الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

مخبر الرياضيات و العلوم التطبيقية

جامعة غرداية

Université de Ghardaïa

N° d'enregistrement

/…../…../…../…../…..

كلية العلوم والتكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم : الرياضيات و الإعلام الآلي

Département de Mathématiques et Informatiques

Mémoire de fin d'étude, en vue de l'obtention du diplôme

Master

Domaine: Mathématiques et Informatiques

Filière: Mathématiques

Spécialité: Analyse Fonctionnelle et Application

Thème

Système parabolique dégénéré double non-linéaire avec conditions aux limites non linéaires couplées

Présenté par :

Messaouda BENDEHIBA

Devant le jury composé de :

Abdelatif BOUTIARA	**M. A. B**	**Université de Ghardaïa**	**Président**
Houria CHELLAOUA	**M. A. B**	**Université de Ghardaïa**	**Examinateur**
Abdellatif LALMI	**M. A. A**	**Université de Ghardaïa**	**Encadreur**

Année universitaire : 2021/ 2022

Dédicace

Je dédie ce travail :

À ma chère mère et à mon cher père

À mes très chères soeurs et chèrs frères (Rachid et Taher)

Aux petites fleurs :Halima, Sara, fatima

À mon encadreur : Lalmi Abdellatif

À tous les amis .

À tous les étudiants d'université de Ghardaïïa

Et à tous mes professeurs

Messaoouda Bendehiba ✍

Remeciements

Tout d'abord, je remercie **Allah** le tout- puissant, qui nous a donné la force, et le courage et la patience d'accomplir ce présent travail.

Je tiens tout à remercier mon encadreur Monsieur **Abdellatif Lalmi** , maître assistant "A" à l'université de Ghardaïa pour le suivi du travail tout au long de la préparation du mémoire et pour ces aides et conseilles.

J' adresse aussi mes remerciements aux membres de jury Monsieur **Abdelatif Boutiara**, maître assistant "B" à l'université de Ghardaïa. Et Monsieur **Houria Chellaoua**, maître assistant "B" à l'université de Ghardaïa. Pour bien accepter d'examiner et de juger ce travail.

Je remercie mes chers parents qui ont toujours été à mes côtés, et je remercie tous mes frères et soeurs.

Merci à tout les enseignants et les étudiants du Département de Mathématiques et de l'Informatique à l'université de Ghardaïa. Des remerciements spéciaux aux étudiants de la promo 2021/2022.

Enfin, Je remercie Monsieur **Aleb kuider** qui m'a enseigné au primaire, et tous les professeurs qui m'ont enseigné le long de ma vie d'étude à partir de primaire jusqu'à mes études universitaires.

Messaouda Bendehiba ✍

ملخص

في هذه المذكرة ، ندرس الوجود الكلي و الإنفجار في وقت محدود للحلول الضعيفة لمسألة القطع المكافئ غير الخطي المزدوج مع مصدر غير محلي .

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{m,p} u = a \displaystyle\int_{\Omega} \left(v^{\alpha}(x,t) + u^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}(x,t) \right) dx, \\ v_t - \Delta_{n,q} v = b \displaystyle\int_{\Omega} \left(u^{\beta}(x,t) + v^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}(x,t) \right) dx, \\ u(x,t) = 0, \quad v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

حيث $m, n \geq 1, p, q > 2, \alpha, \beta > 0$ و a, b ثوابت حقيقية موجبة .

في ظل بعض الفرضيات المناسبة، نثبت أن الحل موجود كليا أو ينفجر في زمن محدود و ذلك تبعا للشروط الإبتدائية والعلاقة بين $\alpha\beta$ و $mn(p-1)(q-1)$.

حالة خاصة عندما يكون $\alpha = n(q-1)$ $\beta = m(p-1)$ نعطي فيها أيضا شروطا تعتمد على الثوابت a, b و $\xi(x), \vartheta(x)$ التي سنحددها فيما بعد في نتائجنا الرئيسية ، بحيث يكون الحل موجودا كليا أو ينفجر في زمن محدود . نتائجنا هي تطوير لنتائج الورقة [10]

الكلمات المفتاحية : حل ضعيف ، طريقة الحل التحتي و الحل الفوقي ، الوجود الكلي ،الإنفجار في زمن محدود.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions l'existence globale et l'explosion en temps fini des solutions d'un système parabolique dégénéré double non- linéaire de filtration polytropique non- Newton avec source non - locale

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{m,p} u = a \displaystyle\int_\Omega \left(v^\alpha(x,t) + u^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}(x,t) \right) dx, \\ v_t - \Delta_{n,q} v = b \displaystyle\int_\Omega \left(u^\beta(x,t) + v^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}(x,t) \right) dx, \\ u(x,t) = 0, \quad v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

où $m, n \geq 1, p, q > 2, \alpha, \beta > 0$ et a, b sont des constantes réelles positives .

Sous certains conditions convenables, nous prouvons que la solution existe globalement ou explose en temps fini par rapport aux données initiaux et aux relations entre $\alpha\beta$ et $mn(p-1)(q-1)$.

Un cas particulier, est consacré pour $\alpha = n(q-1), \beta = m(p-1)$ nous donnons également des conditions dépendent des constantes a, b et $\xi(x), \vartheta(x)$ qu' on définit aprés dans nos principaux résultats, pour que la solution existe globalement ou explose en temps fini .Nos résultats développent de Jun Zhou and Chunlai Mu [10]

Mots-clés : solution faible, méthode sous et sur solution, existence globale, explosion en temps fini .

Abstract

In this memoir, we study the global existence and blows-up in finite-time solutions of a doubly nonlinear degenerate polytropic non-Newton-ltration parabolic system with non- local source

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{m,p} u = a \displaystyle\int_\Omega \left(v^\alpha(x,t) + u^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}(x,t) \right) dx, \\ v_t - \Delta_{n,q} v = b \displaystyle\int_\Omega \left(u^\beta(x,t) + v^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}(x,t) \right) dx, \\ u(x,t) = 0, \quad v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

where $m, n \geq 1, p, q > 2, \alpha, \beta > 0$ et a, b are positive real constants.

Under certain suitable assumptions, we prove that the solution exists globally or bows-up in finite time with respect to the initial data and the relations between $\alpha\beta$ and $mn(p-1)(q-1)$

A special case, is devoted for $\alpha = n(q-1), \beta = m(p-1)$, we also give conditions depend on the constants a, b and $\xi(x), \vartheta(x)$ which we define afterwards in our main results, for the solution to exist globally or blows - up in finite time . Our results develop the results of Jun Zhou and Chunlai Mu [10]

Key-words : Weak solution, upper and lower solution method, globl existence, blow - up in finite time .

Table des matières

Liste des Notations

Ω : Un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

$L^p(\Omega)$: Espace des fonctions mesurables de puissance. $p \in [1, +\infty]$, intégrables sur Ω.

$W^{m,p}(\Omega)$: Espace de Sobolev

.

∇u : Gradient de u.

Δu : Laplacien de u.

$|\Omega|$: La mesure de Ω.

$\partial\Omega$: La frontière de Ω.

$supp\, u$: Support de u.

$C^m(\Omega)$: Espace des fonctions m fois continûment différentiable sur Ω (avec $m \in \mathbb{N}^*$).

$C^m(\bar{\Omega})$: Espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$.

$\mathcal{D}(\Omega)$: Espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact.

$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$: Espace de Hölder (l'espace des fonctions k - fois continûment différentiables et leur dérivées partielles sont continues Höldériennes d'exposant α).

$p.p$: Presque partout.

u_t : La dérivée de la variable u par rapport à t.

$\|f\|_{L^p(\Omega)}$:La norme dans l'espace $L^p(\Omega)$.

Intoduction

L'étude des systèmes paraboliques non-linéaires ou double non-linéaires comme le système (1.1) dans [10] et ce que nous avons en train d'étudier dans notre cas, le système suivant

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{m,p} u = a \displaystyle\int_\Omega \Big(v^\alpha(x,t) + u^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}(x,t) \Big)\, dx, & (x,t) \in \Omega \times (0,T], \\ v_t - \Delta_{n,q} v = b \displaystyle\int_\Omega \Big(u^\beta(x,t) + v^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}(x,t) \Big)\, dx, & (x,t) \in \Omega \times (0,T], \\ u(x,t) = 0, \quad v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où $m, n \geq 1, p, q > 2, \alpha, \beta > 0$, $N \geq 1$ et a, b sont des constantes réelles positives,
$\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ est un domaine borné avec frontière régulière $\partial\Omega,$ et en utilisant la notation $Q_T = \Omega \times [0,T),\ S_T = \partial\Omega \times [0,T),\ T > 0.$ Et

$$\Delta_{m,p}\Theta = \nabla(|\Theta^m|^{p-2}\Theta^m), \quad \nabla\Theta^m = m\Theta^{m-1}(\Theta_{x_1}, ..., \Theta_{x_N}),$$

$$\Delta_{n,q}\Theta = \nabla(|\Theta^n|^{q-2}\Theta^n), \quad \nabla\Theta^n = n\Theta^{n-1}(\Theta_{x_1}, ..., \Theta_{x_N}).$$

A vu une grande importance dans beaucoup de domaines de mathématiques, physique, des sciences et de la technologie...
L'intérêt d'étude de ce type de systèmes est motivé par ces applications dans la dynamique des populations, les réactions chimiques, les équations de transfert de la chaleur, etc.
De plus, les solutions de ces systèmes peuvent être bornées, c'est-à-dire existent globalement ou non bornées i.e., explosent en temps fini. Ici, nous disons qu'une solution existe globalement si la solution devient bornée et nous disons que la solution explose en un temps fini si le contraire, c'est-à-dire que la solution devient non bornée (au sens de la norme maximale) d'après le principe d'explosion en temps fini. Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude de l'existence globale et de l'explosion en temps fini des solutions faibles du système ci-dessus. Jun Zhou and Chunlai Mu [10], ont étudié le même

système dans le cadre de l'existence globale et l'explosion en temps fini, ils ont obtenu des résultats d'existence globale et d'explosion en temps fini des solution faibles.

Dans ce travail, nous allons développer les résultats de Jun Zhou and Chunlai Mu [10] en ajoutant des nouveaux termes au système (1.1) de [10] exprimés respectivement par

$$\int_{\Omega} u^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}} dx \qquad \text{et} \qquad \int_{\Omega} v^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}} dx.$$

et en développant les preuves des résultats (Théorème 1.2, Théorème 1.3 et Théorème 1.4) conformément au ces nouveaux termes. Nous obtenons les mêmes résultats d'existence globale et d'explosion en temps fini des solutions faibles sous certaines conditions convenablement choisis, nous prouvons que la solution existe globalement ou explose en temps fini par rapport aux données initiaux et aux relations entre les exposantes constantes α, β, m, n, p et q du fait que la solution faible du système (1) existe globalement si l'une des conditions suivantes soit satisfaites. (voir Théorème (5))

1. $\alpha\beta < \mathrm{mn}(p-1)(q-1)$;
2. $\alpha\beta = mn(p-1)(q-1)$ et la mesure de $\Omega(|\Omega|)$ est suffisamment petit ;
3. $\alpha\beta > mn(p-1)(q-1)$ et les valeurs initiales sont suffisamment petites.

D'autres côtés la solution explose en temps fini si l'une des conditions suivantes soit satisfaite (voir Théorème (6)).

1. $\alpha\beta > mn(p-1)(q-1)$ et les valeurs initiales sont suffisamment grandes ;
2. $\alpha\beta = mn(p-1)(q-1)$ et Ω contient une boule suffisamment grande.

Un cas particulier, $\alpha = n(q-1), \beta = m(p-1)$ (voir Théorème (7)) où dans ce cas les données initiales satisfaits la condition (1) on a

1. la solution existe globalement si $\lambda\mu \leq (ab)^{-1}$;
2. la solution explose en temps fini si $\lambda\mu > (ab)^{-1}$. Ou λ et μ sont définies par

$$\lambda = \int_{\Omega} \xi^{m(p-1)}(x)dx, \quad \mu = \int_{\Omega} \vartheta^{n(q-1)}(x)dx,$$

avec $\xi(x)$ et $\vartheta(x)$ sont les solutions uniques des problèmes elliptiques suivants (voir [10, 13])

$$\begin{cases} -\Delta_{m,p}\xi = 1, & x \in \Omega, \\ \xi = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta_{n,q}\vartheta = 1, & x \in \Omega, \\ \vartheta = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

La méthode utilisée dans notre étude est basée sur les souss et les surs solutions, cette méthode a été utilisée dans beaucoup des travaux comme exemple [16],[17]. Pour cela, on introduit les outils mathématiques que nous avons besoin pour cette étude : des définitions et des notions préliminaires,

des propriétés, sur les déférents espaces de Lebesgue et de Sobolev (voir [6, 5, 13]).

Ensuite, nous définissons les types de solutions [7], et la méthode de sous et sur solution [16], qui nous aident à étudier notre problème.

Ce mémoire est partagé en trois Chapitre, le premier Chapitre est consacré pour les notions préliminaires. Dans le deuxième Chapitre on étude l'existence globale des solutions faibles de notre système. L'explosion en temps fini des solutions faibles est étudié dans le troisième Chapitre.

Chapitre 1

Préliminaires et Notions fondamentales

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces de Hilbert

Définition 1. *[6]*

Soit H un espace vectoriel. Un produit scalaire $\langle u,v\rangle$ est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, symétrique, définie positive [i.e. $\langle u,v\rangle \geqslant 0 \, \forall \, u \in H$ et $\langle u,u\rangle > 0$ sì $u \neq 0$]. Rappelons qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$| \langle u,v\rangle | \leqslant \langle u,u\rangle^{1/2}\langle v,v\rangle^{1/2}, \quad \forall u,v \in H.$$

Remarquons que pour établir l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on n'utilise pas l'hypothèse. $\langle u,u\rangle > 0$ si $u \neq 0$.
Rappelons aussi que $\|u\| = \langle u,u\rangle^{1/2}$ est une norme associée à un produit scalaire.
En effet

$$|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u,v\rangle \leq |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v|.$$

Rappelons enfin l'identité du parallélogramme :

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}\left(|a|^2 + |b|^2\right), \quad \forall a,b \in H.$$

.

Définition 2. *[6] Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle u,v\rangle$ et qui est complet pour la norme $\langle u,u\rangle^{1/2}$.*

1.1.2 Fonctions mesurables

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite mesurable si $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $E_\alpha = \{x \in \Omega / f(x) \geq \alpha\}$ est mesurable.

1.1.3 Fonctions intégrables

On dit qu'une fonction mesurable $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Lebesgue si

$$\int_\Omega |f| < \infty.$$

1.1.4 Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 3. *[6]*

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p < \infty$; on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in \mathrm{L}^1(\Omega) \right\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right]^{1/p},$$

où $\| \, . \|_{L^p(\Omega)}$ est une norme sur $L^p(\Omega)$.

Définition 4. *[6]*

On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante C telle que } |f(x)| \leqslant \mathrm{C} \text{ p.p. sur } \Omega. \}$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \mathrm{Inf}\{\mathrm{C} \leq 0 \quad ; |f(x)| \leqslant \mathrm{C} \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

1.1.5 Dualité dans les espaces L^p

Théorème 1. *[5]*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et soit p réel tel que $1 < p < +\infty$. Le dual topologique de L^p est $L^{p'}$ où p' est le nombre conjugué de p, ce qui signifie : (c'est- à - dire) :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

1.1.6 Espaces $C^m(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et m un entier positif.

Définition 5. *[5]*

1. *On définit* $\mathcal{C}^m(\Omega)$ *par espace des fonctions continues dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre* m *sont continues sur* Ω. *On définit aussi :*

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} C^m(\Omega),$$

2. *On note* $C_c^\infty(\Omega)$ *ou encore* $\mathcal{D}(\Omega)$ *l'espace des fonctions* $C^\infty(\Omega)$ *à support compact dans* Ω.

Puisque Ω est un ouvert, les fonctions continues sur Ω ne sont pas nécessairement bornées.

Définition 6 (Support de fonction continue)**.** *Soit* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue . Le support de* f *qu'on note supp*(f) *est le sous -ensemble fermé de* $\mathbb{R}^N (N \in \mathbb{N})$ *définie par :*

$$supp(f) = \overline{\{x \in E \,|\, f(x) \neq 0\}}.$$

1.1.7 Espaces de Distributions

Définition 7. *[3] Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$. *La disttribution* T *sur* Ω *est une application linéaire de* $C_0^\infty(\Omega)$ *dans* $\mathbb{C}$ *telle que :*
pour tout compact K *de* Ω *il existe* $C_k > 0$ *et* $k \in \mathbb{N}$ *tels que*

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C_k \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Définition 8. $\mathcal{D}(\Omega)$ *est l'espace des fonctions de* $C^\infty(\Omega)$ *à support compact dans* Ω
Les éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ *sont appelées fonctions test.*

1.1.8 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 9. *[5]*

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$. *Pour* $m \in \mathbb{N}$ *et* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *l'espace de Sobolev, noté* $W^{m,p}(\Omega)$, *est constitué des fonctions de* $L^p(\Omega)$ *dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre* m, *au sens des distributions, s'identifient à des fonctions de* $L^p(\Omega)$. *pour ces dérivées, on pose* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$,

$$|\alpha| = \sum_{1}^{N} \alpha_i,$$

et on utilise la notation :

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_N} x_N},$$

la définition précédente s'écrit donc :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \backslash \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m \Longrightarrow D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

Définition 10 (L'espaces $\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$). *[6]*

Soit $1 \leqslant p < \infty; W_0^{1,p}(\Omega)$ *désigne la fermeture de* $C_c^1(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$. *On note*

$$\mathrm{H}_0^1(\Omega) = \mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)\left(^1\right).$$

L'espace $W_0^{1,p}$ *muni de la norme induite par* $W^{1,p}$ *est un espace de Banach séparable ; il est réflexif si* $1 < p < \infty$. H_0^1 *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de* H^1.

Remarque 1. *[4]*
Sur la structure des dérivées dans un espace $W^{1,p}(\Omega)$ *:*
pour $1 \leq p < +\infty$, *on définit l'espace de sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *par :*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), u \text{ a une dérivée faible } u' \in L^p(\Omega)\}$$

Muni de la norme

$$\| u \|_{W^{1,p}(\Omega)} = \| u \|_{L^p(\Omega)} + \| u' \|_{L^p(\Omega)}$$

1.1.9 Espaces $L^p(0,T;X)$

Soit X un espace de Banach, T un nombre réel positif ($T > 0$).
On définit les espaces suivants : (voir [13])

$$L^p(0,T;X) = \left\{u : (0,T) \to X, u \text{ mesurable}, \quad \int_0^T \| u(t) \|_X \, dt < \infty\right\}, \text{ tel que } \quad 1 \leq p < \infty$$

muni de la norme

$$\| u \|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \| u(t) \|_X^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

et c'est-à- dire que

$$L^p(0,T;X) = \{u : (0,T) \rightarrow X\, mesurable; \exists\, c > 0 \parallel u(t) \parallel_X \leq c\, p\, p\}$$

muni de la norme

$$\parallel u \parallel_{L^p(0,T;X)} = \inf\{c > 0; \parallel u(t) \parallel_X \leq c \quad p.p\}$$

1.1.10 Espaces de Hölder

Définition 11. *(Espaces $C^{0,\alpha}(\Omega)$) [8]*
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in]0,1]$. $C^{0,\alpha}(\Omega)$ (ou $\Lambda^\alpha(\Omega)$ ou $Lip_\alpha(\Omega)$) est l'espace vectoriel des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

1. *$f \in L^\infty(\Omega)$ i.e. f est mesurable bornée sur Ω .*
2. *$\exists C > 0 : \forall x, y \in \Omega, \qquad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$.*

$$C^\alpha(\Omega) = \left\{ f \in L^\infty(\Omega), [f]_{C^\alpha(\Omega)} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\parallel f \parallel_{C^\alpha(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| + [f]_{C^\alpha(\Omega)}\,,$$

et

$$C^{m,\alpha}(\Omega) = \{f \in C^m(\Omega) : f^{(m)} \in C^\alpha(\Omega)\},$$

muni de la norme

$$\parallel f \parallel_{C^{m,\alpha}(\Omega)} = \parallel f \parallel_{C^m(\Omega)} + \left[f^{(m)}\right]_{C^\alpha(\Omega)}.$$

1.2 Problème de Dirichlet homogène

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné ,on cherche une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{sur}\, \Omega, \\ \qquad u = 0 & \text{sur}\ \Gamma = \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x_i^2}$, dit : Laplacien de u et f est une fonction données sur Ω.
la condition aux limites $u = 0$ sur Γ s'appelle la condition de Dirichlet homogéne (voir [6]).

1.3 Énoncé du problème du p- Laplacien

Le problème envisagé maintenant consiste à remplacer l'opérateur de Laplace $\Delta = div(\nabla)$ par l'opérateur non linéaire , noté Δ_p définit par (voir [5]) :

$$\Delta_p u = div(| \nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

1.4 Problème bien posé et Problème mal posé

En 1923, Hadamard a introduit la notation de problème bien posé, il s'agit d'un problème dont :

1. La solution existe.
2. La solution est unique.
3. La solution dépend continûment des données.

Un problème qui n'est pas bien posé au sens de la définition ci-dessus est dit problème mal posé. Beaucoup de problèmes inverses peuvent être formulés en une équation intégrale $Ax = y$.

Soit $A : U \to V$ un opérateur de U sous espace d'un espace normé X dans V sous espace d'un espace normé Y. L'équation $Ax = y$ est dite bien posée si A est bijectif et $A^{-1} : V \to U$ est continu, autrement $Ax = y$ est dite mal-posée. Dans les années récentes beaucoup de problèmes de la physique mathématique sont en réalité mal posés. (voir [9]).

1.5 Solution globale et solution explose en temps fini

Dans ce mémoire nous nous intéresserons en particulier au comportement de la solution au voisinage de T, ou T est le temps maximal d'existence de la solution du problème (??)

D'après la théorie, deux cas se présentent :

1. $T = +\infty$: on dit que l'existence de la solution est globale.
2. $T < +\infty$: dans ce cas, $\lim\limits_{t \to T} \|u(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = +\infty$, (resp $\lim\limits_{t \to T} \|v(.,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = +\infty$). On dit alors que u(resp v) explose en temps fini T.

On dit que la solution (u, v) du système (1) explose en temps fini T, si u ou bien v explose en temps fini (voir [15]).

1.6 Type des solutions

Définition 12 (solution faible). *[7]*

On considère le système quasi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = h_1(x,u,v) & dans\ \Omega, \\ -\Delta_q v = h_2(x,u,v) & dans\ \Omega, \\ u, v = 0 & sur\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

On dit que $(u,v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ *est une solution faible de* (1.1) *si et seulement si :*

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega h_1(x,u,v)\varphi dx, \\ \int_\Omega |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla \psi dx = \int_\Omega h_2(x,u,v)\psi dx, \end{cases}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$

Définition 13. *Soient* $(\underline{u}, \underline{v}), (\bar{u}, \bar{v}) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$

1. *On dit que* $(\underline{u}, \underline{v})$ *est une sous solution du problème* (1) *si :*

   ⋆ *Pour presque tout* $x \in \Omega$

$$\underline{u}_t - \Delta_{m,p}\underline{u} \leq a \int_\Omega \left(\underline{v}^\alpha(x,t) + \underline{u}^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}(x,t) \right) dx,$$

$$\underline{v}_t - \Delta_{n,q}\underline{v} \leq b \int_\Omega \left(\underline{u}^\beta(x,t) + \underline{v}^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}(x,t) \right) dx,$$

   ⋆ *Pour tout* $x \in \partial\Omega, \quad \underline{u}(x,t) \leq 0, \quad \underline{v}(x,t) \leq 0.$

2. *On dit que* $(\bar{u}, \bar{v})$ *est une sur solution du problème* (1) *si :*

   ⋆ *Pour presque tout* $x \in \Omega$

$$\bar{u}_t - \Delta_{m,p}\bar{u} \geq a \int_\Omega \left(\bar{v}^\alpha(x,t) + \bar{u}^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}(x,t) \right) dx,$$

$$\bar{v}_t - \Delta_{n,q}\bar{v} \geq b \int_\Omega \left(\bar{u}^\beta(x,t) + \bar{u}^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}(x,t) \right) dx,$$

   ⋆ *Pour tout* $x \in \partial\Omega, \quad \bar{u}(x,t) \geq 0, \quad \bar{v}(x,t) \geq 0.$

1.7 Principe de comparaison

Supposons que $(\underline{u}(x,t),\underline{v}(x,t))$ et $(\overline{u}(x,t),\overline{v}(x,t))$ sont les sous et sur solution du problème (1) sur $\overline{Q}_T \times \overline{Q}_T$ respectivement Alors

$$(\underline{u}(x,t),\underline{v}(x,t)) \leq (\overline{u}(x,t),\overline{v}(x,t))$$

, presque partout sur $\overline{Q}_T \times \overline{Q}_T$ (voir [10]).

1.8 Sous et sur solution :

Définition 14. *[10]*

Une paire de fonction $(u(x,t),v(x,t))$ est appelée sur solution (sous solution) du problème (1) dans $\bar{Q}_T \times \bar{Q}^T$ si et seulement si

$$\begin{gathered}
u^m(x,t) \in C\left(0,T;L^\infty(\Omega)\right) \cap L^p\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right), \\
v^n(x,t) \in C\left(0,T;L^\infty(\Omega)\right) \cap L^q\left(0,T;W_0^{1,q}(\Omega)\right), \\
u_t \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \quad v_t \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \\
u(x,0)=u_0(x), \quad v(x,0)=v_0(x),
\end{gathered}$$

et les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u(x,t_2)\,\psi\left(x,t_2\right)dx - \int_\Omega u\left(x,t_1\right)\psi\left(x,t_1\right)dx \\
&\qquad \geq(\leq) \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\psi_t dxdt - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left|\nabla u^m\right|^{p-2}\nabla u^m \cdot \nabla\psi dxdt \\
&\qquad\quad + a\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \psi(x,t)\left(\int_\Omega (v^\alpha(x,t) + u^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}})dx\right)dxdt, \\
&\int_\Omega v\left(x,t_2\right)\psi\left(x,t_2\right)dx - \int_\Omega v\left(x,t_1\right)\psi\left(x,t_1\right)dx \\
&\qquad \geq(\leq) \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega v\psi_t dxdt - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left|\nabla v^n\right|^{q-2}\nabla v^n \cdot \nabla\psi dxdt \\
&\qquad\quad + b\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \psi(x,t)\left(\int_\Omega (u^\beta(x,t) + v^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}})dx\right)dxdt.
\end{aligned}$$

Où $0 < t_1 < t_2 < T$ et $\psi(x,t) \geq 0 \in C^{1,1}(\bar{Q}_T)$ tels que $\psi(x,T) = 0$ et $\psi(x,T) = 0 \in S_T$. En particulier, $(u(x,t),v(x,t))$ est appelée une solution faible de (1) s'il est à la fois un sur solution faible et est une sous solution faible .

Lemme 1 (Une des formes du principe de maximum). *[2]*

Si $w \in W^{2,p}(\Omega)$, avec $p > n$, vérifie pour presque partout $x \in \Omega, -\Delta w(x) \leq 0$ alors w ne peut *pas atteindre un maximum $M \geq 0$ dans Ω sauf si w est constante.*

Théorème 2 (Schauder)**.** *[6]*

On suppose que Ω est borné de classe $C^{2,\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$. Alors pour tout $f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ il existe $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ unique solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{sur}\,\Omega, \\ \qquad\quad u = 0 & sur\,\Gamma. \end{cases}$$

De plus si Ω est de classe $C^{m+2,\alpha}$(m entier $\geqslant 1$) et si $f \in C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$, alors

$$u \in C^{m+2,\alpha}(\bar{\Omega}) \qquad et \qquad \| u\|_{C^{m+2,\alpha}} \leqslant C\| f\|_{C^{m,\alpha}}$$

Théorème 3 (Principe de maximum pour le problème de Dirichlet)**.** *[6]*
Soient $f \in L^2(\Omega)$, $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Alors :

$$\min\{\inf_\Gamma u, \max_\Omega f\} \leqslant u(x) \leqslant \max\{\sup_\Gamma u, \sup_\Omega f\} \qquad pour \quad x \in \Omega.$$

1.9 Méthode de sous et sur solution

Théorème 4. *[16]*

Soient $\underline{u}$(resp $\bar{u}$) une sous solution (resp une sur solution) du problème

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)) & dans\ \Omega, \\ u(x) = 0 & sur\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

tel que $\underline{u} \leq \bar{u}$ dans Ω. Alors les propriètès suivantes sont satisfaites :

1. *Il existe une solution u du problème (1.2) satisfaisant $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$.*

2. *Ils existent des solutions minimales et maximales $u_{\min}$ et $u_{\max}$ du problème (1.2) dans l'intervalle $[\underline{u}, \bar{u}]$.*

Preuve

i) Soit $g(x, u) := f(x, u) + au$ où a est une constante réelle. On peut choisir $a \geq 0$ suffisament grand de sorte que $\mathbb{R} \ni u \longmapsto g(x, u)$ est croissante sur $[\underline{u}(x), \bar{u}(x)]$. Pour $x \in \Omega$, on choisit $a \geq 0$ tel que

$$a \geq \max\left\{-f_u(x,u); x \in \bar{\Omega}, u \in [\underline{u}(x), \bar{u}(x)]\right\}.$$

Pour ce choix de a, nous définissons la suite de fonctions $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ comme suit : $u_0 = \bar{u}$ et pout tout $n \geq 1, u_n$ est la solution unique du problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_n + a u_n = g\left(x, u_{n-1}\right) & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

Montrons que $\underline{u} \leq \ldots \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \ldots \leq u_0 = \bar{u}$. On a $u_1 \leq \bar{u}$. En effet

$$\begin{cases} -\Delta\left(\bar{u} - u_1\right) + a\left(\bar{u} - u_1\right) \geq g(x,\bar{u}) - g(x,\bar{u}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \bar{u} - u_1 \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Par le principe du maximum, on déduit que $\bar{u} \geq u_1$ dans Ω. Comme l'opérateur $-\Delta + aI$ est coercif, il s'en suit que $\bar{u} \geq u_1$ dans Ω. Pour la preuve de $\underline{u} \leq u_1$, nous remarquons que $\underline{u} \leq 0 = u_1$ sur $\partial\Omega$. Pour $x \in \Omega$, on a

$$-\Delta\left(\underline{u} - u_1\right) + a\left(\underline{u} - u_1\right) \leq f(x,\underline{u}) + a\underline{u} - g(x,\bar{u}) \leq 0.$$

La monotonie de g et le principe du maximum imliquent que $\underline{u} \leq u_1$. Supposons que

$$\underline{u} \leq \ldots \leq u_n \leq u_{n-1} \leq \ldots \leq u_0 = \bar{u}.$$

Il reste à prouver que

$$\underline{u} \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

On a

$$\begin{cases} -\Delta\left(u_n - u_{n+1}\right) + a\left(u_n - u_{n+1}\right) = g\left(x, u_{n-1}\right) - g(x,\underline{u}) \geq 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_n - u_{n+1} \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

D'après le principe du maximum, on a $u_n \geq u_{n+1}$ dans Ω. D'un autre coté, on a

$$\begin{cases} -\Delta\underline{u} + a\underline{u} \leq g(x,\underline{u}) & \text{dans } \Omega, \\ \underline{u} \leq 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

d'après la définition de u_{n+1}, nous avons

$$\begin{cases} -\Delta\left(u_{n+1}-\underline{u}\right)+a\left(u_{n+1}-\underline{u}\right)=g\left(x,u_n\right)-g(x,\underline{u})\geq 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_{n+1}-\underline{u}\geq 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Par le principe du maximum, nous déduisons que $\underline{u}\leq u_{n+1}$ dans Ω. D'après ce qui précède, il existe une fonction u telle que, pour chaque $x\in\Omega$ fixé on a

$$u_n(x)\searrow u(x) \text{ quand } n\to\infty.$$

Maintenant on doit montrer qu'on peut passer a la limite dans le problème (1.3)

Soit $g_n(x):=g\left(x,u_n(x)\right)$, remarquons que la suite (g_n) est bornée dans $L^{\infty}(\Omega)$, par conéquent elle est dans tout $L^p(\Omega)$ avec $1<p<\infty$.

En passant à la limite dans (1.3) et d'après les estimations standard de Schauder la suite (u_n) est bornée dans $W^{2,p}(\Omega)$ pour tout $1<p<\infty$. L'espace $W^{2,p}(\Omega)$ s'injecte de façon continue dans l'espace de Hölder $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, pour $\alpha=1-\dfrac{N}{2p}$ à condition que $p>\dfrac{N}{2}$. Donc (u_n) est bornée dans $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Par les estimations dans les espaces de Hölder, nous déduisons que (u_n) est bornée dans $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Comme l'injection de $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ dans $C^2(\bar{\Omega})$ est compacte, il s'en suit que

$$u_n\to u \qquad \text{dans } C^2(\bar{\Omega}).$$

Puisque la suite est monotone, donc la suite converge vers u dans $C^2(\Omega)$. Passons maintenant à la limite dans le problème (1.3) quand $n\to\infty$. Par conséquent u est une solution du problème (1.2). Le point i) est démontré

ii) On désigne par $\bar{u}$ la solution obtenue par la technique ci-dessus et en choisissant $u_0=\bar{u}\cdot u_{\max}$ est la solution maximale dans l'intervalle $(\underline{u},\bar{u})$.

En effet, soit $u\in[\underline{u},\bar{u}]$ une solution arbitraire.En utilisant les arguments précédents impliquent que $u\leq\bar{u}$. On obtient que pour tout $n\geq 0$, on a $u\leq u_n$ ■

Hypothèse 1. *[10]*

Supposons que les données initiales sont non négatives et satisfaisantes aux conditions de compatibilité et

$$u_0^m(x)\in C(\bar{\Omega})\cap W_0^{1,p}(\Omega), v_0^n(x)\in C(\bar{\Omega})\cap W_0^{1,q}(\Omega), \quad et \;\; \nabla u_0^m(x).\nu<0, \nabla v_0^n(x).\nu<0$$

sur la frontière $\partial\Omega$, où ν est le vecteur normal extérieur unitaire sur $\partial\Omega$.

Lemme 2. *[10]*

On considère le problème :

$$\begin{cases} -\Delta_{k,\gamma}\Theta = 1 & x \in \Omega, \\ \Theta = 1 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

Le problème (1.4) *admet une unique solution* $\Theta(x)$ *satisfaisante les relations suivantes :*

$$\Theta(x) > 1 \;\; dans \;\; \Omega, \quad \nabla\Theta.\nu < 0 \;\; sur \;\; \partial\Omega, \quad \sup_{x\in\Omega}\Theta = M < +\infty,$$

telque M *est une constante positive.*

Preuve

On définit $\Theta^k = \Phi$, alors Φ satisfait le problème suivant

$$\begin{cases} -\nabla(|\nabla\Phi|^{\gamma-2}\nabla\Phi) = 1, & x \in \Omega, \\ \Phi = 1, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.5}$$

Ensuite, soit $\psi = \Phi - 1$, donc le problème (1.5) devient

$$\begin{cases} -\nabla(|\nabla\psi|^{\gamma-2}\nabla\psi) = 1, & x \in \Omega, \\ \psi = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.6}$$

D'après [11, 14] nous obtenons que le problème (1.6) admette une solution unique $\psi(x)$ et satisfait aux relations suivantes,

$$\psi(x) > 0 \text{ dans } \Omega, \quad \nabla\psi.\nu < 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad \sup_{x\in\Omega}\psi = M' < +\infty,$$

où M' est une constante positive. Puisque $\Theta = (\psi+1)^{\frac{1}{k}}$ alors $\psi = \Theta^k - 1$ on trouve que

$$\Theta^k(x) - 1 > 0 \text{ dans } \Omega, \quad \nabla(\Theta^k - 1)\nu < 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad \sup_{x\in\Omega}(\Theta^k - 1) = M' < +\infty,$$

c'est - à - dire que

$$\Theta(x) > 1 \text{ dans } \Omega, \quad \nabla\Theta\nu < 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad \sup_{x\in\Omega}\Theta = M < +\infty,$$

avec $M = (M'+1)^{\frac{1}{k}}$. D'où le résultat.

■

Chapitre 2

Existence globale des solutions

Dans cette section, nous étudions l'existence globale des solutions du problème (1) et prouvons le théorème (5) . La méthode utilisé est de construire une solution globalement supérieure et d'utiliser le principe de comparaison pour atteindre notre objectif.

Théorème 5. *Supposons que les données initiales* $(u_0(x), v_0(x))$ *satisfont à l'hypothèse* (1), *alors la solution du problème* (1) *existe globalement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. $\alpha\beta < mn(p-1)(q-1)$,
2. $\alpha\beta = mn(p-1)(q-1)$ *et la mesure de* Ω *(*$|\Omega|$*) est suffisamment petit,*
3. $\alpha\beta > mn(p-1)(q-1)$ *et les valeurs initiales sont suffisamment petites.*

Preuve

Soit $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ les solutions uniques des problèmes elliptiques suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{m,p}\varphi = 1, & x \in \Omega, \\ \varphi = 1, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\Delta_{n,q}\psi = 1, & x \in \Omega, \\ \psi = 1, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Puis, d'après le lemme (2), nous obtenons les relations suivantes

$$\varphi(x), \psi(x) > 1 \, dans \, \Omega, \qquad \nabla\varphi.\nu, \nabla\psi.\nu < 0 \, sur \, \partial\Omega. \tag{2.1}$$

$$\sup_{x\in\Omega} \varphi = M_1 < +\infty, \qquad \sup_{x\in\Omega} \psi = M_2 < +\infty, \tag{2.2}$$

où M_1, M_2 sont des constants positives.

Soit $\bar{u}(x,t) = \Lambda_1\varphi(x), \bar{v}(x,t) = \Lambda_2\psi(x)$, où $\Lambda_1, \Lambda_2 > 0$ deux constantes que nous déterminerons après. Ensuite, par un calcul direct, on trouve

$$\bar{u}_t - \Delta_{m,p}\bar{u} = \Lambda_1^{m(p-1)}, \quad \bar{v}_t - \Delta_{n,q}\bar{v} = \Lambda_2^{n(q-1)},$$

et

$$a\int_\Omega \left(\bar{v}^\alpha + \bar{u}^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}\right) dx \le a\left(|\Omega| M_2^\alpha \Lambda_2^\alpha + |\Omega| M_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}} \Lambda_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}\right),$$
$$b\int_\Omega \left(\bar{w}^\beta + \bar{v}^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}\right) dx \le b\left(|\Omega| M_1^\beta \Lambda_1^\beta + |\Omega| M_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}} \Lambda_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}\right).$$

Alors $(\bar{u}(x,t), \bar{v}(x,t))$ est une sur-solution du problème (1), si

$$\Lambda_1^{m(p-1)} \ge a\left(|\Omega| M_2^\alpha \Lambda_2^\alpha + |\Omega| M_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}} \Lambda_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}\right),$$

et

$$\Lambda_2^{n(q-1)} \ge b\left(|\Omega| M_1^\beta \Lambda_1^\beta + |\Omega| M_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}} \Lambda_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}\right),$$

avec

$$\bar{u}(x,t)|_{\partial\Omega} \ge 0, \quad \bar{v}(x,t)|_{\partial\Omega} \ge 0, \quad \bar{u}(x,0) \ge u_0(x), \quad \bar{v}(x,0) \ge v_0(x).$$

Par suite, nous prouvons (2.1) en trois cas.

1. $\alpha\beta < \mathrm{mn}(p-1)(q-1)$, si l'on choisit Λ_1, Λ_2 assez grand tels que

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^{m(p-1)} &\ge a\left(|\Omega| M_2^\alpha \Lambda_2^\alpha + |\Omega| M_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}} \Lambda_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}\right)\\
&\ge a|\Omega| M_2^\alpha\left[b\left(|\Omega| M_1^\beta \Lambda_1^\beta + |\Omega| M_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}} \Lambda_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}\right)\right]^{\frac{\alpha}{m(q-1)}} + a|\Omega| M_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}} \Lambda_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}\\
&\ge ab^{\frac{\alpha}{n(q-1)}} |\Omega| |\Omega|^{\frac{\alpha}{n(q-1)}} M_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}} M_2^\alpha \Lambda_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}} + a|\Omega| M_1^{\frac{\alpha}{n(q-1)}} \Lambda_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}\\
&\ge \left(ab^{\frac{\alpha}{n(q-1)}} |\Omega|^{1+\frac{\alpha}{n(q-1)}} M_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}} M_2^\alpha + a|\Omega| M_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}\right) \Lambda_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}},
\end{aligned}$$

c' est-à-dire que

$$\Lambda_1^{m(p-1)-\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}} \ge \left(ab^{\frac{\alpha}{n(q-1)}} |\Omega|^{\frac{n(q-1)+\alpha}{n(q-1)}} M_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}} M_2^\alpha + a|\Omega| M_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}\right),$$
$$\Lambda_1^{\frac{mn(p-1)(q-1)-\alpha\beta}{n(q-1)}} \ge \left(ab^{\frac{\alpha}{n(q-1)}} |\Omega|^{\frac{n(q-1)+\alpha}{n(q-1)}} M_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}} M_2^\alpha + a|\Omega| M_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}\right),$$

d'où

$$\Lambda_1 \ge \left(ab^{\frac{\alpha}{n(q-1)}} |\Omega|^{\frac{n(q-1)+\alpha}{n(q-1)}} M_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}} M_2^\alpha + a|\Omega| M_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}\right)^{\frac{n(q-1)}{mn(p-1)(q-1)-\alpha\beta}}.$$

De même

$$\begin{aligned}
\Lambda_2^{n(q-1)} &\geq b\left(|\Omega| M_1^\beta \Lambda_1^\beta + |\Omega| M_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}} \Lambda_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}\right) \\
&\geq b|\Omega| M_1^\beta \left[a\left(|\Omega| M_2^\alpha \Lambda_2^\alpha + |\Omega| M_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}} \Lambda_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}\right)\right]^{\frac{\beta}{m(p-1)}} + b|\Omega| M_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}} \Lambda_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}} \\
&\geq a^{\frac{\beta}{m(p-1)}} b|\Omega||\Omega|^{\frac{\beta}{m(p-1)}} M_1^\beta \Lambda_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}} \Lambda_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}} + b|\Omega| M_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}} \Lambda_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}} \\
&\geq \left(a^{\frac{\beta}{m(p-1)}} b|\Omega|^{1+\frac{\beta}{m(p-1)}} M_1^\beta \Lambda_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}} + b|\Omega| M_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}\right) \Lambda_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}
\Lambda_2^{n(q-1)-\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}} &\geq \left(a^{\frac{\beta}{m(p-1)}} b|\Omega|^{\frac{m(p-1)+\beta}{m(p-1)}} M_1^\beta \Lambda_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}} + b|\Omega| M_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}\right), \\
\Lambda_2^{\frac{mn(p-1)(q-1)-\alpha\beta}{m(p-1)}} &\geq \left(a^{\frac{\beta}{m(p-1)}} b|\Omega|^{\frac{m(p-1)+\beta}{m(p-1)}} M_1^\beta \Lambda_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}} + b|\Omega| M_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}\right),
\end{aligned}$$

alors

$$\Lambda_2 \geq \left(a^{\frac{\beta}{m(p-1)}} b|\Omega|^{\frac{m(p-1)+\beta}{m(p-1)}} M_1^\beta \Lambda_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}} + b|\Omega| M_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}\right)^{\frac{m(p-1)}{mn(p-1)(q-1)-\alpha\beta}}.$$

Donc on choisit

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &> \max\left\{\max_{x\in\bar{\Omega}} u_0(x), \left(ab^{\frac{\alpha}{n(q-1)}} |\Omega|^{\frac{n(q-1)+\alpha}{n(q-1)}} M_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}} M_2^\alpha + a|\Omega| M_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}\right)^{\frac{n(q-1)}{mn(p-1)(q-1)-\alpha\beta}}\right\}, \\
\Lambda_2 &> \max\left\{\max_{x\in\bar{\Omega}} v_0(x), \left(a^{\frac{\beta}{m(p-1)}} b|\Omega|^{\frac{m(p-1)+\beta}{m(p-1)}} M_1^\beta \Lambda_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}} + b|\Omega| M_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}\right)^{\frac{m(p-1)}{mn(p-1)(q-1)-\alpha\beta}}\right\},
\end{aligned}$$

alors (2.1) est satisfaite.

2. $\alpha\beta = mn(p-1)(q-1)$, on peut choisir Λ_1, Λ_2 assez grand , soient

$$\Lambda_1 > \max_{x\in\bar{\Omega}} u_0(x), \quad \Lambda_2 > \max_{x\in\bar{\Omega}} v_0(x),$$

et $|\Omega|$ suffisamment petit pour que

$$\begin{aligned}
|\Omega| \leq \min\Bigg\{&\left(ab^{\frac{\alpha}{n(q-1)}} M_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}} M_2^\alpha\right)^{\frac{n(q-1)}{n(q-1)+\alpha}}, \quad \left(a^{\frac{\beta}{m(p-1)}} b M_1^\beta M_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}\right)^{\frac{m(p-1)}{m(p-1)+\beta}}, \\
&M_1^{\frac{\alpha\beta}{n(1-q)}}/a, \quad M_2^{\frac{\alpha\beta}{m(1-p)}}/b\Bigg\},
\end{aligned}$$

et (2.1) satisfaite.

3. $\alpha\beta > mn(p-1)(q-1)$ on prend $\Lambda_1,\ \Lambda_2$ suffisamment petits

$$\Lambda_1 < \left(ab^{\frac{\alpha}{n(q-1)}}|\Omega|^{\frac{n(q-1)+\alpha}{n(q-1)}}M_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}M_2^{\alpha} + a|\Omega|M_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}\right)^{\frac{n(1-q)}{\alpha\beta - mn(p-1)(q-1)}},$$

$$\Lambda_2 < \left(a^{\frac{\beta}{m(p-1)}}b|\Omega|^{\frac{m(p-1)+\beta}{m(p-1)}}M_1^{\beta}\Lambda_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}} + b|\Omega|M_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}\right)^{\frac{m(1-p)}{\alpha\beta - mn(p-1)(q-1)}}.$$

De plus, si les données initiales sont suffisamment petites tels que $u_0(x) < \Lambda_1$ et $v_0(x) < \Lambda_2$, alors (2.1) satisfaite. Et la preuve du théorème est complète.

■

Chapitre 3
Explosion en temps fini des solutions

Dans cette section , nous étudions l'explosion en temps fini des solutions du problème (1) nous enonçons et prouvons le théorème de l'explosion en temps fini du problème . La méthode principale consiste à construire une sous solution explose en temps fini et d'utiliser le principe de comparaison.

Théorème 6. *Supposons que les données initiales* $(u_0(x), v_0(x))$ *satisfont L'hypothese* (1)*, alors la solution du probéme* (1) *explose en temps fini si l'une des conditions suivantes est vérifiée*

1. $\alpha\beta > mn(p-1)(q-1)$ *et les valeurs initiales sont suffissamment grandes.*

2. $\alpha\beta = mn(p-1)(q-1)$ *et* $|\Omega|$ *contient une boule suffisamment grande.*

Ensuite, nous considérons un cas particulies $\alpha = m(p-1), \quad \beta = n(q-1)$.

Preuve

1. Si, $\alpha\beta > mn(p-1)(q-1)$ et supposons que les données initiales sont suffisamment grandes. On définit

$$\underline{u}(x,t) = (\tau - t)^{-\gamma_1} V_1(\xi), \qquad \xi = |x|(\tau - t)^{-l_1}, \qquad V_1(\xi) = \left(1 + \frac{A}{2} - \frac{\xi^2}{2A}\right)^{\frac{1}{m}},$$

$$\underline{v}(x,t) = (\tau - t)^{-\gamma_2} V_2(\eta), \qquad \eta = |x|(\tau - t)^{-l_2}, \qquad V_1(\eta) = \left(1 + \frac{A}{2} - \frac{\eta^2}{2A}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Où $\gamma_i, l_i > 0 (i = 1, 2), A > 1$ et $0 < \tau < 1$ sont des paramètres à déterminer après. Il est facile de voir que $\underline{u}(x,t), \underline{v}(x,t)$ explosent en temps τ, donc il suffit de prouver que $(\underline{u}(x,t), \underline{v}(x,t))$ est une sous solution du problème (1). Si on choisit τ suffisamment petit pour que

$$supp\,\underline{u}(x,t) = \overline{B(0,R(\tau-t)^{l_1})} \subset \overline{B(0,R\tau^{l_1})} \subset \Omega,$$

$$supp\,\underline{v}(x,t) = \overline{B(0,R(\tau-t)^{l_2})} \subset \overline{B(0,R\tau^{l_2})} \subset \Omega,$$

où $R = (A(2+A))^{\frac{1}{2}}$, alors $\bar{u}(x,t)|_{\partial\Omega} = 0$, $\bar{v}(x,t)|_{\partial\Omega} = 0$. Ensuite si l'on choisit les données initial assez grandes tels que

On a

$$\underline{u}(x,0) \leq u_0(x), \qquad \underline{v}(x,0) \leq v_0(x),$$

ou encore

$$\underline{u}(x,0) = \tau^{-\gamma_1}V_1(\xi), \qquad \xi = (|x|\tau^{-l_1}),$$

$$\underline{v}(x,0) = \tau^{-\gamma_2}V_1(\eta), \qquad \eta = (|x|\tau^{-l_2}),$$

donc

$$u_0(x) \geq \frac{1}{\tau^{\gamma_1}}V_1\left(\frac{|x|}{\tau^{l_1}}\right), \qquad v_0(x) \geq \frac{1}{\tau^{\gamma_2}}V_2\left(\frac{|x|}{\tau^{l_2}}\right).$$

Ainsi $(\underline{u}(x,t), \underline{v}(x,t))$ est une sous solution du problème (1) si

$$\underline{u}_t - \Delta_{m,p}\underline{u} \leq a\int_{\Omega}\left(\underline{v}^{\alpha} + \underline{u}^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}\right)dx, \qquad \underline{v}_t - \Delta_{n,q}\underline{v} \leq b\int_{\Omega}\left(\underline{u}^{\beta} + \underline{v}^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}\right)dx, \tag{3.1}$$

un calcul simple , nous donne

$$\begin{aligned} \underline{u}_t &= \left(\frac{V_1(\xi)}{(\tau-t)^{\gamma_1}}\right)' \\ &= \frac{(V_1(\xi))'(\tau-t)^{\gamma_1} + \gamma_1(\tau-t)^{\gamma_1-1}V_1(\xi)}{(\tau-t)^{2\gamma_1}} \\ &= \frac{V_1'(\xi)\xi' + \gamma_1(\tau-t)^{-1}V_1(\xi)}{(\tau-t)^{\gamma_1}} \\ &= \frac{[V_1'(\xi)l_1\xi + \gamma_1V_1(\xi)]\,(\tau-t)^{-1}}{(\tau-t)^{\gamma_1}} \\ &= \frac{\gamma_1V_1(\xi) + l_1\xi V_1'(\xi)}{(\tau-t)^{\gamma_1+1}}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

de même

$$\begin{aligned}\underline{v}_t &= \left(\frac{V_2(\eta)}{(\tau-t)^{\gamma_2}}\right)' \\ &= \frac{(V_2(\eta))'(\tau-t)^{\gamma_2}+\gamma_2(\tau-t)^{\gamma_2-1}V_2(\eta)}{(\tau-t)^{2\gamma_2}} \\ &= \frac{V_2'(\eta)\eta'+\gamma_2(\tau-t)^{-1}V_2(\eta)}{(\tau-t)^{\gamma_2}} \\ &= \frac{\left[V_2'(\eta)l_2\eta+\gamma_2V_2(\eta)\right](\tau-t)^{-1}}{(\tau-t)^{\gamma_2}} \\ &= \frac{\gamma_2V_2(\eta)+l_2\eta V_2'(\eta)}{(\tau-t)^{\gamma_2+1}},\end{aligned} \tag{3.3}$$

et

$$\begin{aligned}\nabla\underline{u}^m &= \nabla\left(\frac{V_1^m(\xi)}{(\tau-t)^{m\gamma_1}}\right) \\ &= \left(\frac{(1+\frac{A}{2}-\frac{\xi^2}{2A})}{(\tau-t)^{m\gamma_1}}\right)' \\ &= \left(\frac{-|x|^2}{2A(\tau-t)^{m\gamma_1+2l_1}}\right)' \\ &= \frac{-x}{A(\tau-t)^{m\gamma_1+2l_1}},\end{aligned} \tag{3.4}$$

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}\nabla\underline{v}^m &= \nabla\left(\frac{V_2^m(\eta)}{(\tau-t)^{m\gamma_2}}\right) \\ &= \left(\frac{(1+\frac{A}{2}-\frac{\eta^2}{2A})}{(\tau-t)^{m\gamma_2}}\right)' \\ &= \left(\frac{-|x|^2}{2A(\tau-t)^{m\gamma_2+2l_2}}\right)' \\ &= \frac{-x}{A(\tau-t)^{m\gamma_2+2l_2}},\end{aligned} \tag{3.5}$$

alors, on a

$$\Delta\underline{u}^m = \frac{-N}{A(\tau-t)^{m\gamma_1+2l_1}} \Longrightarrow -\Delta\underline{u}^m = \frac{N}{A(\tau-t)^{m\gamma_1+2l_1}}, \tag{3.6}$$

$$\Delta\underline{v}^n = \frac{-N}{A(\tau-t)^{n\gamma_2+2l_2}} \Longrightarrow -\Delta\underline{v}^n = \frac{N}{A(\tau-t)^{n\gamma_2+2l_2}}, \tag{3.7}$$

et

$$\begin{aligned}\Delta_{m,p}u &= \nabla(|\nabla\underline{u}^m|^{p-2}\nabla\underline{u}^m) \\ &= |\nabla\underline{u}^m|^{p-2}\Delta\underline{u}^m+(p-2)|\nabla\underline{u}|^{p-4}(\nabla\underline{u}^m)\Delta\underline{u}^m \\ &= |\nabla\underline{u}^m|^{p-2}\Delta\underline{u}^m+(p-2)|\nabla\underline{u}|^{p-2}\Delta\underline{u}^m \\ &= (p-1)|\nabla\underline{u}|^{p-2}\Delta\underline{u}^m,\end{aligned} \tag{3.8}$$

de même

$$\begin{aligned}\Delta_{n,q}v &= \nabla(|\nabla\underline{v}^n|^{q-2}\nabla\underline{v}^n)\\ &= |\nabla\underline{v}^n|^{q-2}\Delta\underline{v}^n + (q-2)|\nabla\underline{v}|^{q-4}(\nabla\underline{v}^n)\Delta\underline{v}^n\\ &= |\nabla\underline{v}^n|^{q-2}\Delta\underline{v}^n + (q-2)|\nabla\underline{v}|^{q-2}\Delta\underline{v}^n\\ &= (q-1)|\nabla\underline{v}|^{q-2}\Delta\underline{v}^n.\end{aligned} \tag{3.9}$$

En utilisant la notation $d(\Omega) = diam(\Omega)$, on en déduit d'après (3.8), (3.4), (3.6), que

$$|\Delta_{m,p}\underline{u}| = (p-1)\frac{N}{A(\tau-t)^{m\gamma_1+2l_1}}\left(\frac{x}{A(\tau-t)^{m\gamma_1+2l_1}}\right)^{p-2},$$

puisque $\dfrac{x}{A} < x < d(\Omega)$ on a :

$$|\Delta_{m,p}\underline{u}| \leq \frac{N(p-1)(d(\Omega))^{p-2}}{A(\tau-t)^{(m\gamma_1+2l_1)(p-1)}}, \tag{3.10}$$

de même, de (3.9), (3.5) et (3.7), on trouve

$$|\Delta_{n,q}\underline{v}| = (q-1)\frac{N}{A(\tau-t)^{n\gamma_2+2l_2}}\left(\frac{x}{A(\tau-t)^{n\gamma_2+2l_2}}\right)^{q-2},$$

c'est-à-dire

$$|\Delta_{n,q}\underline{v}| \leq \frac{N(q-1)(d(\Omega))^{q-2}}{A(\tau-t)^{(m\gamma_2+2l_2)(q-1)}} \tag{3.11}$$

car $\dfrac{x}{A} < x < d(\Omega)$.

Par suite, calculons le terme non local de (3.1)

comme

$$\eta = |x|(\tau-t)^{-l_2} \Longrightarrow |x| = \eta(\tau-t)^{l_2},$$

et

$$\xi = |x|(\tau-t)^{-l_1} \Longrightarrow |x| = \xi(\tau-t)^{l_1},$$

alors $\quad dx = (\tau-t)^{l_2}d\eta \quad$ et $\quad dx = (\tau-t)^{l_1}d\xi,$

puisque $x \in B(0, R(\tau-t)^{l_2})$ on a

$$\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow \eta = 0,\\ x = R(\tau-t)^{l_2}, x = R(\tau-t)^{l_1} \Longrightarrow \eta = R,\end{cases}$$

et $x \in B(0, R(\tau - t)^{l_1})$ donc

$$\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow \xi = 0, \\ x = R(\tau - t)^{l_1} \Longrightarrow \xi = R, \end{cases}$$

on obtient $\quad \eta \in B(0, R), \;$ et $\; \xi \in B(0, R)$

$$\begin{aligned} a\int_{\Omega}\left(\underline{v}^{\alpha}(x,t) + \underline{u}^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}\right)dx &= a\int_{B(0,R(\tau-t)^{l_2})}(\tau - t)^{\alpha\gamma_2}V_2^{\alpha}(\eta)dx \\ &+ a\int_{B(0,R(\tau-t)^{l_1})}(\tau - t)^{\frac{(\alpha\beta)}{n(q-1)}\gamma_1}V_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}(\xi)dx \\ &= \frac{a}{(\tau - t)^{\alpha\gamma_2}}\int_{B(0,R(\tau-t)^{l_2})}V_2(\eta)dx \\ &+ \frac{a}{(\tau - t)^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}\gamma_1}}\int_{B(0,R(\tau-t)^{l_1})}V_2(\xi)dx \\ &= \frac{a}{(\tau - t)^{\alpha\gamma_2}}\int_{B(0,R)}V_2(\eta)(\tau - t)^{l_2}d\eta \\ &+ \frac{a}{(\tau - t)^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}\gamma_1}}\int_{B(0,R)}V_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}(\xi)(\tau - t)^{l_1}d\xi \\ &= \frac{aM_1}{(\tau - t)^{\alpha\gamma_2 - Nl_2}} + \frac{aM_2}{(\tau - t)^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}\gamma_1 - Nl_1}}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Où

$$M_1 = \int_{B(0,R)}V_2^{\alpha}(\eta)d\eta, \qquad M_2 = \int_{B(0,R)}V_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}(\xi)d\xi.$$

D'autre parte

$$\begin{aligned} b\int_{\Omega}\left(\underline{u}^{\beta}(x,t) + \underline{v}^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}\right)dx &= b\int_{B(0,R(\tau-t)^{l_1})}(\tau - t)^{\beta\gamma_1}V_1^{\beta}(\xi)dx \\ &+ b\int_{B(0,R(\tau-t)^{l_2})}(\tau - t)^{\frac{(\alpha\beta)}{m(p-1)}\gamma_2}V_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}(\eta)dx \\ &= \frac{b}{(\tau - t)^{\beta\gamma_1}}\int_{B(0,R(\tau-t)^{l_1})}V_1(\xi)dx \\ &+ \frac{b}{(\tau - t)^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}\gamma_2}}\int_{B(0,R(\tau-t)^{l_2})}V_2(\eta)dx \\ &= \frac{b}{(\tau - t)^{\beta\gamma_1}}\int_{B(0,R)}V_1(\xi)(\tau - t)^{l_1}d\xi \\ &+ \frac{b}{(\tau - t)^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}\gamma_2}}\int_{B(0,R)}V_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}(\eta)(\tau - t)^{l_2}d\eta \\ &= \frac{aM_3}{(\tau - t)^{\beta\gamma_1 - Nl_1}} + \frac{bM_4}{(\tau - t)^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}\gamma_2 - Nl_2}} \end{aligned} \tag{3.13}$$

avec

$$M_3=\int_{B(0,R)}V_1^{\beta}(\xi)d\xi,\qquad M_4=\int_{B(0,R)}V_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}(\eta)d\eta.$$

(a) Si $0\leq\xi,\eta\leq A$, alors $1\leq V_1(\xi)\leq(1+\dfrac{A}{2})^{\frac{1}{m}},\quad 1\leq V_2(\eta)\leq(1+\dfrac{A}{2})^{\frac{1}{n}}$ et $V_1'(\xi)\leq 0, V_2'(\eta)\leq 0$. Combinons les inégalités ci-dessus en utilisant les expressions de $M_1,\ M_2$, M_3 et M_4 on trouve

$$M_1=\int_{B(0,R)}V_2^{\alpha}(\eta)d\eta\geq\int_{B(0,A)}V_2(\eta)d\eta\geq|B(0,A)|,\tag{3.14}$$

$$M_2=\int_{B(0,R)}V_1^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}(\xi)d\xi\geq\int_{B(0,A)}V_1(\xi)d\xi\geq|B(0,A)|,\tag{3.15}$$

$$M_3=\int_{B(0,R)}V_1^{\beta}(\xi)d\xi\geq\int_{B(0,A)}V_1^{\beta}(\xi)d\xi\geq|,B(0,A)|\tag{3.16}$$

$$M_4=\int_{B(0,R)}V_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}(\eta)d\eta\geq\int_{B(0,A)}V_2^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}(\eta)d\eta\geq|B(0,A)|.\tag{3.17}$$

Les relations (3.2) - (3.17) nous donne

$$\underline{u}_t-\Delta_{m,p}\underline{u}-a\int_{\Omega}\left(\underline{v}^{\alpha}(x,t)+\underline{u}^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}(x,t)\right)dx$$

$$\leq\frac{\gamma_1(1+\frac{A}{2})^{\frac{1}{m}}}{(\tau-t)^{\gamma_1+1}}+\frac{N(p-1)(d(\Omega))^{p-2}}{(\tau-t)^{(m\gamma_1+2l_1)(p-1)}}-\frac{a|B(0,A)|}{(\tau-t)^{\alpha\gamma_2-Nl_2}}-\frac{a|B(0,A)|}{(\tau-t)^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}\gamma_1-Nl_1}}\tag{3.18}$$

de même, de (3.2) - (3.17), on obtient

$$\underline{v}_t-\Delta_{n,q}\underline{v}-b\int_{\Omega}\left(\underline{u}^{\beta}(x,t)+\underline{v}^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}(x,t)\right)dx$$

$$\leq\frac{\gamma_2(1+\frac{A}{2})^{\frac{1}{n}}}{(\tau-t)^{\gamma_2+1}}+\frac{N(q-1)(d(\Omega))^{q-2}}{(\tau-t)^{(n\gamma_2+2l_2)(q-1)}}-\frac{b|B(0,A)|}{(\tau-t)^{\beta\gamma_1-Nl_1}}-\frac{b|B(0,A)|}{(\tau-t)^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}\gamma_2-Nl_1}}.\tag{3.19}$$

(b) Si $\xi,\ \eta\geq A$ et comme $m,\ n\geq 1$, on a $V_1(\xi)\leq 1,\ V_2(\eta)\leq 1$ et $V_1'(\xi)\leq-\dfrac{1}{m},\ V_2'\leq-\dfrac{1}{n}$. On combine les inégalités (3.2)- (3.13) avec le fait que $M_1\geq 0,\ M_2\geq 0,$ il résulte que

$$\underline{u}_t-\Delta_{m,p}\underline{u}-a\int_{\Omega}\left(\underline{v}^{\alpha}(x,t)+\underline{u}^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}(x,t)\right)dx\leq\frac{\gamma_1-\frac{1}{m}l_1A}{(\tau-t)^{\gamma_1+1}}+\frac{N(p-1)(d(\Omega))^{p-2}}{(\tau-t)^{(m\gamma_1+2l_1)(p-1)}}\tag{3.20}$$

et de (3.2)- (3.13), avec $M_3\geq 0, M_4\geq 0,$ il découle

$$\underline{v}_t-\Delta_{n,q}\underline{v}-b\int_{\Omega}\left(\underline{u}^{\beta}(x,t)+\underline{v}^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}(x,t)\right)dx\leq\frac{\gamma_2-\frac{1}{n}l_2A}{(\tau-t)^{\gamma_2+1}}+\frac{N(q-1)(d(\Omega))^{q-2}}{(\tau-t)^{(n\gamma_2+2l_2)(q-1)}}.\tag{3.21}$$

(c) Si $0\leq\xi\leq A$ et $\eta\geq A,$ on a (3.18) et (3.21) sont satisfaites. Si $\xi\geq A$ et $0\leq\eta\leq A$ on a aussi (3.19) et (3.20) sont verifiés .

Donc, d'après ce qui précède, (3.1) est satisfaite si les membres de droite de (3.18) - (3.21) sont négatifs.

Puisque $p,\ q > 2, m,\ n \geq 1$ et $\alpha\beta > mn(p-1)(q-1) > mn \geq 1,$ on peut choisir les deux constantes $l_1, l_2 > 0$ suffisamment petites tels que

$$\max\left\{\frac{n(q-1)(Nl_1+1)}{\alpha\beta - n(q-1)}, \frac{1+\alpha+N(l_2+\alpha l_1)}{\alpha\beta-1}\right\} < \frac{1-2l_1(p-1)}{m(p-1)-1},$$
$$\max\left\{\frac{m(p-1)(Nl_2+1)}{\alpha\beta - m(p-1)} \frac{1+\beta+N(l_1+\beta l_2)}{\alpha\beta-1}\right\} < \frac{1-2l_2(q-1)}{n(q-1)-1},$$

alors on peut choisir deux constantes $\gamma_1,\ \gamma_2$ pour que

$$\max\left\{\frac{n(q-1)(Nl_1+1)}{\alpha\beta - n(q-1)}, \frac{1+\alpha+N(l_2+\alpha l_1)}{\alpha\beta-1}\right\} < \gamma_1 < \frac{1-2l_1(p-1)}{m(p-1)-1},$$
$$\max\left\{\frac{m(p-1)(Nl_2+1)}{\alpha\beta - m(p-1)} \frac{1+\beta+N(l_1+\beta l_2)}{\alpha\beta-1}\right\} < \gamma_2 < \frac{1-2l_2(q-1)}{n(q-1)-1},$$

ce qui donne

$$(m\gamma_1+2l_1)(p-1) < \gamma_1+1 < \max\left\{\alpha\gamma_2 - Nl_2, \frac{\alpha\beta}{n(q-1)}\gamma_1 - Nl_1\right\},$$

$$(n\gamma_2+2l_2)(q-1) < \gamma_2+1 < \max\left\{\beta\gamma_1 - Nl_1, \frac{\alpha\beta}{m(p-1)}\gamma_2 - Nl_2\right\}.$$

De plus, si l'on choisit $A > \max\{1, m\gamma_1/l_1, n\gamma_2/l_2\}$ alors pour $\tau > 0$ suffisament petit, les membres de droits de (3.18) -(3.21) sont négatifs, et (3.1) est bien satisfaite, ce qui montre l'assertion (1) du Théorème (6).

2. Si $\alpha\beta = mn(p-1)(q-1)$ et Ω contient une boule suffisamment grande , on suppose que $0 \in \Omega$ et une boule $B(0,R) \subset\subset \Omega$ .Alors on doit montrer que la solution radiale du problème (1) dans $(B(0,R)\times[0,T])\times(B(0,R)\times[0,T])$ explose en temps fini. En effet

   Puisque $p, q > 2$ et $\alpha\beta = mn(p-1)(q-1)$, on peut choisir deux constantes l_1, l_2 tels que $\dfrac{\alpha}{m(p-1)} = \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{n(q-1)}{\beta}$ ce qui fait que $l_2\alpha = m(p-1)l_1,\ l_1\beta = n(q-1)l_2$.

   Pour prouver le point 2 du théorème (6), les deux problèmes elliptiques

$$\begin{cases} -\Delta_{m,p}\varphi = 1, & x \in \Omega, \\ \varphi = 1 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\Delta_{n,q}\psi = 1, & x \in \Omega, \\ \psi = 1, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

   peuvent se transférer en coordonées radiales sur $(0,R)$ aux problèmes suivants (voir [17])

$$\begin{cases} -\left(|(\varphi^m)'|^{p-2}(\varphi^m)'\right)' + \dfrac{N-1}{r}|(\varphi^m)'|^{p-2}(\varphi^m)' = 1, \\ \varphi(0) = 0, \qquad \varphi(R) = 0, \end{cases} \tag{3.22}$$

$$\begin{cases} -\left(|(\psi^n)'|^{q-2}(\psi^n)'\right)' + \dfrac{N-1}{r}|(\psi^n)'|^{q-2}(\varphi^n)' = 1, \\ \psi(0) = 0, \qquad \psi(R) = 0. \end{cases} \tag{3.23}$$

Ces deux derniers systemes peuvent s'écrire en multipliant les premières équations de (3.22) et (3.23) par r^{N-1} comme suit

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dr}\left(r^{N-1}|\dfrac{d\varphi^m}{dr}|^{p-2}\dfrac{d\varphi^m}{dr}\right) = r^{N-1}, \\ \varphi'(0) = 0, \quad \varphi(R) = 0, \end{cases} \tag{3.24}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dr}\left(r^{N-1}|\dfrac{d\varphi^m}{dr}|^{p-2}\dfrac{d\varphi^m}{dr}\right) = r^{N-1}, \\ \psi'(0) = 0, \quad \psi(R) = 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

D'après ces deux systèmes on peut montrer que

$$\varphi(r) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{m}} \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{m(p-1)}} (R^{\frac{p}{p-1}} - r^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{1}{m}},$$

$$\psi(r) = \left(\frac{q-1}{q}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{n(q-1)}} (R^{\frac{q}{q-1}} - r^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{1}{n}}.$$

En effet :

D'après les deux systèmes au dessus (3.24) et (3.25) On en deduit que $\varphi'(r) \leq 0$ et $\psi'(r) \leq 0$.

En intégrant la première équation de (3.24) de 0 à r on a

$$-\int_0^r \left(\tau^{N-1}|(\varphi^m(\tau))'|^{p-2}(\varphi^m(\tau))'\right)' d\tau = \int_0^r \tau^{N-1} d\tau$$

$$-r^{N-1}|(\varphi^m(r))'|^{p-2}(\varphi^m(r))' = \frac{1}{N}r^N,$$

divisons les deux membres par r^{N-1} on trouve

$$-|(\varphi^m(r))'|^{p-2}(\varphi^m(r))' = \frac{1}{N}r, \tag{3.26}$$

et comme $\varphi'(r) \leq 0$ on a : $\varphi^m(r)' = m\varphi^{m-1}(r)\varphi'(r) \leq 0$

$$|(\varphi^m(r))'|^{p-2}(\varphi^m(r))' = \left(-(\varphi^m(r))'\right)^{p-2}(\varphi^m(r))'$$

$$\Longrightarrow -|(\varphi^m(r))'|^{p-2}(\varphi^m(r))' = (-(\varphi^m(r))')^{p-1},$$

donc (3.26) revient

$$(-(\varphi^m(r))')^{p-1} = \frac{1}{N}r \Longrightarrow -(\varphi^m(r))' = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} r^{\frac{1}{p-1}},$$

on integre encore cette dernière expression de r à R on obtient

$$-\int_r^R (\varphi^m(\tau))'d\tau = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} \int_r^R \tau^{\frac{1}{p-1}}d\tau$$

$$-\left[\varphi^m(\tau)\right]_r^R = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} \cdot \left[\frac{1}{\frac{1}{p-1}+1}\tau^{\frac{1}{p-1}+1}\right]_r^R$$

$$\varphi^m(r) - \varphi^m(R) = \left(\frac{p-1}{p}\right)\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(R^{\frac{p}{p-1}} - r^{\frac{p}{p-1}}\right).$$

C'est- à- dire que

$$\varphi(r) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{m}}\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{m(p-1)}}\left(R^{\frac{p}{p-1}} - r^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Et de même on obtient que

$$\psi(r) = \left(\frac{q-1}{q}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{n(q-1)}}\left(R^{\frac{q}{q-1}} - r^{\frac{q}{q-1}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Ce qui fait demontrer.

Par l'hypothèse (1) sur les données initiales, nous pouvons choisir $s_0 > 0$ assez petit que

$$u_0(r) \geq s_0^{l_1}\varphi(r), \qquad v_0(r) \geq s_0^{l_2}\psi(r), \qquad \forall r \in [0, R),$$

ensuite, considérons maintenant le problème de Cauchy suivant avec $s(0) = s_0$

$$s'(t) = \min\left\{\frac{a(c_1+c_2)-1}{l_1M_1}, \frac{a(c_3+c_4)-1}{l_2M_2}\right\} s^{\Upsilon}(t),$$

$$\Upsilon = \min\{m(p-1)l_1 - l_1 + 1, \quad n(q-1)l_2 - l_2 + 1\}.$$

Où R est choisi suffisamment grand et $\omega(N)$ est le volume de la boule unitaire dans l'espace à N dimensions telle que :

$$\begin{aligned}
c_1 &= \int_{B(0,R)} \psi^{\alpha}(|x|)dx \\
&= \int_0^R dr \int_{\partial B(0,R)} \psi^{\alpha}(r)d\sigma \\
&= \int_0^R N\omega(N)\psi^{\alpha}(r)r^{N-1}dr \\
&= N\omega(N)\left(\frac{q-1}{q}\right)^{\frac{\alpha}{n}}\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{\alpha}{n(q-1)}}\int_0^R (R^{\frac{q}{q-1}}-r^{\frac{q}{q-1}})^{\frac{\alpha}{n}}r^{N-1}dr > \frac{1}{a},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_3 &= \int_{B(0,R)} \varphi^{\beta}(|x|)dx \\
&= \int_0^R dr \int_{\partial B(0,R)} \varphi^{\beta}(r)d\sigma \\
&= \int_0^R N\omega(N)\varphi^{\beta}(r)r^{N-1}dr \\
&= N\omega(N)\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{\beta}{m}}\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{\beta}{m(p-1)}}\int_0^R (R^{\frac{p}{p-1}}-r^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{\beta}{m}}r^{N-1}dr > \frac{1}{b}
\end{aligned}$$

et

$$c_2 = \int_{B(0,R)} \varphi^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}(|x|)dx > 0, \quad c_4 = \int_{B(0,R)} \psi^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}(|x|)dx > 0$$

avec

$$M_1 = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{m}}\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{m(p-1)}}R^{\frac{p}{p-1}}, \quad M_2 = \left(\frac{q-1}{q}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{n(q-1)}}R^{\frac{q}{q-1}}.$$

Puisque $\Upsilon > 1,$ il existe alors une constante τ^* telle que $\lim\limits_{t\to\tau^*} s(t) = +\infty$.

Enfin, nous constuisons $\underline{u}(r,t) = s^{l_1}\varphi(r)$ et $\underline{v}(r,t) = s^{l_2}\psi(r)$, alors $(\underline{u}(r,t), \underline{v}(r,t))$ explose en temps fini.

Donc, il suffit de prouver que $(\underline{u}(r,t), \underline{v}(r,t))$ est une sous solution du problème (1) sur $(B(0,R)\times[0,\tau])\times(B(0,R)\times[0,\tau])$. Faisons quelques calculs

$$\begin{aligned}
\Delta_{m,p}\underline{u} &= \nabla\cdot\left(|(\underline{u}^m)_r|^{p-2}(\underline{u}^m)_r\frac{x}{r}\right) \\
&= \sum_{i=1}^N \left(|(\underline{u}^m)_r|^{p-2}(\underline{u}^m)_r\frac{x_i}{r}\right)_{x_i} \\
&= \sum_{i=1}^N \left(|(\underline{u}^m)_r|^{p-2}(\underline{u}^m)_r\right)_r\frac{x_i^2}{r^2} + \sum_{i=1}^N |(\underline{u}^m)_r|^{p-2}(\underline{u}^m)_r\frac{r^2-x_i^2}{r^3} \\
&= \left(|(\underline{u}^m)_r|^{p-2}(\underline{u}^m)_r\right)_r + |(\underline{u}^m)_r|^{p-2}(\underline{u}^m)_r\frac{N-1}{r} \\
&= r^{1-N}\left(r^{N-1}|(\underline{u}^m)_r|^{p-2}(\underline{u}^m)_r\right)_r := \Im(\underline{u})
\end{aligned}$$

et

$$\Delta_{n,q}\underline{v} = r^{1-N}\left(r^{N-1}\left|(\underline{v}^n)_r\right|^{q-2}(\underline{v}^n)_r\right)_r := \Im(\underline{v})$$

Le problème (1) devient alors

$$\begin{aligned}
&\underline{u}_t - \Im(\underline{u}) - a\int_{B(0,R)}\left(\underline{v}^{\alpha}(|x|) + \underline{u}^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}(|x|)\right)dx \\
&\quad = l_1\varphi s^{l_1-1}s'(t) + s^{m(p-1)l_1}(t) - ac_1 s^{\alpha l_2}(t) - ac_2 s^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}l_1} \\
&\quad = \varphi s^{\ell_1-1}\left(l_1 s'(t) + \varphi^{-1}s^{m(p-1)l_1-l_1+1}(t) - ac_1\varphi^{-1}s^{\alpha\ell_2-l_1+1}(t) - ac_2\varphi^{-1}s^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}l_1-l_1+1}\right) \\
&\quad = \varphi s^{l_1-1}\left(l_1 s'(t) - (ac_1+ac_2-1)\varphi^{-1}s^{m(p-1)l_1-l_1+1}(t)\right) \\
&\quad \le \varphi s^{l_1-1}\left(l_1 s'(t) - (ac_1+ac_2-1)M_1^{-1}s^{m(p-1)l_1-l_1+1}(t)\right) \\
&\quad \le 0, \quad \forall (r,t)\in B(0,R)\times(0,\tau),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\underline{v}_t - \Im(\underline{v}) - b\int_{B(0,R)}\left(\underline{u}^{\beta}(|x|) + \underline{v}^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}(|x|)\right)dx \\
&\quad = l_2\psi s^{l_2-1}s'(t) + s^{n(q-1)l_2}(t) - bc_3 s^{\beta l_2}(t) - bc_4 s^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}l_2} \\
&\quad = \psi s^{l_2-1}\left(l_2 s'(t) + \psi^{-1}s^{n(q-1)l_2-l_2+1}(t) - bc_3\psi^{-1}s^{\beta l_1-l_2+1}(t) - ac_4\psi^{-1}s^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}l_2-l_2+1}\right) \\
&\quad = \psi s^{l_2-1}\left(l_2 s'(t) - (bc_3+bc_4-1)\psi^{-1}s^{n(q-1)l_2-l_2+1}(t)\right) \\
&\quad \le \psi s^{l_2-1}\left(l_2 s'(t) - (bc_3+ac_4-1)M_2^{-1}s^{n(q-1)l_2-l_2+1}(t)\right) \\
&\quad \le 0, \quad \forall (r,t)\in B(0,R)\times(0,\tau),
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
r^{N-1}\left|(\underline{u}^m)_r\right|^{p-2}(\underline{u}^m)_r\big|_{r=0} = 0, & r^{N-1}\left|(\underline{v}^n)_r\right|^{q-2}(\underline{v}^n)_r\big|_{r=0} = 0, & \forall t\in[0,\tau], \\
\underline{u}(R,t) = s^{l_1}\varphi(R) = 0, & \underline{v}(R,t) = s^{l_2}\psi(R) = 0, & \forall t\in[0,\tau], \\
\underline{u}(r,0) = s_0^{l_1}\varphi(r) \le u_0(r), & \underline{u}(r,0) = s_0^{l_2}\psi(r) \le v_0(r), & \forall r\in[0,R].
\end{array}$$

Donc, $(\underline{u}(r,t), \underline{v}(r,t))$ est une sous solution du problème (1) sur $(\overline{(B(0,R))}\times[0,\tau])$ $\times\,(\overline{(B(0,R))}\times[0,\tau])$. La preuve de Théorème (6) est complète

■

Cas particulier $\alpha = n(q-1), \beta = m(p-1)$

Dans cette section, nous considérons le problème (1) pour le cas particulier $\alpha = n(q-1)$, $\beta = m(p-1)$, d'une façon similaire aux section 2 et 3, nous prouvons le théorème en construisant des sous et sur solution particulières .

Théorème 7. *Supposons que les données initiales* $(u_0(x), v_0(x))$ *satisfont à l'hypothèse* (1), *et* $\alpha = n(q-1)$, $\beta = m(p-1)$

1. *Si* $\lambda\mu \leq (ab)^{-1}$ *alors la solution de problème* (1) *existe globale .*

2. *Si* $\lambda\mu > (ab)^{-1}$ *alors la solution de problème* (1) *explose en temps fini,*

   où

$$\lambda = \int_\Omega \xi^{m(p-1)}(x)dx, \qquad \mu = \int_\Omega \vartheta^{n(q-1)}(x)dx,$$

et $\xi(x)$, $\vartheta(x)$ *les solutions uniques des problèmes elliptiques suivants (voir [11, 14])*

$$\begin{cases} -\Delta_{m,p}\xi = 1, & x \in \Omega, \\ \xi = 1, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \qquad et \qquad \begin{cases} -\Delta_{n,q}\vartheta = 1, & x \in \Omega, \\ \vartheta = 1, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

Preuve

1. **Existence globale de la solution**

   Nous prouvons l'assertion (1) du théorème (7).

   De $\lambda\mu \leq (ab)^{-1}$, nous pouvons choisir deux constantes positives Λ_1, Λ_2 assez grandes pour que

$$a\mu \leq \frac{\Lambda_1^{m(p-1)}}{\Lambda_2^{n(q-1)}} \leq (b\lambda)^{-1}, \qquad \Lambda_1\xi(x) \geq u_0(x), \qquad \Lambda_2\vartheta(x) \geq v_0(x).$$

   Définissons $\bar{u}(x,t) = \Lambda_1\xi(x), \bar{v}(x,t) = \Lambda_2\vartheta(x)$, puis montrons que $(\bar{u}(x,t), \bar{v}(x,t))$ est une sur solution du problème (1) i.e., existe globalement . Après un calcul simple, il découle que

$$\bar{u}_t - \Delta_{m,p}\bar{u} - a\int_\Omega \bar{v}^{n(q-1)}dx - a\int_\Omega \bar{u}^{m(p-1)} = \Lambda_1^{m(p-1)} - a\mu\Lambda_2^{n(q-1)} - a\lambda\Lambda_1^{m(p-1)} \geq 0,$$
$$\bar{v}_t - \Delta_{n,q}\bar{v} - b\int_\Omega \bar{u}^{m(p-1)}dx - b\int_\Omega \bar{v}^{n(q-1)} = \Lambda_2^{n(q-1)} - b\lambda\Lambda_1^{m(p-1)} - b\mu\Lambda_2^{n(q-1)} \geq 0,$$

   telles que

$$\mu = \int_\Omega \vartheta^{n(q-1)}(x)dx, \qquad \lambda = \int_\Omega \xi^{m(p-1)}(x)dx.$$

   . On pose $\bar{u}(x,t) = \bar{v}(x,t) = 0$ sur $\partial\Omega \times [0, +\infty)$, on trouve que $(\bar{u}(x,t), \bar{v}(x,t))$ est une sur solution du problème (1). l'assertion (1) du théorème (7) est bien vérifiée

2. **Explosion en temps fini de la solution**

   On prouve le point (2) du théorème (7) .

   D'abord , nous introduisons le lemme suivant

Lemme 3. *Supposons que les données initiales* $(u_0(x), v_0(x))$ *satisfont aux hypothèse* (1) *et* $\lambda\mu > (ab)^{-1}$, *alors il existe deux constantes positives* σ_1, σ_2 *telle que*

$$u(x,t) \geq \sigma_1\xi(x), \qquad v(x,t) \geq \sigma_2\vartheta(x), \qquad \forall(x,t) \in \bar{Q}_T$$

Preuve

Puisque $\lambda\mu > (ab)^{-1}$, on peut choisir deux constantes positives σ_1, σ_2 telles que

$$a\mu \geq \frac{\sigma_1^{m(p-1)}}{\sigma_2^{n(q-1)}} \geq (b\lambda)^{-1}, \qquad \sigma_1\xi(x) \leq u_0(x), \qquad \sigma_2\vartheta(x) \leq v_0(x)$$

Soit $\underline{u}(x,t) = \sigma_1\xi(x)$, $\underline{v}(x,t) = \sigma_2\vartheta(x)$, on montre que $(\underline{u}, \underline{v})$ est une sous solution du problème (1), un calcul simple donne

$$\underline{u}_t - \Delta_{m,p}\underline{u} - a\int_\Omega \underline{v}^{n(q-1)}dx - a\int_\Omega \underline{u}^{m(p-1)} = \sigma_1^{m(p-1)} - a\mu\sigma_2^{n(q-1)} - a\lambda\sigma_1^{m(p-1)} \leq 0,$$
$$\underline{v}_t - \Delta_{n,q}\underline{v} - b\int_\Omega \underline{u}^{m(p-1)}dx - b\int_\Omega \underline{v}^{n(q-1)} = \sigma_2^{n(q-1)} - b\lambda\sigma_1^{m(p-1)} - b\mu\sigma_2^{n(q-1)} \leq 0.$$

Posons $\underline{u}(x,t) = \underline{v}(x,t) = 0$, on trouve que $(\underline{u}(x,t), \underline{v}(x,t))$ est une sous solution du problème (1) . La preuve de Lemme (3) est complète .

■ Maintenant, on prouve l'assertion (2) du Théorème (7) pour $\Omega_1 \subset\subset \Omega$. Considérons les problèmes elliptiques suivants

$$\begin{cases} -\Delta_{m,p}\xi_1 = 1, & x \in \Omega_1, \\ \xi_1 = 0, & x \in \partial\Omega_1, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\Delta_{n,q}\vartheta_1 = 1, & x \in \Omega_1, \\ \vartheta_1 = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

le principe de comparaison affirme que $\xi(x)|_{\partial\Omega_1} \geq \xi_1(x)$, $\vartheta(x)|_{\partial\Omega_1} \geq \vartheta_1(x)$. Prenons

$$\lambda_1 = \int_\Omega \xi_1^{m(p-1)}(x)dx, \qquad \mu_1 = \int_\Omega \vartheta_1^{n(q-1)}(x)dx$$

.

Puisque $\lambda\mu > (ab)^{-1}$ et $\xi(x)|_{\partial\Omega} = 0$, $\vartheta(x)|_{\partial\Omega} = 0$, on choisit Ω_1 tel que $\lambda_1\mu_1 > (ab)^{-1}$. D'après le lemme (3), on voit que $u(x,t)|_{\Omega_1} \geq \sigma_1\xi_1(x)$, $v(x,t)|_{\Omega_1} \geq \sigma_2\vartheta_1(x)$. Prenons ensuite un domaine $\Omega_2 \subset\subset \Omega_1$ et choisissons

$$\varepsilon = \left\{ \inf_{x\in\bar{\Omega}_2} \sigma_1\xi_1(x), \quad \inf_{x\in\bar{\Omega}_2} \sigma_2\vartheta_1(x) \right\} > 0,$$

alors

$$u(x,t)|_{\bar{\Omega}_2} \geq \sigma_1\,\xi_1(x)|_{\bar{\Omega}_2} \geq \varepsilon, \qquad v(x,t)|_{\bar{\Omega}_2} \geq \sigma_2\,\vartheta_1(x)|_{\bar{\Omega}_2} \geq \varepsilon,$$

donc, d'après ce qui précède, on en déduit que la solution $(u(x,t), v(x,t))$ du problème (1) est une sur solution du problème suivant dans $(\bar{\Omega}_2 \times [0,T]) \times (\bar{\Omega}_2 \times [0,T])$

$$\begin{cases} \underline{u}_t - \Delta_{m,p}\underline{u} = a\displaystyle\int_\Omega \left(\underline{v}^\alpha(x,t) + u^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}(x,t)\right)dx, & (x,t) \in \Omega_2 \times (0,T] \\ \underline{v}_t - \Delta_{n,q}\underline{v} = b\displaystyle\int_\Omega \left(\underline{u}^\beta(x,t) + v^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}(x,t)\right)dx, & (x,t) \in \Omega_2 \times (0,T] \\ \underline{u}(x,t) = \varepsilon, \quad \underline{v}(x,t) = \varepsilon, \quad (x,t) \in \partial\Omega_2 \times (0,T], \\ \underline{u}(x,0) = \varepsilon, \quad \underline{v}(x,0) = \varepsilon, \quad x \in \Omega_2. \end{cases} \tag{3.27}$$

on pose $\wp = \max\left\{\sup\limits_{x\in\bar{\Omega}_2} \xi_1(x), \sup\limits_{x\in\bar{\Omega}_2} \vartheta_1(x)\right\}$, et on considére le problème de Couchy suivant

$$\begin{aligned} &\wp s_1'(t) + s_1^{m(p-1)} - a\mu_1 s_2^{n(q-1)}(t) - a\lambda_1 s_1^{m(p-1)} = 0, \quad s_1(0) = \varepsilon/\wp, \\ &\wp s_2'(t) + s_2^{n(q-1)} - b\lambda_1 s_1^{m(p-1)}(t) - b\mu_1 s_2^{n(q-1)} = 0, \quad s_2(0) = \varepsilon/\wp. \end{aligned} \tag{3.28}$$

En multipliant la première équation de (3.28) par $b\lambda_1+1$ et la deuxième équation de (3.28) par $a\mu_1+1$ et on les combine ensemble, on obtient

$$\wp(b\lambda_1+1)s_1'(t) + \wp(a\mu_1+1)s_2'(t) = (ab\lambda_1\mu_1 + a\lambda_1 + b\mu_1 + 1)(s_2^{n(q-1)} + s_1^{m(p-1)}).$$

Comme $m(p-1) > m \geq 1, n(q-1) > n \geq 1$ et $(ab\lambda_1\mu_1 + a\lambda_1 + b\mu_1) > -1$, il existe une constante $T' < +\infty$ telle que

$$\lim_{t\to T'}(s_1(t) + s_2(t)) = +\infty,$$

on définit $\widetilde{u}(x,t) = s_1(t)\xi_1(x), \widetilde{v}(x,t) = s_2(t)\vartheta_1(x)$, alors $(\widetilde{u}(x,t), \widetilde{v}(x,t))$ explose en temps fini. Ainsi, la solution du Problème (3.27) explose en temps fini si $(\tilde{u}(x,t), \tilde{v}(x,t))$ est une sous solution du problème (3.27). Aprés quelque calcul, on a

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_t - \Delta_{m,p}\widetilde{u} - a\int_\Omega \widetilde{v}^\alpha(x,t)dx - a\int_\Omega \widetilde{u}^{\frac{\alpha\beta}{n(q-1)}}dx &= \xi 1(x)s_1'(t) + s_1^{m(p-1)} - a\mu_1 s_2^{n(q-1)}(t) - a\lambda_1 s_1^{m(p-1)}(t) \\ &\leq \wp s_1'(t) + s_1^{m(p-1)} - a\mu_1 s_2^{n(q-1)}(t) - a\lambda_1 s_1^{m(p-1)}(t) = 0, \\ \widetilde{v}_t - \Delta_{n,q}\widetilde{u} - b\int_\Omega \widetilde{u}^\beta(x,t)dx - b\int_\Omega \widetilde{v}^{\frac{\alpha\beta}{m(p-1)}}dx &= \vartheta_1(x)s_2'(t) + s_2^{n(q-1)} - b\lambda_1 s_1^{m(p-1)}(t) - b\mu_1 s_2^{n(q-1)} \\ &\leq \wp s_2'(t) + s_2^{n(q-1)} - b\lambda_1 s_2^{m(p-1)}(t) - -b\mu_1 s_2^{n(q-1)}(t) = 0, \end{aligned}$$

pour tout $\forall(x,t) \in \Omega_2 \times (0,T]$

$$\begin{aligned} &\widetilde{u}(x,t) = s_1(t)\xi_1(x) = 0, \quad \widetilde{v}(x,t) = s_2(t)\vartheta_1(x) = 0, \qquad \forall(x,t) \in \partial\Omega_2 \times [0,T], \\ &\widetilde{u}(x,0) = s_1(0)\xi_1(x) \leq \varepsilon, \quad \widetilde{v}(x,0) = s_2(0)\vartheta_1(x) \leq \varepsilon, \qquad \forall x \in \Omega_2. \end{aligned}$$

Donc $(\widetilde{u}(x,t), \widetilde{v}(x,t))$ est une sous solution du problème (3.27). ceci montre le point (2) du théorème (7). La preuve du théorème (7) est achevette. ■

Conclusion

Les systèmes paraboliques liés au terme de réaction non-linéaire et à la diffusion non-linéaire comprennent des conditions d'existence globale et d'explosion des solutions. Les équations différentielles comme dans le système (1) sont appelées les équations de filtration polytropiques non newtoniennes (voir [1, 12, 18] et leurs références).

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence globale et le phénomène d'explosion en temps fini des solutions faibles. Cette étude a été réalisée par la méthode de sous et sur solution de la même façon que dans [10] avec la présence des nouveaux termes choisi d'une façon que les résultats obtenus conformément au nouveaux termes restent les mémes que dans [10]. La déférence principale réside dans les développements des preuves des résultats.

Nous avons obtenu des résultats d'existence globale (Théorème (5)), et d'explosion en temps fini des solutions faible (Théorème (6)). Un cas particulier a été traité dans le Théorème (7).

Des difficultés rencontré dans le déploiement de la méthode de sous et sur solutions à cause de la présence des nouveaux termes.

Bibliographie

[1] A. S. Kalashnikov, *Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate parabolic equations of second order*, Russian Math.Surveys 42(1987) 169-222.

[2] C. De Coster, J. Tabka, *Introduction à la théorie des sous et sur solutions*. Institut des Sciences et Techniques de Valenciennes (2010), 1-32.

[3] C. Zuily, *E'léments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*.

[4] D. Li, *Cours d'analyse fonctionnelles avec 200 exercices corrigés*.

[5] F. Demengel, G. Demengel, *Espace fonctionnals,Utilisation dans la résolution des équation aux dérivées partielles*.

[6] H. Brezis, *Analyse fonnctionnelle.Théorie et applications*, Masson, 1987.

[7] H. Didi, *Existence, unicité et regularite des solutions pour une classe de problemes elliptiques quasi-lineaires* , Thése de Doctorat, Université Badji Mokhtar, Annaba, 2019.

[8] H.Queffélec, C.Zuily, *Analyse pour l'agrégation*, Dunod, Paris, 2013.

[9] I. Djerrrar, *Identification de source dans une edp parabolique, Thése de Doctorat, Université Badji Mokhtar, Annaba, 2019.*

[10] J. Zhou and C. Mu, *Global existence and blow-up for a non- newton polytropic filtration system with nonlocal source*, ANZIAM **J**. 50(2008) :13-29.

[11] J. I. Díaz, *Nonlinear partial differential equations and free boundaries, in Elliptic equation*, Volume1 (Pitman, London, 1985).

[12] J. L. Vázquez, *The porous medium equations : mathematical theory(Clarendon Press, Oxford, 2007)*.

[13] K. Sbihi, *Etude de quelques edp non linéaires dans* L^1 *avec des conditions générales sur le bord* , Thése de Doctorat, Université Louis Pasteur Strasbourg 1, 2006.

[14] M. F. Bidanut-Véon and M. Garciá-Huidobro, *Regular and singular solutions of a quasilinear equation with weights, Asymptot*. Anal. 28(2001)115-150.

[15] S. Belyacine, *Etude de certains systemes d'equations parabolique semi-lineaires degenerees Thése de Doctorat, Université Badji Mokhtar, Annaba.*

[16] V. D. Radulescu *Qualitative analusis of non linear elliptic partial di¤erential equations, Monotonocity Analytic, and Variational Methods, Hindawi, Vol.6 (2008).*

[17] Y. Zuodong and L. Qishao, *Blow- up estimates for a quasi -linnear reaction -diffusion system*, Math. Meth. Sci (2003), 1005-1023.

[18] Z. Q. Wu, J. N. Zhao, J. X. Yin and H. L. Li, *Nonlinear diffusion equations (Word Scientific, River Edge, NJ, 2001)*.