3 + S1 = 7 \\ 2X1 + 4X2 \geq -12 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots -2X1 - 4X2 + S2 = +12 \\ -4X1 + 3X2 + 8X3 + S3 = 10 \end{cases}$$

$$X1.\ X2.X3 \geq 0$$

- نشكل جدول الحل الاولي:

V.B	X1	X2	X3	S1	S2	S3	RHS	ratio
S1	3	−1	2	1	0	0	7	7/−1
S2	−2	−4	0	0	1	0	12	12/−4
S3	−4	3	8	0	0	1	10	10/3
Z	−2	3	−6	0	0	0	0	

- المتغير الداخل الذي يقابل أكبر قيمة موجبة و التي هي (3) هو X2 .
- عند حساب قيمة (ratio) لا تؤخذ بعين الاعتبار القيم السالبة والمعدومة. إذن قيمة التقاطع (3) هي النقطة المحورية وبالتالي (S3) هو الصف المحوري.

باتباع نفس الخطوات للمثال السابق نحصل على جدول الحل التالي:

V.B	X1	X2	X3	S1	S2	S3	RHS	ratio
S1=X2	5/3	0	14/3	1	0	1/3	31/3	
S2	−22/3	0	32/3	0	1	4/3	76/3	
X2	−4/3	1	8/3	0	0	1/3	10/3	
Z	2	0	−14	0	0	−1	−10	

نلاحظ من جدول الحل أن دالة الهدف لاتزال تحتوي على قيم موجبة لذا فانه يوجد حل آخر أفضل من هذا الحل، وبالتالي نعيد نفس العملية بالخطوات السابقة، فتكون القيمة المحورية هي (3/5). بعد الحساب نحصل على جدول الحل التالي:

V.B	X1	X2	X3	S1	S2	S3	RHS
S1=X1	1	0	14/5	3/5	0	1/5	31/5
S2	0	0	156/5	22/5	1	14/5	354/5
X2	0	1	32/5	4/5	0	3/5	58/5
Z	0	0	−98/5	−6/5	0	−7/5	−112/5

بهذا نكون قد وصلنا إلى القيم (X3=0 X2=58/5 X1=31/5) التي تحقق الحل الأمثل.

$$\textbf{Min } Z = 2(31/5) - 3(58/5) + 3(0) = -112/5$$

تمارين مقترحة

التمرين الاول:

باستخدام طريقة السمبلكس أوجد الحلول المثلى لنماذج البرمجة الخطية أدناه.

$$\text{Min } Z=-6x_1-7x_2-8x_3$$
Subject to
$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3\leq 100 \\ 3x_1+4x_2+2x_3\leq 120 \\ 2x_1+4x_2+6x_3\leq 200 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Max } Z=7x_1+4x_2+6x_3$$
Subject to
$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+4x_3\leq 100 \\ 2x_1+2x_2+x_3\leq 80 \\ x_1+3x_2+2x_3\leq 40 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Max } Z=40x_1+60x_2-20x_3$$
Subject to
$$\begin{cases} 3x_1+6x_2\leq 300 \\ 4x_1+2x_2+x_3\leq 220 \\ x_2+x_3\leq 100 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0 \end{cases}$$

التمرين الثاني:

باستخدام طريقة السمبلكس أوجد الحلول المثلى لنماذج البرمجة الخطية أدناه.

$$\text{Min } Z=80x_1+120x_2+84x_3$$
Subject to
$$\begin{cases} 5x_1+15x_2+7x_3\geq 20 \\ 10x_1+12x_2+21x_3\geq 15 \\ 4x_1+5x_2+3x_3\geq 18 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Min } Z=100x_1+80x_2+40x_3$$
Subject to
$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3\geq 7 \\ 2x_1+2x_2+3x_3\geq 4 \\ 4x_1+x_2+2x_3\geq 6 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Min } Z=100x_1+120x_2+200x_3$$
Subject to
$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3\geq 6 \\ 2x_1+4x_2+6x_3\geq 7 \\ x_1+2x_2+4x_3\geq 8 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0 \end{cases}$$

المحور الخامس : الثنائية (النموذج المقابل): Duality in Linear Programming

يعد البرنامج الثنائي نقلة نوعية في تطور بحوث العمليات بصفة عامة ورياضيات المؤسسة بصفة خاصة لما له من أهمية سواء على الصعيد النظري أو التطبيقي، تقوم فكرته على أساس أن لكل مشكلة نموذج برمجة خطية مشكلة ثنائية ترتبط معها، إذ أن حل أحدهما يمكن من معرفة حل المشكلة الأخرى، بمعنى أن حل أحدهما يمكننا من الحصول على حلول لمشكلتي برمجة خطية. هذا ويساعد حل البرنامج الثنائي في الوصول إلى الحل الأمثل بشكل أسرع وذلك عندما يكون عدد قيود البرنامج الأولي أكبر من عدد قيود البرنامج الثنائي إذ إن حجم العمليات الحسابية في البرمجة الخطية يتوقف على عدد القيود أكثر من اعتماده على عدد المتغيرات. أن الفكرة الأساسية وراء نظرية الثنائية أن كل مشكلة من مشاكل البرمجة الخطية لها برنامج خطي يصاحبها في عملية صنع واتخاذ القرار. فمشاكل البرمجة الخطية التي تهدف إلى تعظيم الربح في النموذج الأصلي (الأولي) ستتحول إلى مشاكل تهدف إلى تدنية التكاليف في الأنموذج الثنائي (المقابل).

عند التحويل من الأنموذج الأولي إلى الأنموذج الثنائي يجب مراعاة ما يلي

- ✓ إذا كان عدد القيود (m) وعدد المتغيرات (n) في النموذج الأولي فإنها تصبح (m) من المتغيرات و (n) من القيود في الأنموذج الثنائي.
- ✓ استبدال المتغيرات المشار إليها بالحرف (X) في النموذج الأولي إلى متغيرات المشار إليها بالحرف (Y) في الأنموذج الثنائي
- ✓ استبدال دالة الهدف (Z) من نوع (Max) في النموذج الأولي إلى دالة هدف (W) من نوع (Min) تكافئها عند الأمثلية في النموذج الثنائي بمعنى W*=Z*
- ✓ استبدال معاملات دالة الهدف بقيم الطرف الأيمن للقيود، بحيث تصبح قيم الطرف الأيمن للنموذج الأولي معاملات لدالة الهدف (W) نموذج الثنائي والعكس صحيح
- ✓ استبدال معاملات المتغيرات في القيود، بحيث تصبح الصفوف في الأنموذج الأولي أعمدة الأنموذج الثنائي (مبدلة المصفوفة) والعكس صحيح.

1. تعريف المشكلة الثنائية Defined Duality Problem

تسمى مسالة البرمجة الخطية متماثلة Symmetric إذا كانت جميع المتغيرات xj مقيدة بالإشارة وجميع القيود في صيغة متباينات من نوع أو أقل أو يساوي $\leq$ عندما تكون دالة الهدف من نوع Maximum أو أكبر أو يساوي $\geq$ في حالة أن تكون دالة الهدف من نوع Minimum وفيما يلي توضيل للصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية الأولية والثنائية في حالتها المتماثلة.

1المسالة الأولية Primal Problem	$Max\,x_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$ $s.to:$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1,2...m$ $x_j \geq 0 \quad j = 1,2...n$
2- المسالة الثنائية Dual Problem	$Min\,y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ $s.to:$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_i \quad j = 1,2...n$ $y_i \geq 0 \quad i = 1,2...,m$

وباستخدام المصفوفات يمكن إعادة كتابة الصيغتين أعلاه

1المسالة الأولية Primal Problem	$Max Z = cx$ $s.to:$ $Ax \leq b$ $x \geq 0$
2- المسالة الثنائية Dual Problem	Min w= yb s. to: yA≥ C y≥ 0

نشير إلى قيمة دالة الهدف للنموذج الثنائي dual في حالة وجود حل مقبول للمسألة دائما أكبر من أو يساوي إلى قيمة دالة الهدف للمساوية الأولية Primal Problem .

مثال تطبيقي: لنموذج البرمجة الخطية الآتي احسب كل من:

- ✓ النموذج المقابل.
- ✓ الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة للنموذج المقابل.

$$\text{Max } Z = 30X_1+18X_2$$

s. to:

$$\begin{cases} X_1+2X_2 \le 200 & (1) \\ 3X_1+2X_2 \le 300 & (2) \\ X_1 \le 150 & (3) \end{cases}$$

$$X_1،\ X_2،\ X_3،\ x_4 \ge 0$$

الحل:

بما أن دالة الهدف من نوع Max وجميع القيود من النوع ≤ لذا يمكن تحويل المشكلة إلى النموذج المقابل (النموذج الثنائي).

$$\text{Max } Z = 30X_1+18X_2$$

s. to:

$$\begin{cases} X_1+2X_2 \le 200 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & Y_1 \\ 3X_1+2X_2 \le 300 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & Y_2 \\ X_1 \le 150 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & Y_3 \end{cases}$$

$$X_1،\ X_2،\ X_3،\ x_4 \ge 0$$

المسألة الثنائية أو المقابلة تكون كما يلي:

$$\text{Min } z = 200y_1+300y_2+150y_3$$

s. to:

$$\begin{cases} y_1+3y_2+y_3 \geq 30 & (1) \\ 2y_1+2y_2 \geq 18 & (2) \end{cases}$$

$$y_1، y_2، y_3، \geq 0$$

ومن جدول الحل الأمثل للمسألة الأولية يمكن إيجاد قيم المتغيرات الواردة في صف دالة الهدف وكماS_1 ، S2، S3 مباشرة، وهي عبارة عن قيمy1، y2، 1 y3 موضح في أدناه:

V.B	X1	X2	S1	S2	S3	RHS
S1	0	4/3	1	−1/3	0	100
X1	1	2/3	0	1/3	0	100
S3	0	−2/3	0	−1/3	1	50
Z	0	2	0	10	0	3000

$$\mathbf{Z = 3000، y_3 = 0، y_2 = 10، y_1 = 0}$$

وإذا تم تعويض القيم أعلاه في دالة الهدف للنموذج المقابل فإننا نلاحظ إنها تحقق دالة الهدف، وذلك كمايلي:

$$\mathbf{Z=200y_1+300y_2+150y_3}$$

$$3000=200(0)+300(10)+150(0)$$

$$3000=3000$$

حل مسألة النموذج المقابل وفق طريقة السمبلكس:

تمر عملية إيجاد الحل الأمثل وفق كريق (Simplex) بالمراحل التالية:

✓ **التحويل إلى الصيغة القياسية:**

يتم تحويل النموذج المقابل إلى الصيغة القياسية ولكن يجب ملاحظة أن يتم تحويل إشارات أو القيود كافة إلى علامة≤ بغض النظر عن كون دالة الهدف اذا كانت من نوع Max أو Min لذا فإننا نقوم بضرب القيدين بـ (-1) لتحويل إشارة القيود وكما يلي:

$$\text{Min } z = 200y_1+300y_2+150y_3$$

s. to:

$$\begin{cases} -y_1-3y_2-y_3 \leq -30 \text{ ....} & S_1 \\ -2y_1-2y_2 \leq -18 \text{ ....} & S_2 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

بعدها يتم تحويل النموذج إلى الصيغة القياسية كما يلي:

$$\text{Min } Z-(200y_1+300y_2+150y_3) = 0$$

s. to:

$$\begin{cases} -y_1-3y_2-y_3+S_1 = -30 \\ -2y_1-2y_2+S_2 = -18 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3, s_1, s_2 \geq 0$$

يتم ترتيب البيانات في الجدول التالي:

V.B	y1	y2	3Y	S1	S2	RESULTS
S1	−1	−3	−1	1	0	−30
S2	−2	−2	0	0	1	−18
Z	−200	−300	−150	0	0	0
RATIO	200	100	150	يهمل	يهمل	−

✓ **تحديد المتغير الخارج:**

لقد عرفنا ان الجهة اليمنى تمثل الثابت وهو عبارة عن معادلات دالة الهدف في النموذج الاولي، لذلك نختار اقل قيمة وهي (−3) وهي تقابل S1 لذا فهو متغير خارج.

✓ **تحديد المتغير الداخل:**

نقسم معاملات المتغيرات اي القيم في صف دالة الهدف Z (السالبة فقط) على القيم المقابلة لصف المتغير الخارج الذي تم اختياره اولاً أعلاه ثم نختار أقل قيمة موجبة فقط في صف الـ Ratio مع ملاحظة ان تهمل القسمة على صفر وكذلك المقدار الموجب.

0/0	0/1	−150/−1	−300/−3	−200/−1
=	=	=	=	=
0	0	150	300	200

تبقى بقية الخطوات فهي نفس خطوات طريقة السمبلكس العادية ونحصل على الجدول التالي:

V.B	y1	y2	y1	S1	S2	RHS
Y2	1/3	1	1/3	−1/3	0	10
S2	−4/3	0	2/3	−2/3	1	2
Z	−100	0	−50	−100	0	3000

جميع القيم الواردة في صف دالة الهدف سالبة أو صفر لدالة الهدف في النموذج المقابل وهي في نوعMin ، لذا فإننا توصلنا للحل الأمثل للنموذج المقابل وأصبحت قيم R.H.S جميعها موجبة لذا فأن

$$Z=3000،\ S_2=2،\ S_1=0،\ y_3=0،\ y_2=10،\ y_1=0$$

وهي نفس النتائج الواردة بالطريقة الأولى.

تمارين مقترحة

التمرين الأول: لتكن نماذج البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Max } Z = 20x_1+15x_2+18x_3$$

Subject to

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + 4x_3 \le 80 \\ 15x_1 + 12x_2 + 5x_3 \le 120 \\ 7x_1 + 21x_2 + 3x_3 \le 84 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

الحل الأمثل: $\boldsymbol{x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=20}$

$$\text{Max } Z = 10x_1+15x_2$$

Subject to

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 40 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 0x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

الحل الأمثل: $\boldsymbol{x_1=8,\ x_2=6}$

$$\text{Min } W = 30y_1+24y_2+18y_3$$

Subject to

$$\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 80 \\ 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 \ge 84 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0$$

الحل الأمثل: $\boldsymbol{y_1=13,\ y_2=0,\ y_3=15}$

$$\text{Min } W = 4200y_1+2250y_2+2600y_3+4200y_4$$

Subject to

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 \ge 66 \\ 4y_1 + 3y_2 + 2y_3 \ge 84 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0$$

الحل الأمثل: $\boldsymbol{y_1=18,\ y_2=0,\ y_3=6,\ y_4=0}$

المطلوب:

- ✓ أوجد النماذج الثنائية للنماذج الأصلية، و العكس؛

التمرين الثاني:

ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 5x_1+3x_2+6x_3$$

Subject to

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 30 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 48 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 32 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

المطلوب:

- ✓ تطبيق طريقة السمبلكس يسمح لنا بالحصول على الجدول التالي:

C_j → ↓		05	03	06	0	0	0	**B rayon**	R_i
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
05	x_1	1	0	0	1/2	3/2	-5/2	07	
06	x_3	0	0	1	-1/2	-1/2	3/2	09	
03	x_2	0	1	0	1/2	-1/2	1/2	07	
Z_j		5	3	6	1	3	-2	Z = 110	
$C_j - Z_j$		0	0	0	-1	-3	2		

1. هل جدول السمبلكس أعلاه يمثل الحل الأمثل؟ اشرح.
2. أوجد جدول الحل الأمثل؛
3. شكِّل نموذج البرمجة الخطية الثنائي للنموذج الأولي أعلاه؛
4. انطلاقا من جدول سمبلكس الحل الأمثل المتوصل إليه، قم بقراءة الحل الأمثل للنموذج الثنائي الموافق للنموذج الأصلي.

المحور السادس: تحليل الحساسية (Sensitivity analysis)

إن الوصول إلى الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية هو غاية الحل، وان الحل الامثل هو الحل الذي نجده من خلال قيم المتغيرات الموجودة في نموذج البرمجة الخطية في ظل معاملات المتغيرات في دالة الهدف وداخل القيود ولوجود كميات في المصادر(الجانب الايمن) محدودة ولكن ما العمل فيما لو، وبعد استخراج الحل الامثل تم تغير في معاملات المتغيرات في دالة الهدف اي تغير الارباح او الكلف او تغيير اسعار السوق وتبدل العرض والطلب اذن كيف يمكن الاستفادة من الحل الامثل للوصول الى الحل الامثل تحت اي ظرف من هذه الظروف، انه من الطبيعي ان تحصل كل هذه التغيرات او بعضها لان الواقع العملي يصعب السيطرة عليه ويصعب السيطرة على كلف المواد الاولية او كلف المصادر للطاقة ومثل هذه الحالة لا يمكن توقعها بشكل صحيح لذا نلجأ الى تحليل الحساسية لمعالجة كل تغير، ومن هذه المتغيرات هي:

- التغيرات في الطرف الأيمن (الموارد المتاحة)
- التغيرات في معاملات دالة الهدف
- التغيرات في معاملات متغيرات القرار في القيود
- إضافة متغير أو متغيرات جديدة
- إضافة قيد جديد

1. مفهوم تحليل الحساسية:

تحليل الحساسية هو كيفية قياس تأثر الحل وتغيره نتيجة لمتغير في أحد مكونات النموذج(أرباح، أسعار، تكاليف، طاقات إنتاجية...الخ) بسبب ظروف عدم التأكد التي تواجه صناع القرار إضافة إلى التطورات المتعلقة بـ (تطور تقنيات الإنتاج، تطور المواد الأولية المستخدمة في العملية الإنتاجية أو تطور أسعارها، سرعة دوران اليد العاملة وتأثيرها عمى الطاقة الإنتاجية للمؤسسة، حالة الاقتصاد العام من حيث الازدهار والركود وانعكاسها عمى الطلب والعرض والأسعار والتكاليف والأرباح)، ويساهم مدخل تحليل الحساسية أو تحليل ما بعد الأمثلية

في توفير تكلفة وجهد إعادة حل المشكلة مرة أخرى، حيث يتم الاعتماد فقط على جدول السمبمكس النهائي للحل الأمثل.

2. حالة التغير في الطرف الأيمن (R.H.S) للقيود.

بهدف توضيح الحالة الأولى المتعلقة بالمتغيرات في الموارد المتاحة نورد المثال الآتي بعد الحصول على الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي:

مثال للتوضيح:

Max $Z = 5X_1+2X_2+3X_3$

s. to:

$$\begin{cases} X_1+5X_2+2X_3 \leq 30 \\ X_1-5X_2-5X_3 \leq 40 \end{cases}$$

$$X_1،X_2،X_3 \geq 0$$

يكون الجدول الأولي على الشكل التالي:

V.B	X1	X2	X3	S1	S2	RHS
S1	1	5	2	1	0	30
S2	1	−5	−5	0	1	40
Z	−5	−2	−3	0	0	0

عندما تكون المتغيرات $X_3،X_2،X_1$ تمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتجات A.B.C على التوالي، و يكون جدول الحل الامثل على النحو التالي، و على افتراض إن S_1، S_2 هي متغيرات وهمية.

V.B	X1	X2	X3	S1	S2	RHS
X1	1	5	2	1	0	30
S2	0	0	−8	−1	1	10
Z	0	23	7	5	0	150

1. أوجد الحل الامثل في حالة تغير قيم نواتج القيود بالشكل التالي:

$$\begin{Bmatrix} 35 \\ 40 \end{Bmatrix} \text{ To } \begin{Bmatrix} 35 \\ 40 \end{Bmatrix}$$

ان الحل الأمثل لهذه المشكلة هو:

$$X_1=30، X_2=0، X_3=0، S_1=0، S_2=10، Z=150$$

وللتأكد من صحة الحل فإننا نعوض في دالة الهدف:

$Z= 5X_1+2X_2+3X_3$

$150= 5(30) + 2(0) + 3(0)$

$150= 150$

نأخذ مصفوفة المتغيرات المكملة أو الوهمية من جدول الحل الأمثل، ثم نحسب قيم المتغيرات الأساسية الجديدة بتطبيق المعادلة التالية:

$$X_b = B * b$$

X_b تمثل عمود المتغيرات الأساسية الناتجة في جدول الحل الأمثل X

B تمثل مصفوفة المتغيرات المكملة والتي تقع أسفل المتغيرات المكملة في جدول الحل الأمثل

b تمثل عمود الموارد المتاحة الجديد

نلاحظ إن جميع قيم العمود الناتج موجبة ويعني ذلك إن الحل لا يزال أمثلا أو ممكنا باستخدام الموارد المتاحة الجديدة S2=5، S1=0، X3=0، X2=0،X1=35 أما قيمة Z فنحصل عليها بالتعويض وكالآتي: $Z= 5(35)+2(0)+3(0)$ $Z= 175$	$\begin{bmatrix} X_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35+0 \\ -35+40 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} X_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 5 \end{bmatrix}$

أي إن المتغير في عمود الموارد المتاحة(b) سيؤدي إلى تغير جميع القيم في ذلك العمود الموجود في جدول الحل الأمثل.

3. حالة تغير معاملات دالة الهدف.

لو فرضنا إن دالة الهدف في المثال السابق مباشرة قد تغيرت من

From $\quad$ Max $Z= 5X_1+2X_2+3X_3$ $\quad$ to $\quad$ Max $Z= 3X_1+X_2+3X_3$

لذا فان مشكلة البرمجة الخطية سوف تصبح كما يلي:

Max $Z= 5X_1+2X_2+3X_3$

s. to:

$$\begin{cases} X_1+5X_2+2X_3 \leq 30 \\ X_1-5X_2-5X_3 \leq 40 \end{cases}$$

$$X_1، X_2، X_3 \geq 0$$

فإن النموذج المقابل للمشكلة أعلاه هو:

Min Z= $30y_1+40y_2$

s. to:

$$\begin{cases} y_1+y_2 \geq 3 & \text{..........} \quad (1) \\ 5y_1-5y_2 \geq 1 & \text{...........} \quad (2) \\ 2y_1-6y_2 \geq 3 & \text{...........} \quad (3) \end{cases}$$

$$y_1 ، y_2 \geq 0$$

ولغرض إيجاد قيم (y_1) و (y_2) نقوم باحتسابها وفق المعادلة.

$$[y_b]=[X_b][B^{-1}]$$

حيث:

$[y_b]$ صف المتغيرات الناتجة في النموذج المقابل

$[X_b]$ صف معاملات دالة الهدف الجديدة مرتبة حسب المتغيرات الناتجة بجدول الحل الأمثل في دالة الهدف الجديدة

$[B^{-1}]$ مصفوفة المتغيرات المكملة أو الوهمية كما وردت في جدول الحل الأمثل.

$$[y_1 \; y_2]=[3 \;\; 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=[3+0 \;\; 0+0]$$

$$[y_1 \; y_2]=[3 \;\; 0]$$

وكما سبق أن أوضحنا بان التغير في معاملات دالة الهدف يؤدي إلى التغير في صف دالة في جدول الحل الامثل فإننا بحاجة لحساب معامل X_1 و معامل X_2 في جدول الحل الأمثل وهو يساوي الفرق بين الطرف الأيسر للقيد الأول والطرف الأيمن(الثابت)للنموذج المقابل وكما يلي:

Coefficient of Xi= (constraint)i−Bi

Coefficient of X1= (y1+y2) −3 = (3+0)−3= 0

Coefficient of X2= (5y1−5y2)−1= (15−0)−1= 14

Coefficient of X3= (2y1−6y2)−3= (6−0)−3= 3

أما قيمة دالة الهدف الجديدة فيمكن الحصول عليها كالآتي:

Max Z= $3X_1+X_2+3X_3$= 3(30) +0+0= 90

والبيانات موضحة في الجدول أدناه:

V.B	X1	X2	X3	S1	S2	RHS
X1	1	5	2	1	0	30
S2	0	0	-8	-1	1	10
Z	0	14	3	3	0	90

قيمة دالة الهدف الجديدة Z=90 بمعنى إن قيمة دالة الهدف انخفضت عن القيمة السالبة و هذا ما لا يخدم سياسة الشركة في تعظيم الأرباح.

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 600\,x_1 + 800\,x_2 + 500\,x_3$$

Subject to

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+4x_3 \leq 500 \\ 2x_1+2x_2+x_3 \leq 400 \\ x_1+3x_2+2x_3 \leq 200 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

أثناء عملية تطبيق طريقة السمبلكس تم التوصل إلى الجدول أدناه:

C_j →		600	800	500	00	00	00	→
↓		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	B
600	x_1	1	0	4/5	3/10	0	-1/5	110
00	S_2	0	0	-7/5	-2/5	1	-2/5	120
800	x_2	0	1	2/5	-1/10	0	2/5	30
Z_j		600	800	800	100	0	200	$Z =$ 90000
$Z = C_j - Z_j$		00	00	-300	-100	0	-200	

المطلوب:

1. هل الحل المتوصل إليه هو حل أمثل؟ ولماذا؟ قدم الحل الأمثل للنموذج أعلاه؛
2. بافتراض تغير الجانب الايمن لقود البرنامج ليصبح كما يلي: 510،410،200 مع ثبات المعلومات الأخرى حدد حجم التغير لكي يبقى الحل أمثلا.
3. بافتراض أن هذه المؤسسة قررت إضافة مورد جديد يستخدم كالتالي:

$$Max\ Z = 600\,X_1 + 700\,X_2 + 500\,X_3$$

4. هل يبقى الحل أمثلا في هذه الحالة؟ قدم الحل الأمثل.

المحور السابع: مسألة النقل TRANSPORTATION MODELS[5]

نتناول من خلال هذا المحور إحدى تطبيقات البرامج الخطية ألا وهو نموذج النقل (نموذج التوزيع)، حيث يبحث هذا النموذج عن إيجاد القيمة الصغرى لكلفة نقل البضاعة من عدة مصادر للعرض (Sources) والتي قد تمثل المراكز الإنتاجية أو التسويقية أو المصانع التي تنقل منها البضاعة إلى عدد من محطات الطلب أو مراكز الاستهلاك (Destination).

1. صياغة مسائل النقل

تعتبر مسألة النقل إحدى تطبيقات البرمجة الخطية الهامة، حيث أنها تهتم بتوزيع المنتجات من عدة مصادر للعرض (معامل، موانئ...) إلى عدة مواقع للطلب (مراكز استهلاكية) بأقل تكلفة ممكنة أو بأعلى ربح أو بأقل وقت.[6] فالبرمجة الخطية تستعمل للتوزيع الأمثل للموارد بالمؤسسة، أما طريقة النقل لها نفس هذه الخواص مضافا إليها شرط تساوي العرض مع الطلب.[7]

أولا: عرض مسألة النقل:

ويتضمن نموذج النقل m من مصادر التجهيز n من محطات (الاستهلاك) إضافة إلى ذلك نفترض إن:

a_i: يمثل عدد الوحدات المعروضة عند المصدر من حيث $(i= 1,2,3,\dots m)$.

b_j: يمثل عدد الوحدات المطلوبة بالبينة للموقع j حيث $(j= 1,2,3,\dots,n)$.

c_{ij}: كلفة نقل الوحدة الواحدة من البضاعة من المصدر إلى الموقع j.

x_{ij}: عدد الوحدات التي ستنقل من المصدر i إلى الموقع j والجدول الآتي يعرض الصورة الجدولية العامة لنموذج النقل.

---

5. فتيحة بلجيلالي: **مطبوعة رياضيات المؤسسة**، جامعة ابن خلدون، تيارات.

6 حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، **مدخل إلى بحوث العمليات**، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى 2007، ص 281.

7. يحياوي إلهام: محاضرات مقياس رياضيات المؤسسة، جامعة باتنة، 2018، ص 29.

	1	2	j…	N	Supply
1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{ij} X_{ij}	C_{in} X_{in}	a_1
2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{2j} X_{2j}	C_{2n} X_{2n}	a_2
3	C_{31} X_{31}	C_{32} X_{32}	C_{3j} X_{3j}	C_{3n} X_{3j}	a_3
:	:				:
I	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	C_{ij} X_{ij}	C_{in} X_{in}	a_i
:					
M	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{m3} X_{m3}	C_{mn} X_{mn}	a_m
Demand	b_1	b_2	b_j	b_n	

من خلال الجدول نلاحظ أن الهدف من تحليل نموذج النقل هو تحديد العدد الأمثل من الوحدات التي ستنتقل من المصدر i بأقل تكلفة ممكنة c اعتمادا على الهدف المسطر، لذلك يمكن كتابة نموذج البرمجة الخطية المكافئ لنموذج النقل بالشكل التالي:

$$Minimize X_0 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = a_i \quad i = 1,2,\dots m$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = b_i \quad j = 1,2,\dots n$$

$$X_{ij} \geq 0$$

ولتسهيل دراسة مشكلة النقل سنقوم بعرض الصورة الجدولية لمسألة النقل من خلال المثال أدناه:

مثال تطبيقي رقم 01:

لنفرض أنه لدينا مؤسسة اقتصادية لها 3 وحدات إنتاجية O_1، O_2، O_3 متواجدة في ثلاث مناطق مختلفة، كما أنها تتوفر على 5 مراكز توزيع D_1، D_2، D_3، D_4، D_5، حيث أن هذه المؤسسة تنتج المنتج P على مستوى مراكز الإنتاج، ثم تقوم بتوزيعه على مراكز التوزيع الخمسة.

تعرض مراكز الإنتاج (المنبع)كميات معينة من الإنتاج: a_1، a_2، a_3، أما مراكز التوزيع (المصب) فتقوم بطلب كميات معينة من الإنتاج: b_1، b_2، b_3، b_4، b_5، كما هو موضح في الجدولين أدناه.

مركز الإنتاج	O_1	O_2	O_3
الطاقة الإنتاجية (العرض di**)**	$a_1=240$	$a_2=160$	$a_3=260$

مركز التوزيع	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
الطلب (b_j)	$b_1=120$	$b_2=150$	$b_3=145$	$b_4=125$	$b_5=140$

عملية نقل المنتج P من مراكز الإنتاج الثلاثة إلى مراكز التوزيع الخمسة يترتب عليها تحمل تكلفة النقل C_{ij}.

C_{ij} تمثل تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتج P من مراكز الإنتاج i إلى مركز التوزيع j.

تكلفة النقل الوحدوية يقدمها الجدول أدناه:

C_{ij}	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
O_1	$C_{11}=100$	$C_{12}=800$	$C_{13}=100$	$C_{14}=500$	$C_{15}=400$
O_2	$C_{21}=500$	$C_{22}=500$	$C_{23}=300$	$C_{24}=600$	$C_{25}=700$
O_3	$C_{31}=200$	$C_{32}=900$	$C_{33}=500$	$C_{34}=900$	$C_{35}=800$

مشكل المؤسسة هو تحديد الكميات x_{ij} الواجب نقلها من مراكز الإنتاج إلى مراكز التوزيع.

ثانيا: نمذجة مسائل النقل: تتلخص مرحلة نمذجة مسألة النقل في تشكيل جدول مسائل النقل وكذا الصياغة الرياضية لمسألة النقل بما تحمله من تحديد لمتغيرات القرار وكذلك صياغة كل من جالة الهدف والقيود.

أ- **تشكيل جدول مسائل النقل:**

إن العرض الإنشائي لمسألة النقل حسب المثال أعلاه، يمكن تلخيصه في جدول شامل يسمى **جدول مسألة النقل**، يكون كالتالي:

جدول مسألة النقل للمثال

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	$C_{11}=100$ X_{11}	$C_{12}=800$ X_{12}	$C_{13}=100$ X_{13}	$C_{14}=500$ X_{14}	$C_{15}=400$ X_{15}	240
O_2	$C_{21}=500$ X_{21}	$C_{22}=500$ X_{22}	$C_{23}=300$ X_{23}	$C_{24}=600$ X_{24}	$C_{25}=700$ X_{25}	160
O_3	$C_{31}=200$ X_{31}	$C_{32}=900$ X_{32}	$C_{33}=500$ X_{33}	$C_{34}=900$ X_{34}	$C_{35}=800$ X_{35}	260
b_i	120	130	145	125	140	660

يلخص جدول مسائل النقل كامل المسألة، بحيث تظهر فيه تكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل وحدة إنتاجية إلى كل مركز توزيع في أعلى كل خانة، وتظهر متغيرات المسألة وهي القيم x_{ij} المراد البحث عنها، كما تظهر الكميات القصوى التي تعرضها كل وحدة، وكذا كمية الطلب لكل منطقة.[8]

[8] .محمد راتول: بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006، ص 105.

ب– **الصياغة الرياضية لمسائل النقل:** يتم صياغة مشكل النقل وفق نموذج رياضي كما يلي:

- **تحديد متغيرات القرار:** تمثل القيم x_{ij} متغيرات القرار في مسائل النقل، وعددها في مثالنا السابق 15 متغيرة قرار، حيث:

X_{11} : تمثل الكمية الواجب نقلها من مركز الإنتاج O_1 إلى مركز التوزيع D_1 .

X_{33} : تمثل الكمية الواجب نقلها من مركز الإنتاج O_3 إلى مركز التوزيع D_3 .

- **صياغة دالة الهدف:** دالة الهدف في هذه الحالة هي عبارة عن تدنئة التكاليف المترتبة عن عملية النقل. وتكون من الشكل التالي:

$$Min\ Z = \sum C_{ij}\, x_{ij}$$

$$Min\ Z = 100 X_{11}+800 X_{12}+100 X_{13}+500 X_{14}+400 X_{15}+500 X_{21}+500 X_{22}+300 X_{23}+600 X_{24}+700 X_{25}+200 X_{31}+900 X_{32}+500 X_{33}+900X_{34}+800X_{35}$$

- **صياغة القيود:** لدينا نوعين من القيود: قيود العرض وقيود الطلب.

قيود العرض: $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i$

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 240$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 160$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 260$$

قيود الطلب: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 120$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 130$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 145$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 125$$

$$X_{15} + X_{25} + X_{35} = 140$$

قيود عدم سلبية المتغيرات: $x_{ij} \geq 0$

2. حل مسائل النقل:

يقصد بحل مسائل النقل إيجاد قيم متغيرات القرار x_{ij} المجهولة، لذلك فإن الأسلوب الرياضي لحل هذه المسائل يكون **إيجاد الحل الابتدائي الممكن** والتي تتضمن ثلاث طرق وهي: **طريقة الزاوية الشمالية الغربية**، **طريقة التكاليف الدنيا**، **طريقة فوجل التقريبية**.

أ. طريقة الزاوية الشمالية الغربية *(Méthode du coin nord ouest)*:

في هذه الطريقة نبدأ بتخصيص أكبر كمية ممكنة للمتغير الواقع في الركن الشمالي الغربي، أي أول خانة في الجدول إلى الأعلى وإلى اليسار، وهي الخلية التي ينطلق منها إيجاد الحل الأساسي الأول،[9] ويتم ذلك بإتباع المنهجية التالية وبالتطبيق على المثال السابق:

- ✓ أول خلية موافقة لمركز الإنتاج الأول ومركز التوزيع الأول (أعلى إلى اليسار)، نجد أن طلب مركز التوزيع D_1 هو 120 وحدة، بينما حجم العرض O_1 هو 240 وحدة، فيحصل D_1 على كافة طلبه 120 وحدة من D_1، ويتشبع بذلك العمود الأول (D_1)، ويتبقى لمركز الإنتاج O_1 كمية تقدر بـ 120 وحدة.
- ✓ بالانتقال إلى الخلية المقابلة والموافقة لمركز الإنتاج O_1، ومركز التوزيع D_2، تقدر الكمية المعروضة بـ 120 وحدة وهي الكمية المتبقية بعد التوزيع الأول، وحجم الطلب 130 وحدة، وعليه ستوجه كل الكمية المعروضة من O_1 إلى D_2، فيتشبع السطر الأول، ويبقى طلب D_2 هو 10 وحدات ينبغي على O_2 تلبيته، وهكذا. خطوات هذه الطريقة يلخصها الجدول أدناه:

[9] محمد راتول، **مرجع سبق ذكره**، ص 105.

حل مسألة النقل بطريقة الزاوية الشمالية الغربية للمثال السابق

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	100 **120**	800 **120**	100	500	400	~~240~~ ~~120~~
O_2	500	500 **10**	300 **145**	600 **5**	700	~~160~~ ~~150~~ ~~5~~
O_3	200	900	500	900 **120**	800 **014**	~~260~~ ~~140~~
b_i	~~120~~	~~130~~ ~~10~~	~~145~~	~~125~~ ~~120~~	~~140~~	660

وبذلك نحصل على جدول الحل الأساسي الأول، والذي نجد فيه:

X_{11}=120: أي أن O_1 يقوم بتموين D_1 بمقدار 120 وحدة بتكلفة تقدر بـ 100 وحدة؛

X_{12}=120: أي أن O_1 يقوم بتموين D_2 بمقدار 120 وحدة بتكلفة تقدر بـ 800 وحدة؛

X_{22}=10: أي أن O_2 يقوم بتموين D_2 بمقدار 10 وحدات بتكلفة تقدر بـ 500 وحدة؛

X_{23}=145: أي أن O_2 يقوم بتموين D_3 بمقدار 145 وحدة بتكلفة تقدر بـ 300 وحدة؛

X_{24}=5: أي أن O_2 يقوم بتموين D_4 بمقدار 5 وحدات بتكلفة تقدر بـ 600 وحدة؛

X_{34}=120: أي أن O_3 يقوم بتموين D_4 بمقدار 120 وحدة بتكلفة تقدر بـ 900 وحدة؛

X_{35}=140: أي أن O_3 يقوم بتموين D_5 بمقدار 140 وحدة بتكلفة تقدر بـ 800 وحدة؛

✓ يتم حساب التكلفة الكلية وفق هذه الطريقة عن طريق ضرب قيمة التكلفة الوحدوية في كمية الإنتاج لكافة مراكز الإنتاج والتوزيع، أي:

$$Z=(100\times120)+(800\times120)+(500\times10)+(300\times145)+(600\times5)+(900\times120)+(800\times140)=379500$$

عدد المتغيرات الداخلة في الحل (عدد الخلايا المملوءة)=عدد الأسطر(m)+عدد الأعمدة(n) – **1**

ب. طريقة التكاليف الدنيا (*Méthode du moindre coût*):

تختلف هذه الطريقة عن سابقتها في إيجاد الحل الأساسي الأول، حيث أننا في هذه الطريقة نبدأ بتشبيع الخلايا انطلاقا من أدنى تكلفة في الجدول، ثم التكلفة المساوية أو الموالية وهكذا، حتى يتم استيفاء كل العرض والطلب، بحيث نحصل على عدد متغيرات داخلة في الحل يساوي ($m+n-1$).[10]

وبالعودة إلى مثالنا السابق، يمكن تطبيق هذه الطريقة كما يلي:

- ✓ نلاحظ أن أدنى تكلفة في الجدول هي 100، أي إما نقل المنتج من المنبع الأول O_1 إلى المصب الأول D_1 أو من المنبع الأول O_1 إلى المصب الثالث D_3، وطريقة الاختيار هنا تعتمد على أكبر قدر من الطلب، فلو تمت مقارنة طلب كل من المصب الأول والثاني، فإن المؤسسة حتما سوف تختار الطلب الأكبر لتصريف أكبر قدر من منتجاتها، لذلك يتم إشباع طلب المصب الثالث كليا من المنبع الأول؛
- ✓ أما التكلفة الموالية فهي 100، أي نقل المنتج من المنبع الأول O_1 إلى المصب الأول D_1 ، حيث يتم تزويده بـ 95 وحدة المتبقية من 240 وحدة بعد التوزيع، و بذلك يتشبع السطر الأول، أي أن الكمية المعروضة في المنبع الأول 0؛
- ✓ أما التكلفة الموالية فهي 200، و هي تكلفة نقل المنتج من المنبع الثالث O_3 إلى المصب الأول D_1 ، وهنا يتم تزويد هذا الأخير بـ 25 وحدة فقط و هي احتياجاته بعد حصوله على 95 وحدة من المنبع الأول، وبالتالي يتشبع العمود الأول، و هكذا يتم الانتقال بين الخلايا تصاعديا، كما في الجدول أدناه:

---

[10] محمد راتول، **مرجع سبق ذكره**، ص 125.

حل مسألة النقل بطريقة التكاليف الدنيا للمثال

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	100 **95**	800 /	100 **145**	500 /	400 /	~~240~~ ~~95~~
O_2	500 /	500 **130**	300 /	600 **30**	700 /	~~160~~ ~~30~~
O_3	200 **25**	900 /	500 /	900 **95**	800 **140**	~~260~~ ~~235~~ ~~95~~
b_i	~~120~~ ~~25~~	~~130~~	~~145~~	~~125~~ ~~95~~	~~140~~	660

قيمة التكاليف وفق هذه الطريقة هي:

$$Z=(100\times95)+(100\times145)+(500\times130)+(600\times30)+(200\times25)+(900\times95)$$
$$+(800\times140)=309500$$

ت. طريقة فوجل *(Méthode de Vogel)*:

تعتبر طريقة فوجل التقريبية (طرقة الفروقات العظمى) من أهم الطرق الثلاث على الإطلاق لما تتميز به هذه الطريقة من القدرة على الوصول للحل الأمثل أو الحل القريب من الأمثل، ونادرا ما تكون طريقة التكلفة الدنيا وطريقة الزاوية الشمالية الغربية أفضل من طريقة فوجل، إلا أنها تحتاج إلى عمليات حسابية أطول مما تحتاجه الطريقتين السابقتين. وتتلخص خطوات إيجاد الحل الابتدائي لهذه الطريقة كما يلي:

- ✓ حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف وفي كل عمود؛
- ✓ تحديد الصف أو العمود الذي يمتلك أكبر فرق التكلفة (أعلى جزاء)؛
- ✓ اختيار الخلية ذات التكلفة الأقل في ذلك الصف أو العمود؛
- ✓ في الخلية التي اختيرت في الخلية الثالثة، نقارن احتياجات المصب مع ما هو متوفر في المنبع لنأخذ القيمة الأقل؛
- ✓ نعيد حساب الفرق مرة أخرى لكل من الأعمدة والصفوف، وذلك بعد إلغاء العمود أو السطر المشبع، وتكرر العملية السابقة إلى أن نلبي احتياجات كل المصبات من المنابع المتاحة.

وبالعودة إلى مثالنا السابق، سنقوم بتطبيق مراحل هذه الطريقة، وفق المراحل التالية:

- ✓ نقوم بحساب الفرق بين أدنى تكلفتين على مستوى جميع الأسطر والأعمدة فنحصل على القيم: (100−100=0، 300−500=200، 500−200=300) على مستوى الأسطر الثلاث، ونحصل على القيم: (200−100=100، 800−500=300، 300−100=200، 600−500=100، 700−400=300) على مستوى الأعمدة؛
- ✓ نقوم باختيار أكبر فرق بين الأعمدة والأسطر، نلاحظ في هذا المثال أن 300 هي أكبر فرق وقد تكررت في السطر الأخير والعمودين الثاني والخامس، وهنا يتم اختيار أكبر فرق بينها والذي يوافق أدنى تكلفة، وهو السطر الثالث والذي يوافق 200 التي تعبر عن أدنى تكلفة في الجدول؛
- ✓ تعبر الخلية 200 عن تكلفة تزويد المصب الأول بالمنتج من المنبع الثالث، لذلك يتم تزويد طلبه المتمثل في 120 وحدة من 260 وحدة (عرض المنبع الثالث)، وبذلك يتم إشباع المصب الأول (العمود الأول)، ويتبقى للمنبع الثالث كمية معروضة تقدر بـ 140 وحدة؛

- ✓ وهكذا يتم إلغاء العمود الأول من جدول النقل لكونه مشبعا، ويتم تحيين (*actualisation*) الجدول بإعادة حساب الفرق بين التكاليف المتبقية، فنحصل على القيم: 300، 200، 300 في الأسطر الثلاث، وتبقى القيم: 300، 200، 100، 300 في الأعمدة الأربعة المتبقية، نقوم باختيار أكبر فرق (300) والذي يوافق أدنى تكلفة (100)؛
- ✓ تمثل الخلية 100 عن تكلفة نقل المنتجات من المنبع الأول إلى المصب الثالث، لذلك يتم تزويد هذا الأخير بكل طلبه المتمثل في 145 وحدة من أصل 240 وحدة معروضة لدى المنبع الأول، وهكذا يتم إشباع العمود الثالث، وإلغاؤه، ويبقى للمنبع الأول كمية معروض تقدر بـ 95وحدة؛
- ✓ وبإتباع نفس الخطوات في كل مرة، نحصل على النتائج المبينة في الجدول أدناه:

حل مسألة النقل بطريقة فوجل للمثال

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i	الفرق
O_1	100 /	800 /	100 **145**	500 /	400 **95**	~~240~~ ~~95~~	0 300 100
O_2	500 /	500 **130**	300 /	600 **30**	700 /	~~160~~ ~~30~~	200 200 100
O_3	200 **120**	009 /	500 /	900 **95**	800 **45**	~~260~~ ~~140~~	300 300 100
b_i	~~120~~	~~130~~	~~145~~	~~125~~ ~~95~~	~~140~~ ~~45~~		660
الفرق	100	300 400	200	100 300	300 100		

انطلاقا من الجدول أعلاه أنه تم ملئ جميع الخانات، لذلك نتوقف عن تطبيق طريقة *Vogel*، وعليه تم الحصول على حل الأساس المقبول:

- **متغيرات الأساس الموجبة:** وعددها 07= $(m+n-1)$

$X3_5=45$، $X3_4=95$، $X3_1=120$، $X2_4=30$، $X2_2=130$، $X1_5=95$،$X1_3=145$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** وتمثل باقي متغيرات القرار.

بعدها نقوم بتعويض قيم متغيرات القرار على مستوى القيود الوظيفية للتحقق منها.

وبغرض الحصول على قيمة دالة الهدف نقوم أيضا بتعويض قيم متغيرات القرار في دالة هدف نموذج النقل، فنحصل على:

$$\mathbf{Z} =100\ (0)+800\ (0)+100\ (145)+500\ (0)+400\ (95)+500\ (0)+500\ (0)+500\ (0)+900\ (0)+200\ (120)+700\ (0)+600\ (30)+300\ (0)+(130)+900\ (95)+800\ (45)=281000$$

قيمة دالة الهدف المحصل عليها باستخدام طريقة *Vogel* (281000) أقل من التكلفة الإجمالية للنقل المحصل عليها بطريقة التكاليف الدنيا (309500)، وأقل أيضا من التكلفة الإجمالية المحصل عليها بطريقة الزاوية الشمالية الغربية (379500).

ملاحظة: في حالة النموذج غير المتوازن أي في حالة عدم تساوي العرض والطلب فإنه تتم إضافة الكمية المعروضة (في حالة العرض أقل من الطلب) في سطر جديد بتكاليف معدومة، أو إضافة الكمية المطلوبة في عمود جديد (في حالة الطلب أقل من العرض) في عمود جديد بتكاليف معدومة.

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

الجدول أدناه يقدم تكاليف النقل الوحدوية لنقل منتج معين من 03 مراكز إنتاج إلى 04 مراكز توزيع، بالإضافة إلى عرض كل مركز إنتاج وطلب كل مركز توزيع.

	D_1	D_2	D_3	D_4	A_i
O_1	12	13	04	06	500
O_2	06	04	10	11	700
O_3	10	09	12	04	800
b_i	400	900	200	500	

المطلوب:

1. انطلاقا من معطيات مسألة النقل أعلاه شكِّل جدول النقل الموافق لهذه المسألة؛
2. قدم نموذج النقل الموافق لجدول النقل المتوصل إليه؛
3. أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية، وكذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؛
4. أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا، وكذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؛
5. أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة فوجل، وكذا قيمة دالة الهدف الموافقة له.

التمرين الثاني:

الجدول أدناه يقدم معطيات لمسألة نقل ما.

	D_1	D_2	D_3	D_4	A_i
O_1	20	17	15	10	130
O_2	16	14	18	13	50
O_3	12	15	11	19	100
b_i	40	40	80	120	

المطلوب:

1. انطلاقا من معطيات مسألة النقل أعلاه شكّل جدول النقل الموافق لهذه المسألة؛
2. أوجد حل الأمثل باستخدام طريقة التكاليف الدنيا؛
3. أوجد الحل الأمثل لنموذج النقل المتوصل إليه باستخدام طريقة فوجل.

المصادر والمراجع:

1. أحمد حاتم عبد الله: بحوث العمليات، الجامعة الافتراضية السورية، 2018.
2. زين العابدين عالم مصطفى: بحوث العمليات، جامعة العلوم والتكنولوجيا، صنعاء، اليمن 2012.
3. محمد راتول: بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006.
4. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مدخل إلى بحوث العمليات، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى 2007 .
5. Gérald Baillageon، Programmation linéaire appliquée : outils d'optimisation et d'aide à la décision، Les Editions SMG، France، 1996، P : 06.
6. Yves Noobert. Roch Ouellet. Réges Parent : La recherche opérationnelle، gaitan morin éditeur 1995،P :170.
7. بوقرة رابح: سلسلة تمارين ودروس رياضيات المؤسسة، جامعة المسيلة.
8. سليم مجلخ: محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة، جامعة قالمة، 2016.
9. يحياوي إلهام: محاضرات مقياس رياضيات المؤسسة، جامعة باتنة، 2018.
10. بوسهمين أحمد، طافر زهير :فعالية استخدام أسلوب البرمجة الخطية في مؤسسة الأعمال، الملتقى الوطني السادس، الأساليب الكمية ودورها في اتخاذ القرارات الادارية، جامعة سكيكدة 24/23 ديسمبر 2008.
11. فتيحة بلجيلالي: مطبوعة رياضيات المؤسسة، جامعة ابن خلدون، تيارات، 2018.