



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة غرداية

N° d'enregistrement  
/...../...../.....

Université de Ghardaïa

كلية العلوم والتكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم الرياضيات والإعلام الألي

Département de Mathématiques et Informatique

## Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de master

**Domaine:** Mathématiques et Informatique.

**Filière:** Mathématiques.

**Spécialité:** Analyse fonctionnelle et applications.

**Thème : Sur la **dynamique** d'une classe des systèmes différentiels autonomes.**

Par :

**DINE Mohammed Ridha.**

Examiner par le jury composé de:

**NOM et Prénom :**

**Grade:**

**Université:**

**MERABET Brahim**

**MCB**

**Univ. Ghardaïa**

**Président**

**HADJ MOUSSA Yacine**

**MAA**

**Univ. Ghardaïa**

**Examinateur**

**KINA Abdelkrim**

**MCB**

**Univ. Ghardaïa**

**Encadreur**

Année universitaire 2020/2021.

# Dédicace

Un très grand et spécial remerciement à mes parents **DINE Ahmed** et **A.Maatallah** qui me prennent la main et me montre le chemin , et qui m'ont appris à avoir confiance en moi. Leurs conseils ont toujours guidé mes pas vers le réussite. Merci mes parents pour les valeurs nobles , l'éducation et le soutien permanent.

Je dédie aussi ce travail à mon frère et mes sœurs qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

Enfin, merci à mes amis qui m'ont toujours encouragés et soutenus sous toutes formes et ont toujours crus en ma volonté de réussir.

# Remerciements

Je remercie « **Allah** » qui m'a donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire.

Je tiens à notifier un remerciement spécial à tous mes professeurs qui ont contribué à ma formation en mathématiques, en particulier, mon encadreur pédagogique Docteur "**Kina Abdelkrim**".

Ainsi que tous mes professeurs qui m'ont enseigné durant mes études à la faculté des sciences et technologie - Département des Mathématiques et Informatique.

Je remercie également tous mes collègues d'étude, particulièrement la promotion de master mathématique, 2020/2021 à l'université de Ghardaia.

En fin, je remercie vivement ma famille pour l'aide matérielle et morale durant la période de préparation.

## ملخص :

- في هذه المذكرة سوف نستعرض مفاهيم ذات أهمية حول النظريات النوعية للمعادلات التفاضلية وعلى وجه الخصوص حول أنظمة تفاضلية لكثيرات الحدود في المستوي .
- سنستعرض عمل السيد د. صالح بن يوسف - جامعة سطيف 1 - في ورقة بحثه بعنوان " **Polynomial differential systems with hyperbolic algebraic limit cycles** المنشور في مجلة " **Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations** " رقم 34 في الصفحات 1-7 بتاريخ 29 ماي 2020 والذي يناقش فيه وجود دوائر الحد لأنظمة تفاضلية من الشكل :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha U + (ax + by + \phi(\beta x - \alpha y))U_y, \\ \dot{y} = \beta U - (ax + by + \phi(\beta x - \alpha y))U_x, \end{cases}$$

- وذلك بفرض دوال تمثل حلولاً لمعادلات تفاضلية جزئية والتي كانت تعميماً لعمل السيد كريستوفر كولن في ورقة بحثه بعنوان **Polynomial Vector Fields with Prescribed Algebraic Limit Cycles** . المنشور في مجلة **Geometriae Dedicata** رقم 88 في الصفحات 255-258 سنة 2001 .
- الكلمات المفتاحية : المسألة السادسة عشرة لهيلبرت - أنظمة تفاضلية لكثيرات الحدود في المستوي . - منحنى لا متغير - التحول الدورانية .

## Résumé

Dans ce mémoire on présente quelques notions fondamentales sur la théorie qualitative des équations différentielles plus précisément sur les systèmes différentiels non linéaires polynomiaux planaires.

On va détailler le travail de Dr.Salah Benyoucef - Université de Setif 1 . dans l'article intitulé : " Polynomial differential systems with hyperbolic algebraic limit cycles " publié par : "Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations" No.34 , pages 1-7 en 29 may 2020 ([31]). sur l'existence des cycles limites pour des systèmes différentiels de degré supérieur où égale à  $d$  pour une courbe algébrique donnée de degré  $d$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha U + (ax + by + \phi(\beta x - \alpha y))U_y, \\ \dot{y} = \beta U - (ax + by + \phi(\beta x - \alpha y))U_x, \end{cases}$$

par l'introduction des fonctions qui sont des solutions de certaines équations différentielles partielles qui était une généralisation du travail de Christopher Colin dans l'article titré "Polynomial Vector Fields with Prescribed Algebraic Limit Cycles" publiée par le journal : "Geometriae Dedicata" No.88 dans les pages 255-258 en 2001 .

**Mots clés** : seizième problème de Hilbert, système différentiel polynomiale planaire, courbe invariante, solution périodique, cycle limite hyperbolique.

## Abstract

In this thesis , we present some fundamental notions on the qualitative theory of differential equations, precisely on nonlinear polynomial planar differential equation systems .

We give details about the research of Dr.Salah Benyoucef - Université de Setif 1 . in the article with title : " Polynomial differential systems with hyperbolic algebraic limit cycles " published by : "Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations" on 29 may 2020 ([31]),witch interest in the existance of a limit cycles for a differential system of a degree more than or equal to  $d$  for a given algebraic curve of a degree equals to  $d$  :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha U + (ax + by + \phi(\beta x - \alpha y))U_y, \\ \dot{y} &= \beta U - (ax + by + \phi(\beta x - \alpha y))U_x, \end{cases}$$

by introducing functions that are solutions for certain partial differential equations witch is a generalization of the research of Christopher Colin in the article titled "Polynomial Vector Fields with Prescribed Algebraic Limit Cycles" published by : "Geometriae Dedicata" No.88 dans les pages 255-258 en 2001 .

**Keywords :** sixteenth problem of Hilbert, planar polynomial differential system, invariant curve, periodic solution, hyperbolic limit cycle.

# Sommaire

<b>1</b>	<b>Notions Préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1	Équations différentielles ordinaires . . . . .	3
1.2	Système différentiel polynomiale planaire . . . . .	8
1.3	Champ de vecteurs . . . . .	8
1.4	Solutions et solutions périodiques . . . . .	9
1.5	Portrait de phase . . . . .	12
1.6	Points d'équilibre . . . . .	12
1.7	Auxiliaires géométriques des systèmes autonomes . . . . .	21
1.8	Courbes invariantes . . . . .	23
1.9	Intégrales premières . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Cycles limites</b>	<b>27</b>
2.1	Existence et non-existence de cycle limite . . . . .	28
2.2	Stabilité des cycles limites . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Systèmes différentiels planaires avec des cycles limites algébriques hyperbo-</b>	
	<b>liques</b>	<b>40</b>
3.1	Introduction . . . . .	40
3.2	Théorème de S.Benyoucef . . . . .	43
3.3	Preuve du théorème de S.Benyoucef . . . . .	43
3.4	Applications . . . . .	44

# Introduction générale

Après l'apparition du concept du calcul infinitésimal, dans les travaux d'*Isaac Newton* (1642-1727) et de *Gottfried W. Leibniz* (1646-1716) dans la seconde moitié de XVIIe siècle, la notion d'équation différentielle a trouvé son domaine d'application dans divers problèmes de la géométrie et de la mécanique par les mathématiciens et les scientifiques. Autrement dit, les phénomènes relatifs aux problèmes posés, sont modélisés par les équations différentielles qui permettent de les expliquer. Cela a engendré une explosion de la recherche pour l'étude de ces équations.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à un aspect important de la théorie qualitative des systèmes différentiels polynomiaux planaires, à savoir les cycles limites. Il s'agit des solutions périodiques isolées dans l'ensemble de toutes les solutions périodiques d'un système différentiel planaire. Ils sont représentés dans le plan de phase par des courbes fermées, simples et lisses. Les autres solutions se rapprochent des cycles limites où s'en éloignent lorsque le temps croit indéfiniment, il s'agit là de la stabilité ou d'instabilité des cycles limites. Le concept de cycles limites paraît pour la première fois dans les fameux travaux de **Henri Poincaré** ([13], [14], [15], [16]) publiés entre 1881 et 1889.

L'importance des équations différentielles a motivé des générations de mathématiciens et d'autres scientifiques pour développer des méthodes afin d'étudier les propriétés de leurs solutions.

Puis au début de 20ème siècle, dans le deuxième congrès international de Mathématiques en 1900 à Paris, **David Hilbert** a présenté son célèbre exposé intitulé "Problèmes Mathématiques". La 16ème de ces 23 problèmes s'était de déterminer le nombre maximale de cycles limites existants pour le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} &= P(x(t), y(t)), \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} &= Q(x(t), y(t)), \end{cases}$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes à coefficients réels et de degré quelconques.

Ce problème jusqu'à nos jours non résolu totalement, a fait l'objet de plusieurs travaux.

Pour l'existence et le non-existence des cycles limites, ils existent quelques anciens résultats largement appliqués, tels que le théorème de **Poincaré-Bendixon**, le critère de **Bendixon**, et le critère de **Dulac**, le critère de **Giacomini**, **Libre et Viano**, critère de **potentiel** et critère de **la fonction de Lyapunov**. Mais pour le problème d'unicité, la situation est plus compliquée et demande beaucoup plus d'estimation exacte.

Ce travail est organisé de la manière suivante :

- **Chapitre 1** : Comporte quelques notions préliminaires de systèmes différentiels, introductives et nécessaires à la compréhension de l'ensemble de ce travail. On commence par définir les systèmes différentiels, champ de vecteurs, flux, portrait de phase, point d'équilibre, linéarisation des systèmes différentiels non linéaires au voisinage des points d'équilibres, les solutions périodiques et leurs stabilités, et les ensembles limites.
- **Chapitre 2** : Dans ce chapitre, on s'intéresse plus particulièrement à l'étude de cycles limites. Nous débuterons par l'étude qualitative des cycles limites. Ensuite, nous exposons des principaux résultats sur l'existence et non-existence.

- **Chapitre 3** : Ce chapitre expose le travail de Dr.Salah Benyoucef - Université de Setif 1 . dans l'article intitulé : " Polynomial differential systems with hyperbolic algebraic limit cycles " publiée par : "Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations" en 29 may 2020 . sur l'existence du cycles limites pour des systèmes différentiels de degré supérieur où égale à  $d$  pour une courbe algébrique donnée de degré  $d$ , par une généralisation du théorème de **Christopher Cloin**(3.1) par un théorème de **S.Benyoucef**([31]) qui introduit des fonctions comme des solutions de certain systèmes différentiels.

# Chapitre 1

## Notions Préliminaires

### Introduction

Ce chapitre contient quelques notions générales et principale pour la théorie qualitative des système différentiels polynômiaux. Nous commençons par des généralités sur les équations différentiels ordinaires notamment les systèmes dynamiques puis on définit les systèmes différentiels polynômiaux on examinera les notions de : champ de vecteurs , flux , portrait de phase , point d'équilibre , linéarisation des systèmes différentiels non linéaires au voisinage des points d'équilibres. Ensuite, nous examinons la nature et la stabilité des points d'équilibres .Enfin nous terminons courbes invariantes et intégrabilité. On rappellera les théorèmes fondamentaux : le théorème d'existence et d'unicité , théorème de Hartman-Grobman et les théorèmes des méthodes du classification du stabilité de Lyapunov et de Poincaré.

### 1.1 Équations différentielles ordinaires

#### Définition 1.1 ([33])

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. On appelle **équation différentielle ordinaire (EDO)** toute relation entre une variable réelle  $t$ , une fonction inconnue  $t \rightarrow \phi(t)$  et ses dérivées  $\phi', \phi'', \dots, \phi^{(n)}$  au point  $t$  de la forme :

$$F(t, \phi, \phi', \dots, \phi^{(n)}) = 0, \quad (1.1.1)$$

où  $F$  est une fonction continue sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R} \times E^{n+1}$ .

#### Définition 1.2 ([33])

Soit  $\phi$  une fonction de  $t$  définie sur un intervalle  $I$  dans  $E$ ,  $n$  fois dérivable en tout point de  $I$  et  $\phi, \phi', \phi'', \dots, \phi^{(n)}$  sont ses dérivées.

On dit que  $\phi$  est **une solution** de 1.1.1 si :

$$\forall t \in I, F(t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(n)}(t)) = 0,$$

La solution est notée par le couple :  $(\phi, I)$

#### Définition 1.3 ([33])

Soient  $(\phi_1, I_1)$  et  $(\phi_2, I_2)$  deux solutions de l'équation 1.1.1.

Si  $I_1 \subset I_2$  et  $\forall t \in I_1 : \phi_1(t) = \phi_2(t)$  alors,  $(\phi_2, I_2)$  est **une prolongement** de  $(\phi_1, I_1)$ .

#### Définition 1.4 ([33])

Une solution  $(\phi, I)$  de 1.1.1 est dite **maximale** si elle n'admet pas une prolongement.

i.e. pour toute solution  $(\psi, J)$  on a, si  $I \subset J$  et pour tout  $t \in I : \phi(t) = \psi(t)$  , alors  $I = J$ .

**Définition 1.5 ([33])**

Une fonction  $f$  définie sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  est dite **Lipschitzienne** par rapport à sa variable  $\phi$  s'il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\text{pour tout } (x, \phi_1) \text{ et } (x, \phi_2) \text{ de } \Omega : \|f(x, \phi_1) - f(x, \phi_2)\| < C \|\phi_1 - \phi_2\|$$

La fonction  $f$  est dite **localement Lipschitzienne**, si pour tout  $(x_0, y_0)$  de  $\Omega$ , il existe un voisinage de  $(x_0, y_0)$  sur lequel elle est Lipschitzienne.

**Théoreme 1.1 (Cauchy-Lipschitz [33])**

Soit le problème  $\dot{X}(t) = f(X(t))$  avec la condition initiale  $X(t_0) = X_0$ , où  $f$  est continue sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  et  $X_0 \in \Omega$ .

Si  $f$  est localement Lipschitzienne, alors le problème admet une unique solution maximale  $X(t)$  qui passe par le point  $X_0$ .

**Définition 1.6 ([23])**

Le problème  $\dot{X}(t) = f(X(t))$  qui consiste à trouver une solution satisfaisant à la condition initiale  $X(t_0) = X_0$ , est appelé problème de Cauchy.

**Définition 1.7 ([23])**

Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps commutatif  $K$ . Une **forme linéaire** sur  $E$  est une application  $\rho$  de  $E$  dans  $K$  qui est linéaire, c'est à dire qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in K, \rho(\lambda x + y) = \lambda \rho(x) + \rho(y)$$

**Définition 1.8 ([23])**

On appelle **champ de vecteurs** toute application  $f$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Autrement dit, à tout point de  $U$  on associe un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.9 ([23])**

Un champ scalaire est une fonction de la forme  $F(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $F(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  où  $x$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

Le champ scalaire peut être visualisé comme un espace à  $n$  dimensions avec un nombre complexe ou réel attaché à chaque point de l'espace.

La dérivée d'un champ scalaire résulte en un champ de vecteurs appelé le gradient.

**1.1.1 Intégrale curviligne****Définition 1.10 ([18])**

En géométrie différentielle, l'**intégrale curviligne** est une intégrale où la fonction à intégrer est évaluée sur une courbe  $\Gamma$ . Il y a deux types d'intégrales curvilignes, selon que la fonction est à valeurs réelles ou à valeurs dans les formes linéaires. Le second type (qui peut se reformuler en terme d'une circulation d'un champ de vecteurs) a comme cas particulier les intégrales que l'on considère en analyse complexe.

Dans cette partie,  $\Gamma$  est un arc orienté dans  $\mathbb{R}^n$ , rectifiable c'est-à-dire paramétré par une fonction continue à variation bornée  $t \rightarrow \gamma(t)$ , avec  $t \in [a, b]$ .

**Intégrale d'un champ scalaire****Définition 1.11 ([29])**

On définit l'intégrale curviligne d'un champ scalaire continu  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  comme l'intégrale de Stieltjes de  $f \circ \gamma$  par rapport à l'abscisse curviligne  $s_\gamma(t)$  (longueur de l'arc  $\gamma$  restreint à  $[a, t]$ ) :

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b (f \circ \gamma) ds_\gamma,$$

c'est-à-dire la limite, quand le pas de la subdivision pointée de  $[a, b]$  tend vers 0, des sommes de Riemann associées :

$$\sum_{k=1}^n f(\gamma(t'_k))(s_\gamma(t_k) - s_\gamma(t_{k-1})),$$

où la subdivision pointée est notée :  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, t'_k \in [t_{k-1}, t_k]$

Cette définition ne dépend pas du paramétrage de  $\Gamma$ , ni de l'orientation.

La longueur  $s_\gamma(b)$  de l'arc  $\Gamma$  est l'intégrale curviligne de la fonction constante 1.

Si  $\gamma$  est de classe  $C^1$  :

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt,$$

### Analyse vectorielle associée au intégrale curviligne

#### Définition 1.12 ([29])

On définit également la circulation le long de  $\Gamma$  d'un champ vectoriel continu  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  comme une intégrale de Stieltjes :

$$\int_\gamma f \cdot d\gamma = \int_a^b (f \circ \gamma) \cdot d\gamma,$$

où  $\cdot$  désigne le produit scalaire.

Cette définition ne dépend pas du paramétrage de  $\Gamma$  mais dépend de l'orientation (l'intégrale est changée en son opposée quand la courbe est parcourue en sens inverse).

On peut reformuler cette définition en notant  $\omega$  est 1-forme différentielle « produit scalaire par  $f$  » : si  $\omega$  est une 1-forme différentielle continue sur le support de  $\Gamma$ , on définit l'intégrale curviligne de  $\omega$  le long de  $\Gamma$  par :

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \langle \omega \circ \gamma, d\gamma \rangle,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le crochet de dualité.

Si  $\gamma$  est de classe  $C^1$  :

$$\int_\gamma f \cdot d\gamma = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \text{ et } \int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt.$$

### Analyse complexe associée au intégrale curviligne

#### Définition 1.13 ([18])

Pour  $n = 2$  et en identifiant  $\mathbb{R}^2$  au plan complexe, on définit l'intégrale curviligne d'une fonction continue  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  comme l'intégrale de la 1-forme différentielle « produit (complexe) par  $f$  » :

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b (f \circ \gamma) dy,$$

Si  $\gamma$  est de classe  $C^1$  :

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt,$$

Lorsque  $\Gamma$  est une **courbe fermée** (ses deux extrémités coïncident), il arrive qu'on utilise la notation :

$$\oint_\Gamma f(z) dz, \tag{1.1.2}$$

**Exemple 1.1.1**

Soit la fonction  $f(z) = \frac{1}{z}$  et soit  $C$  le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique, ce qui peut se paramétrer par  $e^{it}$ , avec  $t$  parcourant  $[0, 2\pi]$ . L'intégrale correspondante est :

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i,$$

**1.1.2 Formule de Green****Théoreme 1.2 ([10])**

Si  $\Omega$  est un ouvert assez régulier (par exemple dont le bord possède un plan tangent en tout point) et  $u$  et  $v$  sont deux fonctions de  $L^2(\Omega)$  dont les dérivées premières (éventuellement à comprendre au sens des distributions) sont dans  $L^2(\Omega)$ , alors on a :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = \int_{\Gamma} u v n_i d\sigma - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx, \quad (1.1.3)$$

où  $n_i$  est la  $i$ ème composante du vecteur normal à  $\Gamma$  dirigé vers l'extérieur.

On en déduit facilement que si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions de  $L^2(\Omega)$  dont les dérivées secondes pour  $u$  et premières pour  $v$  sont dans  $L^2(\Omega)$ , alors on a :

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

**Définition 1.14 (EDO linéaire et EDO non linéaire [33])**

L'équation 1.1.1 est dite linéaire si elle s'écrit sous la forme :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b, \quad (1.1.4)$$

où  $a_0, a_1, \dots, a_n$  et  $b$  sont des fonctions de  $t$  ou bien des constantes.

Autrement, l'équation 1.1.1 est dite non linéaire.

L'équation 1.1.4 est dite d'ordre  $n$  si  $a_n \neq 0$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Définition 1.15 ([33])**

On appelle système différentielle d'ordre 1 tout système de la forme :

$$\dot{X}(t) = F(X(t)), \quad (1.1.5)$$

avec

$$\dot{X}(t) = \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}; X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}; F(X(t)) = \begin{pmatrix} f_1(X(t)) \\ \vdots \\ f_2(X(t)) \end{pmatrix}, \quad (1.1.6)$$

où  $f_i \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  sont des fonctions de la variable  $t$  sur l'ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.16 (Système différentiel linéaire [33])**

Le système (1.1.5) est dit linéaire si pour tout  $t \in \mathbb{R}$  il existe un vecteur  $B(t) \in \mathbb{R}^n$  et une matrice  $A(t) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{R}^n : F(X(t)) = A(t)X + B(t), \quad (1.1.7)$$

sinon, le système différentiel est dit non linéaire.

Le système différentiel est dit homogène si  $B(t) = 0_{\mathbb{R}^n}$ .

On note :

$$\dot{X}(t) = A(t)X, \quad (1.1.8)$$

le système homogène associé au système différentiel linéaire  $\dot{X}(t) = A(t)X + B(t)$ .

### 1.1.3 Système dynamique

Un système dynamique est un modèle permettant l'évolution au cours temps d'un ensemble des objets en interaction il est définie par un triplet  $(D, I, \varphi)$  constitué de l'espace d'état  $D$ , du domaine temporel  $I$ , et d'une application de transition d'état  $\varphi : I \times D \rightarrow D$  qui permet de définir à partir d'un vecteur de condition initiale l'état du système à tout instant.

#### Définition 1.17 ([33])

Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est une application :

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

définie sur tout  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ , tel que :

1.  $\varphi(\cdot, X) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue ,
2.  $\varphi(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue ,
3.  $\varphi(0, X) = X$ ,
4.  $\varphi(t + s, X) = \varphi(t, \varphi(s, X))$  pour tout  $\forall t, s \in \mathbb{R}^+, \forall X \in \mathbb{R}^n$ .

#### Exemple 1.1.2

Soit le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{X} &= AX(t), \\ X(0) &= X_0, \end{cases}$$

où  $A$  est une matrice constante. La solution de ce système est :

$$X(t) = e^{tA} X_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

engendre un système dynamique du fait que l'application :

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

qui à tout  $t \in \mathbb{R}^+$  ,  $X \in \mathbb{R}^n$  associé :

$$\varphi(t, X) = e^{tA} X,$$

vérifiée les quatre propriétés du système dynamique :

1.  $\varphi(\cdot, X) = e^{tA} X : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue par rapport à deuxième composante,
2.  $\varphi(t, \cdot) = e^{tA} X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue par rapport à première composante, ,
3.  $\varphi(0, X) = e^{0A} X = X$ ,
4.  $\varphi(t + s, X) = e^{(t+s)A} X = \varphi(t, \varphi(s, X))$  pour tout  $\forall t, s \in \mathbb{R}^+, \forall X \in \mathbb{R}^n$ .

### Formulation des systèmes dynamiques

#### Proposition 1.1.1 ([33])

Les systèmes dynamiques sont classés en deux catégories :

1. Dans le cas où la composante du temps est continue,, le système dynamique est présenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\dot{X} = F(X, t) \iff \begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, t), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n, t), \\ \vdots & \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, t), \end{cases} ; \quad X \in D \subset \mathbb{R}^n, t \in I \subset \mathbb{R}$$

Si la fonction  $F$  est linéaire, le système dynamique est dit linéaire, et si le temps est exprimé explicitement dans la fonction  $F$ , le système est dit "non autonome".

2. Dans le cas où le temps est discret, le système dynamique est présenté par une application (fonction itérative) :

$$X_{k+1} = f(X_k, k), x_k \in \mathbb{R}^n,$$

### Remarque 1.1.1

Dans ce travail nous intéressons aux systèmes dynamiques autonomes et à temps continue, de type :

$$\dot{X} = F(X), X \in D \subset \mathbb{R}^n, t \in I \subset \mathbb{R},$$

## 1.2 Système différentiel polynomiale planaire

### Définition 1.18 ([26])

On appelle système différentiel polynomiale planaire, tout système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)), \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes à coefficients réels .

Le système (1.2.1) est de degré  $d$  ou  $d = \max(\deg P, \deg Q)$  .

Et puisque  $P$  et  $Q$  sont des fonctions de classe  $C^1$  (donc les conditions de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites en tout point ordinaire du système (1.2.1)).

## 1.3 Champ de vecteurs

### Définition 1.19 ([28])

Le champ de vecteurs associé au système (1.2.1) est l'application  $\mathcal{X}$  définie sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  dans lequel on associe à chaque point  $M(x, y)$  un vecteur  $\mathcal{X}(M)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{X} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ M(x, y) &\longmapsto \frac{d\vec{M}}{dt} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La représentation graphique du champ de vecteurs en chaque point associé à un système différentiel nous donne des informations sur leur solutions possibles. En effet, le comportement asymptotique de ces derniers est déduite par les vecteurs qui sont tangents à la trajectoire des solutions qui passent par ces points.

### Exemple 1.3.1 ([28])

On considère le système différentiel planaire polynomiale suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^2, \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Le champ de vecteurs associé au système (1.3.1) est donné par la figure :

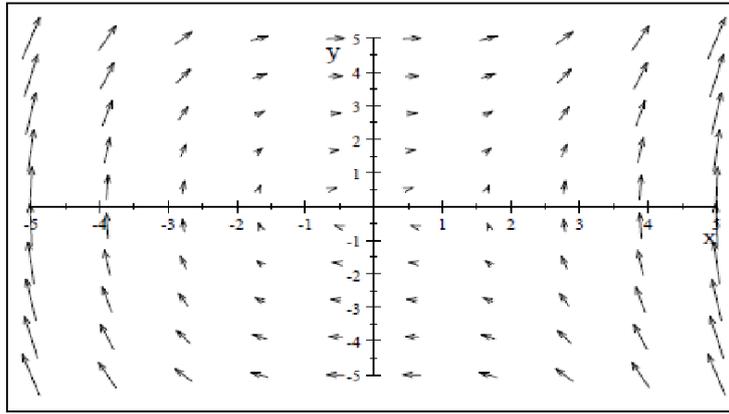


FIGURE 1.1 – Champ de vecteurs associé au système (1.3.1) [28]

**Remarque 1.3.1 ([28])**

On note  $\mathcal{X} = (P, Q)$  le champ de vecteur associé au système (1.2.1). Il est aussi écrit sous la forme :

$$\mathcal{X} = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (1.3.2)$$

## 1.4 Solutions et solutions périodiques

Les solutions périodiques déterminent le comportement qualitatif des solutions d'un système différentiel .

**Définition 1.20 ([8])**

On appelle solution du système différentiel (1.2.1) toute fonction dérivable :

$$\begin{aligned} \varphi : I \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \end{aligned}$$

où  $I$  est un intervalle non vide tel que : pour tout  $t \in I$  le couple  $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$  satisfait ce système .

**Définition 1.21 ([8])**

On appelle solution périodique du système (1.2.1) toute solution  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$  pour laquelle il existe un réel  $T$  tel que :

$$\forall t \in I, \varphi_1(t + T) = \varphi_1(t) \text{ et } \varphi_2(t + T) = \varphi_2(t)$$

La **période** de cette solution est le plus petit  $T > 0$  qui convient.

**Remarque 1.4.1**

Si  $X(t)$  a une période  $T$ , la solution a aussi une période  $kT$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  .

**Exemple 1.4.1**

L'oscillateur harmonique est régi par l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

Cette équation équivaut au système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x, \end{cases}$$

Ce système s'intègre facilement puisque :

$$\frac{dy}{dx} = -\omega^2 \frac{x}{y}$$

ce qui donne pour ensemble de solutions :

$$y^2 + \omega^2 x^2 = C,$$

Autrement dit, ce système possède une famille continue à une paramètre de solutions périodique représentées dans le plan de phase par des ellipses.

### Théoreme 1.3 ([8])

Soit  $X(t)$  une solution du système (1.2.1), supposons qu'il existe deux instants  $t_1$  et  $t_2$  ( $t_1 < t_2$ ) tels que :  $X(t_1) = X(t_2)$  (c'est à dire l'orbite de  $X(t)$  se recoupe). Alors,  $X(t)$  est une solution périodique définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

### Définition 1.22 ([8])

On appelle **orbite** du système (1.2.1) la représentation d'une solution  $X(t)$ ,  $t \in I$  sur le plan  $\mathbb{R}^2$ .

### Définition 1.23 ([8])

On appelle **trajectoire** du système (1.2.1) l'ensemble  $\{(t, X(t)) | t \in I\}$ . On l'appelle aussi **courbe intégrale**.

### Définition 1.24 ([8])

On appelle **plan de phase** associé au système (1.2.1) l'ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  où leur solutions ont des valeurs.

### Exemple 1.4.2 ([8])

Soit  $\phi(t) = (x(t), y(t))$  une solution du système (1.2.1). Dans sa trajectoire on distingue la coïncidence de la valeur du champ de vecteurs  $\mathcal{X} = (P, Q)$  au point  $\phi(t)$  avec le vecteur tangent  $\phi'(t)$  au  $\phi(t)$  induit par la trajectoire (courbe intégrale) du ce système (voir la figure 1.2).

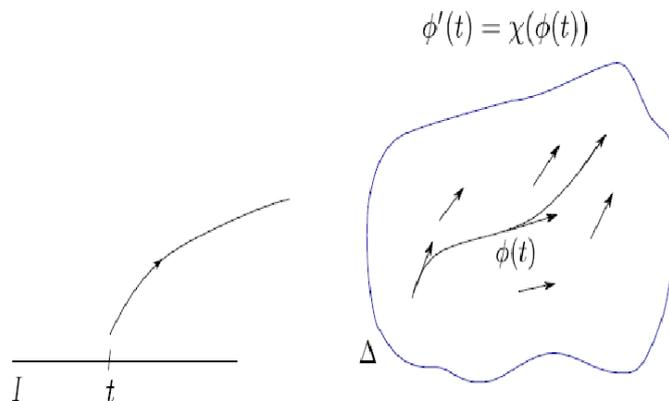


FIGURE 1.2 – Trajectoire associée à un système différentiel [8]

### Remarque 1.4.2 ([8])

Une trajectoire fermée est une solution périodique.

**Lemme 1.4.1 ([8])**

Une solution périodique du système différentiel (1.2.1) correspond à une orbite fermée dans le plan de phase, et une orbite fermée correspond à une solution périodique.

Alors en topologie, l'orbite d'une solution périodique est topologiquement équivalent au cercle de centre 0 et de rayon 1. Cela signifie qu'il existe un homéomorphisme  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui transforme toute orbite périodique en ce cercle c'est à dire que cet homéomorphisme transforme le système (1.2.1) en un système équivalent qui admet le cercle de centre 0 et de rayon 1 comme solution périodique.

**Définition 1.25 ([8])**

Soit  $I_X$  l'intervalle maximale d'existence de la solution  $X$  du système (1.2.1).

1. L'orbite de  $X$  est définie par :  $\Gamma(X) = \{X(t), t \in I_x\}$ .
2. La semi-orbite positive est définie par  $\Gamma^+(X) = \{X(t), t \geq 0\}$ .
3. La semi-orbite négative est définie par  $\Gamma^-(X) = \{X(t), t \leq 0\}$ .

**Définition 1.26 ([8])**

Supposons que le système différentiel puisse s'écrire sous la forme  $\dot{X} = -\overrightarrow{\text{grad}V(X)}$  où  $X \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $V$  est une fonction  $C^1$  définie sur  $U$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On dit alors que  $V$  est un **potentiel** de ce système.

**Théoreme 1.4 ([8])**

Si un système admet un potentiel il ne peut admettre d'orbites fermées.

**Exemple 1.4.3**

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(y), \\ \dot{y} = \cos(y), \end{cases}$$

Le système n'admet pas d'orbites fermées puisqu'il admet la fonction  $V(x, y) = -x \sin(y)$  comme potentiel.

**Flux**

Soit  $M(x, y)$  un point de  $\mathbb{R}^2$ , on note  $\varphi_t(x, y)$  la position de  $M(x, y)$  après un déplacement d'une durée  $t$  ( $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ ).

**Définition 1.27 ([8])**

On appelle flux (associé au champ de vecteurs  $(P, Q)$ ) l'application

$$\begin{aligned} \varphi_t : \quad I \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, (x, y)) &\longmapsto \varphi_t(x, y) \end{aligned}$$

vérifiant les trois propriétés suivantes :

1.  $\frac{d}{dt} \varphi_t(x, y) = (P(\varphi_t(x, y)), Q(\varphi_t(x, y)))$ ,
2.  $\varphi_0(x, y) = (x, y)$ ,
3.  $\varphi_{t+s}(x, y) = \varphi_t(\varphi_s(x, y))$ ,

pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $t, s \in I$ .

1. et 2. signifient que  $\varphi_t(x, y)$  est la solution maximale qui passe par  $(x, y)$  lorsque  $t = 0$ .

3. est une nouvelle formulation du caractère autonome de système (1.2.1) : au lieu de se déplacer pendant  $t+s$  on peut le faire pendant  $t$ , prendre en pause, ensuite poursuivre, pour finir son bout de chemin pendant durée  $s$  : entre-temps le champ de vecteurs n'a pas été modifié.

## 1.5 Portrait de phase

### Définition 1.28 ([8])

La représentation géométrique des trajectoires dans le plan de phase est dite **portrait de phase** associée au système (1.2.1), dans laquelle, une courbe ou un point est créé à partir d'ensemble des conditions initiales. La lecture de cette représentation graphique est très utile pour avoir une idée du comportement du système.

### Exemple 1.5.1 ([32])

L'ensemble des solutions du système (1.3.1) est définie par :  $y^2 = \frac{2}{3}x^3 + c$  où  $c$  est une constante réelle, alors le portrait de phase associée est représenté par la figure 1.3 :

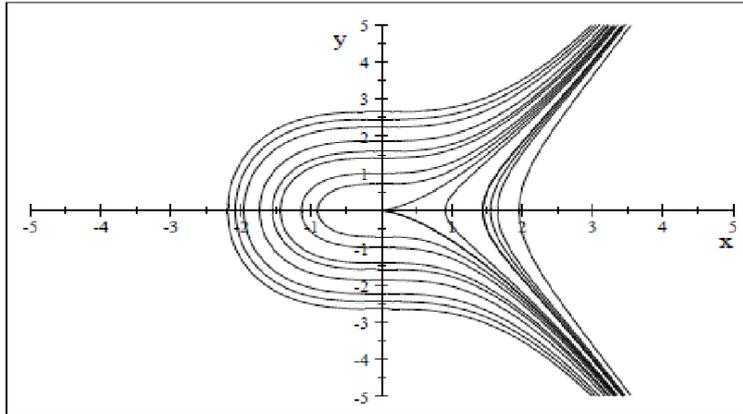


FIGURE 1.3 – Portrait de phase associé au système (1.3.1)

## 1.6 Points d'équilibre

L'importance de l'étude des points d'équilibre des systèmes différentiels a été mise en évidence par Henri Poincaré (1854-1912), il a montré qu'on peut connaître le comportement des solutions à travers l'étude de ces points.

### Définition 1.29 ([26])

Un point  $(x_0, y_0)$  est dit **point d'équilibre** du système (1.2.1) s'il vérifie :

$$\begin{cases} P(x_0, y_0) = 0, \\ Q(x_0, y_0) = 0, \end{cases}$$

### Remarque 1.6.1

- La notion du point d'équilibre est la même que celle du point singulier pour le champ de vecteurs.
- Les points d'intersections de ces deux isoclines sont les points d'équilibre  $(x_0, y_0)$  du système, c'est à dire les points tels que la trajectoire issue d'un tel point reste en ce point pour tout  $t$ .

### Exemple 1.6.1

Soit le système différentielle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - 4y - x^2, \end{cases}$$

Déterminant les points d'équilibres :

$$\begin{cases} P(x_0, y_0) = 0, \\ Q(x_0, y_0) = 0, \end{cases}$$

$y = 0$  et  $-x - 4y - x^2 = 0 \iff y = 0$  et  $-x - x^2 = 0 \iff x \in \{-1, 0\}$ .  
donc les points d'équilibre sont :  $(0, 0)$  et  $(-1, 0)$ .

**Remarque 1.6.2** ([26])

Les points d'équilibre du système (1.2.1) sont des solutions périodiques constantes.

**Proposition 1.6.1** ([26])

Toute solution périodique entoure au moins un point d'équilibre.

**Théoreme 1.5** ([28])

Soit le champ de vecteurs  $\mathcal{X}$  sur  $\mathbb{R}^2$  associé au système (1.2.1). Si  $\Gamma$  est une orbite périodique de  $\mathcal{X}$ , alors il existe un point d'équilibre de  $\mathcal{X}$  contenu dans  $\text{Int}(\Gamma)$ , où  $\text{Int}(\Gamma)$  signifie l'intérieur de  $\Gamma$ .

### 1.6.1 Matrice jacobienne et linéarisation

La plupart des systèmes différentiels existants dans la nature sont non linéaires. Pour étudier le comportement des trajectoires d'un système différentiel non linéaire il faut le ramener à l'étude du système linéaire associé au voisinage d'un point d'équilibre.

**Définition 1.30** ([26])

Au voisinage d'un point d'équilibre  $(x_0, y_0)$ , la **matrice jacobienne** associée au champ de vecteurs  $\mathcal{X}$  du système (1.2.1) est donnée par :

$$J_{\mathcal{X}}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (1.6.1)$$

**Définition 1.31** ([26])

Le **linéarisé** du système non linéaire (1.2.1) au point  $(x_0, y_0)$  est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.6.2)$$

où  $(x_0, y_0)$  est un point d'équilibre.

Le système (1.6.2) peut être écrit sous la forme matricielle :

$$\dot{X} = AX, \quad (1.6.3)$$

où

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}; \quad A = J_{\mathcal{X}}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**Exemple 1.6.2**

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = y^2 + x, \end{cases} \quad (1.6.4)$$

qui admet  $X_0 = (0, 0)$  comme le seul point d'équilibre.

La matrice jacobienne associée à ce système est donnée par :

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$$

Alors, le linéarisé de ce système en  $X_0 = (0, 0)$  est donné par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Donc le système linéarisé du système (1.6.4) est :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x, \end{cases}$$

### Équivalence topologique

#### Définition 1.32 ([8])

Un **homéomorphisme** de  $\mathbb{R}^2$  est une application  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  bijective bicontinue (i.e. est continue ainsi que sa réciproque).

#### Définition 1.33 ([8])

Deux systèmes polynomiaux planaires

$$\begin{cases} \dot{x} = P_1(x(t), y(t)), \\ \dot{y} = Q_1(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (\text{A})$$

et

$$\begin{cases} \dot{x} = P_2(x(t), y(t)), \\ \dot{y} = Q_2(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (\text{B})$$

définies sur deux ouverts  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  de  $\mathbb{R}^2$  respectivement sont **topologiquement équivalents** s'il existe un homéomorphisme

$$h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$$

tel que  $h$  transforme les orbites de (A) en des orbites de (B) et préserve leurs orientations.

#### Remarque 1.6.3

- L'équivalence par homéomorphisme permet d'effectuer une classification basée principalement sur la stabilité ou l'instabilité de l'équilibre.
- Deux systèmes linéaires sont topologiquement équivalents s'ils ont le même nombre de valeurs propres, avec des parties réelles de même signe.

### Théorème de Hartman-Grobman

Ce théorème nous permet de réduire l'étude d'un système différentiel au voisinage d'un point d'équilibre à l'étude d'un système linéaire topologiquement équivalent au système (1.2.1) au voisinage de l'origine.

#### Théorème 1.6 (Hartman-Grobman, 1967 [28])

Supposons que la matrice jacobienne associée au système (1.2.1) au point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  a deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  telles que  $\operatorname{Re}(\lambda_1) \neq 0$  et  $\operatorname{Re}(\lambda_2) \neq 0$ , alors les solutions du système (1.2.1) sont données approximativement par les solutions du système linéarisé (1.6.2) au voisinage du point d'équilibre  $(x_0, y_0)$ .

**Remarque 1.6.4 ([28])**

- Dans le cas où  $Re(\lambda_1) = 0$  et  $Re(\lambda_2) = 0$ , ce procédé de linéarisation ne marche pas, c'est à dire la détermination de la nature d'un point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  du système linéarisé (1.6.2) dans le système (1.2.1) nécessite d'autres démarches, ce problème est appelé **problème du centre**.
- Au voisinage du point d'équilibre mentionné dans le théorème précédent, le portrait de phase du système linéarisé (1.6.2) constitue une bonne approximation de celui du système (1.2.1).

**1.6.2 Stabilité d'un point d'équilibre**

La stabilité est l'un des aspects essentielles dans l'étude du système (1.2.1). Cette notion a été étudiée par Liapunov (1857-1918).

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre nous donne des informations sur le comportement des trajectoires voisines de ce point.

**Définition 1.34 ([28])**

Soit  $(x_0, y_0)$  un point d'équilibre du système (1.2.1). Notons  $X_0 = (P(x_0, y_0), Q(x_0, y_0))$  et  $X(t) = (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t)))$ .

- $(x_0, y_0)$  est dit **stable** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \implies \|X(t) - X_0\| < \varepsilon;$$

- $(x_0, y_0)$  est dit **instable** dans le cas contraire.
- $(x_0, y_0)$  est dit **asymptotiquement stable** s'il est stable et :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - X_0\| = 0$$

- $(x_0, y_0)$  est dit **exponentiellement stable** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0 \text{ tel que :}$$

$$\|X(t) - X_0\| < \delta \implies \|X(t) - X_0\| < \alpha \|X(t) - X_0\| e^{-\beta t}; \forall t > 0$$

**1.6.3 Classification des points d'équilibre [26]**

En un point d'équilibre  $(x_0, y_0)$ , la nature des valeurs propres de la matrice jacobienne (1.6.1) du système linéarisé (1.6.2) associé au système différentiel initial (1.2.1) permet de distinguer les différents cas d'équilibre.

Supposons que les valeurs propres de la matrice jacobienne 1.6.1 sont notées  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont **réelles non nulles et distinctes** (voir la figure 1.4) :

1. Si  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  alors le point d'équilibre est **instable**.  
On dit que le point d'équilibre est un "**nœud instable**".
2. Si  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  alors on dit que le point d'équilibre est un "**col(point selle)**".
3. Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$  alors le point d'équilibre est **asymptotiquement stable**.  
On dit que le point d'équilibre est un "**nœud stable**".

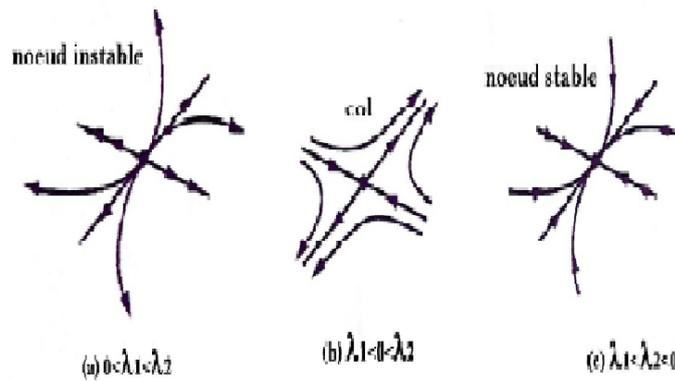


FIGURE 1.4 – Valeurs propres réelles non nulles et distinctes [26]

Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont **des complexes et distincts** (où ses parties imaginaires sont pas nulles)(voir la figure 1.5) :

1. Si  $Re(\lambda_1), Re(\lambda_2) < 0$  alors le point d'équilibre est **asymptotiquement stable**.  
On dit que le point est un **puits en spirale "foyer stable"**.
2. Si  $Re(\lambda_1), Re(\lambda_2) = 0$  alors le point d'équilibre est un **centre**.
3. Si  $Re(\lambda_1), Re(\lambda_2) > 0$  alors le point d'équilibre est **instable**.  
On dit que le point est un **source en spirale "foyer instable"**.

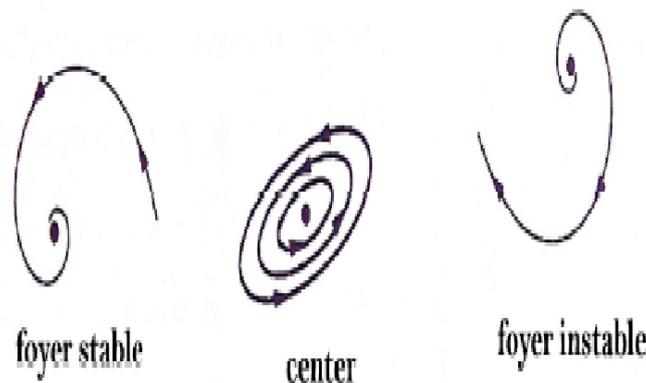


FIGURE 1.5 – Valeurs propres complexes [26]

Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  **sont égaux** :

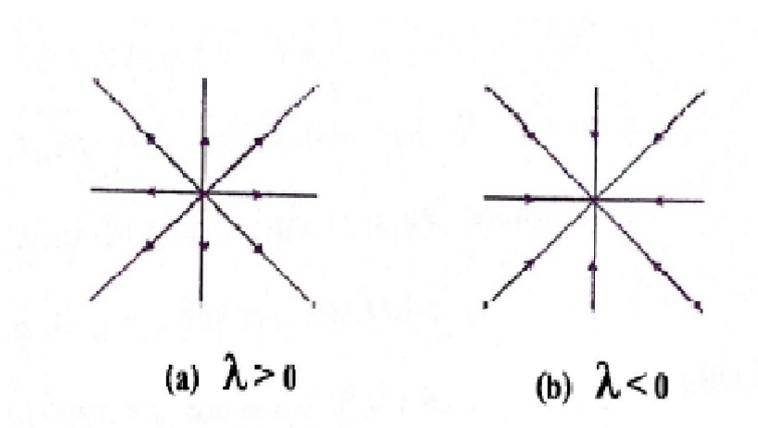
Dans ce cas  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  un réel. Pour  $\omega \in \mathbb{R}$  on a :

$$J_x = \begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

on a donc les cas suivants :

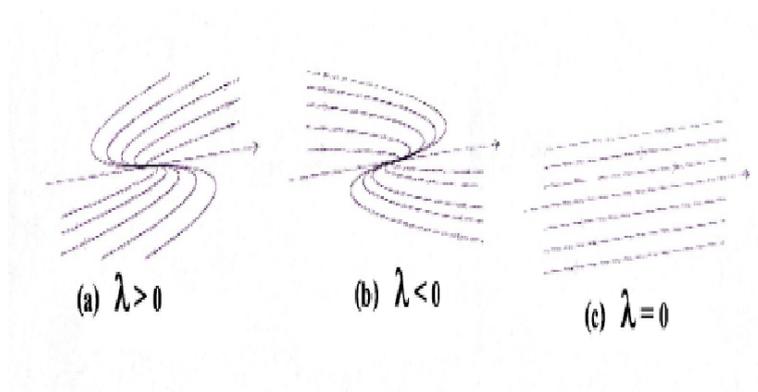
**Le cas  $\omega = 0$**  (voir la figure 1.6) :

1. Si  $\lambda > 0$  alors on dit que le point est une **"source en étoile"**.
2. item Si  $\lambda < 0$  alors on dit que le point est une **"puits en étoile"**

FIGURE 1.6 – Valeurs propres sont égaux avec  $\omega = 0$  [26]

**Le cas  $\omega \neq 0$**  (voir la figure 1.7) :

1. Si  $\lambda > 0$  alors on dit que le point est **une source**.
2. Si  $\lambda < 0$  alors on dit que le point est **une puits**.
3. Si  $\lambda = 0$  alors tout les points de la droite  $kv$  sont des points d'équilibre.

FIGURE 1.7 – Valeurs propres sont égaux avec  $\omega \neq 0$  [26]

**Remarque 1.6.5 ([26])**

Lorsque  $Re(\lambda_1) \neq 0, Re(\lambda_2) \neq 0$  le point d'équilibre est dit **hyperbolique**.

**Exemple 1.6.3**

Le point d'équilibre  $(0, 0)$  du système (1.6.4) est non hyperbolique puisque les valeurs propres de la matrice jacobienne  $J_X(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  associée sont  $\lambda_1 = i$  et  $\lambda_2 = -i$ .

**Exemple 1.6.4**

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = y^2 - y, \end{cases} \quad (1.6.5)$$

les points d'équilibre de ce système sont  $(0, 0)$  et  $(-1, 1)$ .

Le système linéarisé du système (1.6.5) au voisinage du point  $(0, 0)$  est

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -y, \end{cases}$$

Et les valeurs propres obtenues sont  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 1$ , alors le point  $(0, 0)$  est hyperbolique.

Le système linéarisé du système (1.6.5) au voisinage du point  $(-1, 1)$  est

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = y, \end{cases}$$

La seule valeur propre obtenue est  $\lambda = 1$ , alors le point  $(-1, 1)$  est hyperbolique.

### Théoreme 1.7 ([28])

Soit  $(x_0, y_0)$  un point d'équilibre hyperbolique du système (1.2.1). Alors dans un voisinage de  $(x_0, y_0)$ , les trajectoires des solutions du système (1.2.1) ont la même allure que les trajectoires des solutions de son linéarisé.

## 1.6.4 Stabilité au sens de Lyapunov

La stabilité au sens de Lyapunov est une théorie générale valable pour toute équation différentielle pour savoir si ces points d'équilibres sont stables ou non. Cette notion signifie que la solution d'une équation différentielle initialisée au voisinage d'un point d'équilibre en reste suffisamment proche.

### Définition 1.35 ([11])

Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction et  $\dot{X} = F(X)$  un système différentiel, avec  $X_0$  est un point d'équilibre de ce système.

Par un changement de variable  $Y = X - X_0$ , on peut se ramener au cas où l'origine est point d'équilibre ( $F(0) = 0$ ).

Une fonction de Lyapunov est une fonction de classe  $C^1$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$V(X_0) = 0 \text{ et } \forall X \neq X_0 : V(X) > 0$$

$$\forall X \neq X_0 : -\text{grad}V(X) \cdot \dot{X} < 0$$

### Première méthode de Lyapunov (Méthode indirecte)

La méthode indirecte de Lyapunov utilise la linéarisation du système (1.2.1). Dans certains cas, cette méthode peut apporter une réponse au problème de stabilité localement.

Le linéarisé du système (1.2.1) autour d'un point d'équilibre  $X_0 = (x_0, y_0)$  :

$$\dot{X} = J_{\mathcal{X}}(X_0)X = AX$$

### Théoreme 1.8 ([25])

- Si les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative ( $\text{Re}(\lambda_i)(J_{\mathcal{X}}(X_0)) < 0; \forall i = \{1, 2\}$ ) alors  $X_0$  est **exponentiellement stable**.
- Si la matrice jacobienne possède au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive ( $\exists i, \text{Re}(\lambda_i)(J_{\mathcal{X}}(X_0)) > 0; i = \{1, 2\}$ ) alors  $X_0$  est **instable**.

### Remarque 1.6.6 ([25])

Si les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative ( $\text{Re}(\lambda_i)(J_{\mathcal{X}}(X_0)) < 0; \forall i = \{1, 2\}$ ) alors  $X_0$  est **exponentiellement stable** ce qui implique qu'il est **stable**.

## Seconde méthode de Lyapunov (Méthode directe)

Comme on a vu, la première méthode de Lyapunov est simple à appliquer mais elle ne permet d'analyser la stabilité des points d'équilibre que très partiellement. La seconde méthode est très difficile à mettre en œuvre mais, en contrepartie, elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée  $V(x)$  est appelée *fonction de Lyapunov*, qui est décroissante le long des trajectoires du système (1.2.1). Le théorème suivant va résumer cette méthode.

### Théorème 1.9 ([25])

Un point d'équilibre  $X_0$  du système (1.2.1) est stable s'il existe une fonction  $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$  continument différentiable ayant les propriétés suivantes :

1.  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $X_0 \in D$ .
2.  $V(X) > V(X_0), \forall X \neq X_0$  dans  $D$ .
3.  $\dot{V}(X) \leq 0, \forall X \neq X_0$  dans  $D$ .

— Si  $\dot{V}(X) < 0, \forall X \neq X_0$  dans  $D$ , alors  $V$  est une fonction de Lyapunov stricte.

### Remarque 1.6.7 ([25])

- Si un point d'équilibre  $X_0$  admet une fonction de Lyapunov, alors c'est un point d'équilibre **stable**.
- Si un point d'équilibre  $X_0$  admet une fonction de Lyapunov stricte, alors c'est un point d'équilibre **asymptotiquement stable**.
- Autrement, on dit que le point d'équilibre  $X_0$  est **instable**.

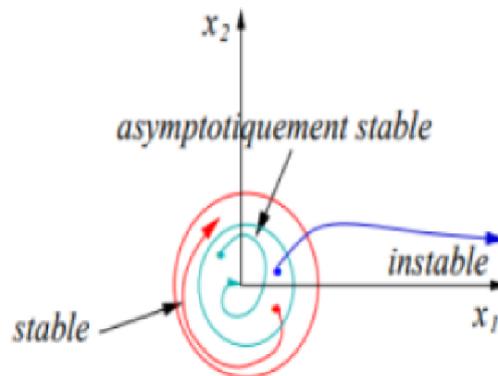


FIGURE 1.8 – Différents types de stabilité au sens de Lyapunov

### Exemple 1.6.5

On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^3, \\ \dot{y} = x^3, \end{cases}$$

Pour déterminer la stabilité du point d'équilibre  $X_0 = (0, 0)$ , posons  $V(x, y) = x^4 + y^4$ .

On a  $V(0, 0) = 0$  et  $V$  est définie positive, et on a :

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = 4x^3(-y^3) + 4y^3(x^3) = 0$$

Donc, on déduit que l'origine est stable.

**Théoreme 1.10 (Critère du fonction de Lyapunov [21])**

Considérons le système (1.2.1), et  $X_0$  est un point d'équilibre.

Si un tel système admet une fonction de Lyapunov il ne peut admettre d'orbite fermée.

**Preuve :**

En effet si  $X$  est une solution correspondant à une orbite fermée,  $\forall t, X(t) \neq X_0$  (sinon le cycle se réduit à un point) et donc

$$\frac{d}{dt}V(X(t)) = \overrightarrow{\text{grad}V(X(t))} \cdot F(X(t)) < 0$$

ce qui signifie que la fonction  $t \rightarrow V(X(t))$  est strictement décroissante le long de l'orbite fermée or ceci est absurde.

(ceci ne prouve pas que  $X(t) \rightarrow X_0$  la preuve étant plus délicate).

**Exemple 1.6.6**

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + 4y, \\ \dot{y} &= -x - y^3, \end{cases}$$

Posons  $V(x, y) = x^2 + 4y^2$ . Alors

$$\begin{cases} V(x, y) > 0, \\ \overrightarrow{\text{grad}V(x, y)} \cdot F(x, y) = -2x^2 - 8y^4 \end{cases} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0) \quad ; \quad \overrightarrow{\text{grad}V(x, y)} \cdot F(x, y) < 0$$

Ainsi  $V$  est une fonction de Lyapunov et le système n'admet donc pas d'orbite fermée (toutes les trajectoires tendent vers 0).

**1.6.5 Stabilité au sens de Poincaré**

La stabilité au sens de Poincaré a une définition plus pointue que celle du Lyapunov, elle fait intervenir la distance d'un point  $M(x, y)$  à une solution périodique

$X(t)$  :

$$d(t) = \inf_{t \in [0, t[} \|M - X(t)\| = 0.$$

**Définition 1.36 ([25])**

Soit  $X(t) = (x(t), y(t))$  une solution du système (1.2.1), une solution périodique  $\phi(t)$  de ce système est **stable au sens du Poincaré** (ou **orbitalement stable**) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|X(t_0) - \phi(t_0)\| < \delta \implies d(t) = \inf_{t \in [0, t[} \|X(t) - \phi(t)\| < \varepsilon \text{ pour } t \in [t_0, +\infty[.$$

$\phi(t)$  est **asymptotiquement stable** si elle est stable et si en plus  $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(t) = 0$ .

**Remarque 1.6.8 ([25])**

La stabilité au sens du Lyapunov **implique** la stabilité au sens du Poincaré mais la réciproque n'est pas vraie.

**Exemple 1.6.7**

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -y\sqrt{(x^2 + y^2)}, \\ \dot{y}(t) &= x\sqrt{(x^2 + y^2)}, \end{cases}$$

qui admet l'unique point critique  $(0, 0)$ . En résolvant ce système en coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{cases}, r \geq 0,$$

on a

$$\begin{aligned} r^2 = x^2 + y^2 &\implies r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) &\implies \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = 0 &\implies r(t) = r_0 \\ \dot{\theta}(t) = r(t) &\implies \theta(t) = r_0 t + \theta_0, \theta(0) = 0 \end{cases} \quad (1.6.6)$$

L'origine  $(0, 0)$  est fermé de cercle centré. Soit  $\phi(t)$  une solution périodique définie par (1.6.6). Pour étudier la stabilité de cette solution, nous considérons un voisinage de  $\phi(0)$  défini par  $\|X - \phi(0)\| \leq \delta$ , un point  $X(0)$  appartenant à ce voisinage et la solution  $X(t)$  correspondante qui est un cercle de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $r_0 + \alpha$ ,  $|\alpha| \leq \delta$ . Donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|X(0) - \phi(0)\| \leq \delta \implies d(t) \leq \epsilon, t \geq 0.$$

ce qui prouve que la solution  $\phi(t)$  est stable au sens de Poincaré.

Cependant la solution  $\phi(t)$  est instable au sens de Lyapunov. Pour le prouver il suffit de montrer que  $\forall \delta > 0$ , il existe au moins une solution  $X(t)$  définie par  $\|X(0) - \phi(0)\| \leq \delta$ .

En effet, pour la solution  $\phi(t)$  on a pour l'instant  $t_1$

$$\|X(t_1) - \phi(t_1)\| = 2r_0 + \alpha$$

Donc la condition de stabilité au sens de Lyapunov ne peut pas être satisfaite : la solution  $\phi(t)$  est instable au sens de Lyapunov.

## 1.7 Auxiliaires géométriques des systèmes autonomes

Considérons la solution  $X(t)$  du système (1.2.1) de valeur initial  $X(0) = X_0$  correspond dans l'espace du phase à une orbite que nous indiquons par  $\Gamma(X_0)$ . Alors si  $X(t_1) = X_1$ , nous avons  $\Gamma(x_1) = \Gamma(x_0)$ .

Parfois nous distinguerons le comportement de la solution pour  $t \geq 0$ , correspondant à l'orbite positive  $\Gamma^+(x_0)$ , et le comportement pour  $t \leq 0$  correspondant à l'orbite négative  $\Gamma^-(x)$ ;  $\Gamma(X_0) = \Gamma^-(X_0) \cup \Gamma^+(X_0)$ .

Dans le cas des solutions périodiques nous avons :  $\Gamma^-(X_0) = \Gamma^+(X_0)$ .

### Définition 1.37 (Ensemble $\omega$ – limite et $\alpha$ – limite [28])

—  $q \in \mathbb{R}^n$  est appelé un point  $\omega$  – limite de  $p \in \mathbb{R}^n$  si et seulement si :

$$\exists \{t_n\}, \text{ telle que } \phi_{t_n}(p) \longrightarrow q, \text{ si } t_n \longrightarrow +\infty. \text{ où } \phi_{t_n}(p) = X(t_n, p)$$

—  $q \in \mathbb{R}^n$  est appelé un point  $\alpha$  – limite de  $p \in \mathbb{R}^n$  si et seulement si :

$$\exists \{t_n\}, \text{ telle que } \phi_{t_n}(p) \longrightarrow q, \text{ si } t_n \longrightarrow -\infty.$$

### Définition 1.38 ([28])

Un point  $q \in \mathbb{R}^2$  est appelé **point limite positif** de l'orbite  $\Gamma(X_0)$  correspondant à la solution  $X(t)$ , s'il existe une suite croissante des nombres  $t_1, t_2, \dots \longrightarrow +\infty$  tels que les points de  $\Gamma(X_0)$  correspondant à  $X(t_1), X(t_2), \dots$  ont point limite  $q$ .

De la même manière on définit un **point limite négatif** en utilisant une suite décroissante des nombres  $t_i$ .

**Définition 1.39** ([28])

- L'ensemble de tous les points limite positifs d'une orbite  $\Gamma$  est appelé le  $\omega$  – **limite** de  $\Gamma$ , noté par  $\omega(\Gamma)$ .
- L'ensemble de tous les points limite négatifs d'une orbite  $\Gamma$  est appelé le  $\alpha$  – **limite** de  $\Gamma$ , noté par  $\alpha(\Gamma)$ .

**Exemple 1.7.1**

Considérons le système linéaire autonome dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \end{cases}$$

L'origine est un centre pour le plan de phase. Toutes les orbites sont fermées. Considérons une orbite  $\Gamma$ . Il est clair que chaque point  $p$  de  $\Gamma$  est à la fois positif et négatif. Choisissez par exemple  $p = (1, 0)$ . L'orbite  $\Gamma$  à la paramétrisation  $(\cos t, -\sin t)$ , choisir pour un point limite positif la suite  $t_n = 2\pi n - \frac{\pi}{n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Donc  $(x_1(t_n), x_2(t_n)) \rightarrow (1, 0)$ .

Nous avons pour chaque orbite :  $\omega(\Gamma) = \alpha(\Gamma) = \Gamma$ .

**Définition 1.40** ([28])

L'ensemble  $S$  est **invariant** si pour tout point  $x \in S$  on a l'orbite  $\Gamma(x) \subset S$ .

- L'ensemble  $S$  est **invariant positif** si pour tout  $x \in S$  :  $\Gamma^+(x) \subset S$ .
- L'ensemble  $S$  est **invariant négatif** si pour tout  $x \in S$  :  $\Gamma^-(x) \subset S$ .

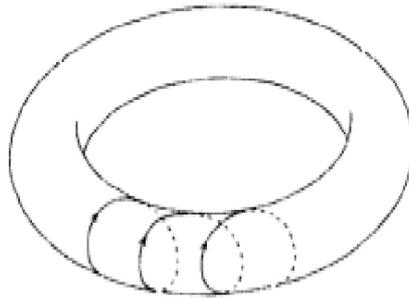


FIGURE 1.9 – Trajectoire de l'ensemble invariant [26]

**Remarque 1.7.1** ([24])

Toute orbite est un ensemble invariant.

**Théoreme 1.11** ([28])

Les ensembles  $\omega(\Gamma)$  et  $\alpha(\Gamma)$  sont fermés et invariants, nous avons que si l'orbite positive  $\Gamma^+$  est bornée, donc l'ensemble  $\omega$  – limite est compact, connexe et non vide.

**Définition 1.41** ([24])

Un ensemble  $M \subset \mathbb{R}^2$  est appelé un **ensemble minimale** du système (1.2.1), si il est le plus petit ensemble fermé, invariant et non vide.

**Théoreme 1.12** ([24])

Supposons que  $A$  est un ensemble non vide, compact, invariant du système (1.2.1) dans  $\mathbb{R}^2$ , alors il existe un ensemble minimale  $M \subset A$ .

**Théoreme 1.13** ([28])

Si  $M$  est un ensemble minimal, borné de  $\mathbb{R}^2$ , alors  $M$  est un point d'équilibre ou une orbite périodique.

## 1.8 Courbes invariantes

### Définition 1.42 ([24])

Soit  $U : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  dans l'ouvert  $\Omega$ .

L'ensemble :

$$C_U = \{(x, y) \in \Omega / U(x, y) = 0\}$$

est dit **courbe invariante**, s'il existe une fonction  $K$  de classe  $\mathcal{C}^1$  dans  $\Omega$ , appelée **cofacteur**, qui satisfait la relation suivante :

$$P(x, y) \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = K(x, y)U(x, y) \quad (1.8.1)$$

pour tout  $(x, y) \in \Omega$ .

### Exemple 1.8.1

La courbe définie par l'équation  $x^2 + y^2 = 1$  est une courbe invariante pour le système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 + y^2 + y - 1, \\ \dot{y} &= x^2 + y^2 - x - 1, \end{cases}$$

$$U(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$\begin{aligned} P(x, y) \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) &= 2x(x^2 + y^2 + y - 1) + 2y(x^2 + y^2 - x - 1) \\ &= (2x + 2y)(x^2 + y^2 - 1). \end{aligned}$$

Le cofacteur est  $K(x, y) = 2x + 2y$ .

### Remarque 1.8.1 ([24])

- Sur la courbe invariante, le gradient  $(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y})$  de  $U$  est orthogonale au champ de vecteurs  $\mathcal{X}(P, Q)$ , donc le champ de vecteurs est tangent à la courbe invariante en tout point de cette courbe, donc cette appellation est inspirée du fait que cette courbe est formée de solutions (où trajectoires) de champ de vecteurs  $\mathcal{X}$ .
- Les points d'équilibres et les solutions du système différentielle (1.2.1) sont invariantes par le flux  $\varphi_t$ . La réciproque est fautive, on peut trouver des courbes invariantes par le flux, qui ne sont pas des solutions du système différentielle (1.2.1).
- Si  $U_1 = 0$  et  $U_2 = 0$  sont deux courbes invariantes pour le système (1.2.1) de cofacteurs respectifs  $K_1$  et  $K_2$ , alors le produit  $U_1 U_2 = 0$  est aussi forme une courbe invariante de système (1.2.1) et son cofacteur est  $K = K_1 + K_2$ .

### Courbe invariante algébrique

#### Définition 1.43 ([24])

Une courbe invariante  $C_U$  est dite **algébrique** de degré  $d$  si  $U(x, y)$  est un polynôme ( $U(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ ) et comme elle est invariante par le flux du système (1.2.1) alors le cofacteur associé  $K(x, y)$  est un polynôme de degré inférieur ou égale à  $d - 1$ .

Dans le cas contraire, on dit que la courbe est non algébrique.

Nous rappelons que la notation *div* est **la divergence** du système (1.2.1), c'est-à-dire

$$\operatorname{div}(x, y) = \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y}$$

**Théoreme 1.14 ([24])**

On considère le système (1.2.1) et  $\Gamma(t)$  une orbite périodique de période  $T > 0$ . On suppose que  $U : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une courbe invariante avec

$$\Gamma(t) = \{(x, y) \in \Omega / U(x, y) = 0\}$$

et  $K(x, y) \in \mathcal{C}^1$  est le cofacteur donné dans l'équation 1.8.1 de la courbe invariante  $U(x, y) = 0$ . On suppose que  $p \in \Omega$  tel que  $U(p) = 0$  et  $\nabla U(p) \neq 0$ , alors  $p$  est un point d'équilibre du système (1.2.1), et

$$\int_0^T \operatorname{div}(\Gamma(t)) dt = \int_0^T K(\Gamma(t)) dt,$$

## 1.9 Intégrales premières

**Définition 1.44 ([8])**

La fonction  $H : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée **intégrale première** du système (1.2.1) si elle est constante sur les courbes solutions (ou les trajectoires)  $X(t) = (x(t), y(t))$  du (1.2.1) continues dans  $\Omega$  i.e. si :

$$H(X(t)) = \text{cste}, \forall t \in I$$

**Définition 1.45 ([8])**

Si le système (1.2.1) admet une intégrale première sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  alors on dit qu'il est **intégrable** sur  $\Omega$ .

**Théoreme 1.15 ([21])**

Une fonction  $H$  est une intégrale première du système (1.2.1) sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  si elle vérifie la condition nécessaire et suffisante suivante :

$$P \frac{\partial H}{\partial x} + Q \frac{\partial H}{\partial y} = 0,$$

**Facteur intégrant****Définition 1.46 ([8])**

La fonction non nulle  $R : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **facteur intégrant** du système (1.2.1) s'elle vérifie une des assertions suivantes :

1.  $\frac{\partial RP}{\partial x} = -\frac{\partial RQ}{\partial y}$ .
2.  $\operatorname{div}(RP, RQ) = 0$ .
3.  $P \frac{\partial R}{\partial x} + Q \frac{\partial R}{\partial y} = -R \operatorname{div}(P, Q)$ .

**Remarque 1.9.1 ([8])**

Si la fonction  $H$  vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = RQ, \\ \frac{\partial H}{\partial y} = -RP, \end{cases}$$

alors c'est une intégrale première donné par :

$$H(x, y) = - \int R(x, y) P(x, y) dy + h(x)$$

ou

$$H(x, y) = \int R(x, y) Q(x, y) dx + h(y)$$

### Facteurs intégrants inverses

#### Définition 1.47 ([8])

La fonction non nulle  $V : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  est dite **facteur intégrant inverse** du système (1.2.1) si elle vérifie :

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V,$$

Le facteur intégrant inverse est une courbe invariante algébrique de cofacteur  $K(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = \text{div}(P, Q)$ .

#### Remarque 1.9.2 ([8])

La fonction  $R = \frac{1}{V}$  définie sur  $\Omega \setminus \{V = 0\}$  est un facteur intégrant du système (1.2.1). De plus, la fonction :

$$H(x, y) = \int (Q(x, y)dx - P(x, y)dy)/V(x, y),$$

est l'intégrale première associée au facteur intégrant inverse  $V$ .

#### Remarque 1.9.3 ([8])

Lorsque le système (1.2.1) possède une intégrale première rationnelle  $H = \frac{h}{g}$ , alors toutes les courbes invariantes sont **algébriques** et définies par :  $C_U = 0$  ou  $C_U = h - cg$  pour une certaine constante  $c \in \mathbb{R}$ .

### Facteurs exponentiels

Un facteur exponentiel joue un rôle similaire à celui des courbes algébriques invariantes dans la recherche d'un intégrale première du système (1.2.1).

#### Définition 1.48 ([8])

Soit  $g$  et  $h$  deux polynômes premiers entre eux. La fonction  $F = e^{h/g}$  est dite **facteur exponentiel** du système (1.2.1) s'il existe un polynôme  $k(x, y)$  de degré inférieur ou égal à  $d - 1$  tel que

$$P \frac{\partial e^{h/g}}{\partial x} + Q \frac{\partial e^{h/g}}{\partial y} = k e^{h/g}.$$

Comme précédemment, On dit que  $k(x, y)$  est le cofacteur de  $e^{h/g}$ .

La proposition suivante donne la relation entre la notation de la courbe invariante et le facteur exponentiel.

#### Proposition 1.9.1 ([8])

Si  $F(x, y) = e^{h/g}$  est un facteur exponentiel et  $g$  est une fonction non constante, alors  $g = 0$  est une courbe algébrique invariante telle que  $h$  satisfait l'équation :

$$P \frac{\partial h}{\partial x} + Q \frac{\partial h}{\partial y} = h k_g + g k_F,$$

où  $k_g$  et  $k_F$  sont respectivement les cofacteurs de  $g$  et  $F$ .

Le problème d'intégrabilité consiste aussi à trouver une classe de fonctions intégrale première (polynomiale,rationnelle,Darboux,élémentaire,Liouville)du système (1.2.1). Pour cela, on introduit les fonctions suivants :

**Définition 1.49 (Fonctions de Darboux [8])**

Soit la fonction

$$f_1^{\lambda_1} \times f_2^{\lambda_2} \times \dots \times f_r^{\lambda_r} (e^{h_1/g_1^{n_1}})^{\mu_1} \times (e^{h_2/g_2^{n_2}})^{\mu_2} \times \dots \times (e^{h_l/g_l^{n_l}})^{\mu_l}$$

où  $r, l \in \mathbb{N}$ ,  $f_i(x, y) = 0$  pour  $(1 \leq i \leq r)$  et  $g_j(x, y) = 0$  pour  $(1 \leq j \leq l)$  des courbes algébriques invariantes du système (1.2.1),  $h_j(x, y)$  ( $1 \leq j \leq l$ ) des polynômes de  $\mathbb{R}[x, y]$ ,  $\lambda_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) et  $\mu_j$  ( $1 \leq j \leq l$ ) des nombres complexes et  $n_j$  ( $1 \leq j \leq l$ ) des nombres entiers non négatifs.

Les fonctions précédentes sont dites **fonctions de Darboux** (généralisées).

**Définition 1.50 (Fonction élémentaire [8])**

Une fonction est **élémentaire** si elle est construite par des fonctions usuelles à l'aide d'un nombre fini des opérations algébriques et de compositions des fonctions.

**Définition 1.51 (Fonction de Liouville [8])**

Une fonction est de **Liouville** si elle est construite par des fonctions usuelles à l'aide d'un nombre fini des opérations algébriques, de compositions et d'intégrations des fonctions.

**Théoreme 1.16 ([2])**

Si le système (1.2.1) a une intégrale première de Liouville, alors il a un facteur intégrant inverse de Darboux.

# Chapitre 2

## Cycles limites

### Introduction

Poincaré introduit la notion de cycle limite en 1882, La représentation de courbes définies au moyen d'une équation différentielle dans le plan de phase ainsi défini par Poincaré, c'est-à-dire ,dans un espace de coordonnées tel que l'ordonnée soit la dérivée par rapport au temps de l'abscisse  $((x, y = \dot{x}) = (\textit{position}, \textit{vitesse}))$  , conduit Poincaré à une classification des points d'équilibre du système. Il démontre alors, qu'il en existe trois types différent qu'il appelle : cols, fonds et sommets ou cols, nœuds et foyers. Puis, il ajoute qu'en dehors de ces points d'équilibre il existe également des courbes qu'il nomme cycles limites et qui correspondent à des solutions périodique pour le système considéré, dont les autres courbes définies par la même équation différentielle se rapprochent asymptotiquement sans jamais les atteindre.

Dans ce chapitre, on s'intéresse plus particulièrement à l'étude des cycles limites. Nous débuterons par l'étude qualitative des cycles limites. Ensuite, nous exposons des principaux résultats sur l'existence et non-existence.

#### Définition 2.1 ([28])

On appelle **cycle limite** toute trajectoire périodique  $\Gamma(t)$  isolée dans l'ensemble des trajectoires périodiques. C'est-à-dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage. Ceci signifie que les trajectoires proches ne sont pas fermées mais se rapprochent ou s'éloignent de  $\Gamma(t)$ .

Un cycle limite **attractif** est une trajectoire fermée (donc une solution périodique) vers laquelle tendent, lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , les trajectoires voisines.

Un cycle limite **répulsif** et une trajectoire fermée de laquelle s'éloigne, lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , les autres trajectoires voisines.

#### Exemple 2.0.1

Soit le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x} &= x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + y - y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

en coordonnées polaires  $x = r\cos\theta$  ,  $y = r\sin\theta$  , le système précédent devient :

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1, \end{cases}$$

ce système a deux états d'équilibre  $r = 0$  et  $r = 1$ .

La solution générale distincte de zéro est donnée par :

$$r^2(t) = \frac{1}{1 + Ae^{-2t}} , \theta = t - t_0$$

Ainsi, en utilisant l'espace des phases  $(x, y)$ , toutes les trajectoires excepté l'équilibre  $r = 0$ , tendent vers le cycle  $r = 1$  (s'enroulent en spirales autour de cercle).

### Remarque 2.0.1

Les cycles limites sont des phénomènes non linéaire. Ils ne peuvent apparaitres dans des systèmes linéaires. ce qui implique que les centres ne sont pas des cycles limites.

### Définition 2.2 (Cycle limite algébrique [28])

Un cycle limite  $\Gamma(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, U(x, y) = 0\}$  est dit **algébrique** si  $U(x, y)$  est un polynôme, autrement le cycle limite est dit non-algébrique ou transcendant.

### Remarque 2.0.2 ([28])

Aucun point sur un cycle limite n'est un point d'équilibre.

### Exemple 2.0.2 (Poincaré au chapitre VII [17])

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(x^2 + y^2 - 1) - y(x^2 + y^2 + 1), \\ \dot{y} &= y(x^2 + y^2 - 1) - x(x^2 + y^2 + 1), \end{cases} \quad (2.0.1)$$

ce système admet un unique cycle limite algébrique d'équation :  $x^2 + y^2 = 1$

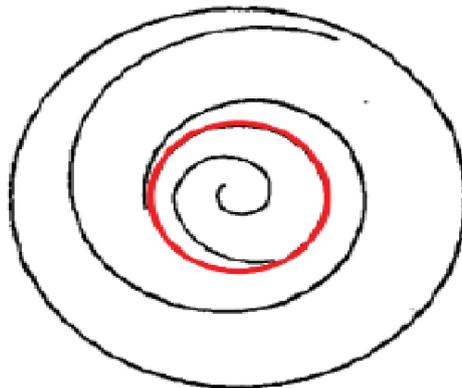


FIGURE 2.1 – Cycle limite du système (2.0.1) [17]

## 2.1 Existence et non-existence de cycle limite

### 2.1.1 Critères de non-existence de cycle limite

#### Critère du potentiel

Supposons que le système (1.2.1) puisse s'écrire sous la forme  $\dot{X} = \overrightarrow{-gradV(X)}$  où  $X \in D \subseteq \mathbb{R}^2$  et  $V$  est une fonction de classe  $C^1$  définie sur  $D$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , on dit alors que  $V$  est un **potentiel** du système (1.2.1).

#### Théoreme 2.1 ([11])

Si le système (1.2.1) admet un potentiel, alors il ne peut admettre d'orbites fermées.

#### Remarque 2.1.1 ([11])

Malgré que le critère du potentiel est une simple technique de vérification de la non existence de cycle limite, elle reste très limitée en application car la plus part des système différentiels polynomiaux n'admettent pas des potentiels.

### Critère de la fonction de Lyapunov

L'idée qui a été développée par Alexandre Lyapunov a été d'introduire des fonctions réelles et d'étudier leurs variations le long des trajectoires du système (1.2.1).

#### Définition 2.3 ([11])

Une fonction de Lyapunov est une fonction de classe  $C^1$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$V(X_0) = 0 \text{ et } \forall X \neq X_0 : V(X) > 0$$

$$\forall X \neq X_0 : \overrightarrow{\text{grad}V(X)} \dot{X} < 0$$

#### Théoreme 2.2 ([11])

Si un système différentiel admet une fonction de Lyapunov il ne peut admettre d'orbite fermée.

#### Exemple 2.1.1

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + 2y, \\ \dot{y} &= -2x - y^3, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Posons  $V(x, y) = x^2 + y^2$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}(V(x))} \dot{X} &= \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dy} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{dV}{dx} \dot{x} + \frac{dV}{dy} \dot{y} \\ &= 2x(-x + 2y) + 2y(-2x - y^3) \\ &= -2(x^2 + y^4) \end{aligned}$$

Remarquons que  $V(0, 0) = 0$  et  $\forall (x, y) \neq (0, 0) : V(x, y) > 0$  et  $\overrightarrow{\text{grad}(V(x))} \dot{X} < 0$  alors  $V$  est une fonction de Lyapunov et le système (2.1.1) n'admet pas d'orbite fermée.

#### Remarque 2.1.2 ([11])

La même remarque sur le critère du potentiel reste vraie pour la fonction de Lyapunov, vu que, uniquement pour des cas spécifiques des systèmes différentiels la détermination de la fonction de Lyapunov est réalisable, mais généralement elle consiste une difficulté majeure.

### Critère de Bendixon [34]

#### Définition 2.4

Un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  est dit connexe s'il est constitué d'un seul morceau.

#### Définition 2.5

Un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  est simplement connexe s'il est connexe et il n'a pas de trous.

#### Théoreme 2.3 (Critère de Bendixon [34])

Soit  $D$  un domaine connexe de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $\text{div}(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy})$  est non nulle et de signe constante sur  $D$ , alors le système différentiel (1.2.1) n'admet pas de solution périodique entièrement contenue dans  $D$ .

#### Exemple 2.1.2 ([34])

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^3 + y, \\ \dot{y} &= y - x, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

$\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} = 3x^2 + 1 > 0$  en tout point de  $\mathbb{R}^2$ , il ne peut donc exister de cycle limite contenu dans  $\mathbb{R}^2$ .

### Critère de Dulac

Dulac introduisait une fonction dans le critère de Bendixon, celle ci permet d'élargir le domaine d'application.

#### **Théoreme 2.4 (Critère de Dulac [11])**

Soit  $D$  un domaine simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$ , et soit  $\psi$  une fonction du classe  $C^1$  sur  $D$ . Si la quantité  $(\frac{d(\psi P)}{dx} + \frac{d(\psi Q)}{dy})$  est non nulle et de signe constant sur  $D$ , alors le système différentiel (1.2.1) n'admet pas de solution périodique entièrement continue dans  $D$ , alors il n'admet pas de cycle limite dans  $D$ .

#### **Exemple 2.1.3**

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(3 - x - 3y), \\ \dot{y} &= y(2 - y - 3x), \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Soit le domaine  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 0\}$ .

Nous avons  $\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} = 5 - 5y - 5x$ , la quantité  $\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy}$  s'annule et change de signe dans  $D$ , et le critère de Bendixon ne permet pas de conclure la non existence d'orbite fermée dans  $D$ .

Soit la fonction  $\psi(x, y) = \frac{1}{xy}$  alors  $\frac{d(\psi P)}{dx} + \frac{d(\psi Q)}{dy} = -\frac{1}{y} - \frac{1}{x}$

Donc, pour tout  $(x, y) \in D$  la quantité  $\frac{d(\psi P)}{dx} + \frac{d(\psi Q)}{dy}$  est négative et on peut conclure que le système n'admet pas de cycle limite dans le domaine  $D$ .

### 2.1.2 Critères d'existence de cycle limite

A partir des critères de Bendixon et de Dulac, on peut déjà conclure une condition nécessaire d'existence de solution périodique du système (1.2.1) dans un domaine  $D$ , c'est lorsque la quantité  $\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy}$  s'annule et change de signe dans  $D$ , mais cette condition n'est pas suffisante.

#### Critère de Poincaré-Bendixon dans le plan

##### **Définition 2.6 ([11])**

Un domaine compact de  $\mathbb{R}^2$  est un domaine fermé et borné. Fermé signifie que la frontière est incluse. Borné signifie qu'il est limité par des bornes finies.

##### **Théoreme 2.5 (Poincaré-Bendixon [11])**

Supposons que :

1.  $D$  est une partie compacte du plan,
2. Le système (1.2.1) est définie sur un ouvert du plan contenant  $D$ ,
3. Il y a une trajectoire  $C$  qui reste confinée dans  $D$  (elle commence dans  $D$  et y reste),
4.  $C$  ne contient aucun équilibre du système (1.2.1).

Alors, ou bien  $C$  est une orbite fermée, ou bien elle spirale autour d'une orbite fermée. Dans tout les cas  $D$  contient une orbite fermée.

Le théorème implique que dans une partie compacte d'un plan de phase (dans  $\mathbb{R}^2$ ), les possibilités dynamiques sont relativement limitées et il ne peut y avoir de chaos puisque si une trajectoire qui reste confinée dans un domaine fermé et borné ne contenant pas d'équilibre, elle doit forcément tendre vers une orbite fermée.

Le théorème indique que si une solution maximale reste bornée, alors soit elle converge vers une limite (un point d'équilibre), soit son comportement asymptotique est celui d'une fonction périodique. Autrement dit, le plan est trop étroit pour admettre comme solutions périodiques ordinaires mais des trajectoires chaotiques.

**Exemple 2.1.4 ([32])**

On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x, \end{cases} \quad (2.1.4)$$

qui peut être réduit à l'équation de Van Der Pol

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

Historiquement, cette équation est apparue dans l'étude d'un circuit électrique utilisé pour les premiers radios. C'est l'équation d'un oscillateur harmonique mais avec un terme d'amortissement non linéaire  $\mu(x^2 - 1)\dot{x}$ , lorsque  $|x| > 1$  ce terme diminue les oscillations et lorsque  $|x| < 1$  il les augmente. Intuitivement, on peut alors penser que le système se stabilise à une oscillation autoentretenu où l'énergie dissipée pendant un cycle est composée par celle fournie par le terme non linéaire. Il est démontré que le système (2.1.4) possède un cycle limite stable pour chaque  $\mu > 0$ . La figure représente le cycle limite du (2.1.4) pour  $\mu = 1$ .

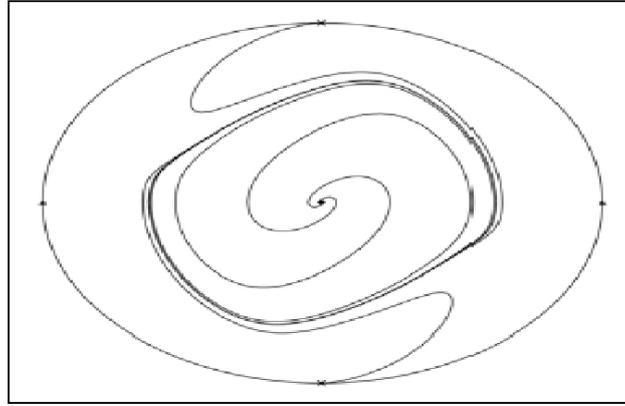


FIGURE 2.2 – Cycle limite du système (2.1.4) avec  $\mu = 1$  [32]

**Critères de Giacomini,Libre et Viano [11]**

Giacomini,Libre et Viano ont présenté une méthode pour étudier l'existence et la non-existence de cycles limites du système (1.2.1), en se basant sur les deux critères suivants :

**1. Critère 1 : [11]**

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)), \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (2.1.5)$$

où  $P$  et  $Q$  des polynômes définies sur un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  et de classe  $C^1(\Omega)$ , Soit  $(x(t), y(t))$  une solution périodique de (2.1.5) de période  $T$ . Supposons que  $U = U(x, y)$  (de classe  $C^1$ ) est une solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$P(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = K(x, y)U(x, y) \quad (x, y) \in \Omega \quad (2.1.6)$$

où le cofacteur  $K : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$  vérifiant :

$$\int_0^T K(x(t), y(t)) dt \neq 0.$$

Alors la trajectoire fermée :

$$\gamma(t) = \{(x(t), y(t)) \in \Omega : t \in [0, T]\}$$

est contenue dans  $\Gamma(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, U(x, y) = 0\}$  et  $\gamma$  n'est pas contenue dans un anneau circulaire, de plus si  $P$  et  $Q$  sont analytiques alors  $\gamma$  est un cycle limite.

**Remarque 2.1.3 ([11])**

Ce critère montre que lorsque nous connaissons explicitement la solution  $U(x, y)$  de l'équation 2.1.6, on a plus d'informations sur les solutions périodiques du système, parce que si  $\gamma$  est une trajectoire fermée, elle doit satisfaire :

$$\gamma \text{ est contenue dans } \Gamma(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, U(x, y) = 0\} \text{ ou } \int_{\gamma} K(x(t), y(t)) dt = 0$$

**2. Critère 2 : [11]**

Considérons le système (2.1.5) et supposons que :

- (a)  $P, Q$  de classe  $C^1(\Omega)$ .
- (b)  $U = U(x, y)$  de classe  $C^1(\Omega)$  une solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$P(x, y) \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = K(x, y)U(x, y)$$

Si  $\gamma$  est un cycle limite, alors  $\gamma$  est contenue dans

$$\Gamma(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, U(x, y) = 0\}.$$

**Théorème 2.6 ([20])**

Soient deux courbes fermées  $C$  et  $C'$  dans  $\mathbb{R}^2$ , l'une entourant l'autre. Si en chaque point de  $C$ , le vecteur vitesse  $\overrightarrow{(P, Q)}$  de la trajectoire qui y passe est dirigé vers l'extérieur, et si en chaque point de  $C'$  il est dirigé vers l'intérieur, alors il existe au moins un cycle limite compris entre  $C$  et  $C'$ .

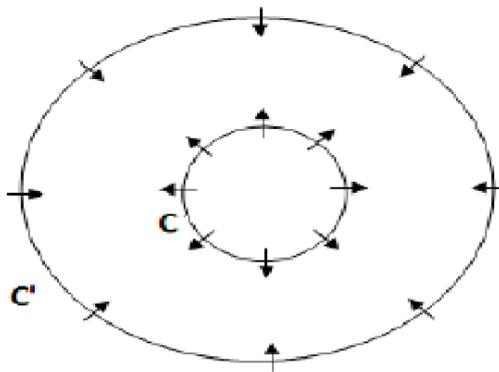


FIGURE 2.3 – Existence d'un cycle limite

## 2.2 Stabilité des cycles limites

### 2.2.1 Types des cycles limites [7]

1. Le cycle limite  $\Gamma$  est **stable** (ou attractif) si les trajectoires intérieures et extérieures tendent en spirale vers l'orbite fermée  $\gamma$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .
2. Le cycle limite  $\Gamma$  est **instable** (ou répulsif) si les trajectoires intérieures et extérieures tendent en spirale vers l'orbite fermée  $\gamma$  quand  $t \rightarrow -\infty$ .
3. Le cycle limite  $\Gamma$  est **semi-stable** si les trajectoires spirales intérieures tendent vers l'orbite fermée  $\gamma$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , les autres (extérieures) tendent vers  $\gamma$  quand  $t \rightarrow -\infty$  et vice-versa.

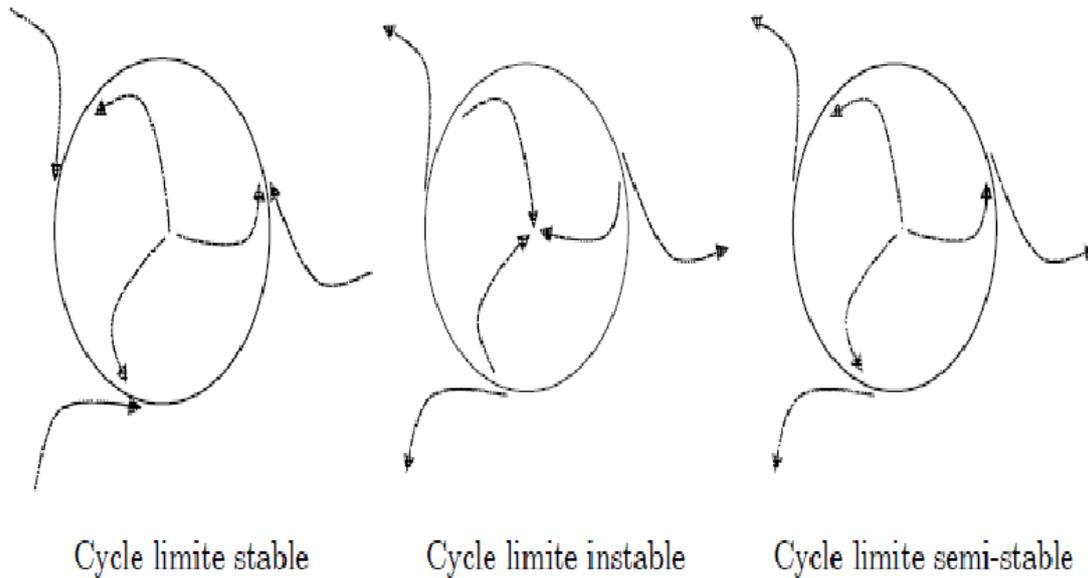


FIGURE 2.4 – Classification des cycles limites

### 2.2.2 Fonction du premier retour de Poincaré [[28]]

Pour étudier la stabilité des orbites périodiques, l'outil le plus fondamentale est **la fonction du premier retour de Poincaré**, définie par Henri Poincaré en 1881, voir [28]. L'idée est la suivante :

Si  $\Gamma$  est une orbite périodique du système (1.2.1) passant par le point  $X_0 = (x_0, y_0)$  et  $\Sigma$  une droite perpendiculaire à  $\Gamma$  en  $X_0$ , alors pour tout point  $X = (x, y) \in \Sigma$  suffisamment proche de  $X_0$ , la solution de (1.2.1) passant par  $X$  en  $t = 0$ , va retraverser la droite  $\Sigma$  au point  $\Pi(X)$  proche de  $X_0$ , la fonction  $X \rightarrow \Pi(X)$  s'appelle la fonction de Poincaré.

Le théorème suivant établit l'existence et la continuité de la fonction de Poincaré  $\Pi(X)$ .

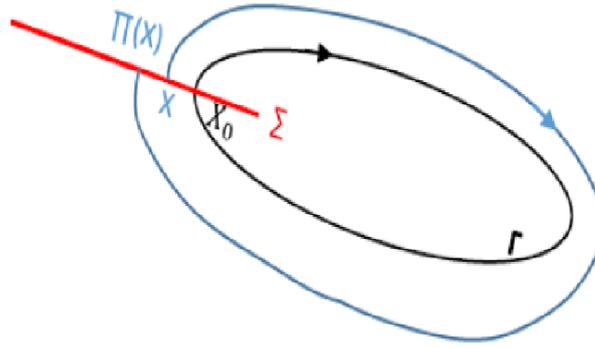
#### **Théorème 2.7 ([28])**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et soit le champ de vecteurs du système (1.2.1). Supposons que  $\phi_t(X_0)$  est une solution périodique de (1.2.1) de période  $T$  et soit

$$\Gamma = \{X \in \mathbb{R}^2 / X = \phi_t(X_0), 0 \leq t \leq T\}$$

une orbite périodique de (1.2.1) de période  $T$ . Soit  $\Sigma$  la droite orthogonale à  $\Gamma$  en  $X_0$ , c'est à dire :

$$\Sigma = \{X \in \mathbb{R}^2 / (X - X_0) \cdot (P(X_0) - Q(X_0)) = 0\}$$

FIGURE 2.5 – Fonction du premier retour de Poincaré  $\Pi(X) = \phi_{\tau(X)}(X)$  [28]

Alors il existe un voisinage ouvert  $V_{X_0}$  de  $X_0$  et une unique fonction  $\tau : V_{X_0} \rightarrow \mathbb{R}$  définie et continûment différentiable, tel que  $\tau(X_0) = T$  et

$$\phi_{\tau(X)}(X) \in \Sigma \text{ pour tout } X \in V_{X_0}$$

### Définition 2.7 ([28])

La fonction continûment différentiable

$$\begin{aligned} \Pi : V_{X_0} \cap \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ X &\longmapsto \Pi(X) = \phi_{\tau(X)}(X) \end{aligned}$$

est appelée l'application de premier retour de Poincaré, associée à l'orbite périodique  $\Gamma$ .

### Définition 2.8 ([28])

La fonction continûment différentiable

$$\begin{aligned} \tau : V_{X_0} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto \tau(X) \end{aligned}$$

est appelée la fonction temps de premier retour de Poincaré.

### Définition 2.9 ([28])

Un point fixe de l'application  $\Pi$  est un point  $X$  tel que  $\Pi(X) = X$ . Il correspond à une orbite périodique du système (1.2.1).

### Stabilité du fonction du premier retour de Poincaré [[28]]

Par la translation de vecteur  $X_0 \in \Gamma \cap \Sigma$ , la droite  $\Sigma$  sera transformée en une ligne passant par le point origine 0. De même les points  $X$  et  $\Pi(X)$  seront transformés en  $s$  et  $\Pi(s)$  respectivement (voir les deux figures ci-dessous). Selon le théorème précédent, l'application de Poincaré  $\Pi(s)$  existe et est définie au voisinage de 0. (i.e.  $\exists \delta > 0 : \Pi(s)$  est définie pour toute  $|s| < \delta$ ) et on a  $\Pi(0) = 0$ .

Dans le but de donner le lien entre la stabilité de l'orbite périodique  $\Gamma$  et la dérivée de l'application de Poincaré le long de la droite  $\Sigma$  au point zéro. On introduit la fonction du déplacement :

$$d(s) = \Pi(s) - s$$

Il est clair que :  $d(0) = 0$  et  $d'(s) = \Pi'(s) - 1$ , il en résulte du théorème des accroissements finis que pour  $|s| < \delta$

$$d(s) = d'(\sigma)s$$

pour certains  $\sigma$  entre 0 et  $s$ .

Supposons que  $d'(0) \neq 0$ , comme  $d$  est continu, alors le signe de  $d'(s)$  sera le même que celui de  $d'(0)$  pour  $|s|$  suffisamment petit. Deux cas en découlent :  $d'(0) < 0$  et  $d'(0) > 0$ .

1. Si  $d'(0) < 0$ , il s'ensuit que  $d(s) < 0$  pour  $s > 0$  et que  $d(s) > 0$  pour  $s < 0$  ce qui entraîne que le cycle  $\Gamma$  est un cycle limite **stable** (voir la figure (a) ci-dessus).
2. Si  $d'(0) > 0$ , il s'ensuit que  $d(s) > 0$  pour  $s > 0$  et que  $d(s) < 0$  pour  $s < 0$  ce qui entraîne que le cycle  $\Gamma$  est **instable** (voir la figure (b) ci-dessus).

par conséquent :

Si  $\Pi(0) = 0$  et  $\Pi'(0) < 1$ , le cycle  $\Gamma$  est un cycle limite **stable** et si  $\Pi(0) = 0$  et  $\Pi'(0) > 1$ , le cycle  $\Gamma$  est instable.

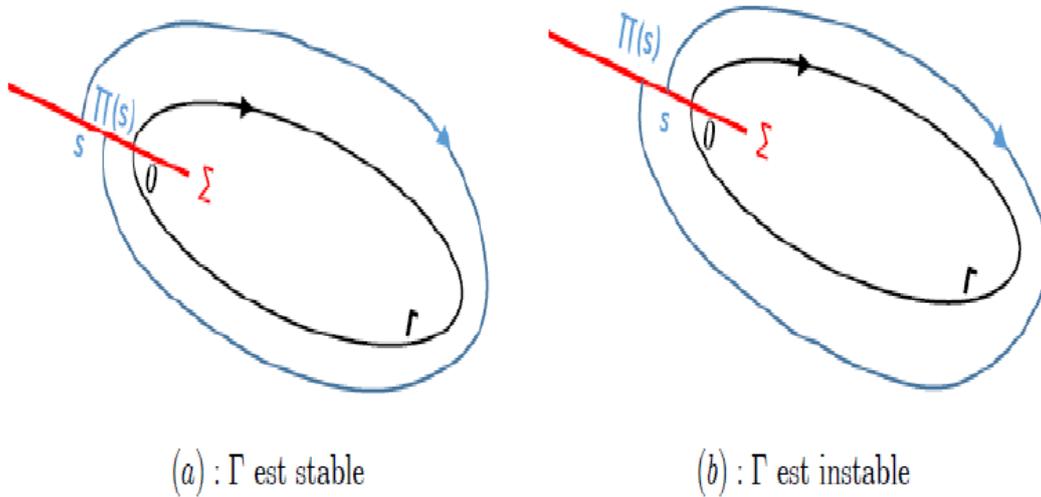


FIGURE 2.6 – Stabilité du fonction du premier retour de Poincaré [28]

**Théoreme 2.8 ([28])**

Soit  $\gamma(t)$  une solution périodique du système (1.2.1) de période  $T$ , alors la dérivée de la fonction de Poincaré  $\Pi(s)$  le long d'une ligne droite  $\Sigma$  qui est normale à  $\Gamma = \{X \in \mathbb{R}^2 / X = \gamma(t) - \gamma(0), 0 \leq t \leq T\}$  en  $X = (0, 0)$  est donnée par :

$$\Pi'(0) = e^{\int_0^T \text{div}(P(\gamma(t)), Q(\gamma(t))) dt}$$

Le corollaire suivant caractérise la stabilité d'un cycle limite

**Corollaire 2.2.1 ([28])**

Soit  $\gamma(t)$  une solution périodique de (1.2.1) de période  $T$ . Alors ,  $\gamma$  est un cycle limite **stable** si

$$\int_0^T \text{div}(\gamma(t)) dt < 0$$

,  $\gamma$  est un cycle limite **instable** si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt > 0$$

.  $\gamma$  peut être un cycle limite stable, instable ou semi-stable ou peut appartenir à une bande continue des cycles si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt = 0$$

### 2.2.3 Cycle limite hyperbolique

#### Définition 2.10 ([28])

Lorsque la quantité  $\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt$  est différente de zéro, on dit que le cycle limite est **hyperbolique**.

#### Exemple 2.2.1

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2 - 1), \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Notons que le seul point d'équilibre du système (2.2.1) est  $(0, 0)$ , et notons aussi que

$$\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} = 4x^2 + 4y^2 - 2$$

, est une expression qui s'annule et qui change de signe dans  $\mathbb{R}^2$ .

$\gamma(t) = (\cos(t), -\sin(t))$  est une solution périodique du système (2.2.1) de période  $T = 2\pi$ .

Calculons maintenant  $\int_0^{2\pi} \operatorname{div}(\gamma(t)) dt$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \operatorname{div}(\gamma(t)) dt &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} \right) (\cos(t), -\sin(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (4(\cos(t))^2 + 4(-\sin(t))^2 - 2) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2 dt \\ &= 4\pi > 0 \end{aligned}$$

Donc le système (2.2.1) a un cycle limite hyperbolique instable :

$$\gamma(t) = (\cos(t), -\sin(t))$$

#### Exemple 2.2.2

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - 2x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + 2y - 2y(x^2 + y^2), \end{cases} \quad (2.2.2)$$

pour résoudre ce système on pose :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta), \\ y = r \sin(\theta), \end{cases} \quad (2.2.3)$$

la formulation du système permet de passer des coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  au coordonnées polaires  $(r, \theta)$

$$\begin{cases} \dot{r}\cos(\theta) - r\dot{\theta}\sin(\theta) &= 2r\cos(\theta) - r\sin(\theta) - 2r^3\cos(\theta), \\ \dot{r}\sin(\theta) + r\dot{\theta}\cos(\theta) &= r\cos(\theta) + 2r\sin(\theta) - 2r^3\sin(\theta), \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Cela veut dire que :

$$\cos(\theta)\dot{x} + \sin(\theta)\dot{y} = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = \dot{r} = 2r\cos^2(\theta) + 2r\sin^2(\theta) - 2r^3\cos^2(\theta) - 2r^3\sin^2(\theta) = 2r - 2r^3.$$

et

$$\begin{aligned} r\dot{\theta}\sin^2(\theta) + r\dot{\theta}\cos^2(\theta) &= r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned}$$

on obtient le système :

$$\begin{cases} \dot{r} &= 2(r - r^3), \\ \dot{\theta} &= 1, \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Considérons maintenant  $\theta$  comme une variable indépendante, on obtient :

$$\frac{dr}{d\theta} = 2(r - r^3)$$

donc

$$r' = 2r - 2r^3 \quad (2.2.6)$$

c'est une équation de Bernoulli on divise l'équation 2.2.6 par  $2r^3$  on obtient :

$$\frac{r'}{2r^3} - \frac{1}{r^2} = -1 \quad (2.2.7)$$

on pose  $z = \frac{1}{r^2}$ .

On dérive, on obtient :

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{-2r'}{r^3}$$

En remplaçant dans 2.2.7, on aura

$$\frac{-1}{4} \frac{dz}{d\theta} - z(\theta) = -1$$

alors

$$-z' - 4z = -4 \quad (2.2.8)$$

C'est une équation différentielle linéaire en  $z$  et  $z'$  non homogène pour résoudre cette équation, on cherche la solution homogène pour résoudre cette équation.

On considère l'équation homogène associée

$$\frac{-dz}{d\theta} - 4z = 0$$

On se ramène à une équation à variables séparées

$$\frac{-dz}{z} = 4d\theta$$

En intégrant, on trouve

$$z(\theta) = c_1(\theta)e^{-4\theta}$$

En dérivant, on trouve

$$\frac{dz}{d\theta} = c_1'(\theta)e^{-4\theta} - 4c_1(\theta)e^{-4\theta}$$

On substitue  $z$  et  $z'$  dans 2.2.8, on aura

$$\begin{aligned} -4 &= -c_1'(\theta)e^{-4\theta} + 4c_1(\theta)e^{-4\theta} - 4c_1(\theta)e^{-4\theta} \\ &= -c_1'(\theta)e^{-4\theta}. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$c_1'(\theta) = 4e^{4\theta}$$

donc

$$c_1(\theta) = e^{4\theta} + c$$

On revient à la solution, on trouve

$$z(\theta) = 1 + c(\theta)e^{-4\theta}$$

On a, d'après ce qui précède

$$z = \frac{1}{r^2}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{1}{z} \\ &= \frac{1}{1 + ce^{-4\theta}} \end{aligned}$$

pour  $c = 0$ , on a l'orbite périodique  $r^2 = 1$ . dans le plan de phase c'est le cercle d'équation  $x^2 + y^2 = 1$  pour montre l'orbite périodique est isolé on va démontre que  $\int_0^{2\pi} \text{div}(\gamma(t))dt \neq 0$  on :

$$U(x, y) = x^2 + y^2 - 1, K(x, y) = -2(x^2 + y^2)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \text{div}(\gamma(t))dt &= \int_0^{2\pi} \text{div}(\cos(t), \sin(t))dt \\ &= \int_0^{2\pi} K(\cos(t), \sin(t))dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2(\cos^2(t) + \sin^2(t))dt \\ &= -4\pi < 0 \end{aligned}$$

Donc le système (2.2.2) a un cycle limite hyperbolique  $\gamma(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$  qui est stable (voir la figure 2.7)

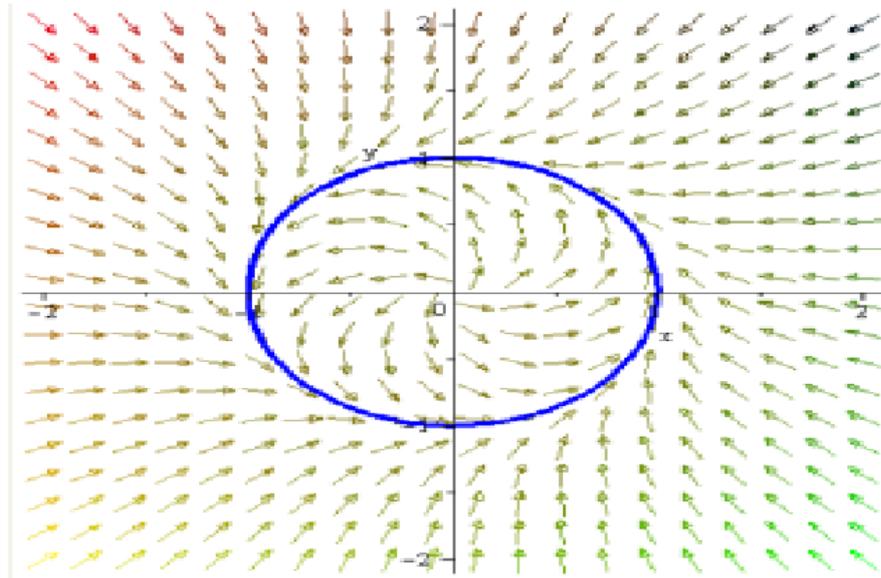


FIGURE 2.7 – Cycle limite du système (2.2.2)

# Chapitre 3

## Systemes différentiels planaires avec des cycles limites algébriques hyperboliques

### 3.1 Introduction

Soit  $U : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  dans l'ouvert  $\Omega$ .

L'ensemble :

$$C_U = \{(x, y) \in \Omega / U(x, y) = 0\}$$

est dit **courbe invariante** du système polynomiale planaire (1.2.1), s'il existe un fonction  $K$  de classe  $\mathcal{C}^1$  dans  $\Omega$ , appelée **cofacteur**, qui satisfait la relation suivante :

$$P(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = K(x, y)U(x, y) \quad (3.1.1)$$

pour tout  $(x, y) \in \Omega$ .

Une courbe invariante  $C_U$  est dite **algébrique** de degré  $d$  si  $U(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$  et comme elle est invariante par le flux de système (1.2.1) alors le cofacteur associé  $K(x, y)$  est un polynôme de degré inférieur ou égale à  $d - 1$ . On dit aussi que cette courbe qui peut être notée par  $U(x, y) = 0$  est formée par de trajectoires du système (1.2.1).

#### Définition 3.1 (Courbe non-singulier)

La courbe  $C_U = \{(x, y) \in \Omega / U(x, y) = 0\}$  est dite **courbe non-singulier** du système (1.2.1) si les points d'équilibre associées au ce système ne sont pas incluses dans  $C_U$  ( $X_0 \notin C_U$  pour tout point d'équilibre  $X_0$ ).

On utilisons la méthode des caractéristiques pour résoudre l'équation différentielle aux dérivées partielles :

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

on conclure que sa solution est donnée par :

$$f(x, y) = \phi(\beta x - \alpha y),$$

où  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$  et  $\phi$  est une fonction arbitraire.

La solution du l'équation

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} = \gamma$$

est la fonction  $f$  qui résoudre l'équation

$$\Psi(\beta x - \alpha y, \gamma x - \alpha f) = 0$$

où  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$  et  $\Psi$  est une fonction arbitraire.

Dans le cas d'un polynôme on a :

$$f(x, y) = \frac{\gamma}{\alpha}x + \sum_{k=0}^n c_k(\beta x - \alpha y)^k$$

ou

$$f(x, y) = \frac{\gamma}{\beta}y + \sum_{k=0}^n c_k(\beta x - \alpha y)^k$$

La solution de l'équation

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

est la fonction  $f$  qui résout l'équation

$$\Psi\left(\frac{x}{f}, \frac{y}{f}\right) = 0$$

Dans le cas d'un polynôme, cette solution peut être prise comme :

$$f(x, y) = ax + by.$$

### **Théoreme 3.1 (Colin Christopher [4])**

Soit  $U(x, y) = 0$  une courbe invariante algébrique non-singulier de degré  $m$ , et  $D$  un polynôme de degré 1, choisis de telle sorte que la ligne de l'équation  $D = 0$  se trouve en dehors de toutes les composantes bornées de  $U(x, y) = 0$ . Choisir les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  pour que  $\alpha D_x + \beta D_y \neq 0$ , alors le système différentiel planaire de degré  $m$  :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha U + D U_y, \\ \dot{y} &= \beta U + D U_x, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

admet tout les composants bornés de  $U(x, y) = 0$  comme des **cycles limites hyperboliques**. De plus, ce système n'a pas d'autres cycles limites .

### **Preuve**

Il est claire que  $U(x, y) = 0$  est invariante pour le système (3.1.2), de plus, chaque point d'équilibre dans  $U(x, y) = 0$  est donné lorsque  $D = 0$  ou  $U_x = U_y = 0$ . Notre choix du  $D$  ne vérifie aucun de ces cas quand  $U(x, y) = 0$  est non-singulier. Ainsi, chaque composante bornée de  $U(x, y) = 0$  doit être une solution périodique du système (3.1.2). En effet, il reste de montrer qu'ils sont en fait des cycles limites hyperboliques.

Rappelons que, la stabilité d'un cycle limite  $\gamma$  dépend du signe de l'intégral  $\int_0^T \text{div}(\gamma(t)) dt$  (voir 2.2.1). Considérons  $\gamma$  une composante borné de  $U(x, y) = 0$ . De notre choix du  $D$ , on sait que  $\gamma$  ne traverse pas la ligne  $D = 0$ . On conclue donc

$$\begin{aligned} \int_0^T \text{div}(\gamma(t)) dt &= \oint_{\gamma} (U_x(\alpha + D_y) + U_y(\beta - D_x)) dt \\ &= \oint_{\gamma} \left(\frac{1}{D}\right)(\alpha + D_y) dy - \left(\frac{1}{D}\right)(\beta - D_x) dx \\ &= \pm \iint_{\text{int}(\gamma)} -\left(\frac{1}{D^2}\right)(\alpha D_x + \beta D_y) dx dy \neq 0. \end{aligned}$$

Le choix du signe dépend du sens de parcours de la courbe au bords.

Soit  $k$  la constante  $\alpha D_x + \beta D_y \neq 0$ . Si  $D \nabla U$  pointe vers l'extérieur du  $\gamma$  alors  $\gamma$  est parcourue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et l'intégrale a la même signe que  $-k$ . Si  $D \nabla U$  pointe vers l'intérieur alors l'intégrale a la même signe que  $k$ .

Ainsi, chaque composante bornée de  $U(x, y) = 0$  est un cycle limite hyperbolique. Nous supposons qu'il existe un cycle limite  $\delta$  qui ne situe pas dans  $U(x, y) = 0$ . Sur  $D = 0$  on a  $\dot{D} = U(\alpha D_x + \beta D_y)$ . Ainsi, aucun cycle limite ne peut traverser la ligne  $D = 0$ . Par conséquent  $\delta$  doit se trouve dans une composante connexe  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2 / \{UD = 0\}$ , de sorte que  $U$  et  $D$  doivent être de signe constant dans  $\Omega$ .

L'intersection de  $\Omega$  avec l'intérieur de  $\delta$  est une région  $\Omega'$  dont sa frontière extérieur est  $\delta$  et sa frontière intérieur est soit vide, soit l'union d'un certain nombre d'ovales de  $U(x, y) = 0$ .

Notons  $\varepsilon$  le signe de  $-kUD$  dans  $\Omega$ . D'après la discussion ci-dessus, la stabilité des ces ovales comme cycles limites du système (3.1.2) est donné par le signe de  $\varepsilon$ , stable si  $\varepsilon < 0$  et instable si  $\varepsilon > 0$ .

Autour de chacun des ces ovales su la frontière intérieur de  $\Omega'$  nous choisissons un courbe positivement orienté  $\gamma_i$  pour laquelle le flux est toujours vers l'extérieur pour  $\varepsilon > 0$ . Soit une nouvelle région  $\Omega''$  qui est constitué des points de  $\Omega'$  qui sont extérieurs au  $\gamma_i$ . La fonction  $UD$  est bien définie sur  $\Omega''$  et donc le champ de vecteurs obtenu par diviser (3.1.2) par  $UD$  et aussi bien définie. Il n'y a pas de flux dans  $\Omega''$  à travers  $\delta$ , et la direction du flux à travers  $\gamma_i$  est dans  $\Omega''$  pour  $k < 0$  et hors de  $\Omega''$  pour  $k > 0$ .

Or, la divergence de champ de vecteurs dans  $\Omega''$  est

$$\nabla \cdot \left( \frac{\dot{x}, \dot{y}}{UD} \right) = - \frac{(\alpha D_x + \beta D_y)}{D^2}$$

qui est de signe opposé de  $k$  d'où nous avons une contradiction.

### Remarque 3.1.1

1. Le théorème précédent est légèrement plus faible que le théorème de Winkel ([30]), en ce que les cycles limites sont hyperbolique mais peuvent être stable ou instable. Depuis nids des cycles limites généralement alterner dans la stabilité, cela semble une condition plus naturelle. Pour exiger tout le cycles limites pour être stables (ou tous instables) nécessiteraient probablement un champ de vecteurs d'ordre supérieur. L'autre différence est qu'il peut y avoir de points d'équilibres sur certains des composantes non bornées de  $U(x, y) = 0$ . On peut y rémédier si l'on considère le système de degré  $m + 1$

$$\begin{cases} \dot{x} = xU - U_y, \\ \dot{y} = U_x. \end{cases} \quad (3.1.3)$$

la preuve que cela satisfait le théorème ci-dessus est laissée au lecture car il est très similaire (en utilisant  $\frac{1}{U}$  comme fonction de mise à l'échelle dans ce cas). Le système (3.1.3) a aussi l'avantage sur (3.1.2) qu'aucun choix du fonction  $D$  n'est nécessaire.

2. Le degré  $m$  est optimal pour une classe générique de courbes algébrique puisqu'il est connu que tout champ de vecteurs de degré  $n$  qui a une courbe invariante non-singulière qui coupe transversalement la ligne à l'infini doit être de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = AC - DC_y, \\ \dot{y} = BC + DC_x. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

où  $A$  et  $B$  sont des polynômes de degré  $n - m$  et  $D$  un polynôme de degré  $n - m - 1$  (Voir [6] pour résultats similaires de ce type). Par conséquent, tout système de degré  $m - 1$  qui a une telle courbe invariante algébrique doit nécessairement être Hamiltonienne.

## 3.2 Théorème de S.Benyoucef

Nous commençons par ajouter une fonction polynomiale de degré quelconque au système (3.1.2) qui devient

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha U + (ax + by + \phi(\beta x - \alpha y))U_y, \\ \dot{y} &= \beta U - (ax + by + \phi(\beta x - \alpha y))U_x. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

et nous montrons que le système (3.2.1) a toutes les composantes bornées de  $U(x, y) = 0$  en tant que cycles limites hyperboliques si les conditions du théorème 3.1 sont satisfaites .

### Théorème 3.2 (S.Benyoucef [31])

Soit  $U(x, y) = 0$  une courbe algébrique non-singulière de degré  $m$ , et  $\phi$  une fonction polynomiale de degré  $n$ , choisis de telle sorte que la courbe  $ax + by + \phi(\beta x - \alpha y) = 0$  se trouve en dehors de toutes les composantes bornées de  $U(x, y) = 0$  . Choisir les constantes  $a$  et  $b$  de telle sorte que  $a\alpha + b\beta \neq 0$  , alors le champ de vecteurs polynomiale de degré  $n + m - 1$  :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha U + (ax + by + \phi(\beta x - \alpha y))U_y, \\ \dot{y} &= \beta U - (ax + by + \phi(\beta x - \alpha y))U_x. \end{cases}$$

a toutes les composantes bornées de  $U(x, y) = 0$  comme cycles limites hyperboliques.

## 3.3 Preuve du théorème de S.Benyoucef

### Preuve

Soit  $\Gamma$  la courbe de  $U(x, y) = 0$ .

Notons que  $\Gamma$  est une courbe non-singulière du système (3.2.1) et que la courbe  $ax + by + \phi(\beta x - \alpha y) = 0$  se trouve en dehors de toute les composantes bornée de  $\Gamma$ .

Pour montrer que toutes les composantes bornées de  $\Gamma$  sont des cycles limites hyperboliques du système 3.2.1, nous allons prouver que  $\Gamma$  est une courbe invariante de système (3.2.1) et que  $\int_0^T \text{div}(\Gamma(t))dt \neq 0$  ( voir [28]).

1.  $\Gamma$  est une courbe invariante du système (3.2.1) :

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= U_x(\alpha U + (ax + by + \phi(\beta x - \alpha y))U_y) + U_y(\beta U - (ax + by + \phi(\beta x - \alpha y))U_x) \\ &= (\alpha U_x + \beta U_y)U. \end{aligned}$$

où le cofacteur est  $k(x, y) = \alpha U_x + \beta U_y$ .

2.  $\int_0^T \text{div}(\Gamma(t))dt$  est non nul :

Pour le voir, on note d'abord que

$$\int_0^T \text{div}(\Gamma(t))dt = \int_0^T k(x(t), y(t))dt$$

On a alors (en utilisant l'intégrale curviligne sur une courbe fermée 1.1.2) :

$$\begin{aligned} \int_0^T k(x(t), y(t))dt &= \oint_{\Gamma} \frac{\alpha U_x}{-(ax + by + \phi(\beta x - \alpha y))U_x} dy + \oint_{\Gamma} \frac{\beta U_y}{(ax + by + \phi(\beta x - \alpha y))U_y} dx \\ &= \oint_{\Gamma} \frac{\alpha}{-(ax + by + \phi(\beta x - \alpha y))} dy + \oint_{\Gamma} \frac{\beta}{(ax + by + \phi(\beta x - \alpha y))} dx. \end{aligned}$$

Soit  $\omega = \beta x - \alpha y$ . En appliquant la formule de Green (1.1.3), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \oint_{\Gamma} \frac{\beta}{(ax + by + \phi(\omega))} dx - \oint_{\Gamma} \frac{\alpha}{(ax + by + \phi(\omega))} dy \\
&= \iint_{\text{int}(\Gamma)} \left( \frac{\partial \left( \frac{\beta}{(ax + by + \phi(\omega))} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left( \frac{\alpha}{(ax + by + \phi(\omega))} \right)}{\partial x} \right) dx dy \\
&= \iint_{\text{int}(\Gamma)} \left( \frac{-\beta \left( b + \frac{d\phi}{d\omega}(-\alpha) \right)}{(ax + by + \phi(\omega))^2} + \frac{-\alpha \left( b + \frac{d\phi}{d\omega}(\beta) \right)}{(ax + by + \phi(\omega))^2} \right) dx dy \\
&= - \iint_{\text{int}(\Gamma)} \left( \frac{\beta \left( b + \frac{d\phi}{d\omega}(-\alpha) \right)}{(ax + by + \phi(\omega))^2} + \frac{\alpha \left( b + \frac{d\phi}{d\omega}(\beta) \right)}{(ax + by + \phi(\omega))^2} \right) dx dy \\
&= - \iint_{\text{int}(\Gamma)} \left( \frac{\beta b + \alpha a}{(ax + by + \phi(\omega))^2} \right) dx dy,
\end{aligned}$$

où  $\text{int}(\Gamma)$  désigne l'intérieur de  $\Gamma$ .

comme la courbe  $ax + by + \phi(\beta x - \alpha y) = 0$  ne coupe pas les parties fermées de  $\Gamma$ , et puisque  $\alpha a + \beta b \neq 0$  alors  $\iint_{\text{int}(\Gamma)} \left( \frac{\beta b + \alpha a}{(ax + by + \phi(\omega))^2} \right) dx dy \neq 0$ , donc  $\int_0^T \text{div}(\Gamma(t)) dt \neq 0$

Conclusion : Si  $\alpha a + \beta b \neq 0$  et la courbe  $ax + by + \phi(\beta x - \alpha y) = 0$  ne coupe pas les parties fermées de  $\Gamma$ , alors toute partie fermée de la courbe  $\Gamma$  est un cycle limite hyperbolique pour le système (3.2.1).

## 3.4 Applications

### Corollaire 3.4.1 ([31])

Lorsque  $\phi(\beta x - \alpha y)$  est constant, nous nous trouvons dans le cas du théorème de Christopher (i.e 3.1).

Lorsque  $\phi(\beta x - \alpha y)$  est de premier degré, la droite  $ax + by + c = 0$  est dans la théorème de Christopher sera être remplacer par la droite  $(a + \beta)x + (b - \alpha)y + d = 0$ .

### Exemple 3.4.1 (Système Quintique avec exactement un cycle limite)

Soient  $\alpha = 1, \beta = 2, a = 1, b = 2, \phi(\beta x - \alpha y) = \phi(2x - y) = (2x - y)^2 + 1$ .

On a :  $U = x^4 + y^2 - 4y - 3x + 5 = 0$  est une courbe algébrique non-singulière de degré 4, et on a :

$$ax + by + \phi(\beta x - \alpha y) = x + 2y + (2x - y)^2 + 1 = 0$$

se trouve en dehors de toutes les composantes bornées de  $U(x, y) = 0$ . Et

$$\alpha a + \beta b = 1.1 + 2.2 = 5 \neq 0$$

Alors, le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x^4 + y^2 - 4y - 3x + 5 + (x + 2y + (2x - y)^2 + 1)(2y - 4), \\ \dot{y} = 2(x^4 + y^2 - 4y - 3x + 5) - (x + 2y + (2x - y)^2 + 1)(4x^3 - 3). \end{cases} \quad (3.4.1)$$

admet un cycle limite hyperbolique représenté par la courbe  $x^4 + y^2 - 4y - 3x + 5 = 0$ . (voir la figure 3.1).

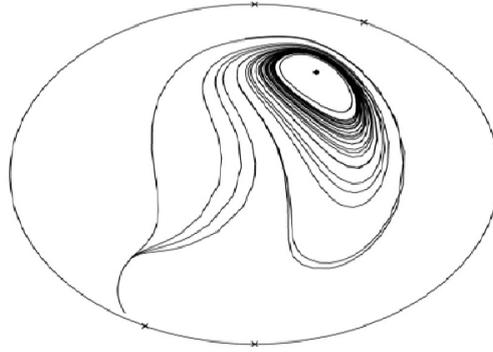


FIGURE 3.1 – Cycle limite du système (3.4.1)

**Corollaire 3.4.2 ([31])**

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha U + f(x, y)U_y, \\ \dot{y} = \beta U - f(x, y)U_x. \end{cases} \quad (3.4.2)$$

où  $U$  et  $f$  sont des fonction  $C^1$  dans un sous-ensemble ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^2$ . Pour avoir toutes les composantes bornée de  $U(x, y)$  comme cycles limites, il est nécessaire que  $f$  satisfasse l'équation différentielle partielle :

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} = \gamma, \text{ où } \gamma \neq 0$$

dans le cas de polynôme  $f(x, y) = \frac{\gamma}{\alpha}x + \phi(\beta x - \alpha y)$  ou  $f(x, y) = \frac{\gamma}{\beta}y + \phi(\beta x - \alpha y)$ , ne sont que des cas particuliers du théorème 3.2.

**Exemple 3.4.2 (Système Quintique avec exactement deux cycle limite )**

Soient  $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 3, f(x, y) = 3x + (x + y)^2$ .

On a :  $x^3 - 2xy^2 + 10xy - 15x + y^4 - 10y^3 + 35y^2 - 50y + 30 = 0$  est une courbe algébrique non-singulière de degré 3, et on a

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} = 3 = \gamma \neq 0$$

Alors, le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - 2xy^2 + 10xy - 15x + y^4 - 10y^3 + 35y^2 - 50y + 30 \\ \quad + ((x + y)^2 + 3x)(4y^3 - 30y^2 - 4xy + 10x + 70y - 50), \\ \dot{y} = 2(x^3 - 2xy^2 + 10xy - 15x + y^4 - 10y^3 + 35y^2 - 50y + 30) \\ \quad - ((x + y)^2 + 3x)(3x^2 - 2y^2 + 10y - 15). \end{cases} \quad (3.4.3)$$

admet deux cycles limites hyperboliques représentés par la courbe  $x^3 - 2xy^2 + 10xy - 15x + y^4 - 10y^3 + 35y^2 - 50y + 30 = 0$ . (Voir la figure 3.2)

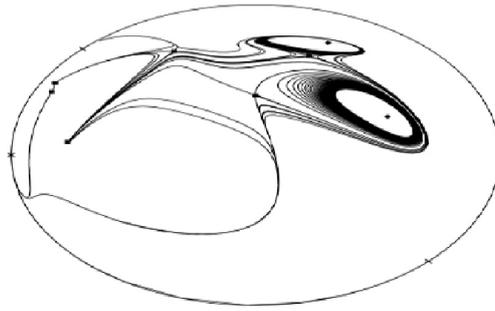


FIGURE 3.2 – Cycle limite du système (3.4.3)

### 3.4.1 Application 01

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= (x-2)^2 + (y-2)^2 - 1 + (3x-y+1)(2y-4), \\ \dot{y} &= (x-2)^2 + (y-2)^2 - 1 - (3x-y+1)(2y-4). \end{cases} \quad (3.4.4)$$

On a :  $U(x, y) = (x-2)^2 + (y-2)^2 - 1$ , le cercle de rayon 1 et de centre  $(2, 2)$ .

$$a = b = \alpha = \beta = 1$$

$$\phi(\beta x - \alpha y) = (2x - y) + 1$$

$$ax + by + \phi(\beta x - \alpha y) = x + y + (2x - y) + 1 = 3x - y + 1$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 - 1 = 0, \quad 3x - y + 1 = 0$$

Le système (3.4.4) est équivalent à :

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 + 6xy - 16x - y^2 + 2y + 3, \\ \dot{y} &= -5x^2 + 2xy + 6x + y^2 - 8y + 11. \end{cases} \quad (3.4.5)$$

qui admet un cycle limite algébrique hyperbolique donné par la courbe  $(x-2)^2 + (y-2)^2 - 1 = 0$  (voir la figure 3.3).

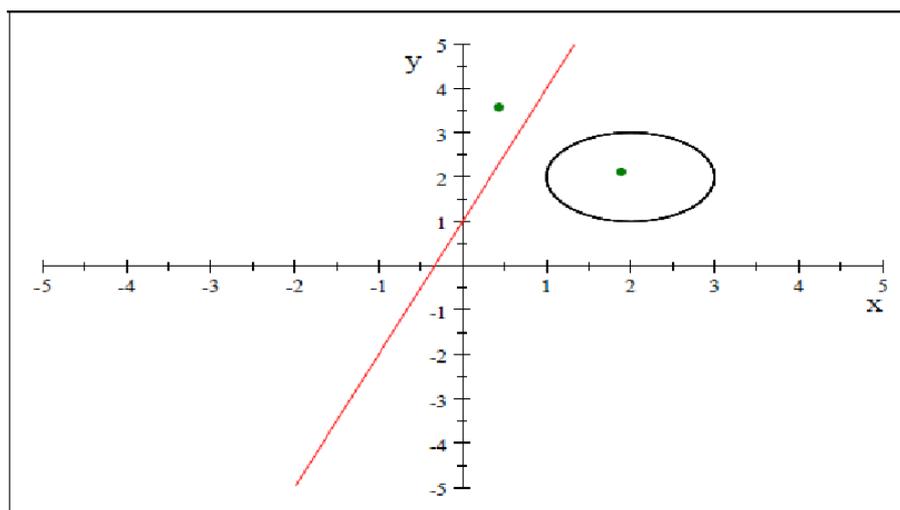


FIGURE 3.3 – Cycle limite du système (3.4.4)

### 3.4.2 Application 02

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x^4 + y^2 - 4y - 3x + 5 + (x + 2y + (2x - y)^2 + 1)(2y - 4), \\ \dot{y} = 2(x^4 + y^2 - 4y - 3x + 5) - (x + 2y + (2x - y)^2 + 1)(4x^3 - 3). \end{cases} \quad (3.4.6)$$

On a :  $U(x, y) = x^4 + y^2 - 4y - 3x + 5$ .

$a = 1, b = 2, \alpha = 1, \beta = 2$

$\phi(\beta x - \alpha y) = \phi(2x - y) = (2x - y)^2 + 1$

$ax + by + \phi(\beta x - \alpha y) = x + 2y + (2x - y)^2 + 1 = 4x^2 + y^2 - 4xy + x + 2y + 1$

$\frac{dU}{dx} = \frac{d(x^4 + y^2 - 4y - 3x + 5)}{dx} = 4x^3 - 3$

$\frac{dU}{dy} = \frac{d(x^4 + y^2 - 4y - 3x + 5)}{dy} = 2y - 4$

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= (4x^3 - 3)(x^4 + y^2 - 4y - 3x + 5 + (x + 2y + (2x - y)^2 + 1)(2y - 4)) \\ &\quad + (2y - 4)(2(x^4 + y^2 - 4y - 3x + 5) - (x + 2y + (2x - y)^2 + 1)(4x^3 - 3)) \\ &= 4x^7 + 4x^4y - 23x^4 + 4x^3y^2 - 16x^3y + 20x^3 - 12xy + 33x + 4y^3 - 27y^2 + 64y - 55 \\ &= (4y + 4x^3 - 11)(-3x - 4y + x^4 + y^2 + 5). \end{aligned}$$

Alors le cofacteur  $k(x, y) = 4y + 4x^3 - 11$

Et on a :

$$\int_0^T k(x(t), y(t)) dt = - \iint_{int(\Gamma)} \left( \frac{5}{(x + 2y + (2x - y)^2 + 1)^2} \right) dx dy \neq 0$$

$x^4 + y^2 - 4y - 3x + 5 = 0$ ,  $4x^2 + y^2 - 4xy + x + 2y + 1 = 0$

Le point singulier :  $[x=0.87338, y=2.0838]$

Le système admet un cycle limite hyperbolique représenté par la courbe  $x^4 + y^2 - 4y - 3x + 5 = 0$  (voir la figure 3.4)

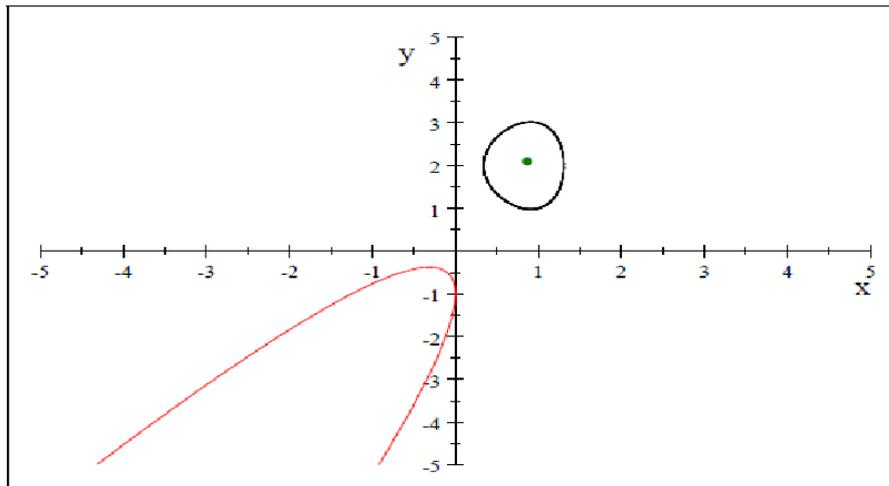


FIGURE 3.4 – Cycle limite du système (3.4.6)

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté quelques résultats qui concernant l'étude qualitative de certains classes de systèmes différentiels polynomiaux planaires non linéaires en étudiant l'existence ou non existence des cycles limites pour ces systèmes.

On s'intéresse en particulièrement au théorème de *S.Benyoucef* sur l'existence des cycles limites algébriques hyperboliques qui était une généralisation du théorème de *Christofer Colin*.

En perspective, nous envisageons de trouver un cas plus générale de systèmes (3.1) qui admet des cycles limites algébriques hyperboliques.

# Bibliographie

- [1] A.Buica and J.Libre, *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouer degree* Bulletin Des Science Mathématiques ,7-22, 4/9/2003.
- [2] A.Ferragut, J.Libre and A.Mahd , *Polynomial inverse integrating factors for polynomial vector fields* .Discrete and continus dynamical systems-A , (2007),17(2), 387.
- [3] A.Kina , *Etude qualitative d'une classe du systèmes différentiels* .Université Ferhat Abbas - Sétif 1 (thèse de Doctorat).
- [4] C.Christopher , *Polynomial vector fields with prescribed algebraic limit cycles* Geom Dedicata 88(2001), 255-258.
- [5] C.Christopher, C.Li, *Limit cycles in differntial equations*.Birkhauser Verlag ,2007.
- [6] C.Christopher and J.Libre , *Algebraic aspects of integrability for polynomial systems* Qualitative Theory of Dynamical Systems , (1999),71-95.
- [7] D.W.Jordon and P.Smith, *Nonlinear ordinary differential equation*.Second edition, Oxford applied mathematics and computing science series, 1987.
- [8] F.Dumortier, J.Libre, J.C.Artés , *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*.Springer, 2006.
- [9] F.Verhulst , *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*.Springer. New York, 1996.
- [10] H.Brezis , *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*.Springer., 2010.
- [11] H.Giacomini, J.Libre and M.Viano, *On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles*.J.Nonlinearity 9, (1996), 501-516.
- [12] H.Giacomini, M.Grau, *On the stability of limit cycles for planar differential systems*.J.of Diff.Equ., Vol.213 issue 2, (2005), 368-388.
- [13] H. Poincaré , *Sur les courbes définies par une équation différentielle* , Journal de mathématiques pures et appliquées (III) 7 (1881) , 375 - 422 .
- [14] H. Poincaré , *Sur les courbes définies par une équation différentielle* , Journal de mathématiques pures et appliquées (III) 8 (1882) , 251 - 296 .
- [15] H. Poincaré , *Sur les courbes définies par une équation différentielle* , Journal de mathématiques pures et appliquées (IV) 1 (1885) , 167 - 244 .
- [16] H. Poincaré , *Sur les courbes définies par une équation différentielle* , Journal de mathématiques pures et appliquées (IV) 2 (1886) , 151 - 217 .
- [17] H.Poincaré , *Sur les courbes définies par une équation différentielle*.Journal de mathématiques pures et appliquées, (1982), 8, 251-296.
- [18] J.C.Burkill and H.Burkill , *A Second Course in Mathematical Analysis*.Springer., 1997.
- [19] J.Ch.Gille, P.Decaulne and M.Pelegrin, *Système asservis non linéaire, Méthode topologique stabilité*.Tome 3, Dunod, 1975.

- [20] J.Ch.Gille, P.Decaulne and M.Pelegrin, *Système asservis non linéaire, Méthode topologique stabilité*. Tome 3, Dunod, 1975.
- [21] J.Chavarruga, H.Giacomini and J.Giné, *Polynomial inverse integrating factors*. Annals of Differential Equations, (2000), 16(4), 320-326.
- [22] J.D.Meiss, *Differential Dynamical Systems* University of Colorado Boulder, Colorado, the Society of Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- [23] J.Frédéric, *Géométrie Différentielle et application au contrôle géométrique*, Notes de cours, 2011/2012.
- [24] J.Giné and M.Grau, *A note on : "Relaxation oscillator with exact limit cycles"*. J.Math.Anal.App, Vol.324, (2006), 739-745.
- [25] J.J.Sloyine, W.Li, *Applied non linear control*. Prentice Hall, 1991.
- [26] J.Libre, A.E.Turuel, *Introduction to the qualitative theory of differential systems*. Springer Basel, 2014.
- [27] J.Libre, C.Simo and R.Moeckel, *Central Configuration, Periodic Orbits and Hamiltonian systems* Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona, Springer Basel, 2015.
- [28] L.Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*. Third Edition, Texts in applied mathematics, 7. Springer-Verlag, New-York, 2007.
- [29] M.H.Protter and C.B.Morrey, Jr, *A First Course in Real Analysis*. Springer., 1997.
- [30] R.Winkel, *A transfer principal in the real plane from non singular algebraic curve to polynomial vector fields* Geom Dedicata, 79(1), 101-108, 2000.
- [31] S.benyoucef, *Polynomial differential systems with hyperbolic algebraic limit cycles* Electronic journal of Qualitative Theory of Differential Equations No.34, 1-7, 29 may 2020.
- [32] S.Benyoucef, *Sur quelque classes de systèmes différentiels avec cycles limites explicites*. Université Badji Mokhtar-Annaba (thèse de doctorat).
- [33] S.N.Chow, R.Johnson, R.Nussbaum, R.Conti, J.Mallet-Paret, *Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 2003.
- [34] S.Wiggins, *Introduction to applied non linear dynamical systems and chaos*. Springer, 2000.
- [35] Y.Q.Ye, S.L.Cai, and others, *Theory of limit cycles*. Translations of Maths, Vol.66, Amer.Math.Soc, 1986.