الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة غرداية

Université de Ghardaïa

N° d'enregistrement
/…../…../…../…../…..

كلية العلوم والتكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم الرياضيات و الاعلام الألي

Département de Mathématiques et informatique

Mémoire de fin d'étude, en vue de l'obtention du diplôme

Master

Domaine: Mathématiques et informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Analyses fonctionnelle et applications

Thème

Sur quelques espaces fonctionnels utilisés dans le domaine des équations aux dérivées partielles

Présenté par :
Wided BOUSRIH

Devant le jury composé de:

Mr. Smail LATRECH	**M.A.A**	**Université de Ghardaïa**	**Président**
Mr. Kadour GUERBATI	**Professeur**	**Université de Ghardaïa**	**Encadrant**
Mlle. Houria CHELLAOUA	**M.C.A**	**Université de Ghardaïa**	**Examinateur**

Année universitaire :2021/2022

Remerciements

Je tiens à remercier tous les professeurs qui ont contribué à ma formation en mathématiques, en particulier, mon encadrant **Mr. GUERBATI Kaddour** et les membres de jury **Mlle Chelaoua Houria** et **Mr Smail Laterch** qui ont accepté de de juger ce travail.
je remercie aussi toute ma famille, mes collègues et mes amies.

ملخص

في هذه المذكرة نهتم بدراسة بعض فضاءات التوابع المستعملة في مجال المعادلات التفاضلية الجزئية وخصائصها.
يحتوي الفصل الأول على مقدمة تاريخية لمنشأ المعادلات التفاضليه تليها بعض التعريفات الأساسية.
يتناول الفصل الثاني بعض الفضاءات التابعية الأساسية، خواصها و بعض المبرهنات الأساسية.
يتمثل الفصل الثالث في تطبيقات لهذه النظريات في مجال الميكانيك.
كلمات مفتاحية: فضاء بناخ، فضاء هلبرت، فضاء سوبولاف، مبرهنة غرين، لاكس ميلغرام،صيغة تغايرية، جداء سلمي، نظيم

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous interessons à l'étude de quelques espaces fonctionnels et leurs propriétés.
Le 1^{er} chapitre contient un aperçu historique suivit par des définitions de quelques notions élémentaires .
Le 2^{eme} chapitre concerne quelque espaces fonctionnels essentiels pour l'étude des EDP , leur propriété et quelques théorèmes.
Le 3^{eme} chapitre contient les applications de ces théorèmes dans le domaine de la mécanique.
Mots clés : Espace de Banach, Espace de Hilbert, Espace de sobolev, Formule de Green,Lax-milgram, Formulation variationnelle,Produit scalaire, Norme.

Abstract

In this thesis, we are interested by the study of some functional spaces and their properties.
The 1^{st} chapter contains a historical overview followed by definitions.
The 2^{th} chapter concerns some essential functional space for the study of PDEs , their property and some theorems.
The 3^{eme} chapter contains applications of these theorems in mechanics.
Key words :Banach space, Hilbert space, Sobolev space, Green formula, Lax-milgram,Variational formulation, Scalar product,Norm

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les équations différentielles partielles sont la base de la modélisation de nombreux phénomènes dans différents domaines : physique, mécaniques, biologique et même économique.il n'est en général pas question d'obtenir les solutions des EDP explicitement ! Ce que les mathématiques peuvent faire par contre, c'est dire si une ou plusieurs solutions existent, et décrire parfois très précisément certaines propriétés de ces solutions. C'est a travers les résultats d'analyse fonctionnelle que nous pouvons comprendre la nature et les propriétés des fonctions intervenant dans les équations différentiel partielles.

Les EDP ont été probablement formulées pour la première fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du 17 ème siècle (Newton, Leibniz...). Ensuite le domaine des EDP s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique.

Cependant l'étude systématique des EDP est bien plus récente, et c'est seulement au cours du 20ème siècle que les mathématiciens ont commencé à développer l'arsenal nécessaire. Un pas de géant a été accompli par L. Schwartz lorsqu'il a fait naître la théorie des distributions (autour des années 1950).

Il est certainement bon d'avoir à l'esprit que l'étude des EDP reste un domaine de recherche très actif en ce début de 21 ème siècle. D'ailleurs ces recherches n'ont pas seulement un retentissement dans les sciences appliquées, mais jouent aussi un rôle très important dans le développement actuel des mathématiques elles-mêmes, à la fois en géométrie et en analyse. Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude de quelques espaces fonctionnelles et leurs propriétés.

Le 1^{er} chapitre contient un aperçu historique suivit des définitions des normes, produit scalaire, des applications linéaires et bilinéaires continues.

Le 2^{eme} chapitre concerne les espaces de Banach, Hilbert et Sobolev et de nombreux théorèmes essentiels pour l'étude des EDPs. une grande partie de ce chapitre est réservée au théorème de Lax-milgam.

Le 3^{eme} chapitre contient des applications à l'étude de l'existence et l'unicité de solutions des EDPs, en utilisant la méthode de formulation variationnelle.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

1.1 Aperçus Historique

[Bou16]

Selon G. Wanner, la première apparition des équations différentielles remonte à l'année 1638 quand Florimond Debeaune propose deux problèmes géométriques sur la construction des courbes à partir des propriétés de la tangente.
À l'époque, ni Fermat , ni Roberval , ni Debeaune lui-même ne réussissent à les résoudre. C'est René Descartes qui, grâce à une méthode graphique, apporte une réponse à l'un des deux problèmes.

Edward L. Ince , quant à lui, situe la naissance des équations différentielles au 11 novembre 1675, lorsque Leibnitz introduit la notation

$$\int ydy = \frac{1}{2}y^2.$$

La terminologie " oequatio differentialis " ou " équations différentielles " a été utilisée en 1676 par Leibnitz pour désigner une relation entre les différentielles dx et dy de deux quantités variables x et y.

À leur début, les équations différentielles sont étroitement associées à la résolution de problèmes géométriques, à la physique newtonienne (dynamique du point, mouvements des planètes) et à la formalisation du calcul différentiel et intégral. Elles deviennent rapidement un instrument efficace d'analyse des phénomènes de la nature et une source de questionnements au sujet des concepts mathématiques comme celui de fonction. À la suite de Newton et de Leibnitz, les mathématiciens C. Huyguens , les frères Bernoulli, Jacob et Johan et Guillaume de l'Hospital résolvent plusieurs problèmes « modèles » comme celui de l'oscillation d'un pendule, du brachistrome... et diffusent les premiers éléments du calcul différentiel et intégral tout en élaborant les premières méthodes d'intégration à l'aide des séries, de la « séparation des variables », ou encore, sur le plan graphique, de la « ligne polygonale » introduite par Descartes.

Au XVIII siècle, un nom émerge l'ensemble de tous les mathématiciens par sa production importante et la diversité des thèmes qu'il a embrassés[Eul48][Eul11], Leonhard Euler devient la cheville ouvrière de nombreuses innovations et le domaine des équations différentielles n'y fait pas exception non seulement il synthétise les travaux antérieurs, mais il approfondit diverses questions théoriques comme la superposition des solutions des équations différentielles linéaires. C'est lui qui, en 1743, introduit l'équation caractéristique pour intégrer les équations linéaires à coefficients constants. Il a fondé aussi une méthode graphique et numérique de résolution, méthode qui porte son nom et qui est encore enseignée aujourd'hui.

Dans le siècle d'Euler, d'autres mathématiciens étudient diffusent le calcul infinitésimal : D. Bernoulli , A. C. Clairaut , J. F. Riccati et son fils Vincenzo , J. L. R. D'Alembert et J. L. Lagrange [Lag13][d'A68]. La plupart s'intéressent à la résolution des équations différentielles particulières de premier ordre, souvent issues de la classification des courbes, de problèmes de physique ou simplement, de cas d'espèce.

Vers la fin du XVIII^e siècle, Gauss introduit la variable complexe dans les équations différentielles[GP05] et quelques années plus tard, Cauchy, puis Fourier, Liouville , Bessel et bien d'autres étendent son utilisation à d'autres questions d'analyse[FD$^+$22][VRLJ22].

Les nouveaux procédés de classification et de réduction apparus dans la première moitié du XIX siècle, sont basés sur des changements de variables ou de fonctions dépendant de ces variables. Elles vont toutes dans le sens de la simplification des équations données et de l'adaptation à chaque classe, de méthodes spécifiques d'intégration. Ainsi, pour Joseph Liouville, la question de " résolution " n'a de sens que si l'on précise la classe de fonctions dans laquelle on cherche les solutions.

Dans sa démarche novatrice, Joseph Liouville a commencé par dégager une première « bibliothèque » de fonctions qu'il qualifie d'élémentaires ,intégrer (ou résoudre) une équation différentielle par quadratures signifie et exprime ses solutions à l'aide des fonctions élémentaires voir par exemple [Lio03].

En posant aussitôt la question : cette première « bibliothèque » de fonctions élémentaires suffit-elle à résoudre toutes les équations différentielles ? La réponse est non, ainsi, pour intégrer les équations différentielles, il est nécessaire d'élargir le corps des fonctions élémentaires à de nouvelles fonctions, souvent solutions d'équations différentielles particulières comme celles de Bessel, d'Airy, les équations hypergéométriques, etc.

L'étude de ces processus d'extension des corps de fonctions trouve sa consécration dans la théorie de Galois différentielle, elle apporte un formalisme moderne qui permet de mieux comprendre et évaluer les solutions des équations et systèmes différentiels linéaires comme les « fonctions spéciales », bien appréciées des physiciens. Hélas, la mise en œuvre des calculs induits par cette théorie devenant extrêmement complexe et décourageante 5 , il faut attendre l'avènement et le développement d'outils informatiques et algorithmiques (années 1980) pour qu'elle retrouve l'intérêt qui lui est porté à la fin du XIX et au début du XX siècle.

L'autre théorie qui connaît pratiquement les mêmes périodes de silence et d'éclat est celle des symétries de Lie. Fondée par S. Lie dans le sillage de la théorie des groupes (en l'occurrence, continus), elle se fixe comme objectif de traduire les propriétés d'intégrabilité d'une équation différentielle en termes de symétries, c'est-à-dire, de transformations de la variable indépendante ou de la fonction inconnue dépendant de la variable sus-citée et qui conserve la forme de l'équation initiale. Ce procédé sert à unifier les méthodes d'intégration qui « étaient spéciales à chaque type d'équations et n'avaient aucun lien commun ".

Nous avons déjà évoqué les questions théoriques qui commencent à poindre au début du XIX siècle. L'existence et l'unicité des solutions qui étaient jusque là subordonnées aux procédures de calcul en sont parmi les plus importantes. Le premier à les avoir dégagées des modes de résolution est Cauchy qui, en 1820 [Cau26], formule ce que nous appelons aujourd'hui, le problème de Cauchy. Désormais, à côté des questionnements déjà éprouvés sur nombre de modalités d'explicitation des solutions, d'autres, essentiellement théoriques, commencent à apparaître. Ainsi, en ne tenant compte que de la continuité ou de la différentiabilité du second membre, des conditions suffisantes (peu restrictives) d'existence et d'unicité des solutions des systèmes différentiels normalisés sont établies dans des versions différentes par Cauchy, bien sûr, Peano, Picard, Lipschitz, etc. Pour les équations linéaires non normalisées, L. Fuchs [Fuc77] montre, pour chaque type de singularité (régulière ou irrégulière), l'existence de solutions développables en séries de Laurent (tronquées ou non à gauche selon la régularité de la singularité), multipliées par des puissances (en général complexes) de la variable complexe ou de son logarithme.

L'histoire des équations différentielles des années antérieures à 1900 ne se résume pas seulement à des méthodes d'intégration sous différentes expressions, aussi fécondes soient-elles. Face aux questions posées par les sciences expérimentales et aux besoins croissants des ingénieurs, leurs investigations ont très vite incorporé des techniques de résolution graphique et des algorithmes de calcul approché. D. Tournès a consacré aux méthodes d'intégration polygonale (méthode d'Euler), directionnelle (Jean Bernoulli) et autres, un travail instructif et didactique, riche en correspondances et en références bibliographiques. Nous y apprenons en particulier le grand intérêt qu'ont porté les fondateurs du calcul infinitésimal et leurs continuateurs immédiats aux démarches constructives. Ainsi, dans le livre publié par V. Riccati, l'auteur décrit la construction d'instruments tractionnels qui servent à tracer des courbes intégrales d'une équation différentielle, appelées dans la foulée, des tractrices. Après une longue période de stagnation, à la fin du XIX siècle, les procédures numérico-graphiques ont repris de la vigueur. Entre 1894 et 1901 , une nouvelle méthode est élaborée, la méthode de Runge-Kutta des noms des ingénieurs K. D. Runge et M. W. Kutta , en perfectionnement continu jusqu'à nos jours. En 1879, survient un événement majeur, car fondateur d'une théorie nouvelle,la publication de la thése de doctorat d'Henri Poincaré , l'auteur présente une nouvelle approche : la théorie qualitative des équations différentielles. En quoi consiste-t-elle ? Essentiellement à décrire le comportement qualitatif, local ou global, des courbes définies par les solutions d'un système différentiel donné, sans connaître les expressions analytiques de ces dernières.

La théorie qualitative est le premier jalon d'un long et riche processus qui a débordé le premier champ de compréhension des équations différentielles pour fonder la théorie des systèmes dynamiques. Adoptant une démarche parfois exclusivement topologique, ses promoteurs (Birkhoff, Nemitskii, Stepanov, Sibirskii, etc.)[Bir27][Nem15][Sib] ont réussi à en faire une discipline qui étudie des objets aussi bien déterministes que stochastiques (théorie des jeux, inclusions différentielles...), continus (systèmes différentiels, groupes continus, équations d'évolution...) ou discrets (itérations d'applications, théorie des automates, équations aux différences...). Les champs d'application en sont nombreux et variés.

Cette partie est inspiré du live [VOE01], elle contient quelques notions générales et principales pour l'étude des espaces fonctionnels, on commence par définir les normes, les suites de Cauchy , les applications linéaires et bilinéaires continues et le produit scalaire .

1.2 Normes

Définition 1.2.1. *[VOE01] Soit E un espace vectoriel réel, on appelle N une norme sur E ; l'application définie par les propriété suivantes :*

$$\begin{aligned} N : E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longrightarrow N(x) \end{aligned}$$

1. $\forall x \in E\ : N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
2. $\forall x \in E\ ,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} : N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
3. $\forall (x_1, x_2) \in E^2 : N(x_1 + x_2) \leq N(x_1) + N(x_2)$

D'une manière générale, si

$$\begin{aligned} N : E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longrightarrow N(x) \end{aligned}$$

est une norme on note : $N(x) = \|x\|_E$

Exemple 1.2.1. *Soit N une application définie par :*

$$\begin{aligned} N : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ X = (x; y) &\longrightarrow N(x) = |x|+|y| \end{aligned}$$

On vérifie que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$

1. $N(x) = 0 \Rightarrow |x|+|y| = 0 \Rightarrow |x| = 0$ *et* $+ |y| = 0 \Rightarrow x = y = 0$
2. $\forall X \in \mathbb{R}^2 ; \forall \lambda \in \mathbb{R} N(\lambda X) = N(\lambda x; \lambda y) \Rightarrow N(\lambda X) = |\lambda x|+|\lambda y| = |\lambda|(|x|+|y) = |\lambda| N(X)$
3. $\forall X_1; X_2 \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 ; X_1 = (x_1; y_1); X_2 = (x_2; y_2) : X_1 + X_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow N(X_1 + X_2) &= |x_1 + x_2|+|y_1 + y_2| \\ &\leq (|x_1|+|y_1|) + (|x_2|+|y_2|) \\ &\leq N(X_1) + N(X_2) \end{aligned}$$

N est une norme sur $\mathbb{R}^2$ On note : $N(x) = \|X\|_1$

Exemple 1.2.2. *$E = C^0([0;1]) = \{f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0;1]\}$ soit*

$$\begin{aligned} N : C^0([0;1]) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto N(f) = \int_0^1 |f(x)|dx \end{aligned}$$

1. $N(f) = 0 \Rightarrow \int_0^1 |f(x)|dx = 0 \Rightarrow |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0; x \in [0;1]$

2.
$$\begin{aligned} \forall f \in= C^0([0;1]); \forall\lambda \in \mathbb{R} : N(\lambda f) &= \int_0^1 |(\lambda f)(x)|dx \\ &= \int_0^1 |\lambda f(x)|dx \\ &= |\lambda| \int_0^1 |f(x)|dx \\ &= |\lambda| N(f) \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} \forall (f;g) \in (C^0([0;1]))^2 : N(f+g) &= \int_0^1 |(f+g)(x)|dx \\ &= \int_0^1 |f(x)+g(x)|dx \\ \forall x \in [0;1] : |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| & \\ \Rightarrow N(f+g) &\leq \int_0^1 |f(x)| + \int_0^1 |g(x)| \\ &\leq N(f) + N(g) \end{aligned}$$

Remarques :

1. On note $N(f) = \int_0^1 |f(x)|dx = \|f\|_1$
2. $N(f) = \|f\|_1$ est bien définie sur $C^0([0;1])$
3. sur $C^0([0;1])$ il existe d'autre normes ; par exemple : $\|f\|_{C^0([0;1])} = \|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$

Définition 1.2.2. *Un espace vectoriel E muni d'une norme $\|.\|_E$ est appelé un espace vectoriel normé que l'on note $(E; \|.\|_E)$*

Définition 1.2.3. *[VOE01] soit E un espace vectoriel muni des normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ on dit que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes si :*

$$\exists (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}_+^{*^2} : \forall x \in E \alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$$

Théoreme 1.2.1. *[VOE01] Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

1.3 Suites de Cauchy

Définition 1.3.1. *[VOE01] Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace normé $(E, \|.\|)$ est dite de Cauchy si et seulement si elle vérifie la propriété :*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_e \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N_\varepsilon \text{ et } m \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow \|u_n - u_m\| \leqslant \varepsilon$$

Propriété 1.3.1. *[VOE01]*

1. *Toutes suite de Cauchy est bornée.*

2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy alors toutes sous suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.*

3. *Toute suite de Cauchy admettant sous suite convergente est convergente.*

4. *Toute suite de Cauchy n'est pas convergente ; mais toute suite convergente est de Cauchy.*

Définition 1.3.2. *Un espace vectoriel E est complet si toute suite de Cauchy de E converge dans E.*

1.4 Applications linéaires continues

Définition 1.4.1. *[VOE01] soient $(E; \|.\|_E)$ et $(F; \|.\|_F)$, f est une application linéaire de E dans F si :*

$$\forall(\lambda_1; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : \forall(x_1; x_2) \in E^2 : f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

on note $\mathcal{L}(E; F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F.

Proposition 1.4.1 (Caractérisation des applications linéaires continues)**.** *[VOE01] on a l'équivalence entre les propriétés suivantes :*

1. *f est continue sur E*

2. *f est continue en $x_0 = 0$*

3. *f est bornée sur la boule $\overline{B}(0; 1)$*
   $\exists M > 0 \forall y \in \overline{B}(0; 1) : \|f(y)\|_F \leq M$ *avec* $\overline{B}(0; 1) = \{z \in E / \|z\|_E \leq 1\}$

4. *f est lipschitzienne.*

Définition 1.4.2. *$f : E \to F$ est lipschitzienne si :*

$$\exists M > 0 \forall(x; y) \in E^2 : \|f(x) - f(y)\|_F \leq M\|x - y\|_E$$

si de plus f est C^0 :$\forall z \in E : \|f(z)\|_F \leq M\|z\|_E$
Si $k \leq 1$ on dit que f est contractante

Démonstration. $1 \Rightarrow 2)$
f est C^0 sur E donc f est C^0 en $x_0 = 0$
$2 \Rightarrow 3)$
$\forall \varepsilon > 0 \exists y > 0 : \|x\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq \varepsilon$ soit y $\in$ $\mathbb{B}$(0;1) : $\|y\|_E \leq 1$
on pose $y = \frac{x}{\eta}$ avec $\|x\|_E \leq \eta$
on a $\|y\|_E = \|\frac{x}{\eta}\|_E = \frac{1}{\eta}\|x\|_E \leq \frac{\eta}{\eta} = 1$
$\Rightarrow \|f(y)\|_F = \|f(\frac{x}{\eta})\|_F = \|\frac{1}{\eta} f(x)\|_F = \frac{1}{\eta}\|f(x)\|_F \leq \frac{\varepsilon}{\eta}$
si on pose $M = \frac{\varepsilon}{\eta}$ alors : $\|y\|_E \leq 1 \Rightarrow \|f(y)\|_F \leq M$
$\Rightarrow f$ est bornée sur $\mathbb{B}$(0;1)
$3 \Rightarrow 4)$
$\forall y \in \mathbb{B}(0;1) \|y\|_E \leq 1 \Rightarrow \|f(y)\|_F \leq M$
on veut montrer que : $\exists \alpha > 0 \forall x \in E : \|f(x)\|_F \leq \alpha \|x\|_E$
soit $x \neq 0 \in E : y = \frac{x}{\|x\|_E} \Rightarrow \|y\|_E = \|\frac{x}{\|x\|_E}\|_E = \frac{1}{\|x\|_E}\|x\|_E = 1$

$$\begin{aligned}
\|y\|_E = 1 \text{et} \|f(y)\|_F \leq M &\Leftrightarrow \|f(\frac{x}{\|x\|_E})\|_F \leq M \\
&\Leftrightarrow \|\frac{1}{\|x\|_E} f(x)\|_F \leq M \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\|x\|_E}\|f(x)\|_F \leq M \\
&\Leftrightarrow \|f(x)\|_F \leq M \frac{1}{\|x\|_E}
\end{aligned}$$

$4 \Rightarrow 1)$
$\exists M > 0 \forall x \in E \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$
on veut montrer :

$$\forall x_0 \in E; \forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 : \|x - x_0\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F \leq \varepsilon$$

Or

$$\|f(x) - f(x_0)\|_F = \|f(x - x_0)\|_F \leq M \|x - x_0\|_E$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta = \frac{\varepsilon}{M} / \|x - x_0\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F \leq \varepsilon$$

autrement dit : f est continue à $x_0; \forall x_0 \in E$
$\Rightarrow f \text{est} C^0$ sur E □

Théoreme 1.4.1. *Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, alors E est complet pour toutes normes définie sur E*

Démonstration. soit n la dimension de E, $n \in \mathbb{N}$ et $(e_i)_{i=1,n}$ une base de E.
$\Rightarrow \forall x \in E : x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$
on défini la norme $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x^i|$
soit $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour cette norme appartenant à E :

$\forall\varepsilon > 0\exists N(\varepsilon) : p > q > N(\varepsilon) : \|x_p - x_q\|_\infty \leq \varepsilon$
en particulier :

$$\forall i = 1, n|x_p^i - x_q^i| \leq \max|x_p^i - x_q^i| \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall i$ fixé dans $\{1; ..; n\}(x_p^i)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$
$\Rightarrow \exists x^i \in \mathbb{R} : \lim_{p\to\infty} x_p^i = x^i$
$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0\exists N(\varepsilon; i) > 0 : p \geq N(\varepsilon; i)|x_p^i - x^i \leq \varepsilon$
candidat à la limite de $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$: $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$
Or $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$ est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si :

$$\forall\varepsilon > 0\exists N'(\varepsilon) = \max_{1\leq i\leq n} N(\varepsilon; i) : p \geq N(\varepsilon; i) : \|x\|_\infty \leq \varepsilon$$

Donc : $\lim_{p\to\infty}\|x_p - x\|_\infty = 0$; avec $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i \in E$

Remarque : ce résultat s'applique pour toutes les normes définie sur E qui sont équivalante à $\|.\|_\infty$ □

Proposition 1.4.2. *[Rud91] soit f une application linéaire de $(E; \|.\|_E)$ dans $(F; \|.\|_F)$, si E est de dimension finie alors f est continue pour toute norme $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$*

Démonstration. $dimE = n \in \mathbb{N}$
soit $(e_i)_{i=1;n}$ une base de E ; $\forall x \in E : x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$, $(x^i \in \mathbb{R}; \forall i = 1; n)$
on choisit la norme de E définie par : $\forall x \in E : \|x\|_E = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x^i|$
or f est C^0 sur E $\Leftrightarrow \exists M > 0\forall x \in E : \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$
$\|f(x)\|_F = \|f(\sum_{i=1}^n x^i e_i)\|_F \leq \sum_{i=1}^n |x^i|\|f(e_i)\|_F$
on pose $M = \max(\|f(e_1)\|_F; ...; \|f(e_n)\|_F)$
$\Rightarrow \|f(x)\|_F \leq M\sum_{i=1}^n |x^i| = M\|x\|_1$
$\Rightarrow f$ est C^O sur E. □

Remarque : Cette propriété est généralement fausse si $dimE = +\infty$

Exemple 1.4.1. *$E = C^0([-1; 1])$ muni de $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$*
avec $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1;1]} |f(x)|$

$$\delta : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longrightarrow v(0)$$

- *δ est linéaire :*

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}\forall(v_1, v_2) \in E^2 : \delta(v_1 + \lambda v_2) = (v_1 + \lambda v_2)(0) = v_1(0) + \lambda v_2(0) = \delta(v_1) + \lambda\delta(v_2)$$

- *δ continue pour $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_\mathbb{R} = |.|$*

$$\Leftrightarrow \exists M > 0\forall v \in E : |\delta(v)| \leq M\|v\|_\infty$$

or $|\delta(v)| = |v(0)| \leq \sup_{x\in[-1;1]} |v(x)| = \|v\|_\infty$
on a donc $\exists M = 1\forall v \in E : |\delta(v)| \leq M\|v\|_\infty$
et donc δ est C^0 de E muni de la norme $\|.\|_\infty$

- *δ n'est pas continue pour la norme $\|.\|_1$ et $\|.\|_{\mathbb{R}} = |.|$*
  avec : $\forall v \in E \|.\|_1 = \int_{-1}^{1} |v(t)| dt$
  si δ était continue pour $\|.\|_1$ n aurait :

$$\exists c > 0 \forall v \in E : |\delta(v)| \leq c\|v\|_1$$

$\Rightarrow \exists c > 0 \forall v \in E : |v(0)| \leq c \int_{-1}^{1} |v(t)| dt$ *soit v_n une suite de fonction de E tq :*

$$v_n(t) = \begin{cases} 1 + nt & si \ \frac{-1}{n} \leq t \leq 0 \\ 1 - nt & si \ 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

$\int_{-1}^{1} |v_n(t)| dt = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \|v_n\|_1 = 0$
donc il n'existe pas un $c > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N} v_n(0) = 1 \leq \frac{c}{n}$.
$\Rightarrow$ *δ n'est pas C^0 pour $\|.\|_1$*

Proposition 1.4.3. *[VOE01] soit f une application linéaire continue de $(E_1; \|.\|_1)$ a valeurs dans $(F; \|.\|_F)$. La quantité $|||.|||$ défini par :*

$$|||f||| = \sup_{x \in E} [\frac{||f(x)||_F}{||x||_E}]$$

est une norme dans $\mathcal{L}_c(E; F)$: l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F.

Remarque 1.4.1. *si f est C^0 de E dans F ; $\exists c > 0 \forall x \in E : ||f(x)||_F \leq c||x||_E$*
on a $\frac{||f(x)||_F}{||x||_E} \leq \sup_{x \in E} [\frac{||f(x)||_F}{||x||_E}] = c$

Démonstration.

$$\forall f \in \mathcal{L}_c(E; F) : |||f||| \geq 0$$

-

$$\begin{aligned} |||f||| = 0 &\Rightarrow \forall x \neq 0 : \sup_{x \in E} [\frac{||f(x)||_F}{||x||_E}] = 0 \\ &\Rightarrow \forall x \neq 0 : \frac{||f(x)||_F}{||x||_E} = 0 \\ &\Rightarrow \forall x \neq 0 : ||f(x)||_F = 0 \\ &\Rightarrow \forall x \neq 0 : f(x) = 0; (\text{si x=0} f(0) = 0) \\ &\Rightarrow \forall x \in E f(x) = 0 \end{aligned}$$

d'ou si $|||f||| = 0 \Rightarrow f = 0$

- $\forall\lambda \in \mathbb{R}\forall f \in \mathcal{L}_c(E;F)|||\lambda f||| = |\lambda||||f|||?$

$$\forall x \neq 0 : ||f(x)||_F \leq |||f|||||x||_E$$
$$||(\lambda f)(x)||_F = ||\lambda f(x)||_F = |\lambda|||f(x)||_F \leq |\lambda||||f|||||x||_E$$
$$\Rightarrow \frac{|\lambda|||f(x)||_F}{||x||_E} \leq |\lambda||||f|||$$

En passant au sup pour$x \in E; x \neq 0|||\lambda f||| \leq |\lambda||||f|||$............(1)

soit $\mu \in Eg \in \mathcal{L}_c(E;F) : |||\mu g||| \leq |\mu||||g|||$
si on pose $g = \lambda f|||\mu.\lambda f||| \leq |\mu||||\lambda f|||$
Posons
$$\mu = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow |||f||| \leq \frac{1}{|\lambda|}|||\lambda f||| \Rightarrow |\lambda||||f||| \leq |||\lambda f|||.........(2)$$
alors de (1) et (2) : $\forall\lambda \in \mathbb{R}\forall f \in \mathcal{L}_c(E;F) : |\lambda||||f||| = |||\lambda f|||$

- inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\forall x \in E; x \neq 0 : ||(f+g)(x)||_F &= ||f(x)g(x)||_F \\ &\leq ||f(x)||_F + ||g(x)||_F \\ &\leq |||f|||||x||_E + |||g|||||x||_E \\ &\leq (|||f||| + |||g|||)||x||_E\end{aligned}$$

$$|||f+g||| = \sup_{x\in E}[\frac{||(f+g)(x)||_F}{||x||_E}] \leq |||f||| + |||g|||; \forall x \in E; x \neq 0$$

□

1.5 Applications bilinéaire :

Soient $(E_1; \|.\|_1)$, $(E_2; \|.\|_2)$ et $(F; \|.\|_F)$
Soit

$$\begin{aligned} a :& E_1 \times E_2 \to F \\ & (x;y) \to a(x;y)\end{aligned}$$

On dira que a est une application bilinéaire si :

1. $\forall\lambda \in \mathbb{R}; \forall(x_1;x_2) \in E_1^2\ \forall y \in E_2 : a(\lambda x_1 + x_2; y) = \lambda a(x_1;y) + a(x_2;y)$
2. $\forall\lambda \in \mathbb{R}; \forall x \in E_1\ \forall(y_1;y_2) \in E_2^2 : a(x; \lambda y_1 + y_2) = \lambda a(x;y_1) + a(x;y_2)$

Propriété 1.5.1. *[VOE01] soit a une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ a valeur dans F. on a l'équivalence entre les 4 caractérisation suivantes :*

1. *a est continue sur $E_1 \times E_2$ muni de la topologie suivante :* $\|(x;y)\|_{E_1\times E_2} \equiv \max(\|x\|_{E_1}; \|y\|_{E_2})$

2. *a est continue en* $(0_E; 0_E) = (0; 0)$

3. *a est borné sur B(0;1) ;avec B(0;1)=* $\{\|x; y\|_{E_1 \times E_2} \leq 1\}$

4. $\exists c > 0 \forall (x; y) \in E_1 \times E_2 : \|a(x; y)\|_F \leq c\|x\|_{E_1}\|y\|_{E_2}$

1.6 Produit scalaire

Définition 1.6.1. *soit*

$$\begin{aligned}\varphi :& E \times E \to \mathbb{R}\\ &(x; y) \to \varphi(x; y)\end{aligned}$$

Ou E est un espace vectoriel réel.
on dira que φ *est un produit scalaire sur E si :*

1. φ *est bilinéaire.*

2. φ *est symétrique :* $\forall (x; y) \in E^2 : \varphi(x; y) = \varphi(y; x)$

3. φ *est définie-positive :*
   positive : $\forall x \in E : \varphi(x; x) \geq 0$
   définie : $\varphi(x; x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Notation 1.6.1. *on note* $\varphi(x; y) = (x; y) = ((x; y)) =< x; y >$

Exemple 1.6.1. *1.*

$$\begin{aligned}\varphi :& \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\\ &(x; y) \to \varphi(x; y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\end{aligned}$$

2. $E = C^0([0; 1])$ *et* φ *définie par :*

$$\begin{aligned}\varphi :& E \times E \to \mathbb{R}\\ &(f; g) \to \varphi(f; g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx\end{aligned}$$

- $\forall (f; g) \in E^2 : \varphi(f; g) = \varphi(g; f)$
- $\forall (f_1; f_2) \in E^2 \forall g \in E \forall (\lambda_1; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2; g) = \lambda_1 \varphi(f_1; g) + \lambda_2 \varphi(f_2; g)$
- $\forall f \in E \varphi(f; f) = \int_0^1 f^2(x)dx \geq 0$ *de plus* $\varphi(f; f) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x)dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ *(car* $f \in C^0([0; 1])$ *).*

Notation 1.6.2. *on note* $< f; g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$

Propriété 1.6.1. *Inégalité de Cauchy Schwartz :*

$$\forall (x; y) \in E^2 : |\varphi(x; y)| \leq \sqrt{\varphi(x; x)}\sqrt{\varphi(y; y)}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\forall(x;y)\in E^2\forall\lambda\in\mathbb{R}:&\varphi(x+\lambda y;x+\lambda y)\geq 0\\&\lambda^2\varphi(y;y)+\lambda\varphi(y;x)+\lambda\varphi(x;y)+\varphi(x;x)\geq 0\\&\lambda^2\varphi(y;y)+2\lambda\varphi(x;y)+\varphi(x;x)\geq 0\\&\Rightarrow\Delta=(\varphi(x;y))^2-\varphi(x;x)\varphi(y;y)\leq 0\\&\Rightarrow\Delta=(\varphi(x;y))^2\leq\varphi(x;x)\varphi(y;y)\\&\Rightarrow|\varphi(x;y)|\leq\sqrt{\varphi(x;x)}\sqrt{\varphi(y;y)}\end{aligned}$$

□

Propriété 1.6.2. *soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ, alors E est normé via la norme $||.||_E$ définie par :* $\forall x\in E:||x||_E\equiv\sqrt{\varphi(x;x)}$

Démonstration. $||.||_E$ est une norme sur E car :

1. $\forall x\in E:||x||_E=\sqrt{\varphi(x;x)}\geq 0$
2. $||.||_E=\sqrt{\varphi(x;x)}=0\Rightarrow\varphi(x;x)=0\Rightarrow x=0$
3. $\forall\lambda\in\mathbb{R}\forall x\in E:||\lambda x||_E=\sqrt{\varphi(\lambda x;\lambda x)}=\sqrt{\lambda^2\varphi(x;x)}=|\lambda|||x||_E$
4.

$$\begin{aligned}\forall(x;y)\in E^2:&||x+y||_E^2=\varphi(x+y;x+y)\\&\Rightarrow||x+y||_E^2=\varphi(x;x)+\varphi(y;y)+2\varphi(x;y)\\&\Rightarrow||x+y||_E^2=||x||_E^2+||y||_E^2+2\varphi(x;y)\\&\Rightarrow||x+y||_E^2\leq||x||_E^2+||y||_E^2+2(\sqrt{\varphi(x;x)}\sqrt{\varphi(y;y)})\\&\Rightarrow||x+y||_E^2\leq||x||_E^2+||y||_E^2+2(||x||_E+||y||_E)\\&\Rightarrow||x+y||_E^2\leq(||x||_E+||y||_E)^2\\&\Rightarrow||x+y||_E\leq(||x||_E+||y||_E)\end{aligned}$$

□

CHAPITRE 2

ESPACE DE BANACH ET ESPACE DE HILBERT

Dans ce chapitre, on introduit les espaces fonctionnels essentiels dans l'étude des équations différentielles partielles et leurs propriétés. on commence par les espaces de Banach et Hilbert, ensuite les espace de Lebesgue et les espaces de Sobolev.

2.1 Espace de Banach

Définition 2.1.1. *[DM05] soit $(E; \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé. on dira que E est un espace de Banach s'il est complet.*

Exemple 2.1.1. $\mathbb{R}$ *est complet par construction*

- $$u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$$
  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy dans* $\mathbb{Q}$
  $\lim_{n\to\infty} u_n = e \notin \mathbb{Q}$

- *soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy appartenant à* $\mathbb{R}$
  $\Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est borné dans* $\mathbb{R}$
  $\Rightarrow$ *d'après le théorème Bolzano-Weierstrass* $\exists (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge dans* $\mathbb{R}$
  $\Rightarrow$ *Une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente est elle même convergente.*

Exemple 2.1.2. $C^0([-1;1]) = f : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue sur* $[-1;1]$

- *On muni* $C^0([-1;1])$ *de la norme naturelle*
  $$\|f\|_{C^0([-1;1])} = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$$
  $(C^0([-1;1]); \|.\|_{C^0([-1;1])})$ *est complet.*

- *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $(C^0([-1;1])$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & si\ -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - nx & si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & si\ \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

et

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & si\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_1 = \|f\|_{L^1([-1;1])} &= \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)| dx \\ &= \int_{0}^{\frac{1}{n}} |f_n(x) - f(x)| dx \\ &= \int_{0}^{\frac{1}{n}} |f_n(x)| dx \\ &= \int_{0}^{\frac{1}{n}} f_n(x) dx \\ &= \int_{0}^{\frac{1}{n}} (1 - nx) dx \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$

$f_n \to f$ *dans* $C^0([-1;1])$ *au sens de* $\|.\|_1$

(f_n) *est une suite de Cauchy pour* $\|.\|_1$

soit m *et* n *de* $\mathbb{N}$ *:*

$$\begin{aligned} m < n : \|f_n - f_m\|_1 &= \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)| dx \\ &= \int_{0}^{1} |f_n(x) - f_m(x)| dx \\ &\leq \int_{0}^{1} |f_n(x)| dx + \int_{0}^{1} |f_m(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2m} \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon \exists N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} : n > m > N(\varepsilon) : \|f_n - f_m\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

car $\dfrac{1}{n} \leq \varepsilon$ *et* $\dfrac{1}{m} \leq \varepsilon$

et donc : la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy pour la norme* $\|.\|_1$ *, cependant ; pour la même norme elle converge vers* $f \notin C^0([-1;1]$ *. Autrement dit* $(C^0([-1;1];\|.\|_1)$ *n'est pas un espace de Banach.*

Généralisation : on définit l'espace $L^P([a;b])$ par :

$$L^P([a;b]) = \{f : [a;b] \to \mathbb{R}/f^p \in L^1([a;b]); p \in \mathbb{N}^*\}$$

avec :

$$L^1([a;b]) = \{f : [a;b] \to \mathbb{R}/\int_a^b |f(x)|dx < +\infty\}$$

$L^P([a;b])$ muni de la norme $\|.\|_p = \|.\|_{L^p}$ défini par : $\|f\|_p = [\int_a^b |f(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}}$ est un espace de Banach.

Proposition 2.1.1 (Caractérisation des fermés dans un espace de Banach)**.** *[DM05] soit* $(E; \|.\|_E)$ *un Banach et* $F \subset E$*.*
F est fermé $\Leftrightarrow$ *F contient les limites de ses suites de Cauchy.*

Démonstration. F est fermé dans E si toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F convergente admet sa limite dans F
$\Rightarrow$) on suppose que F est fermé. soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de F ; donc de E.
$(E; \|.\|_E)$ est un Banach $\Rightarrow \exists x \in E/x_n \to x$
F est fermé $\Rightarrow x \in F$
$\Leftarrow$) F contient les limites de ses suites de Cauchy . soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F qui converge vers $x \in E$
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy car convergente et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F \Rightarrow x \in F \Rightarrow F$ est fermé. □

Proposition 2.1.2. *[Li13] L'espace* $\mathcal{L}_c(E;F)$ *est un Banach si F lui-même un Banach.*

Démonstration. soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{L}_c(E;F)$:
$\forall\varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon > 0 n > m \geq N_\varepsilon : |||f_n - f_m||| \leq \varepsilon$
$\Rightarrow \forall x \in E : |||f_n - f_m||| \leq \varepsilon||x||_E$
$\Rightarrow$ la suite $(f(x)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F
$\Rightarrow \forall x \in E \exists f(x) \in F : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$
on a donc construit une application de E dans F

1. f est linéaire :

$$\forall(x;y) \in E^2 \forall(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2 \forall n \in \mathbb{N} : f_n(\lambda x + \mu y) = \lambda f_n(x) + \mu f_n(y)$$

   par passage à la limite :

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda(x) + \mu f(y)$$

   $\Rightarrow f$ est linéaire.

2. f est continue de E dans F $\Rightarrow f$ est continue en 0.
   $\forall\varepsilon > 0\ \exists\eta > 0\ ||x||_E \leq \eta \Rightarrow ||f(x)||_F \leq \varepsilon$?

$$||f(x)||_F = ||f(x) - f_n(x) + f_n(x)||_F \leq ||f_n(x) - f(x)||_F + ||f_n(x)||_F$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}_c(E;F) : ||f_n(x)||_F \leq |||f_n||| ||x||_E$
$||f(x)||_F \leq ||f_n(x) - f(x)||_F + |||f_n||| ||x||_E$
Or : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy : $\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} |||f_n||| \leq M$
$\Rightarrow ||f(x)||_F \leq ||f_n(x) - f(x)||_F + M||x||_E$
$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 n \geq N ||f_n(x) - f(x)||_F \leq \frac{\varepsilon}{2}$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 (\eta = \frac{\varepsilon}{2M}) : ||x||_E \leq \eta \Rightarrow ||f(x)||_F \leq \varepsilon$
$\Rightarrow f$ est C^0 en x=0 $\Leftrightarrow f$ est C^0 sur E.

3. $f_n \to f$ au sens de $|||.||| \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |||f_n - f||| = 0 \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in E} \dfrac{||f_n(x) - f(x)||_F}{||x||_E} = 0$
   $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 n >\geq N(\varepsilon) : \forall x \in E; x \neq 0 \frac{||f_n(x)-f(x)||_F}{||x||_E} \leq \varepsilon$
   $||f_n(x) - f(x)||_F \leq \varepsilon ||x||_E$
   or $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy :
   $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 n > m \geq N(\varepsilon) \forall x \in E ||f_n(x) - f_m(x)||_F \leq \varepsilon ||x||_E$
   si $m \to +\infty : f_m(x) \to f(x)$
   $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 n \geq N(\varepsilon) ||f_n(x) - f(x)||_F \leq \varepsilon ||x||_E$
   $\Rightarrow ||f_n - f||_F \leq \varepsilon \Rightarrow f_n(x) \to f(x)$ dans $\mathcal{L}_c(E;F)$

□

Théoreme 2.1.1 (Banach Picard). *[DM05] Soit H un espace de Banach et T un application de H dans H tel que :*

$$\forall (v;w) \in H^2 : ||T(v) - T(w)|| \leq k||v - w||; k \in]0;1[$$

alors :$\exists! u \in H$ *tel que* $T(u) = u$.
on dit que u est le point fixe de T

Démonstration. 1. Unicité de u :
   soit u_1 et u_2 appartenant à H : $T(u_1) = u_1$ et $T(u_2) = u_2$
   $\Rightarrow ||T(u_1) - T(u_2)|| = ||u_1 - u_2|| \leq k||u_1 - u_2||$
   $\Rightarrow (1 - k)||u_1 - u_2|| \leq 0$
   $\Rightarrow ||u_1 - u_2|| = 0$; car $k \in]0;1[$
   $\Rightarrow u_1 = u_2$

2. Existence de u :
   H est un Banach.
   T est contractante :$\forall (v;w) \in H^2 : ||T(v) - T(w)|| \leq k||v - w||; k \in]0;1[$
   soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H / u_{n+1} = T(u_n); (u_0$ dans $H)$
   soit $m > n; m = n + p : ||u_m - u_n|| = ||u_{n+p} - u_n||$

$$\begin{aligned}\text{soit} r \in \mathbb{N}^* : ||u_{r+1} - u_r|| = ||T(u_r) - T(u_{r-1})|| &\leq k||u_r - u_{r-1}|| = k||T(u_{r-1}) - T(u_{r-2})|| \\ &\leq k^2||u_{r-1} - u_{r-2}|| \\ &. \\ &. \\ &. \\ &\leq k^r||u_1 - u_0||\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow ||u_{n+p} - u_n|| &= ||(u_{n+p} - u_{n+p-1}) + (u_{n+p-1} - u_{n+p-2}) + ... + (u_{n+1} - u_n)|| \\ &\leq ||(u_{n+p} - u_{n+p-1})|| + ||(u_{n+p-1} - u_{n+p-2})|| + ... + ||(u_{n+1} - u_n)|| \\ &\leq k^{n-p+1}||u_1 - u_0|| + ... + k^n||u_1 - u_0|| \\ &\leq k^n||u_1 - u_0||(\frac{1-k^n}{1-k}) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k}||u_1 - u_0||\end{aligned}$$

quand $n \to +\infty$: $\frac{k^n}{1-k} \to 0$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : ||u_n - u_m|| \leq \varepsilon$
autrement dit :$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :$u_{n+1} = T(u_n)$ est une suite de Cauchy , H étant un Banach :
$\exists! u \in H : \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$

3. Montrer que : $u = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ vérifie $u = T(u)$.
   on a :$u_{n+1} = T(u_n), \forall n \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} T(u_n) = T(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n)$?
   T est lipschitzienne donc continue :

$$\forall (v; w) \in H^2 : ||T(v) - T(w)|| \leq k||v - w||$$

soit $x_0 \in H$ fixé on a :$\forall x \in H : ||T(x) - T(x_0)|| \leq k||x - x_0||$
soit $\varepsilon > 0$; $\exists \delta > 0 : ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||T(x) - T(x_0)|| \leq \varepsilon$?
or :$||T(x) - T(x_0)|| \leq k||x - x_0|| \leq \varepsilon \Rightarrow ||x - x_0|| \leq \frac{\varepsilon}{k} = \delta$
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{k} :: ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||T(x) - T(x_0)|| \leq \varepsilon$
T est continue en x_0 ; $\forall x_0 \in H$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} T(u_n) = T(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n)$
$\Rightarrow u = T(u)$

$\square$

2.2 Espace de Hilbert

2.2.1 Deffinitions et propriétés

Définition 2.2.1. *[DM05] un espace vectoriel E est un Hilbert s'il est normé complet, dont la norme est issue d'un produit scalaire φ*
C.a.d : soit $||.||$ la norme de E :

$$\exists\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$$
$$(x;y) \to \varphi(x;y)$$

tq $||x|| = \sqrt{\varphi(x;x)}$ *avec φ : produit scalaire.*

Proposition 2.2.1. *[DM05] soit E un espace de Hilbert pour la norme $||.||$*
$\exists\varphi$ *, produit scalaire ,* $\sqrt{\varphi(x;x)} = ||x||, \forall x \in E$ *alors $||.||$ vérifie l'identité du parallélogramme :*

$$\forall(x;y) \in E^2 : ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

Démonstration.

$$\forall x \in E : ||x|| = \sqrt{\varphi(x;x)}$$

$$||x+y||^2 = \varphi(x+y;x+y) = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\varphi(x;y)$$

$$||x-y||^2 = \varphi(x-y;x-y) = ||x||^2 + ||y||^2 - 2\varphi(x;y)$$

$$\Rightarrow ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

□

Proposition 2.2.2. *Si $(E;||.||)$ est un Banach vérifiant l'identité du parallélogramme alors E est un espace de Hilbert muni du produit scalaire défini par :*

$$\forall(x;y) \in E^2 : \varphi(x;y) = \frac{1}{4}\{||x+y||^2 - ||x-y||^2\} \Rightarrow \varphi(x;x) = ||x||^2$$

Démonstration.

1. $\forall(x;y) \in E^2 : \varphi(x;y) = \varphi(y;x)$

2. $\varphi(x;x) = ||x||^2 \Rightarrow \varphi(x;x) \geq 0$ et $(\varphi(x;x) = 0 \Rightarrow x = 0)$

3. linéarité par rapport au premier argument :

- $\forall(x;y;z)\in E^3 : \varphi(x+y;z)=\varphi(x;z)+\varphi(y;z)$? on a :

$$\begin{aligned}\varphi(x+y;z)+\varphi(x-y;z) &= \frac{1}{4}\{||x+y+z||^2-||x+y-z||^2+||x-y+z||^2-||x-y-z||^2\}\\ &= \frac{1}{4}\{(||x+y+z||^2+||x-y+z||^2)\\ &-(||x+y-z||^2+||x-y-z||^2)\}\\ &= \frac{1}{4}\{2(||x+z||^2+||y||^2)-2(||x-z||^2+||y||^2)\}\\ &= \frac{1}{2}\{||x+z||^2-||x-z||^2\}\\ &= 2\varphi(x;z)\end{aligned}$$

$\forall(x;y;z)\in E^3 : \varphi(x+y;z)+\varphi(x-y;z)=2\varphi(x;z)$ on pose $2u=x+y$ et $2v=x6y\Rightarrow x=u+v$
$\Rightarrow \varphi(2u;z)+\varphi(2v;z)=2\varphi(u+v;z)$
$\Rightarrow$ quand x=y : $\varphi(2x;z)+\varphi(0;z)=2\varphi(x;z)$ or $\forall(x;y)\in E^2 : \varphi(x;y)=\frac{1}{4}\{||x+y||^2-||x-y||^2\}\Rightarrow\varphi(0;y)=0$
on obtient :$\varphi(2x;z)=2\varphi(x;z)$
$\Rightarrow 2\varphi(u;z)+2\varphi(v;z)=2\varphi(u+v;z)$
$\Rightarrow \varphi(u;z)+\varphi(v;z)=\varphi(u+v;z)$

- $\forall\lambda\in\mathbb{R}\forall(x;y)\in E^2 : \varphi(\lambda x;y)=\lambda\varphi(x;y)$?

(i). $\lambda\in\mathbb{N}\lambda=n\forall(x;y)\in E^2 : \varphi(nx;y)=n\varphi(x;y)$?
pour n=0 on a $\varphi(0;y)=0=0\varphi(x;y)$
hypothèse : on suppose que $\varphi(nx;y)=n\varphi(x;y)\forall n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\varphi((n+1)x;y) &= \varphi(nx+x;y)\\ &= \varphi(nx;y)+\varphi(x;y)\\ &= n\varphi(x;y)\text{hyp de récurance}\\ &= (n+1)\varphi(x;y)\end{aligned}$$

donc $\forall n\in\mathbb{N}\varphi(nx;y)=n\varphi(x;y)$

(ii). $\lambda\in\mathbb{Z}\lambda=n\ in\mathbb{Z}^-;n=-n';n'\in\mathbb{N}\forall(x;y)\in E^2 : \varphi(-n'x;y)=-\varphi(n'x;y)$?
or :

$$\begin{aligned}\forall(x;y)\in E^2 : \varphi(-x;y) &= \frac{1}{4}\{||-x+y||^2-||-x-y||^2\}\\ &= \frac{1}{4}\{||x-y||^2-||x+y||^2\}\\ &= -\varphi(x;y)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi(nx;y)=\varphi(-n'x;y)=-\varphi(n'x;y)=-n'\varphi(x;y)=n\varphi(x;y)$

$$\forall\lambda\in\mathbb{Z}\forall(x;y)\in E^2 : \varphi(\lambda x;y)=\lambda\varphi(x;y)$$

(iii). soit$\lambda = \frac{m}{n}; (m; n) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) \varphi(\frac{m}{n}x; y) = \frac{m}{n}\varphi(x; y)$?
si on pose $u = \frac{x}{n} \Rightarrow x = nu$
$\varphi(x; y) = \varphi(nu; y) = n\varphi(u; y) = n\varphi(\frac{x}{n}; y)$
$\Rightarrow \varphi(\frac{x}{n}; y) = \frac{1}{n}\varphi(x; y)$
$\Rightarrow \varphi(\frac{m}{n}x; y) = \frac{m}{n}\varphi(x; y)$

(iv). soit $\lambda \in \mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$
$\exists(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q} : \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$

on a :$\forall n \in \mathbb{N} \forall (x; y) \in E^2 : \varphi(\lambda_n x; y) = \lambda_n \varphi(x; y)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \varphi(\lambda x; y) - \lambda\varphi(x; y) &= \varphi(\lambda x; y) - \varphi(\lambda_n x; y) + \varphi(\lambda_n x; y) - \lambda\varphi(x; \\ &= \varphi(\lambda x; y) + \varphi(-\lambda_n x; y) + (\lambda_n - \lambda)\varphi(x; y) \\ &= \varphi((\lambda - \lambda_n)x; y) + (\lambda_n - \lambda)\varphi(x; y)\end{aligned}$$

de l'identité du parallélogramme que :

$$\forall (x; y) \in E^2 : ||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \forall (x; y) \in E^2 : \varphi(x; y) &= \frac{1}{4}\{||x + y||^2 \\ &- ||x - y||^2\} \\ &= \frac{1}{4}\{||x + y||^2 - 2||x||^2 - 2||y||^2 + ||x + y||^2\} \\ &= \frac{1}{2}\{||x + y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\}\end{aligned}$$

$\Rightarrow |\varphi(x; y)| \leq \frac{1}{2}\{(||x|| + ||y||)^2 - (||x||^2 + ||y||^2)\}$(inégalité triangulaire)
$\Rightarrow |\varphi(x; y)| \leq ||x||||y||$
d'ou :
$|\varphi(\lambda - \lambda_n)x; y)| \leq ||(\lambda - \lambda_n)x||y|| = |\lambda - \lambda_n|||x||||y||$
$\Rightarrow |\varphi(\lambda x; y) - \lambda\varphi(x; y)| \leq |\lambda - \lambda_n|||x||||y|| + |\lambda - \lambda_n||\varphi(x; y)|$
$\Rightarrow |\varphi(\lambda x; y) - \lambda\varphi(x; y)| \leq 2|\lambda - \lambda_n|||x||||y|$
quand $n \to +\infty$ on obtient :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall (x; y) \in E^2 : \varphi(\lambda x; y) = \lambda\varphi(x; y)$$

$$\Rightarrow \varphi(x; y) = \frac{1}{4}\{||x + y||^2 - ||x - y||^2\}$$

défini un produit scalaire sur E avec $\varphi(x; x) = ||x||^2$ cela confère à E la structure d'espace de Hilbert. □

Exemple 2.2.1 (Espace de Hilbert)**.** *L'espace* $L^2([0;1])$ *défini par* $\{f : [0;1] \to \mathbb{R}/ \int_0^1 f^2(x)dx < +\infty\}$
soit $||.||_{L^2([0;1])}$ *défini par :*

$$\forall f \in L^2([0;1]) : ||f||_{L^2([0;1])} = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx}$$

on définit l'application : $\varphi L^2([0;1]) \times L^2([0;1]) \to \mathbb{R}$*par :*

$$\forall(f;g) \in (L^2([0;1]))^2 : \varphi(f;g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

on a $\varphi(f;f) = ||.||_{L^2([0;1])}$

2.2.2 Projection sur un convexe fermé

Définition 2.2.2. *[DM05] soit H un espace de Hilbert ;* $K \subset H$ *;K est convexe si :*

$$\forall t \in [0;1], \forall(x;y) \in K^2 : (tx + (1-t)y) \in K$$

Exemple 2.2.2. *B(0;1) est convexe.*
B(0;1)= $x \in H; ||x|| \leq 1$
soit $(x_1;x_2) \in$ *(B(0;1))*^{2} *soit* $t \in [0;1]$ *:*

$$||tx_1 + (1-t)x_2|| \leq t||x_1|| + (1-t)||x_2|| \leq t + 1 - t = 1$$

$\Rightarrow (tx_1 + (1-t)x_2) \in$*B(0;1)*

Exemple 2.2.3. *S(0;1) n'est pas convexe.*
S(0;1) $= x \in H; ||x|| = 1$
si $x \in S(0;1)$ *alors* $-x \in S(0;1)$

$$||x|| = ||-x|| = 1$$
$$\exists t = \frac{1}{2} : ||\frac{x}{2} - \frac{x}{2}|| = 0 \notin S(0;1)$$

Proposition 2.2.3. *[DM05] Soit H un Hilbert,*$K \subset H$ *; un convexe non vide et fermé dans H :*

$$\forall x \in H \exists! c \in K : ||x - x_c|| = \inf_{y \in K} ||x - y||$$

Remarque 2.2.1. *[DM05]*

- $\forall x \in H \forall y \in K : ||x-y|| \geq 0 \Leftrightarrow \inf_{y \in K} ||x-y||$ *existe.*
- x_c *est appelé le projeté de* x *sur* K

Proposition 2.2.4. *[DM05] Soit H un Hilbert,*$K \subset H$ *; un convexe non vide et fermé dans H. soit* $x \in H$ *et* $x_c = P_K(x)$ *(projection de* x *sur* K*) ; alors*

$$\forall y \in K :< x - x_c; y - x_c > \leq 0$$

Démonstration. $\forall t \in]0;1], \forall z \in K : y = tz + (1-t)x_c \in K$
on sait que :

$$\begin{aligned}
\forall y \in K ||x - x_c|| \leq ||x - y|| &\Rightarrow ||x - x_c|| \leq ||x - (tz + (1-t)x_c)|| \\
&\Rightarrow ||x - x_c||^2 \leq ||x - (tz + (1-t)x_c)||^2 \\
&\Rightarrow 0 \leq ||(x - x_c) + t(x_c - z)||^2 - ||x - x_c||^2 \\
&\Rightarrow 0 \leq ||x - x_c||^2 + t^2||(x_c - z||^2 + 2t < x - x_c; x_c - z > -||x - x_c||^2 \\
&\Rightarrow 0 \leq t^2||(x_c - z||^2 + 2t < x - x_c; x_c - z > \\
&\Rightarrow 0 \leq t||(x_c - z||^2 + 2 < x - x_c; x_c - z > \\
\text{quand } t \to 0 : & \\
&\Rightarrow 0 \leq 2 < x - x_c; x_c - z > \\
&\Rightarrow 0 \geq 2 < x - x_c; z - x_c >
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.5. *[Boy14] Soit H un Hilbert,$K \subset H$; un convexe non vide et fermé dans H.*

$$\forall x \in H \exists x_c \in K \forall y \in K :< x - x_c; y - x_c > \leq 0$$

alors : $x_c = P_K(x)$ *i.e :* $||x - x_c|| = \inf_{y \in K} ||x - y||$

Démonstration. soit $x \in H y \in K : ||x - y||^2 = ||x - x_c + x_c - y||^2$
$\Rightarrow ||x - y||^2 = ||x - x_c||^2 + ||x_c - y||^2 + 2 < x - x_c; x_c - y >$
on sait que :$< x - x_c; x_c - y > \geq 0$
$\Rightarrow ||x - y||^2 \geq ||x - x_c||^2 + ||x_c - y||^2$
$\Rightarrow ||x - y||^2 \geq ||x - x_c||^2$ □

Proposition 2.2.6 (Projection sur un s.e.v fermé)**.** *[Boy14] Soit H un Hilbert et K un sous espace vectoriel fermé de H. alors :*

$$\forall x \in H \exists! x_c = P_K(x) \in K \forall y \in K :< x - x_c; y = 0$$

on dira que x_c est le projeté orthogonal de x sur K

Démonstration. K est un s.e.v fermé, c'est donc un convexe fermé non vide $\forall(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2 \forall(x;y) \in K^2 : \lambda x + \mu y \in K$ en particulier : $\forall t \in [0;1] : tx + (1-t)y \in K$
$\exists! x_c \in K / ||x - x_c|| = \inf_{y \in K} ||x - y||$; $x_c = P_K(x)$
on a aussi :$\forall y \in K :< x - x_c; y - x_c > \leq 0$; $\forall x \in H$

- $y = 2x \in K \Rightarrow < x - x_c; x_c > \leq 0$

- $y = 0 \in K \Rightarrow < x - x_c; -x_c > \leq 0 \Rightarrow < x - x_c; x_c > \geq 0$

$\Rightarrow \forall x \in H :< x - x_c; -x_c >= 0$
$< x - x_c; y - x_c > \leq 0 ; \forall y \in K ; \forall x \in H$
$\Rightarrow < x - x_c; y > - < x - x_c; x_c > \leq 0$
$\Rightarrow < x - x_c; y > \leq 0 ; \forall y \in K$
si $y \in K$ alors $-y \in K :< x - x_c; -y > \leq 0$
$\Rightarrow \forall y \in K :< x - x_c; y > \geq 0$
$\Rightarrow \forall y \in K :< x - x_c; y >= 0$

□

Proposition 2.2.7 (Caractérisation du projeté orthogonal sur un s.e.v). *Soit H un Hilbert et K un sous espace vectoriel fermé de H.*
soit $x \in H$ *et* $x_c \in K$ *tq* $:< x - x_c; y >= 0$ *;* $\forall y \in K$ *alors* $x_c = P_K(x)$ *i.e* $:||x - x_c|| = \inf\limits_{y \in K} ||x - y||$

Démonstration. $||x - y||^2 = ||(x - x_c) + (x_c - y)||^2 = ||x - x_c||^2 + ||x_c - y||^2 + 2 < x - x_c; x_c - y >$
$2 < x - x_c; x_c - y >= 0(\text{car}(x_c - y) \in K)$
$\Rightarrow ||x - y||^2 = ||x - x_c||^2 + ||x_c - y||^2$
$\Rightarrow ||x - y||^2 \geq ||x - x_c||^2$
$\Rightarrow ||x - y|| \geq ||x - x_c||$

□

2.2.3 Opérateur de projection

Proposition 2.2.8. *[Boy14] Soit H un Hilbert et K un sous espace vectoriel fermé de H. l'opérateur de projection* P_K *défini par :*

$$P_k : H \to K$$
$$x \to P_K(x)$$

tel que : $||x - P_K(x)|| = \inf\limits_{y \in K} ||x - y||$

1. P_K *est linéaire.*

2. P_K *est lipschitzienne de rapport 1.*

3. P_K *est continue.*

Démonstration. 1. P_K est linéaire ?
soient $(x; x') \in H^2; (\lambda; \lambda') \in \mathbb{R}^2 : P_K(\lambda x + \lambda' x') = \lambda P_K(x) + \lambda' P_K(x')$?
$\exists !(P_K(x) + P_K(x')) \in K^2 \forall y \in K :< x - P_K(x); y >= 0$ et $< x' - P_K(x'); y >= 0$
$\Rightarrow < \lambda x - \lambda P_K(x); y >= 0$ et $< \lambda' x' - \lambda' P_K(x'); y >= 0$
$\Rightarrow < \lambda x + \lambda' x' - (\lambda P_K(x) + \lambda' P_K(x')); y >= 0$
on pose $\lambda x + \lambda' x' = z*$
soit $z \in H \exists z* \in K < z - z*; y >= 0$

$\Rightarrow z* = P_K(z) \Rightarrow P_K(\lambda x + \lambda' x') = \lambda P_K(x) + \lambda' P_K(x')$
$\Rightarrow P_K$ est linéaire.

2. $\forall (x; x') \in H^2 ||P_K(x) - P_K(x')|| \leq ||x - x'||$?

$$\begin{aligned} ||x - x'||^2 &= ||x - P_K(x) + P_K(x) - P_K(x') + P_K(x') - x'||^2 \\ &= ||(P_K(x) - P_K(x')) + (x - P_K(x)) + (P_K(x') - x')||^2 \\ &= ||P_K(x) - P_K(x')||^2 + ||(x - P_K(x)) + (P_K(x') - x')||^2 + 2 < P_K(x) - P_K(x'); x - P_K(x) > \end{aligned}$$

Or $< x - P_K(x); y - P_K(x) > \leq 0$; $\forall y \in K$
on pose $y = P_K(x') \in K \Rightarrow < x - P_K(x); y - P_K(x) > \leq 0$
$\Rightarrow < P_K(x) - P_K(x'); x - P_K(x) > \geq 0$
de même : $< x' - P_K(x'); y - P_K(x') > \leq 0$; $\forall y \in K$
on pose $y = P_K(x) \in K \Rightarrow < x' - P_K(x'); y - P_K(x) > \leq 0$
$\Rightarrow < P_K(x') - P_K(x); P_K(x') - x' > \geq 0$
$\Rightarrow ||x - x'||^2 \geq ||P_K(x) - P_K(x')||^2 \Rightarrow ||x - x'|| \geq ||P_K(x) - P_K(x')||$

3. P_K est linéaire et lipschitzienne donc continue.

□

Remarque 2.2.2. *Dans le cadre d'une projection sur un convexe fermé P_K est lipschitzienne de rapport égal à 1 .*

Définition 2.2.3. *Soit H un Hilbert et K un sous espace vectoriel fermé de H.on définit $K^\perp$ par :*

$$K^\perp = z \in H; < z; y >= 0; \forall y \in K$$

Proposition 2.2.9. *[Boy14][DM05]*

1. *$K^\perp$ est un s.e.v fermé de H.*

2. *$\forall x \in H \exists! x_K \in K \exists! x_{K^\perp} \in K^\perp / x = x_K + x_{K^\perp}$*

Démonstration. 1. • $K^\perp$ est un s.e.v de H ?
soient $(z; z') \in (K^\perp)^2; (\lambda; \lambda') \in \mathbb{R}^2; \forall y \in K :< \lambda z + \lambda' z'; y >= \lambda < z; y > + \lambda' < z'; y >= 0$
$\Rightarrow K^\perp$ est un s.e.v de H.

- $K^\perp = z \in H; < z; y >= 0; \forall y \in K$
soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy de $K^\perp$: $z_n \to z \in K^\perp$?
or $K^\perp \subset H$ qui est complet $\Rightarrow \exists z \in H / \lim_{n\to\infty} ||z_n - z|| = 0$

- $z \in K^\perp$?
$\forall y \in K \forall n \in \mathbb{N} :< z; y >=< z - z_n + z_n; y > \Rightarrow < z; y >=< z - z_n; y > + < z_n; y >$
$< z_n; y >= 0$ car $z_n \in K^\perp$

$\Rightarrow < z; y > = < z - z_n; y >$
$\Rightarrow | < z; y > | = | < z - z_n; y > |$
$\Rightarrow | < z; y > | \leq ||z - z_n||||y||$ (C.S)
quand $n \to +\infty$: $||z - z_n|| \to 0$
$\Rightarrow < z; y > = 0$
$\Rightarrow K^{\perp}$ est fermé.

2. - soit $x \in H \Rightarrow \exists! P_K(x) \in K : ||x - P_K(x)|| = \inf_{y \in K} ||x - y||$
  $x = P_K(x) + x - P_K(x)$
  or : $< x - P_K(x); y > = 0$; $\forall y \in K$
  $\Rightarrow (x - P_K(x)) \in K^{\perp}$

  - soit $x \in H \exists (x_K; x_{K^{\perp}}) \in (K \times K^{\perp}) : x = x_K + x_{K^{\perp}}$
  supposons qu'on ait :$x = x^1_K + x^1_{K^{\perp}} = x^2_K + x^2_{K^{\perp}}$
  $\Rightarrow x^1_K - x^2_K = x^2_{K^{\perp}} - x^1_{K^{\perp}}$
  $\Rightarrow (x^1_K - x^2_K) \in K$ et $(x^2_{K^{\perp}} - x^1_{K^{\perp}}) \in K^{\perp}$
  $\Rightarrow (x^1_K - x^2_K = x^2_{K^{\perp}} - x^1_{K^{\perp}}) \in K \bigcap K^{\perp}$
  soit $z \in K \bigcap K^{\perp} \Rightarrow z \in K$ et $z \in K^{\perp}$:$< z; y > = 0 \forall y \in K$
  en particulier, si y=z on a :$< z; z > = ||z|| = 0$
  $\Rightarrow z = 0$
  $\Rightarrow K \bigcap K^{\perp} = 0$
  $\Rightarrow x^1_K = x^2_K$ et$x^2_{K^{\perp}} = x^1_{K^{\perp}}$

□

2.2.4 Théoreme de Riesz

Théoreme 2.2.1 (Représentation d'une forme linéaire). *[Boy14] Soit H un Hilbert et L une forme linéaire continue définie sur H. alors*

$$\exists! u \in H : L(u) = < u; v > \forall v \in H$$

Démonstration. $L : H \to \mathbb{R}$
$KerL = v \in H; L(v) = 0 \subseteq H$

- Existence de u

  1. KerL=H
     $KerL = H \Leftrightarrow \forall v \in H : L(v) = 0 \Leftrightarrow < u; v > = 0 \Rightarrow u = 0$
  2. $KerL \subset H$
     $\Rightarrow \exists v \in (H \setminus KerL) : L(v) \neq 0$
     si Kerl est un s.e.v fermé de H alors : si on note K=KerL :

$\exists ! P_K(v) \in K : v_1 = P_K(v) - v \in K^{\perp}$
avec $K^{\perp}$ s.e.v fermé $\Rightarrow$: $v_1 = \lambda w; \lambda \in \mathbb{R}; w \in K^{\perp}$
avec $< v_1; w >=< \lambda w; w >= \lambda ||w||^2$
et $< v_1; w >=< P_K(v) - v; w >=< P_K(v); w > - < v; w >= - < v; w >$ car $(P_K(v) \in K; w \in K^{\perp})$
$\Rightarrow \lambda ||w||^2 = - < v; w >$
$\Rightarrow \lambda = \frac{-<v;w>}{||w||^2}$
$L(v) = L(P_K(v) - v_1) = L(P_K(v)) - L(v_1) = -L(v_1)$
L$(v) = L(\frac{<v;w>}{||w||^2} w = \frac{<v;w>}{||w||^2}) L(w)$
si $v \in (H \setminus KerL)$ alors $L(v) =< v; \frac{wL(w)>}{||w||^2} >$
on pose $u = \frac{wL(w)>}{||w||^2} \in K^{\perp} = (KerL)^{\perp}$
$\Rightarrow \exists u \in H : L(v) =< u; v >$

- Unicité de u
  soit $(u_1; u_2) \in H^2 \forall v \in H : L(v) =< u_1; v >=< u_2; v >$
  $\Rightarrow < u_1 - u_2; v >= 0 \, ; \forall y \in H$
  on choisit : $v = u_1 - u_2 \in H$
  $\Rightarrow < u_1 - u_2; u_1 - u_2 >= ||u_1 - u_2||^2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$

□

Propriété 2.2.1. *Soit H un Hilbert et L une forme linéaire continue sur H. alors KerL est un s.e.v fermé de H.*

Démonstration. 1. KerL est un s.e.v de H ?
soit $(v; v') \in (KerL)^2 (\lambda; \lambda') \in \mathbb{R}^2$:
$L(\lambda v + \lambda' v') = \lambda L(v) + \lambda' L(v') = 0$

2. KerL est fermé dans H ?
soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de KerL.
on montre qu'elle converge dans KerL.
or$KerL \subset H$;H est un Hilbert ; Banach
$\Rightarrow \exists v \in H / \lim_{n \to \infty} v_n = v \; L(v) = Lv - v_n + v_n) = L(v - v_n) + L(v_n = L(v - v_n))$
$\Rightarrow |L(v)| = |L(v - v_n)$
Or L est C^0 :$\exists c > 0 \forall w \in H : ||L(w)|| \leq c||w||$
En particulier si $w = v - v_n \in H$
alors $||L(v)|| \leq c||v - v_n|| \, ; \forall n \in \mathbb{N}$
quand $n \to 0$ alors $c||v - v_n|| \to 0$
$\Rightarrow |L(v)| = 0$
$\Rightarrow L(v) = 0$
$\Rightarrow v \in KerL$

□

2.2.5 Théorème de Stampacchia

Théoreme 2.2.2. *[BB11][LS98] Soit H un Hilbert muni d'un produit scalaire $<.;>_H$ et la norme associée $||.||_H$. soit a une forme bilinéaire symétrique, continue et H-elliptique :$\exists\alpha > 0 \forall v \in H$: $a(v;v) \geq \alpha||v||^2$.*
soit L une forme linéaire et continue sur H et soit $K \subseteq H$ un convexe fermé de H.

$$\exists! u \in K/I(u) \leq I(v); \forall v \in K \text{ avec : } I(v) = \frac{1}{2}a(v;v) - L(v); \forall v \in K$$

Démonstration. 1. a est bilinéaire, symétrique, continue et H-elliptique :

- f est C^0 : $\exists M > 0 \forall (u;v) \in H^2 : |a(u;v)| \leq M||u||_H||v||_H$
  en particulier : si $u = v$: $|a(v;v)| \leq M||v||_H^2$
- f est H-elliptique :$\exists \alpha > 0 \forall v \in H : a(v;v) \geq \alpha||v||_H^2$
  $\Rightarrow a(v;v) \geq 0$
  $\Rightarrow \forall v \in H : 0 \leq \alpha||v||_H^2 \leq a(v;v) \leq M||v||_H^2$
  $\Rightarrow$si$(a(v;v) = 0 \Rightarrow v = 0)$
  $\Rightarrow a$ définit un produit scalaire : $< .; . >_1 :< u; v >_1 = a(u;v)$
  $\forall v \in H : ||v||_1^2 =< v; v >_1 = a(v;v)$
  $\Rightarrow \forall v \in H : \alpha||v||_H^2 \leq ||v||_1^2 \leq M||v||_H^2$
  $\Rightarrow ||.||_1$et$||.||_H$ sont équivalentes.
  $\Rightarrow (H; ||.||_1)$ est aussi un Hilbert.

2. L est C^0 sur H, d'après le théorème de Riesz :$\exists! v_L \in H : L(v) =<< v_L; v >_1; v >_1; \forall v \in H$
   $\Rightarrow L(v) =< v_L; v >_1 = a(v_L; v)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow I(v) &= \frac{1}{2}a(v;v) - L(v)\\ &= \frac{1}{2}a(v;v) - a(v_L;v)\\ &= \frac{1}{2}a(v - v_L; v - v_L) - \frac{1}{2}a(v_L; v_L)\\ &= \frac{1}{2}(||v - v_L||_1^2 - ||v_L||_1^2)\end{aligned}$$

3. si $K \subseteq H$ est un convexe fermé alors :

$$\exists! P_K(v_L) :< v_L - P_K(v_L); y - P_K(v_L) >_1 \leq 0$$

   si on pose $u = P_K(v_L) :< v_L - u); y - u >_1 \leq 0; \forall y \in K$
   $I(v) = \frac{1}{2}(||v - v_L||_1^2 - ||v_L||_1^2), v \in K$ Or $||v - v_L||_1^2 = ||(v-u)(u-v_L)||_1^2 = ||v-u||_1^2 + ||u-v_L||_1^2 + 2 < v - u; u - v_L >_1$
   $2 < v - u; u - v_L >_1 \geq 0$
   $\Rightarrow ||v - u||_1^2 \geq ||u - v_L||_1^2$

$\Rightarrow I(v) \geq \frac{1}{2}(||u - v_L||_1^2 - ||v_L||_1^2) = I(u)$
avec$u = P_K(v_L)$
$\Rightarrow \forall v \in K : I(v) \geq I(u); u = P_K(v_L)$

(a) v_L est unique par le théorème de Riesz.

(b) $P_K(v_L)$ est unique par le théoreme de projection. $\Rightarrow$ u réalise le minimum de :$I(u) = \inf_{v \in H} I(v)$ avec $I(v) = \frac{1}{2}a(v; v) - L(v)$

□

Corollaire 2.2.1. *Sous les hypothèses du théorème de Stompacchia on a l'équivalence suivante :*

$$\exists! u \in K : I(u) \leq I(v); \forall v \in K \tag{2.2.1}$$

$$\Leftrightarrow \exists! u \in K : a(u; v-u) \geq L(v-u); \forall v \in K \tag{2.2.2}$$

avec $I(v) = \frac{1}{2}a(v; v) - L(v)$

Démonstration. (2.2.1) $\Rightarrow$ (2.2.2) $u = P_K(v_L); L(v) =< v_L; v >_1; \forall v \in K$
K est un convexe fermé dans H.
$\Rightarrow < v_L - u; v - u >_1 \leq 0$
$\Rightarrow a(v_L; v-u) \leq a(u; v-u)$
$\Rightarrow L(v-u) \leq a(u; v-u)$ (car (v-u)$\in K$)

(2.2.2) $\Rightarrow$ (2.2.1) on sait que $\forall v \in K : a(u; v-u) \geq L(v-u)$
or

$$\begin{aligned} I(v) - I(u) &= \frac{1}{2}a(v; v) - L(v) - \frac{1}{2}a(u; u) - L(u) \\ &= \frac{1}{2}a(v-u; v-u) - a(u; u) + a(u; v) - L(v-u) \\ &= \frac{1}{2}a(v-u; v-u) + a(u; v-u) - L(v-u) \\ &= \frac{1}{2}a(v-u; v-u) + a(u; v-u) - L(v-u) \end{aligned}$$

$\Rightarrow I(v) - I(u) \geq \frac{1}{2}a(v-u; v-u) \geq 0$ (H-elliptique)
$\Rightarrow I(u) \leq I(v)$

□

Proposition 2.2.10. *sous les hypothéses du théorème de Stampacchia avec $K \subset H$ s.e.v fermé de H. alors on a :*

1. $\exists! u \in K / I(u) \leq I(v)$;$\forall v \in K$

2. $\exists! u \in K / a(u; v) = L(v)$;$\forall v \in K$

3. $\exists ! u \in K / a(u;v-u) = L(v-u)$;$\forall v \in K$

Démonstration. un s.e.v fermé est un convexe fermé donc d'apres le théoreme de stampcchia :$I(u) \leq I(v)$;$\forall v \in K$
1) $\Rightarrow$ 2)
soit $u \in K$ tq : $I(u) \leq I(v)$;$\forall v \in K$
or K est un s.e.v fermé donc :
$< v_L - u; v >_1 = 0; \forall v \in K$
$\Rightarrow a(v_L - u; v) = 0; \forall v \in K$
$\Rightarrow a(v_L; v) - a(u; v) = 0; \forall v \in K$
$\Rightarrow a(u; v) = a(v_L; v) =< v_L; v >_1 = L(v); \forall v \in K$
$\Rightarrow \forall v \in K : a(u; v) = L(v)$
Or : $u \in K; v \in K \Rightarrow (v-u) \in K$
$\Rightarrow L(v-u) = a(u; v-u)$
$\Rightarrow L(v-u) \leq a(u; v-u)$
u est solution de $\forall v \in K : I(u) \leq I(v)$ □

Proposition 2.2.11 (Généralisation du théorème de Riesz)**.** *[LS98] Soit H un Hilbert et a une forme bilinéaire et continue sur $H \times H$ alors : $\exists ! A : H \to H$ linéaire et continue tel que :*

$$\forall (u; v) \in H^2 : a(u; v) =< A(u); v >$$

Démonstration. Soit u fixé dans H ; on considère l'application L définie par :

$$\begin{aligned} L :& H \to \mathbb{R} \\ & v \to a(u; v) \end{aligned}$$

$\forall v \in H : L(v) = a(u; v)$

- L est linéaire (a est bilinéaire)
- L est continue : $|L(v)| = |a(u; v)| \leq (M||u||)||v|| = c||v||$ (car a est continue)

$\Rightarrow \exists ! A_u \in H / L(v) = a(u; v) =< A_u; v >; \forall v \in H$
soit :

$$\begin{aligned} A :& H \to \mathbb{R} \\ & u \to A(u) = A_u \end{aligned}$$

avec A_u satisfaisant :$a(u; v) =< A_u; v >; \forall (u; v) \in H^2$

1. A est linéaire : soit $(u_1; u_2) \in H^2; \lambda \in \mathbb{R} : A(u_1 + \lambda u_2) = A_{u_1+\lambda u_2}$ avec :

$$\begin{aligned} < A(u_1 + \lambda u_2); v > &=< A_{u_1+\lambda u_2}; v > \\ &= a(u_1 + \lambda u_2; v) \\ &= a(u_1; v) + \lambda a(u_2; v) \\ &=< A_{u_1}; v > +\lambda < A_{u_2}; v > \\ &=< A_{u_1} + \lambda A_{u_2}; v > \\ &=< A(u_1) + \lambda A(u_2); v > \end{aligned}$$

   $\Rightarrow \forall v \in H :< A(u_1 + \lambda u_2) - A(u_1) + \lambda A(u_2); v >= 0$

2. A est continue : $\exists c > 0 \forall u \in H : ||A(u)|| \leq c||u||$?
   A est linéaire

$$\forall (u; v) \in H^2 : a(u; v) =< A(u); v >$$

$$|a(u; v)| = | < A(u); v > | \leq M||u||||v||$$

   si $v = A(u) : | < A(u); A(u) > | \leq M||u||||A(u)||$
   $\Rightarrow || < A(u)||^2 \leq M||u||||A(u)||$
   $\Rightarrow || < A(u)|| \leq M||u|| \; (siA(u) \neq 0)$
   si $A(u) = 0 : 0 \leq 0$
   $\Rightarrow$ A est continue de H dans H.

3. Unicité de A :
   soit A_1 et A_2 définie de H dans H tel que :

$$\forall (u; v) \in H^2 : a(u; v) =< A_1(u); v >=< A_2(u); v >$$

   $\Rightarrow \forall (u; v) \in H^2 :< A_1(u) - A_2(u); v >= 0$
   si $v = A_1(u) - A_2(u) : ||A_1(u) - A_2(u)||^2 = 0$
   $\Rightarrow A_1(u) = A_2(u)$
   $\Leftrightarrow A_1 = A_2$

□

2.2.6 Théoreme de Lax-miligram

Théoreme 2.2.3. *[Boy14][LS98] soit H un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire continue et H-elliptique sur $H \times H$*
soit L une forme linéaire et continue sur H.
alors :$\exists! u \in H$ solution de :$a(u; v) = L(v)$; $\forall v \in H$

Démonstration. 1. a est bilinéaire et continue :$\exists! A : H \to H$ linéaire et continu tel que :$a(u; v) =< A(u); v > \forall (u; v) \in H^2$

2. L est linéaire et continue sur H :$\exists! u_L \in H : L(v) =< u_L; v > \forall v \in H$
   $\Rightarrow$ on cherche u tel que :$< A(u); v >=< u_L; v > \forall v \in H$
   $\Rightarrow < A(u) - u_L; v >= 0; \forall v \in H$
   on choisit : $v = A(u) - u_L$ on a :$< A(u) - u_L; A(u) - u_L >= ||A(u) - u_L||^2 = 0$
   $\Rightarrow u$ est solution de $A(u) = u_L$
   $\Rightarrow A(u) - u_L = 0 \Rightarrow u - (A(u) - u_L) = u$
   soit $v \in H : T(v) = v - \lambda(A(v) - u_L)$; $(\lambda > 0)$
   alors : si$\exists! u \in H/T(u) = u \Leftrightarrow A(u) = u_L$ avec$T : H \to H$
   T est contractante ?
   soit $T : H \to H$ défini par :

$$\forall v \in H : T(v) = v - \lambda(A(v) - u_L); \lambda > 0$$

   ou λ est à déterminer afin que T soit contractante.
   soit $(v; w) \in H^2$:

$$\begin{aligned} ||T(v) - T(w)|| &= ||v - \lambda A(v) + \lambda u_L - w + \lambda A(w) - \lambda u_L \\ &= ||(v - w) - \lambda(A(v - w)) \end{aligned}$$

   $\Rightarrow ||T(v) - T(w)||^2 = ||v - w||^2 + \lambda^2 ||A(v - w)||^2 - 2\lambda < v - w; A(v - w) >$

   (a) A est C^0 : $\exists M > 0 \forall x \in H ||A(x)|| \leq M||x|| \Rightarrow ||A(v - w)||^2 \leq M^2 ||v - w||^2$
   (b) $< v - w; A(v - w) >= a(v - w; v - w)$ et a est H-elliptique :
   $\exists \alpha > 0 \forall x \in H : \alpha ||x||^2 \leq a(x; x)$
   $\Rightarrow < v - w; A(v - w) > \geq \alpha ||v - w||^2$
   on a donc :
   $||T(v) - T(w)||^2 \leq ||v - w||^2 (1 + \lambda^2 M^2) - 2\lambda\alpha ||v - w||^2$
   $\Rightarrow ||T(v) - T(w)||^2 \leq ||v - w||^2 (\lambda^2 M^2 - 2\lambda\alpha + 1)$

$$\begin{aligned} \text{on choisit :}\lambda > 0\text{tel que : } & \lambda^2 M^2 - 2\lambda\alpha + 1 < 1 \\ & \Rightarrow \lambda(\lambda M^2 - 2\alpha) < 0 \\ & \Rightarrow \lambda M^2 - 2\alpha < 0 \\ & \Rightarrow \lambda \leq \frac{2\alpha}{M^2} \\ & \Rightarrow \text{T est contractante} \\ & \Rightarrow \exists! u \in H : u = T(u) \end{aligned}$$

$\square$

2.2.7 Formulation variationnelle

Soit Ω une membrane élastique de $\mathbb{R}^2$. Sous l'action d'une force à ce plan d'intensité f tq $\vec{f} = f(x;y)\vec{z}$, Ω se déforme et son déplacement est noté $\vec{u} = u(x.y)\vec{z}$. On suppose que $\partial\Omega$ le bord de Ω est suffisamment règulier et on considére que les deplacements sur le bord sont nuls c.a.d $u = 0$ sur $\partial\Omega$. On note (PC)le probléme qui consiste a trouver u tq :

$$\begin{cases} -\Delta u(x;y) = f(x;y) & (x;y) \in \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{PC}$$

- (PC)s'appele le problème continue. (formulation forte)
- Les conditions limites peuvent être différentes dans ce cas on a une C.L de Dirichlet.

Rappel :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \tag{2.2.3}$$

Pour résoudre le problème (PC) on doit étudier :

1. L'existence et l'unicité de la solution u
2. La dépendance de u par rapport à f
3. La régularité de la solution u en fonction de celle de la donné f (Estimation a priori)
4. L'approximation des solutions du problème.

Jacques Hadamard a défini ce que l'on appel " un problème bien posé " quand (1) et (2) sont vérifié. En dimension N=1 , $\Omega = [0;1]$ (PC) devient :

$$\begin{cases} -u''(x;y) = f(x;y) & (x;y) \in [0;1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{PC}$$

on remplace l'équation par une formulation équivalente, dite variationnelle, obtenue en intégrant l'équation multipliée par une fonction quelconque.

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

La partie historique provient d'une vision mécanique de la problématique de le formulation (PC) qui correspond à une formulation d'efforts qu'on traduit en terme d'energie ou de travaux. alors les travaux associé à f dans un champ de deplacement v c'est bien $\int_0^1 f(x)v(x)dx$
Pour faire apparaitre les conditions au bord on peux procéder a une intégration par partie :

$$\begin{aligned} -\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 u'(x)v'(x)dx - [u'(x)v(x)]_0^1 = \int_0^1 f(x)v(x)dx \\ \Leftrightarrow \int_0^1 u'(x)v'(x)dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \end{aligned}$$

Pour que l'intégrale existe sur le lieu de recherche V on met :

$$V = \{v : [0;1] \to \mathbb{R}; \text{" suffisament reguliére"}; v(0) = v(1) = 0\}$$

Donc le problème variationnel (PV) est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ solution de :} \\ \int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{PV}$$

(PV) s'appel une formulation variationnelle ou faible. (faible car on a amoindri l'ordre des dérivées qu'intervienne dans la formulation).
Formellement on a $(PC) \Rightarrow (PV)$

Généralisation si on pose :

$$a : V \times V \longmapsto \mathbb{R}$$
$$a(u;v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$$
$$L : V \longmapsto \mathbb{R}$$
$$L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

le problème abstrait s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ solution de :} \\ a(u;v) = L(v) \qquad\qquad \forall v \in V \end{cases} \tag{PV}$$

2.2.8 Formulation variationnelle et minimisation

[All05][PAR88] On considère le problème continu suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u : [0;1] \longmapsto \mathbb{R} \\ -u''(x;y) + u(x) = f(x;y) \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{PC}$$

donc la formulation variationnelle de ce problème serait de :

$$\begin{cases} \text{trouver } u : [0;1] \longmapsto \mathbb{R} \\ \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{PV}$$

avec

$$V = \{v : [0;1] \longmapsto \mathbb{R}; \text{"suffisamant reguliére"}; v(0) = v(1) = 0\}$$

Le problème variationnel est équivalant à un problème dit de minimisation qui est le suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{solution de :} \\ J(u) = \min_{v \in V} J(v) \text{ avec} \qquad J(v) = \frac{1}{2}[\int_0^1 (v'^2(x) + v^2(x))dx] - \int_0^1 f(x)v(x)dx \end{cases} \tag{PM}$$

Démonstration.

$$(PV) \Longrightarrow (PM)$$

on démontre que si u est une solution de (PV) donc $\forall v \in V : J(u) \leq J(v)$ si V est un espace vectoriel on a : $u = u - v + v = v + (u - v)\ \forall v \in V$

$\forall v \in V : u = v + h; h \in V$

de même $v = u + h; \forall v \in V; \forall h \in V$

d'ou : $\forall v \in V$

$$\begin{aligned}
J(v) &= J(u+h) \\
&= \frac{1}{2}[\int_0^1 ((u+h)'^2(x) + (u+h)^2(x))dx] - \int_0^1 f(x)(u+h)(x)dx \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}[\int_0^1 (u'^2(x) + u^2(x))dx] - \int_0^1 f(x)u(x)dx}_{J(u)} + \underbrace{\frac{1}{2}[\int_0^1 (h'^2(x) + h^2(x))dx]}_{\geq 0} \\
&+ \int_0^1 (u'(x)h'(x) + u(x)h(x))dx - \int_0^1 f(x)h(x)dx
\end{aligned}$$

et comme u est solution du (PV) :

$$\forall h \in V : \int_0^1 (u'(x)h'(x) + u(x)h(x))dx = -\int_0^1 f(x)h(x)dx$$

donc

$$J(u+H) = J(u) + \frac{1}{2}[\int_0^1 (h'^2(x) + h^2(x))dx] \geq J(u)$$

d'ou

$$(PV) \Longrightarrow (PM)$$

Réciproque :

$$(PV) \Longleftarrow (PM)$$

Soit u solution de (PM).

Si V est un espace vectoriel :

$$\forall v \in V; \exists \lambda \in \mathbb{R}; \exists h \in V \text{ tq } : v = u + \lambda h$$

$$\begin{aligned}
J(v) &= J(u+\lambda h) \\
&= \frac{1}{2}[\int_0^1 ((u+\lambda h)'^2(x) + (u+\lambda h)^2(x))dx] - \int_0^1 f(x)(u+\lambda h)(x)dx \\
&= J(u) + \frac{\lambda^2}{2}[\int_0^1 (h'^2(x) + h^2(x))dx] + \lambda[\int_0^1 (u'(x)h'(x) + u(x)h(x))dx - \int_0^1 f(x)h(x)dx]
\end{aligned}$$

Or $J(u+\lambda h) - J(u) \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{\lambda^2}{2}[\int_0^1 (h'^2(x) + h^2(x))dx] + \lambda[\int_0^1 (u'(x)h'(x) + u(x)h(x))dx - \int_0^1 f(x)h(x)dx] \geq 0$$
$$\Rightarrow \Delta = \int_0^1 (u'(x)h'(x) + u(x)h(x))dx - \int_0^1 f(x)h(x)dx \leq 0$$
$$\Rightarrow \int_0^1 (u'(x)h'(x) + u(x)h(x))dx - \int_0^1 f(x)h(x)dx = 0$$
$$\Rightarrow \int_0^1 (u'(x)h'(x) + u(x)h(x))dx = \int_0^1 f(x)h(x)dx$$

d'ou :

$$(PV) \Longleftarrow (PM)$$

ce qui donne

$$(PV) \Leftrightarrow (PM)$$

□

Corollaire 2.2.2. *Sous les hypothèses de Lax-Milgram on a :*
La solution du probléme (PV) défini par :

$$\begin{cases} \textit{Trouver } u \in H \textit{ solution de :} \\ a(u;v) = L(v) \qquad \forall v \in H \end{cases} \tag{PV}$$

vérifie :$\exists M > 0 / ||u|| \leq |||L|||$

Démonstration. soit u solution de $a(u;v) = L(v)\,;\, \forall v \in H$.

1. $$\exists k > 0 \forall (u;v) \in H^2 : |a(u;v)| \leq k||u||||v|| (\text{ car a est} C^0)$$
   en particulier : si u est la solution on a :$|a(u;v)| \leq k||u||^2$

2. $\exists \alpha > 0 \forall v \in H : \alpha||v||^2 \leq a(v;v)$;(a est H-elliptique)
   pour la solution :$\alpha||u||^2 \leq a(u;u) \leq k||u||^2$

3. $\exists c > 0 \forall v \in H : |L(v)| \leq c||v||$ (L est C^0)
   si u est solution de (PV) on a :$a(u;v) = L(v); \forall v \in V$ en particulier : si v=u alors$a(u;u) = L(u)$
   $\Rightarrow \alpha||u||^2 \leq a(u;u) = L(u) \leq c||u||$ $(u \neq 0)$

   (a) $||u|| \leq \frac{c}{\alpha} = M \Rightarrow u$ est borné $||.||$(si u existe alors u est borné)
   (b) $\alpha||u||^2 \leq L(u) \Rightarrow \alpha||u|| \leq \frac{L(u)}{||u||}$;$(u \neq 0)$
   $||u|| \leq \frac{1}{\alpha}\frac{L(u)}{||u||} \leq \frac{1}{\alpha} \sup\limits_{v \neq 0} \dfrac{L(u)}{||u||} = \dfrac{|||L|||}{\alpha}$
   $\exists M > 0 : ||u|| \leq M|||L|||$

   si u=0$\Rightarrow a(u;v) = a(0;v) = 0; \forall v \in H$
   car $a(0;v) = a(x-x;v) = a(x;v) - a(x;v) = 0 \forall x \in H$
   $\Rightarrow \forall v \in H : L(v) = 0 \Rightarrow |||L||| = 0$

□

Remarque 2.2.3.

$$\begin{cases} \text{soit } u \in H \text{ solution de :} \\ a(u;v) = L(v) \qquad \forall v \in H \end{cases} \tag{PV}$$

Lorsque L est fixé alors u est solution de (PV)

$$\varphi : \mathcal{L}_c(E;F) \to H$$
$$L \to \varphi(L) = u_L \qquad \text{avec } a(u_L;v) = L(v); \forall v \in H$$

- *φ est linéaire : soit L_1 et $L_2 \in (\mathcal{L}_c(E;F))^2; \lambda \in \mathbb{R}$:*
  $\varphi(L_1 + \lambda L_2) = u_{L_1+\lambda L_2}$ *avec :*$a(u_{L_1+\lambda L_2};v) = (L_1 + \lambda L_2)(v)$

  $$\begin{aligned} a(u_{L_1+\lambda L_2};v) &= L_1(v) + \lambda L_2(v) \\ &= a(u_{L_1};v) + \lambda a(u_{L_2};v) \\ &= a(u_{L_1} + \lambda u_{L_2};v)^2 \forall v \in H \end{aligned}$$

  $\Rightarrow a(u_{L_1+\lambda L_2} - (u_{L_1} + \lambda u_{L_2});v) = 0 \forall v \in H$
  $\Rightarrow$ *si* $v* = u_{L_1+\lambda L_2} - (u_{L_1} + \lambda u_{L_2}) \Rightarrow a(v*;v*) = 0$
  a est coercive $\Rightarrow$ *définit positive* $\Rightarrow v* = 0$
  $\Rightarrow u_{L_1+\lambda L_2} = u_{L_1} + \lambda u_{L_2}$
  $\Rightarrow \varphi(L_1 + \lambda L_2) = \varphi(L_1) + \lambda\varphi(L_2)$
  $\Rightarrow \varphi$ *est linéaire.*

- $||\varphi(L)|| = ||u_L|| \leq M|||L||| \Rightarrow \varphi$ *est continue de $\mathcal{L}_c(E;F)$ dans H.*

Remarque 2.2.4.

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ solution de :} \\ a(u;v) = L(v) \qquad \forall v \in H \end{cases} \tag{PV}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ solution de :} \\ Au = u_L \qquad \forall v \in H \end{cases} \tag{PV}$$

ou $A : H \to H$ *linéaire et continue* $\exists! u \in H$
or on a $\exists \alpha > 0 : \forall v \in H \alpha||v||^2 \leq a(v;v)$ *;(H-elliptique)*
et on a $\forall (u;v) \in H^2 : a(u;v) =< Au;v >$
$\Rightarrow \alpha||v||^2 \leq a(v;v) =< Av;v > \leq ||Av||||v||$
$\Rightarrow$ *si* $v \neq 0 : \alpha||v|| \leq ||Av||$
$\Rightarrow$ *si* $v = 0 : \alpha||0|| \leq ||A(0)|| = 0$
$\Rightarrow \forall v \in: \alpha||v|| \leq ||Av||$

1. *A injectif : or A est linéaire :*
   A injectif $\Leftrightarrow Ker(A) = 0$
   soit $v \in Ker(A) \Rightarrow Av = 0 \Rightarrow \alpha||v|| \leq 0 \Rightarrow v = 0$

2. *A est surjectif* $\Leftrightarrow Im(A) = H$
or Im(A) est un s.e.v de H.
soit$(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Im(A)$ *une suite de Cauchy* $w_n \to w \in Im(A)$?
or $Im(A) \subseteq H \Rightarrow (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy de H (complet) :* $\exists w \in H : w_n \to w$
$(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Im(A) \Rightarrow \exists (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H : A(v_n) = w_n$
et on a :$A(v_n) = w_n \to w \in H$
or :$\forall v \in H : \alpha||v|| \leq ||Av||$
en particulier : soit $m > n$ *on a :*

$$\alpha||v_m - v_n|| \leq ||A(v_m - v_n)|| = ||Av_m - Av_n|| = ||w_m - w_n|| \to 0$$

$\Rightarrow (v_n)$ *est de Cauchy dans H.*
$\Rightarrow \exists v \in H : v_n \to v$ *par la continuité de A* $\exists c > 0 \forall v \in H : ||Av|| \leq c||v||$
en particulier : $||A(v_n - v)|| = ||Av_n - Av|| \leq c||v_n - v|| \to 0$
donc : $\{Av_n \to Av$
$Av_n \to w\}$
par unicité de la limite :$w = Av$
$\Rightarrow w \in Im(A)$
$\Rightarrow$*Im(A) est fermé dans H*
on a de plus :$H = Im(A) \oplus Im(A)^{\perp}$
soit $v \in Im(A)^{\perp} \Rightarrow \forall w \in Im(A) :< v; w >= 0$
or :$\alpha||v||^2 \leq a(v; v) =< Av; v >; \forall v \in H$
si $v \in Im(A)^{\perp}$:

$$\alpha||v||^2 \leq a(v; v) =< Av; v >= 0(\text{ car } Av \in Im(A))$$

$\Rightarrow ||v||^2 = 0$
$\Rightarrow v = 0$
$\Rightarrow Im(A)^{\perp} = 0$
$\Rightarrow Im(A) = H$
$\Rightarrow$ *A est surjective*

Remarque 2.2.5. *On supose que* H_N *est de dimension finie N. dim*H_N*=N*
Le problème (PC)

$$\begin{cases} \text{Trouer } u \in H_N \text{ solution de :} \\ a(u; v) = L(v) \qquad\qquad \forall v \in H_N \end{cases} \tag{PC}$$

s'écrit : $Au = u_L; A : H_N \to H_N$ *c'est un systéme linéaire composé de N équations à N inconnues.*
on a :$\alpha||v||^2 \leq a(v; v) =< Av; v >$ *avec* $v \in H_N$
si $Av = 0 \Rightarrow v = 0$
$\Rightarrow$*A injective*$\Leftrightarrow$ *A bijective (car dim*$H_N < \infty$*).*
on a :$\forall v \in H_N \alpha||v||^2 \leq< Av; v >\Rightarrow$*A est définie-positive.*

Remarque 2.2.6 (Tentative d'application)**.**

$$\begin{cases} \textit{Trouer } u \in C^2(\bar{\Omega}) \textit{ solution de :} \\ -\Delta u + u = f & \textit{dans } \Omega \\ u_{/\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{PC}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \textit{Trouer } u \in V \textit{ solution de :} \\ \int_\Omega (\vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v + uv) d\Omega = \int_\Omega f v d\Omega \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{PV}$$

avec : $\vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v = \dfrac{\partial u}{\partial x}.\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}.\dfrac{\partial v}{\partial y}$

$$V = C^1(\bar{\Omega}) \cap \{v / v_{/\partial\Omega} = 0\}$$

$$\begin{aligned} a :& V \times V \to \mathbb{R} \\ & (u; v) \to a(u; v) = \int_\Omega (\vec{\nabla} u.\vec{\nabla} v + uv) d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L :& V \to \mathbb{R} \\ & v \to L(v) = \int_\Omega f v d\Omega \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \textit{Trouer } u \in V \textit{ solution de :} \\ a(u; v) = L(v) & \forall v \in V \end{cases} \tag{PV}$$

- *L est linéaire (par la linéarité de l'intégral)*
- *L est continue ?*
  équiper V par une extension de la norme de convergence uniforme ne marche pas car cette norme n'est pas Hilbertienne (ne satisfait pa l'identité du parallelograme.)
  on a : $a(u; v) = \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial v}{\partial y} + uv) d\Omega$
  $a(v; v) = \int_\Omega ((\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2 + v^2) d\Omega$
  $\Rightarrow a(v; v) = ||\frac{\partial v}{\partial x}||^2_{L^2} + ||\frac{\partial v}{\partial y}||^2_{L^2} + ||v||^2_{L^2}$
  avec :$||\varphi||^2_{L^2} = \int_\Omega \varphi^2 d\Omega$
  et $< \varphi; \psi >_{L^2} = \int_\Omega \varphi \psi d\Omega$
  si$v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap \{v / v_{/\partial\Omega} = 0\}$
  on pose :$||v||^2_V = ||v||^2_{L^2}|| + \frac{\partial v}{\partial x}||^2_{L^2} + ||\frac{\partial v}{\partial y}||^2_{L^2}$
  $< u; v >_V = a(u; v) \Rightarrow a(v; v) = ||v||^2_V$
  $\Rightarrow < v; v >_V = ||v||^2_V$
  $|L(v)| = |\int_\Omega f v| \leq \int_\Omega |f||v| \leq_{C.S} ||f||_{L^2} ||v||_{L^2}$
  $\Rightarrow \exists c > 0; c = ||f||_{L^2}; \forall v \in V : |L(v)| \leq c||v||_{L^2} \leq c||v||_V \Rightarrow$ *L est* C^0 *pour* $||.||_V$
- *a est continue :*
  $a(u; v) \leq \int_\Omega (|\frac{\partial u}{\partial x}|.|\frac{\partial v}{\partial x}| + |\frac{\partial u}{\partial y}|.|\frac{\partial v}{\partial y}| + |u||v|) d\Omega$
  $\leq ||\frac{\partial u}{\partial x}||_{L^2}.||\frac{\partial v}{\partial x}||_{L^2} + ||\frac{\partial u}{\partial y}||_{L^2}.||\frac{\partial v}{\partial y}||_{L^2} + ||u||_{L^2}||v||_{L^2}$

$or :||v||_V^2 = ||\frac{\partial v}{\partial x}||_{L^2}^2 + ||\frac{\partial v}{\partial y}||_{L^2}^2 + ||v||_{L^2}^2$
$\Rightarrow ||v||_{L^2} \leq ||v||_V \; et||\frac{\partial v}{\partial x}||_{L^2} \leq ||v||_V$
$\Rightarrow |a(u;v)| \leq 3||u||_V||v||_V$
$\Rightarrow$ *a est continue.*

- *a est V-elliptique ?*
  $a(v;v) = ||v||_V^2 \geq \alpha||v||_V^2 \Rightarrow \alpha = 1$
  $\Rightarrow \exists\alpha > 0 : a(v;v) \geq \alpha||v||_V^2 \Rightarrow$*a est V-elliptique*

Or $C^1(\bar{\Omega}) \cap \{v/v_{/\partial\Omega} = 0\}$ *muni de* $||.||_V$ *n'est pas un Banach.*

2.3 Espaces de Lebesgue

2.3.1 Intégrale de Lebesgue

Si l'intégrale de Riemann est fondé sur la discrétisation de l'axe $(O;x)$; l'intégrale de Lebesgue réside dans la discrétisation de l'axe $(O;y)$

Proposition 2.3.1. *soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tel que :*
$\int_a^b |f(x)|dx = O \Rightarrow f(x) = 0$ *p.p dans* $[a;b]$
avec $\int$ *désigne l'intégrale de Lebesgue.*
$f(x) = 0$ *p.p dans* $[a;b] \Leftrightarrow f$ *est nulle sauf dans un sous-ensemble de*$[a;b]$ *de mesure nulle.*
de la même manière : si $f = g$ *p.p sur* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
Cela veut dire que f peut être différente de g sur un sous-ensemble de mesure nulle inclus dans Ω.
$\Rightarrow f = g$ *p.p* $\Rightarrow \int_\Omega f = \int_\Omega g$
si $\int_\Omega |f| = 0 \Rightarrow f = 0$ *p.p dans* Ω
c'est une classe de fonctions nulles (p.p) dans Ω

2.3.2 L'espace $L^2(\Omega)$

$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; \int_\Omega |f(x)|^2dx < +\infty\}$
$x = (x_1;x_2) \in \mathbb{R}; \Omega$ est un ouvert de$\mathbb{R}^2$

1. $\forall(f;g) \in (L^2(\Omega))^2 < f;g >_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx$ et $||f||_{L^2(\Omega)} = [\int_\Omega |f(x)|^2dx]^{\frac{1}{2}}; \forall f \in L^2(\Omega)$
   alors :$< f;f >_{L^2(\Omega)} = ||f||_{L^2(\Omega)}^2$
   $L^2(\Omega)$ est une espace de Hilbert pour$||.||_{L^2(\Omega)}$

2. $\forall(f;g) \in (L^2(\Omega))^2 : |\int_\Omega fg| \leq (\int_\Omega f^2)^{\frac{1}{2}}(\int_\Omega g^2)^{\frac{1}{2}}$
   si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$:
   $\int_\Omega |u|.1 \leq (\int_\Omega 1^2)^{\frac{1}{2}}(\int_\Omega |u|^2)^{\frac{1}{2}} = \mu(\Omega)^{\frac{1}{2}}(\int_\Omega |u|^2)^{\frac{1}{2}}$
   $\Rightarrow \int_\Omega |u| \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{2}}(\int_\Omega |u|^2)^{\frac{1}{2}}$

de point de vue fonctionnelle : siΩ est borné alors$L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$
soit

$$i : L^2(\Omega) \to L^1(\Omega)$$
$$u \to i(u) = u$$

i l'injection canonique de $L^2(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$

- i est injective (par construction)
- i est linéaire $\forall ||i(u)||_{L^1(\Omega)} \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{2}} ||u||_{L^2(\Omega)}$
  $\Rightarrow i$ est continue.

i est le prototype des injections de Sobolev.
$L^2(\Omega)$ est inclus dans $L^1(\Omega)$ par injection continue :$L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$

3. soit $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ défini par : l'espaces des fonctions C^∞ sur Ω ; dont le support est compact dans Ω.
   soit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$: $suppv = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$

Théoreme 2.3.1. *[LS98] $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$*

$$\forall v \in L^2(\Omega) \exists (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\Omega) : \lim_{n\to+\infty} ||v_n - v||_{L^2(\Omega)} = 0$$

Remarque 2.3.1. *si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow v_n \in L^2(\Omega)$*
car : $\int_\Omega |v_n|^2 = \int_{suppv_n} |v_n|^2 < \infty$;$(v_n \in C^\infty(\Omega))$

Corollaire 2.3.1. *[BB11] soit $v \in L^2(\Omega)$ si $\int_\Omega v\varphi = 0; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors :$v = 0$ p.p dans Ω*

Démonstration. soit ψ dans $L^2(\Omega); \exists (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\Omega) : \psi_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} \psi$
$\int_\Omega v\psi = 0?$
on sait que :$\forall n \in \mathbb{N} \int_\Omega v\psi_n = 0$; car $\psi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$
or :$\int_\Omega v\psi = \int_\Omega v\psi + \int_\Omega v\psi_n - \int_\Omega v\psi_n = \int_\Omega v(\psi - \psi_n)$
$\Rightarrow 0 \leq |\int_\Omega v\psi| = |\int_\Omega v(\psi - \psi_n)| \leq ||v||_{L^2} ||\psi - \psi_n||_{L^2} \to 0$
$\Rightarrow |\int_\Omega v\psi| = 0$
$\Rightarrow \int_\Omega v\psi = 0; \forall \psi \in L^2(\Omega)$
on choisit $\psi = v \Rightarrow \int_\Omega v^2 = 0 \Rightarrow v = 0$p.p dans Ω □

2.3.3 Dérivée faible

soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\partial\Omega$, v et $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$

Définition 2.3.1. *[All05] soit $v \in L^2(\Omega)$ on appelle la dérivée partielle faibleω_i la fonction appartenant à$L^2(\Omega)$ tel que :*

$$\int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \omega_i \varphi; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Notation 2.3.1. *on note $\omega_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$*

Proposition 2.3.2. *[All05] soit$v \in L^2(\Omega)$:*

1. *la dérivée faibleω_i est unique*
2. *si $v \in L^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ la dérivée faible coïncide avec la dérivée forte.*

Démonstration. 1. soit$v \in L^2(\Omega)$ et$(\omega_i; \omega_i') \in (L^2(\Omega))^2$ tel que :

$$\int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \omega_i \varphi = -\int_\Omega \omega_i' \varphi; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$\Rightarrow \int_\Omega (\omega_i \varphi - \omega_i' \varphi) = 0\,; (\omega_i; \omega_i') \in (L^2(\Omega))^2)$
$\Rightarrow \omega_i = \omega_i'$
(p.p) dans Ω

2. soit $v \in L^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$
La formule de Green donne :
$\int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \varphi \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\partial\Omega} v \varphi n_i; i = 1, 2; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
$\Rightarrow \int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \varphi \frac{\partial v}{\partial x_i} = -\int_\Omega \omega_i \varphi; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
$\Rightarrow \int_\Omega (\frac{\partial v}{\partial x_i} - \omega_i \varphi = 0; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x_i} = \omega_i \varphi$

□

2.4 Les espace de Sobolev

2.4.1 L'espace $H^1(\Omega)$

Définition 2.4.1. *[All05] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par*

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \{1, \ldots, N\} \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

où $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de v .

Exemple 2.4.1. $\Omega =]-1; 1[$ *;* $f(x) = |x|$ *;* $f \in L^2(\Omega)$
f admet une dérivée faible dans L^2 ?

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f\varphi' dx &= \int_{-1}^{0} -x\varphi' dx + \int_{0}^{1} x\varphi' dx \\
&= \int_{-1}^{0} 1.\varphi dx - [x\varphi]_{-1}^{0} - \int_{0}^{1} 1.\varphi dx - [x\varphi]_{0}^{1} \\
&= \int_{-1}^{0} 1.\varphi dx - \int_{0}^{1} 1.\varphi dx \\
&= -[-\int_{-1}^{0} 1.\varphi dx + \int_{0}^{1} 1.\varphi dx]
\end{aligned}$$

si on pose

$$H(x) = \begin{cases} -1 & si\ -1 \leq x < 0 \\ 1 & si\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

alors :$\int_{-1}^{1} f\varphi' dx = -\int_{-1}^{1} H\varphi' dx; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
$\Rightarrow$ *on pose* $H = f \in L^2(\Omega)$

Exemple 2.4.2.

$$H(x) = \begin{cases} -1 & si\ -1 \leq x < 0 \\ 1 & si\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

si H admet une dérivée faible dans $L^2(\Omega)$ *avec*$\Omega =]-1;1[$ *il existerait* $z \in L^2(\Omega)$ *tel que :*
$\int_{-1}^{1} H\varphi' = -\int_{-1}^{1} z\varphi dx; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
$\Rightarrow \int_{-1}^{0} -\varphi' + \int_{0}^{1} \varphi' = \int_{-1}^{1} z\varphi$
$\Rightarrow [-\varphi]_{-1}^{0} + [\varphi]_{0}^{1} = \int_{-1}^{1} z\varphi$
$\Rightarrow -2\varphi_0 = \int_{-1}^{1} z\varphi$

- *si supp*$\varphi \subset]0;1[$
  $\int_{-1}^{1} z\varphi = \int_{0}^{1} z\varphi = 2\varphi_0 = 0$
  $\Rightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0;1[) : \int_{0}^{1} z\varphi = 0$
  $\Rightarrow z = 0$ *(p.p) sur* $]0;1[$ *car* $z \in L^2(\Omega) \Rightarrow z \in L^2(]0;1[)$

- *si supp*$\varphi \subset]-1;0[$
  $\int_{-1}^{1} z\varphi = \int_{-1}^{0} z\varphi = 0$
  $\Rightarrow z = 0$ *(p.p) sur* $]-1;0[$
  $\Rightarrow z = 0$ *(p.p) sur* $]-1;1[$
  et $\int_{-1}^{1} z\varphi = 2\varphi_0$ *;* $\forall \varphi \in \mathcal{D}(]-1;1[)$
  $\Rightarrow \varphi_0 = 0; \forall \varphi \in \mathcal{D}(]-1;1[)$
  absurde ; il n'existe pas $z \in L^2(\Omega)$ *dérivée faible dans* $L^2(\Omega)$

Lemme 2.4.1. *[BB11] soit $v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dans $L^2(\Omega)$*
Alors $v \in H^1(\Omega)$ si et seulement si :

$$\exists c > 0 \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}| \leq c||\varphi||_{L^2(\Omega)}$$

Démonstration.
- $v \in H^1(\Omega) \Rightarrow v \in L^2(\Omega)et\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$
  c.a.d : $\int_\Omega (v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega (\frac{\partial v}{\partial x_i}\varphi$
  $|\int_\Omega (v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}| = |\int_\Omega (\frac{\partial v}{\partial x_i}\varphi| \leq ||\frac{\partial v}{\partial x_i}||_{L^2(\Omega)}||\varphi||_{L^2(\Omega)}$
  $(\varphi \in L^2(\Omega) \Rightarrow \varphi \in \mathcal{D}(\Omega))$
  $\Rightarrow |\int_\Omega (v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}| \leq c||\varphi||_{L^2(\Omega)}$

- Réciproque $\exists c > 0 \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}| \leq c||\varphi||_{L^2(\Omega)}$
  $v \in H^1(\Omega)$?
  soit L une application :

$$L : \mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$\varphi \to L(\varphi) = \int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

1. L est linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$
2. L est continue pour la norme $L^2(\Omega)$: $|L(\varphi)| \leq c||\varphi||_{L^2(\Omega)}$
   d'après le théorème de Hahn-Banach on peut étendre L à$L^2(\Omega)$ et on note

$$\tilde{L} : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$$

   tel que :$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \tilde{L}(\varphi) = L(\varphi)$
   avec$\tilde{L}$ linéaire et continue sur$L^2(\Omega)$
   d'après le théorème de représentation d'une forme linéaire continue sur un Hilbert(Riesz) :
   $\exists \omega_i \in L^2(\Omega) \forall \varphi \in L^2(\Omega) : \tilde{L}(\varphi) =< -\omega_i; \varphi >_{L^2(\Omega)}$
   En particulier, on a :
   $\forall \varphi \in L^2(\Omega) : \tilde{L}(\varphi) = - < \omega_i; \varphi >_{L^2(\Omega)}$
   $\Rightarrow \tilde{L}(\varphi) = L(\varphi) = \int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \omega_i \varphi$
   $\Rightarrow v$ admet une dérivée faible dans $L^2(\Omega)$
   $\Rightarrow v \in H^1(\Omega)$

□

Proposition 2.4.1. *[HL09] si l'on note $< .;. >$ définit par :*

$$\forall (u; v) \in (H^1(\Omega))^2 < u; v >= \int_\Omega (uv + \vec{\nabla} u . \vec{\nabla} v) dx_1 dx_2$$

et $||.||_{H^1(\Omega)}$

$$\forall v \in H^1(\Omega) : ||v||_{H^1(\Omega)} = \sqrt{||v||^2_{L^2(\Omega)} + ||\frac{\partial v}{\partial x_1}||^2_{L^2(\Omega)} + ||\frac{\partial v}{\partial x_2}||^2_{L^2(\Omega)}}$$

alors $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour $||.||_{H^1(\Omega)}$

Démonstration. 1. $< .;. >$ est un produit scalaire sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$

$$< u; v >= \int_\Omega (uv + \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2})dx_1dx_2$$

- $< .;. >$ est linéaire par la linéarité de l'opérateur ∂ et l'intégrale.

- $< .;. >$ est symétrique.

- $$< v; v >= \int_\Omega (v^2 + (\frac{\partial v}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x_2})^2)dx_1dx_2 = ||v||^2_{H^1(\Omega)} \geq 0$$
  $< .;. >$ est définie-positive.

2. $H^1(\Omega)$ est complet pour la norme $||.||_{H^1(\Omega)}$
   soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^1(\Omega)$ de Cauchy pour $||.||_{H^1(\Omega)}$
   $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 p; q \geq N : ||v_p - v_q||_{H^1(\Omega)} \leq \varepsilon$
   $\Rightarrow ||v_p - v_q||^2_{H^1(\Omega)} \leq \varepsilon^2$
   $\Rightarrow ||v_p - v_q||^2_{L^2(\Omega)} + ||\frac{\partial v_p}{\partial x_1} - \frac{\partial v_q}{\partial x_1}||^2_{L^2(\Omega)} + ||\frac{\partial v_p}{\partial x_2} - \frac{\partial v_q}{\partial x_2}||^2_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon^2$
   $\Rightarrow ||v_p - v_q||^2_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon^2$ et $||\frac{\partial v_p}{\partial x_i} - \frac{\partial v_q}{\partial x_i}||^2_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon^2; \forall i = 1; 2$
   $\Rightarrow (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour$||.||_{L^2(\Omega)}$ et $(\frac{\partial v_n}{\partial x_i})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour$||.||_{L^2(\Omega)}$
   Or$L^2(\Omega)$ est complet pour $||.||_{L^2(\Omega)}$

$\exists v \in L^2(\Omega) v_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} v \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} ||v_n - v||_{L^2(\Omega)} = 0$

$\exists \omega_i \in L^2(\Omega) \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \xrightarrow{L^2(\Omega)} \omega_i \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} ||\frac{\partial v_n}{\partial x_i} - v||_{L^2(\Omega)} = 0$

$v_n \to v \in H^1(\Omega)$?

or :$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^1(\Omega) \Rightarrow (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^2(\Omega)et\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \in L^2(\Omega); i = 1; 2$

avec$\int_\Omega v_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \frac{\partial v_n}{\partial x_i}\varphi; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega); \forall n \in \mathbb{N}$

1. $|\int_\Omega v_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}| = |\int_\Omega (v_n - v)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}| \leq ||v_n - v||_{L^2(\Omega)} ||\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}||_{L^2(\Omega)}$
   quand$n \to \infty : ||v_n - v||_{L^2(\Omega)}|| \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega v_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$
   de même : $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \frac{\partial v_n}{\partial x_i}\varphi = \int_\Omega \omega_i \varphi$
   par passage à la limite on obtient :
   $\int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \omega_i \varphi; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
   $\Rightarrow \omega_i = \frac{\partial v}{\partial x_i} \Rightarrow v \in H^1(\Omega)$
   $\Rightarrow v_n \to v$ dans $L^2(\Omega)$et$\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \to \omega_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ dans $L^2(\Omega)$

2. $v_n \to v$ dans $H^1(\Omega)$?
   $||v_n - v||^2_{H^1(\Omega)} = ||v_n - v||^2_{L^2(\Omega)} + ||\frac{\partial v_n}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_1}||^2_{L^2(\Omega)} + ||\frac{\partial v_n}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_2}||^2_{L^2(\Omega)}$
   or

$$\begin{cases} ||v_n - v||^2_{L^2(\Omega)} \to 0 \\ ||\frac{\partial v_n}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_1}||^2_{L^2(\Omega)} \to 0 \\ ||\frac{\partial v_n}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_2}||^2_{L^2(\Omega)} \to 0 \end{cases}$$

$v_n \to v$ dans $H^1(\Omega)$

□

Remarque 2.4.1. *[HL09] SiΩ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ avec$N \geq 2$ en générale ; les fonctions de$H^1(\Omega)$ ne sont pas continue. Mais on a la propriété suivante :*

Propriété 2.4.1. *[HL09]*

$$H^1(]a;b[) \subset C^0(]a;b[)$$

Démonstration. soit $u \in H^1(]a;b[) \Rightarrow$

$$\begin{cases} u \in L^2(]a;b[) \\ u' \in L^2(]a;b[) \end{cases}$$

$$\int_a^b u\varphi' dx = -\int_a^b u'\varphi dx; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

si on pose :$v(x) = \int_a^x u'(t)dt$
au sens classique :$v'(x) = u'(x)$ sur $[a;b]$

1.

$$\begin{aligned} |v(x)| = |\int_a^x u'(t)dt| &\leq \int_a^x |u'(t)|dt \\ &\leq \int_a^b |u'(t)|.1dt \\ &\leq_{C.S} (\int_a^b 1^2 dt)^{\frac{1}{2}} (\int_a^b u'(t)^2 dt)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall x \in [a;b] : |v(x)| \leq \sqrt{b-a}||u'||_{L^2(]a;b[)}$
si $]a;b[$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}$ alors v est définie sur$[a;b]$

2. $\forall (x;x') \in ([a;b])^2 : v(x) - v(x') = \int_a^x u'(t)dt - \int_a^{x'} u'(t)dt = \int_{x'}^x u'(t)dt$
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} |v(x) - v(x')| = |\int_{x'}^x 1.u'(t)dt| \\ \leq \int_{x'}^x |1.u'(t)|dt \\ \leq \sqrt{x-x'}|int_{x'}^x(|u'(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}} \\ \leq \sqrt{x-x'}int_{x'}^x u'^2(t)dt \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ si $x' \leq x$:$|v(x) - v(x')| \leq \sqrt{x-x'}||u'||_{L^2(]a;b[)}$
si $x \leq x'$:$|v(x) - v(x')| = |\int_{x'}^x 1.u'(t)dt| = |\int_x^{x'} 1.u'(t)dt| \leq \sqrt{x'-x}||u'||_{L^2(]a;b[)}$
$\Rightarrow \forall (x;x') \in ([a;b])^2 : |v(x) - v(x')| \leq |x'-x|^{\frac{1}{2}}||u'||_{L^2(]a;b[)}$

$\Rightarrow$ v est uniformément continue sur $[a;b]$

en effet ;v est uniformément continue sur $[a;b]$si :

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta\forall(x;x')\in([a;b])^2:|x-x'|<\delta\Rightarrow|v(x)-v(x')|\leq<\varepsilon$$

si $|x'-x|^{\frac{1}{2}}||u'||_{L^2(]a;b[)}\leq\varepsilon\Rightarrow|x'-x|^{\frac{1}{2}}\leq\frac{\varepsilon}{||u'||_{L^2(]a;b[)}}$

$\Rightarrow|x'-x|^{\frac{1}{2}}\leq\frac{\varepsilon}{||u'||_{L^2(]a;b[)}}=\delta$

on a donc :

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta=(\frac{\varepsilon}{||u'||_{L^2(]a;b[)}})^2\forall(x;x')\in([a;b])^2:|x-x'|<\delta\Rightarrow|v(x)-v(x')|\leq<\varepsilon$$

Conclusion :

$v(x)=\int_a^x u'(t)dt$ est continue sur$[a;b]$ avec $u'\in L^2(]a;b[)$

3. soit $\varphi\in\mathcal{D}(]a;b[)$:

$$\begin{aligned}\int_a^b v(y)\varphi'(y)dy &= \int_a^b[\int_a^y u'(t)dt]\varphi'(y)dy\\ \text{Fubini Tonelli} &= \int_{t=a}^{t=b}u'(t)\int_t^b\varphi'(y)dydt\\ &= \int_a^b u'(t)(\varphi(b)-\varphi(t))dt\\ &= -\int_a^b u'(y)\varphi(y)dy\end{aligned}$$

avec$u'\in L^2(]a;b[)$

$\Rightarrow$ v est continue sur $[a;b]\Rightarrow$

$$\begin{cases} v\in L^2(]a;b[)\\ v'=u'\in L^2(]a;b[)\end{cases}$$

$\Rightarrow v\in H^1(]a;b[)$

$\Rightarrow\int_a^b v\varphi'=-\int_a^b u'\varphi=-\int_a^b v'\varphi;\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$

$\Rightarrow\int_a^b(u'-v')\varphi=0\Rightarrow u'=v'$ (p.p) dans$]a;b[$

$\square$

Théoreme 2.4.1. *[HL09] soitΩ un ouvert régulier et borné de$\mathbb{R}^2$ alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$*

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega})\subset C_0^1(\overline{\Omega})=C^1(\overline{\Omega})\subset H^1(\Omega)$$

$\Rightarrow C^1(\overline{\Omega})$ *est dense dans* $H^1(\Omega)$

Trace et formule de Green

Théoreme 2.4.2 (Théorème de Trace). *[All05] SiΩ est un ouvert de classe C^1 borné de $\mathbb{R}^2$. Alors l'application γ_0 définie par :*

$$\gamma_0:H^1(\Omega)\to L^2(\partial\Omega)$$
$$v\to\gamma_0(v)=v/_{\partial\Omega}$$

γ_0 *est linéaire et continue :*

$$\exists c > 0 \forall v \in H^1(\Omega) : ||v||_{L^2(\partial\Omega)} \leq c||v||_{H^1(\Omega)}$$

Remarque 2.4.2. *Par abus de notation on écrit :*$||v||_{L^2(\partial\Omega)} = ||\gamma_0(v)||_{L^2(\partial\Omega)}$

Remarque 2.4.3. γ_0 *permet de définir les valeurs d'une fonction* v *appartenant a*$H^1(\Omega)$ *sur le bord*$\partial\Omega$*.*

Théoreme 2.4.3 (Formule de Green). *[All05]*

$$\forall(u;v) \in (H^1(\Omega))^2 : \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i} = -\int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x_i} + \int_{\partial\Omega} uvn_i; n_i = \overrightarrow{n}.\overrightarrow{x_i}$$

Démonstration. • $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega) \Rightarrow \forall(u;v) \in (H^1(\Omega))^2 \exists(u_n;v_n) \in (\mathcal{D}(\overline{\Omega}))^2$ tel que

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow{H^1} u \\ v_n \xrightarrow{H^1} v \end{cases}$$

- Or$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \subset C^1(\overline{\Omega})$ on a :(formule de Green classique pour les fonctions régulières)

$$(u_n;v_n) \in (C^1(\overline{\Omega}))^2 : \int_\Omega u_n\frac{\partial v_n}{\partial x_i} = -\int_\Omega v_n\frac{\partial u_n}{\partial x_i} + \int_{\partial\Omega} u_n v_n n_i; n_i = \overrightarrow{n}.\overrightarrow{x_i}$$

par passage a la limite :

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i} = -\int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x_i} + \int_{\partial\Omega} uvn_i; n_i = \overrightarrow{n}.\overrightarrow{x_i}$$

car :

$$\begin{aligned} |\int_\Omega u_n\frac{\partial v_n}{\partial x_i} - \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}| &= |\int_\Omega (u_n\frac{\partial v_n}{\partial x_i} - u\frac{\partial v}{\partial x_i})| \\ &= |\int_\Omega (u_n - u)(\frac{\partial v_n}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}) + u_n\frac{\partial v}{\partial x_i} + u\frac{\partial v_n}{\partial x_i} - 2u\frac{\partial v}{\partial x_i}| \\ &= |\int_\Omega (u_n - u)(\frac{\partial v_n}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}) + (u_n - u)\frac{\partial v}{\partial x_i} + u(\frac{\partial v_n}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i})| \\ &\leq_{C.S} ||u_n - u||_{L^2(\Omega)}||\frac{\partial v_n}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}||_{L^2(\Omega)} + ||u_n - u||_{L^2(\Omega)}||\frac{\partial v}{\partial x_i}||_{L^2(\Omega)} + ||u||||_{L^2(\Omega)}||\frac{\partial}{\partial} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow{H^1} u \Leftrightarrow ||u_n - u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}||_{L^2(\Omega)} \to 0 \\ v_n \xrightarrow{H^1} v \Leftrightarrow ||v_n - v||^2_{L^2(\Omega)} + ||\frac{\partial v_n}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}||_{L^2(\Omega) \to 0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega u_n\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \to \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}$$

de même :

$$\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i}v_n \to \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}u$$

$$
\begin{aligned}
|\int_{\partial\Omega} u_n v_n n_i - \int_{\partial\Omega} uvn_i| &= |\int_{\partial\Omega} (u_n v_n n_i - uvn_i)| \\
&= |\int_{\partial\Omega} (u_n - u)(v_n - v)n_i + u_n v n_i + u v_n n_i - 2uvn_i| \\
&= |\int_{\partial\Omega} (u_n - u)(v_n - v)n_i + (u_n - u)vn_i + u(v_n - v)n_i| \\
&\leq |\int_{\partial\Omega} |u_n - u||v_n - v||n_i| + \int_{\partial\Omega} |u_n - u||v||n_i| + \int_{\partial\Omega} |u||v_n - v||n_i|
\end{aligned}
$$

$$\text{Or } |n_i| = |\overrightarrow{n}.\overrightarrow{x_i}| \leq ||\overrightarrow{n}||||\overrightarrow{x_i}|| = 1$$

$\Rightarrow |\int_{\partial\Omega} u_n v_n n_i - \int_{\partial\Omega} uvn_i| \leq ||u_n - u||_{L^2(\partial\Omega)}||v_n - v||_{L^2(\partial\Omega)}||u_n - u||_{L^2(\partial\Omega)}||v||_{L^2(\partial\Omega)}||u||_{L^2(\partial\Omega)}||v_n - v||_{L^2(\partial\Omega)}$

$\Rightarrow |\int_{\partial\Omega} u_n v_n n_i - \int_{\partial\Omega} uvn_i| \leq_{Trace} c^2(||u_n - u||_{H^1(Omega)}||v_n - v||_{H^1(Omega)}||u_n - u||_{H^1(Omega)}||v||_{H^1(Omega)}||u|$ $v||_{H^1(Omega)})$

$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} u_n v_n n_i \to \int_{\partial\Omega} uvn_i$

□

Remarque 2.4.4. *si* $u \in H^2(\Omega)$ *et*$v \in H^1(\Omega)$ *:*

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} vn_i$$

Remarque 2.4.5.

$$\int_\Omega \Delta uv = -\int_\Omega (\overrightarrow{\nabla} u.\overrightarrow{\nabla} v + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v; \forall u \in H^2(\Omega); \forall v \in H^1(\Omega)$$

2.4.2 L'espace $H_0^1(\Omega)$

soit Ω un ouvert régulier et borné dans$\mathbb{R}^2$

$$H_0^1(\Omega)\{v \in H^1(\Omega)/\gamma_0(v) = v_{/\partial} = 0\}$$

Proposition 2.4.2. *[HL09]* $H_0^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert pour la norme induite* $||.||_{H^1(\Omega)}$

Démonstration. soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H_0^1(\Omega)$ de Cauchy.
or$H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \Rightarrow (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans$H^1(\Omega)$
$\Rightarrow \exists v \in H^1(\Omega) : ||v_n - v||_{H^1(\Omega)} \to 0$
$v \in H_0^1(\Omega)$?
$\gamma_0(v) = \gamma_0(v - v_n + v_n) = \gamma_0(v - v_n) + \gamma_0(v_n)$
$\gamma_0(v_n) = O$ car $v_n \in H_0^1(\Omega)$
or γ_0 est continue :$||\gamma_0(v)||_{L^2(\Omega)} = ||\gamma_0(v - v_n)||_{L^2(\Omega)} \leq c||v - v_n||_{H_0^1(\Omega)} \to 0$
$\Rightarrow ||\gamma_0(v)||_{L^2(\Omega)} = 0$
$\Rightarrow \gamma_0(v) = v_{/\partial\Omega} = 0$
$\Rightarrow v \in H_0^1(\Omega)$
$\Rightarrow H_0^1(\Omega)$ est un Hilbert pour $||.||_{H^1(\Omega)}$ □

Remarque 2.4.6. *[HL09] $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans$H_0^1(\Omega)$ car :*

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = \{v \in H^1(\Omega); v_{/\partial\Omega} = 0\}$$

Théoreme 2.4.4 (Théorème de Rellich (théorème de compacité))**.** *[HL09] soit Ω un ouvert régulier et borné de $\mathbb{R}^2$ alors l'injection canonique de$H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.*
De toutes suite bornée dans $H^1(\Omega)$; on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^2(\Omega)$

$$i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$$
$$v \to i(v)$$

i est continue :
$||v||^2_{H^1(\Omega)} = ||v||^2_{L^2(\Omega)} + ||\frac{\partial v}{\partial x_1}||^2_{L^2(\Omega)} + ||\frac{\partial v}{\partial x_2}||^2_{L^2(\Omega)} = ||v||^2_{L^2(\Omega)} + ||\overrightarrow{\nabla} v||^2_{L^2(\Omega)}$
$\Rightarrow ||v||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||v||^2_{H^1(\Omega)}$

Proposition 2.4.3 (Inégalité de Poincaré)**.** *[HL09] soit Ω un ouvert régulier et borné de $\mathbb{R}^2$*

$$\exists c > 0 \forall v \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega v^2 \leq c \int_\Omega |\overrightarrow{\nabla} v|^2$$

Remarque 2.4.7. *L'inégalité de Poincaré est fausse dans$H^1(\Omega)$.*
soit $v \in H^1(\Omega) : v = a \neq 0 \Rightarrow \int_\Omega |\overrightarrow{\nabla} v|^2 = 0$
et$\int_\Omega v^2 = \int_\Omega a^2 = a^2\mu(\Omega)$
$\Rightarrow 0 \leq a^2\mu(\Omega) \leq 0 \Rightarrow a = 0$

Démonstration. $\exists c > 0 \forall v \in H_0^1(\Omega) : I(v) = \dfrac{\int_\Omega v^2}{\int_\Omega |\overrightarrow{\nabla} v|^2} \leq c$
supposons $\nexists c > 0 / \forall v \in H_0^1(\Omega) : I(v) \leq c$
$\exists (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H_0^1(\Omega) : \frac{\int_\Omega v_n^2}{\int_\Omega |\overrightarrow{v}|^2} \geq n$; $((v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée).
$\exists (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega v_n^2 \geq n \int_\Omega |\overrightarrow{\nabla} v|^2$; $(n \neq 0)$
si on pose :$w_n = \frac{\int_\Omega v_n^2}{||v_n||_{L^2(\Omega)}} \Rightarrow ||w_n||_{L^2(\Omega)}$
$\Rightarrow 1 \geq n \frac{\int_\Omega |\overrightarrow{\nabla} v|^2}{||v_n||^2_{L^2(\Omega)}} = n \int_\Omega |\overrightarrow{\nabla} v|^2$
$\Rightarrow \int_\Omega |\overrightarrow{\nabla} v|^2 \leq \frac{1}{n}$
$\Rightarrow ||w_n||_{H^1(\Omega)} = ||w_n||^2_{L^2(\Omega)} + ||\overrightarrow{\nabla} w_n||^2_{L^2(\Omega)} \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2$
$\Rightarrow (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans$H^1(\Omega)$; d'après le théorème de Rellich :
$\exists (w_{n'})_{n'\in\mathbb{N}}$ qui converge dans$L^2(\Omega)$
on a de plus $||\overrightarrow{\nabla} w_{n'}||^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\overrightarrow{\nabla} w_{n'}|^2 \leq \frac{1}{n'}$;$(n' \neq 0)$
$\Rightarrow ||w_{n'} - w_{m'}||^2_{H^1(\Omega)} = ||w_{n'} - w_{m'}||^2_{L^2(\Omega)} + ||\overrightarrow{\nabla}(w_{n'} - w_{m'})||^2_{L^2(\Omega)}$
$||w_{n'} - w_{m'}||^2_{L^2(\Omega)} \to 0$ car $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans$L^2(\Omega)$
$||\overrightarrow{\nabla}(w_{n'} - w_{m'})||^2_{L^2(\Omega)} \to 0$ car $||\overrightarrow{\nabla} w_n||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{n}$
$\Rightarrow (w_{n'})_{n'\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans$H^1(\Omega)$
$\exists w \in H^1(\Omega) : w_{n'} \xrightarrow{H^1(\Omega)} w$
$\int_\Omega |\overrightarrow{\nabla} w_{n'}|^2 = ||\overrightarrow{\nabla} w_n||^2_{L^2(\Omega)} = \lim\limits_{n'\to+\infty} \int_\Omega |\overrightarrow{\nabla} w_{n'}|^2 = \lim\limits_{n'\to+\infty} ||\overrightarrow{\nabla} w_n||^2_{L^2(\Omega)}$

or $\int_\Omega |\overrightarrow{\nabla} w_{n'}|^2 \leq \frac{1}{n'} \Rightarrow \int_\Omega |\overrightarrow{\nabla} w_{n'}|^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\nabla} w|^2 = 0$ (p.p) dansΩ
$\Rightarrow w = c^{te}$ (p.p) dans Ω
$\Rightarrow w = 0$ (p.p) dans Ω car $(w_{n'})_{n'\in\mathbb{N}} \in H_0^1(\Omega)$
or $\int_\Omega w^2 = \lim_{n'\to+\infty} (\displaystyle\int_\Omega w_{n'}) = 1$
avoir $\int_\Omega w^2 = 1$ et $w = 0$(p.p) dans Ω n'est pas possible. □

Remarque 2.4.8. *soit* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^2(\Omega) : \varphi_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} \varphi$
$\int_\Omega \varphi_n^2 \to \int_\Omega \varphi^2$
$\int_\Omega(\varphi^2 - \varphi_n^2) = \int_\Omega(\varphi - \varphi_n)(\varphi + \varphi_n)$
$\Rightarrow |(\varphi^2 - \varphi_n^2)| \leq ||\varphi - \varphi_n||_{L^2(\Omega)}||\varphi + \varphi_n||_{L^2(\Omega)} \Rightarrow |(\varphi^2 - \varphi_n^2)| \leq ||\varphi - \varphi_n||_{L^2(\Omega)}(||\varphi||_{L^2(\Omega)}||\varphi_n||_{L^2(\Omega)})$
or $\varphi_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} \varphi$ *:* $\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} ||\varphi_n||_{L^2(\Omega)} \leq M$
$\Rightarrow |\int_\Omega(\varphi^2 - \varphi_n^2)| \leq ||\varphi||_{L^2(\Omega)}||\varphi - \varphi_n||_{L^2(\Omega)}$

Normes équivalantes dans $H_0^1(\Omega)$

Proposition 2.4.4. *[HL09]* $\exists(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ *tel que :*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \alpha||v||_{H^1(\Omega)} \leq |v|_1 \leq \beta||v||_{H^1(\Omega)}$$

ou : $|v|_1 = (\int_\Omega |\overrightarrow{\nabla} v|^2)^{\frac{1}{2}}$

Remarque 2.4.9. *[HL09]* $|.|_1$ *définie une norme sur*$H_0^1(\Omega)$

1. $|\lambda v|_1 = |\lambda||v|_1$

2. $|v + w|_1 \leq |v|_1 + |w|_1$

3. $|v|_1 = 0 \Rightarrow \int_\Omega |\overrightarrow{\nabla} v|^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\nabla} v = 0$ (p.p) dans Ω
   si Ω est connexe régulier ; borné dans $\mathbb{R}^2$
   $\Rightarrow v = c^{te}$ (p.p) dans Ω et $v_{/\partial\Omega} = 0$
   $\Rightarrow v = 0$ (p.p) dans Ω

Démonstration. 1. $||v||_{H^1(\Omega)}^2 = ||v||_{L^2(\Omega)}^2 + ||\overrightarrow{\nabla} v||_{L^2(\Omega)}^2$
$\Rightarrow ||v||_{H^1(\Omega)}^2 = ||v||_{L^2(\Omega)}^2 + |v|_1^2 \geq |v|_1^2$
$\Rightarrow |v|_1 \leq ||v||_{H^1(\Omega)} \Rightarrow \beta = 1$

2. d'après l'inégalité de Poincaré on a :

$$\exists c > 0 \forall v \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega v^2 \leq \int_\Omega |\overrightarrow{\nabla} v|^2$$

$\Rightarrow ||v||_{L^2(\Omega)}^2 \leq c|v|_1^2$
$\Rightarrow ||v||_{H^1(\Omega)}^2 = ||v||_{L^2(\Omega)}^2 + |v|_1^2 \leq (1 + c)|v|_1^2$

$\Rightarrow |v|_1 \geq \sqrt{\frac{1}{1+c}}||v||_{H^1(\Omega)}$

$\Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{1}{1+c}}$

$\square$

CHAPITRE 3

APPLICATIONS

Après avoir introduit les notions nécessaire, dans ce chapitre, on étudie quelques EDP en appliquant le théorème de Lax-milgram. Les ouvrage [BB11] et [PAR88] ont été utilisé.

3.1 Application à la mécanique des solides déformables

3.1.1 Position du problème-Formulation forte-

Soit Ω un ouvert régulier et borné de $\mathbb{R}^N$ (N=2 ou 3) est contitué d'un matériau élastique et est soumis à un champs de forces f ; de composantes f_i $(i = 1; N)$ appartenant à $L^2(\Omega)$; $f \in (L^2(\Omega))^N$. Soit $\sigma = (\sigma_{ij}\,;\,((i;j) \in 1;...;N)$ avec

$$\sigma : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to M_N(\mathbb{R})$$
$$M = (x_1; ...; x_N) \to \sigma(M) = \sigma_{ij}(M)$$

σ : champs des contraintes dans Ω

l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} + f_i = 0$$
$$E_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$$

Hypothèse :Élasticité linéaire :

Loi de Hook $\sigma_{ij} = \lambda(trE(u))\delta_{ij} + 2\mu E_{ij}(u)$

avec :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$\mu > 0\,;\,\lambda N + 2\mu > 0$

$$\sum_{j=1}^{n}[\lambda\frac{\partial}{\partial x_j}(tr(E(u))\delta_{ij} + 2\mu\frac{\partial}{\partial x_j}E_{ij}(u)] = f_i$$

si Ω est encastré : $u_i = 0$ sur $\partial\Omega$

$$\begin{cases} -\lambda \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(trE(u))\delta_{ij} - 2\mu \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} E_{ij}(u) = f_i & i = 1; N \\ u_j = 0 & \text{sur}\partial\Omega \end{cases} \tag{PC}$$

3.1.2 Formulation variationelle

Soit v un champ de vecteurs test de composante v_i ;$(i = 1; N)$

$$-\lambda \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(trE(u))\delta_{ij} v_i - 2\mu \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} E_{ij}(u) v_i = \int_\Omega f_i v_i$$

1.
$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(trE(u))\delta_{ij} v_i = -\int_\Omega (trE(u)) \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \delta_{ij} + \int_{\partial\Omega} (trE(u)) v_i n_j \delta_{ij}$$

mais $\int_{\partial\Omega}(trE(u))v_i n_j \delta_{ij}$ si $v = 0$ sur $\partial\Omega$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(trE(u))\delta_{ij} v_i = \int_\Omega (trE(u)) \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N}(-\lambda \int_\Omega \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(trE(u))\delta_{ij} v_i) = \lambda \int_\Omega trE(u) trE(v)$

2. $\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} E_{ij}(u) v_i = -\int_\Omega E_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \underbrace{\int_{\partial\Omega} E_{ij}(u) v_i n_j}_{=0}$

$$\begin{aligned} \int_\Omega E_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{4} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \\ &= \frac{1}{4} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{4} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{4} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \\ &= \int_\Omega E_{ij}(u) E_{ij}(v) \end{aligned}$$

$\Rightarrow -2\mu \sum_{i=1}^{N}(\sum_{j=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} E_{ij}(u) v_i) = 2\mu \sum_{i;j}^{N} \int_\Omega E_{ij}(u) E_{ij}(v)$

$\Rightarrow \lambda \int_\Omega trE(u)trE(v) + 2\mu \int_\Omega E(u) \colon E(v) = \int_\Omega fv$ avec $v_{/\partial\Omega} = 0$

$E(u) \colon E(v) = \sum_{i;j}^{N} \int_\Omega E_{ij}(u) E_{ij}(v)$

$E_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$

$|\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}| \leq ||\frac{\partial u_i}{\partial x_j}||_{L^2} ||\frac{\partial u_j}{\partial x_i}||_{L^2}$

si u_i et v_i appartiennent à $H^1(\Omega)$ alors $\int_\Omega trE(u)trE(v)$ et $\int_\Omega E(u) \colon E(v)$ seront finies, de même

$|\int_\Omega fv| \leq ||f||_{L^2} ||v||_{L^2}$

$|\int_\Omega fv| = |\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega f_i v_i| \leq \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |f_i v_i|$

$||f||_{L^2}^2 = \int_\Omega |f|^2 = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} f_i|^2 = \sum_{i=1}^{N} ||f_i||_{L^2}^2$

$||v||_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^{N} ||v_i||_{L^2}^2$

$\sum_{i=1}^{N} |\int_\Omega f_i v_i| \leq \sum_{i=1}^{N} ||f_i||_{L^2} ||v_i||_{L^2} \leq (\sum_{i=1}^{N} ||f_i||_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{N} ||v_i||_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} = ||f||_{L^2} ||v||_{L^2}$

La formulation variationnelle s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouer } u \in (H_0^1(\Omega))^N \text{ solution de :} \\ \lambda \int_\Omega trE(u)trE(v) + 2\mu \int_\Omega E(u) \colon E(v) = \int_\Omega fv \quad \forall f \in (H_0^1(\Omega))^N \end{cases} \tag{PV}$$

Remarque 3.1.1. $trE(u) = \sum_{i=1}^{N} E_{ii}(u) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = div(u)$
(PV) : $\lambda \int_\Omega div(u).div(v) + 2\mu \int_\Omega E(u) \colon E(v) = \int_\Omega fv$

3.1.3 Coércivité de a(.;.)

$\exists \alpha > 0 : a(v;v) \geq \alpha ||v||_{H^1}^2$?
$||v||_{H^1}^2 = ||v||_{L^2}^2 + ||\nabla v||_{L^2}^2$ avec $||v||_{L^2}^2 = \int_\Omega |v|^2 = \sum_{i=1}^{N} ||v_i||_{L^2}^2$
$(\nabla v)_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Rightarrow |\nabla v|^2 = \sum_{i;j}^{N} (\frac{\partial v_i}{\partial x_j})^2$

(I) $a(v;v) = \lambda \int_\Omega (div(v))^2 + 2\mu \int_\Omega E(v) \colon E(v)$
$E(v) = E^{(1)}(v) + E^{(2)}(v)$ avec : $E^{(1)}(v) = E(v) - \frac{1}{N} trE(v).I$ et $E^{(2)}(v) = \frac{1}{N} trE(v).I$

Remarque 3.1.2. $trE^{(1)}(v) = trE(v) - \frac{1}{N} trE(v).trI = 0$ *(trT=N)*
$E(v) \colon E(v) = E^{(1)}(v) \colon E^{(1)}(v) + E^{(2)}(v) \colon E^{(2)}(v) + 2E^{(1)}(v) \colon E^{(2)}(v)$
$E^{(1)}(v) \colon E^{(2)}(v) = (E(v) - \frac{1}{N} trE(v).I) \colon (\frac{1}{N} trE(v).I) = (\frac{1}{N} trE(v))E(v) \colon I - \frac{1}{N^2}(trE(v))^2.I \colon I$
Or : $E(v) \colon I = \sum_{i;j}^{N} E_{ij}(v)\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{N} E_{ii} = trE(v)$
$\Rightarrow E^{(1)}(v) \colon E^{(2)}(v) = \frac{1}{N}(trE(v))^2 - \frac{1}{N^2}(trE(v))^2 \times N = 0$
$(I \colon I = \sum_{i;j}^{N} (\delta_{ij})^2 = N)$
$\Rightarrow a(v;v) = \lambda \int_\Omega (div(v))^2 + 2\mu \int_\Omega |E^{(1)}(v)|^2 + |E^{(2)}(v)|^2$ *ou* $|E^{(k)}|^2 = E^{(k)(v) \colon E^k(v)}$ *; k = 1; 2*
or : $|E^{(2)}(v)|^2 = \frac{1}{N^2}(trE(v))^2 N \Rightarrow (trE(v))^2 = N|E^{(2)}(v)|^2 = (div(v))^2$
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
a(v;v) &= \lambda \int_\Omega N|E^{(2)}(v)|^2 + 2\mu \int_\Omega |E^{(1)}(v)|^2 + |E^{(2)}(v)|^2 \\
&= \underbrace{(\lambda N + 2\mu)}_{\geq 0} \int_\Omega |E^{(2)}(v)|^2 + \underbrace{2\mu}_{\geq 0} \int_\Omega |E^{(1)}(v)|^2 \\
&\geq Min(\lambda N + 2\mu; 2\mu)(\int_\Omega |E^{(1)}(v)|^2 + |E^{(2)}(v)|^2) \\
&\geq c_1 \int_\Omega |E(v)|^2
\end{aligned}$$

(II) Inégalité de Korn (Simplifiée)

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : ||\nabla v||_{L^2} \leq \sqrt{2}||E(v)||_{L^2}$$

avec :

$$||E(v)||_{L^2}^2 = \int_\Omega |E(v)|^2 = \int_\Omega E(v) \colon E(v) = \sum_{i;j}^{N} \int_\Omega E_{ij}(v)E_{ij}(v)$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
2\int_\Omega |E(v)|^2 &= 2\sum_{i;j}^{N}\int_\Omega E_{ij}(v)E_{ij}(v)\\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i;j}^{N}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i})(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i})\\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i;j}^{N}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j})^2+\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i;j}^{N}(\frac{\partial v_j}{\partial x_i})^2+\sum_{i;j}^{N}\int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}
\end{aligned}
$$

or :

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} &= -\int_\Omega v_i\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} \overset{lemmedeShwartz}{=} -\int_\Omega v_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}) \text{ avec } v\in(\mathcal{D})^N\\
&= \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\\
&= \sum_{i;j}^{N}\int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\\
&= \int_\Omega (div(v))^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow 2\int_\Omega |E(v)|^2 = \int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega (div(v))^2 \geq \int_\Omega |\nabla v|^2$
$\Rightarrow \int_\Omega |\nabla v|^2 \leq 2\int_\Omega |E(v)|^2$
$\Rightarrow ||\nabla v||_{L^2} \leq \sqrt{2}||E(v)||_{L^2}$
$\Rightarrow a(v;v) =\geq c_1\int_\Omega |E(v)|^2 = c_1||E(v)||^2_{L^2}$
$\Rightarrow a(v;v) \geq \frac{c_1}{2}||\nabla v||^2_{L^2}$

(III) $\forall i=1;2 : \int_\Omega |v_i|^2 \leq c_p\int_\Omega |\nabla v_i|^2$
$||\nabla v||^2_{L^2} = \int_\Omega |\nabla v|^2 = \int_\Omega \sum_{i;j}^{N}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j})^2$
$||v||^2_{L^2} = \int_\Omega |v|^2 = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N}|v_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{N} c_p\int_\Omega |\nabla v_i|^2$
or :$||\nabla v||^2_{L^2} = \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \sum_{j=1}^{N}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j})^2 = \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\nabla v_i|^2$
$\Rightarrow ||v||^2_{L^2} \leq c_p||\nabla v||^2_{L^2}$
$\Rightarrow ||v||^2_{H^1} \leq (1+c_p)||\nabla v||^2_{L^2}$
$\Rightarrow a(v;v) \geq \frac{c_1}{2}||\nabla v||^2_{L^2} \geq \frac{c_1}{2(1+c_p)}||v||^2_{H^1(\Omega)^N}$ avec $c_1 = Min(\lambda N + 2\mu; 2\mu)$

3.2 Condition de Dirichlet non homogène

$$
\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega; f\in L^2(\Omega)\\ u/_{\partial\Omega} = g & g\in L^2(\partial\Omega)\end{cases} \tag{PC}
$$

Proposition 3.2.1. *Soit $g\in L^2(\partial\Omega); \exists h\in H^2(\Omega)$ tel que : $h=g$ (p.p) sur $\partial\Omega$ et :*

$$\exists M>0 : ||h||_{H^1(\Omega)} \leq M||g||_{L^2(\partial\Omega)}$$

h est un relèvement de g ; h ,'est pas unique.

Proposition 3.2.2. *$\exists! u \in H^1(\Omega)$ solution faible associée à (PC) tel que :*

$$\exists c > 0 : ||u||_{H^1(\Omega)} \leq c(||f||_{L^2(\Omega)} + ||g||_{L^2(\partial\Omega)})$$

Soit $h \in H^2(\Omega)$ un relèvement de $g \in L^2(\partial\Omega)$
on pose : $\varphi = u - h; \varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$
et on a :$\varphi/_{\partial\Omega} = u/_{\partial\Omega} - h/_{\partial\Omega} = g - g = 0$
$\Delta\varphi = \Delta u - \Delta h = -f - \Delta h = -F \Rightarrow$

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = F & \text{dans } \Omega \\ \varphi/_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists! \varphi \in H_0^1(\Omega)$ solution de $\int_\Omega \nabla\varphi\nabla\psi = \int_\Omega F\psi; \forall\psi \in H_0^1(\Omega)$

Remarque 3.2.1. *φ dépend du relèvement h par F*

Remarque 3.2.2. *$\varphi = u - h \Rightarrow u = \varphi + h$*
$\Rightarrow$ existence de la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (PV) associé à (PC).

- *Unicité de u solution de (PC)*

$$V = \{v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}; v \in H^1(\Omega); v/_{\partial\Omega} = g\}$$

V n'est pas un espace vectoriel
soient $u; v \in V : -\int_\Omega \Delta u(v - u) = \int_\Omega f(v - u)$
$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u\nabla(v - u) - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(v - u)}_{=0} = \int_\Omega f(v - u)$
u est solution de :

$$\begin{cases} a(u; v - u) = L(v - u) & \forall v \in V \\ u \in V \end{cases}$$

Soient u et u∗ deux solution de (PV) :
$a(u; v - u) = L(v - u)\forall v \in V$
$a(u*; v - u*) = L(v - u*)\forall v \in V$
$v = u* : a(u; u * -u) = L(u * -u)$
$v = u : a(u*; u - u*) = L(u - u*)$
$\Rightarrow a(u; u * -u) + a(u*; u - u*) = 0$
$\Rightarrow a(u - u*; u * -u) = 0$
Or $(u - u*) \in H_0^1(\Omega)$ et a est coércive sur $H_0^1(\Omega)$:
$\exists\alpha > 0 : \alpha||u - u * ||^2_{H^1} \leq a(u - u*; u - u*) = 0$
$\Rightarrow ||u - u * ||^2_{H^1} = 0$
$\Rightarrow u = u*$ *(p.p) dans* Ω

- *Estimation a priori : $\exists c > 0 ||u||_{H^1(\Omega)} \leq c(||f||_{L^2(\Omega)} + ||g||_{L^2(\partial\Omega)})$?*
  $-\Delta u = -\Delta\varphi - \Delta h = f$

$-\int_\Omega \Delta\varphi\psi = \int_\Omega f\psi + \int_\Omega \Delta h\psi \Rightarrow \int_\Omega \Delta\varphi\Delta\psi - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\psi}_{=0} = \int_\Omega f\psi - \int_\Omega \nabla h\nabla\psi + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial h}{\partial n}\psi}_{=0}$

or $\varphi/_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow \varphi \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \textit{Trouver } \varphi \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega \nabla\varphi\nabla\psi = \int_\Omega f\psi - \int_\Omega \nabla h\nabla\psi \end{cases}$$

si $\psi = \varphi :\Rightarrow \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 = \int_\Omega f\varphi - \int_\Omega \nabla h\nabla\varphi; \varphi \in H_0^1(\Omega)$
$\exists c_p > 0 : ||\varphi||^2_{L^2(\Omega)} \leq c_p^2||\nabla\varphi||^2_{L^2(\Omega)}$ *(Poincaré)*
$\Rightarrow ||\varphi||^2_{H^1(\Omega)} \leq (1+c_p^2)||\nabla\varphi||^2_{L^2(\Omega)} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \exists\beta = \frac{1}{1+c_p^2} : \beta||\varphi||^2_{H^1(\Omega)} \leq ||\nabla\varphi||^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \\ &= \int_\Omega f\varphi - \int_\Omega \nabla h\nabla\varphi \\ &\leq |\int_\Omega f\varphi - \int_\Omega \nabla h\nabla\varphi| \\ &\leq \int_\Omega |f\varphi| + \int_\Omega |\nabla h\nabla\varphi| \\ &\leq ||f||_{L^2(\Omega)}||\varphi||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla h||_{L^2(\Omega)}||\varphi||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (||f||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla h||_{L^2(\Omega)})||\varphi||_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow ||\varphi||_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\beta}(||f||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla h||_{L^2(\Omega)})$ *Or :* $u = \varphi + h \Rightarrow$

$$\begin{aligned} ||u||_{H^1(\Omega)} = ||\varphi+h||_{H^1(\Omega)} &\leq ||\varphi||_{H^1(\Omega)} + ||h||_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{\beta}(||f||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla h||_{L^2(\Omega)}) + ||h||_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{\beta}(||f||_{L^2(\Omega)} + ||h||_{L^2(\Omega)}) + (||f||_{L^2(\Omega)} + ||h||_{L^2(\Omega)}) \\ &= (1+\frac{1}{\beta})(||f||_{L^2(\Omega)} + ||h||_{L^2(\Omega)}) \end{aligned}$$

$\exists M > 0 : ||h||_{H^1(\Omega)} \leq M||g||_{L^2(\partial\Omega)}$
$\Rightarrow ||u||_{H^1(\Omega)} \leq (1+\frac{1}{\beta})(||f||_{L^2(\Omega)} + M||g||_{L^2(\partial\Omega)})$
$\Rightarrow ||u||_{H^1(\Omega)} \leq (1+\frac{1}{\beta})||f||_{L^2(\Omega)} + M(1+\frac{1}{\beta})||g||_{L^2(\partial\Omega)})$
$\Rightarrow ||u||_{H^1(\Omega)} \leq c(||f||_{L^2(\Omega)} + ||g||_{L^2(\partial\Omega)})$
avec : $c = Max((1+\frac{1}{\beta}); M(1+\frac{1}{\beta}))$

3.3 Problème elliptique avec condition de Fourier

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^2(\Omega) \text{ solution de :} & \\ -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + ku = g & (k>0) \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{PC}$$

avec$f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Omega)$

Remarque 3.3.1. *si $k = 0$; alors c'est la condition de Neumann*

Remarque 3.3.2.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \overrightarrow{\nabla} u.\overrightarrow{n}$$

Remarque 3.3.3. *si $u \in H^2(\Omega)$ l'EDP a un sens.*
$u \in H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ alors $tru = u/_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$
on a aussi $\frac{\partial u}{\partial n} \in H^1(\Omega) \Rightarrow tr\frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega)$

3.3.1 Formulation variationnelle :

Si $u \in H^2(\Omega)$ est solution de (PC) :
$-\int_\Omega \Delta uv + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$
si $v \in H^1(\Omega)$: $\int_\Omega \overrightarrow{\nabla} u.\overrightarrow{\nabla} v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv; \forall v \in H^1(\Omega)$
$\Leftrightarrow \int_\Omega (\overrightarrow{\nabla} u.\overrightarrow{\nabla} v + uv) - \int_{\partial\Omega}(g - ku)v = \int_\Omega fv; \forall v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^2(\Omega) \text{ solution de :} \\ \int_\Omega (\overrightarrow{\nabla} u.\overrightarrow{\nabla} v + uv) + k\int_{\partial\Omega} uv = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases} \tag{PV}$$

3.3.2 Existence et unicité de la solution u de (PV)

- $V = H^1(\Omega)$ muni de la norme $||.||_{H^1(\Omega)}$
- on pose $a(u; v) = \int_\Omega (\overrightarrow{\nabla} u.\overrightarrow{\nabla} v + uv) + k\int_{\partial\Omega} uv$
- $L(v) = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv$
  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ solution de :} \\ a(u; v) = L(v) \qquad\qquad \forall v \in V \end{cases} \tag{PV}$$

1. L est une forme linéaire continue sur $H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq ||f||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} + ||g||_{L^2(\partial\Omega)}||v||_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq ||f||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} + c||g||_{L^2(\partial\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)} \\ &\leq (||f||_{L^2(\Omega)} + c||g||_{L^2(\partial\Omega)})||v||_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

2. a est bilinéaire continue sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |a(u; v)| &\leq ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}||\nabla v||_{L^2(\Omega)} + ||u||_{L^2(\Omega)} + ||v||_{L^2(\Omega)} + k||u||_{L^2(\partial\Omega)}||v||_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq ||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)} + ||u||_{H^1(\Omega)} + ||v||_{H^1(\Omega)} + kc^2||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)} \\ &\leq (2 + kc^2)||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

3. a est coércive :

$$\begin{aligned} a(v;v) &= \int_\Omega |(\overrightarrow{\nabla} v|^2 + v^2) + k\int_{\partial\Omega} v^2 \\ &= ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)} + ||v||^2_{L^2(\Omega)} + k||v||^2_{L^2(\partial\Omega)} \\ &= ||v||^2_{H^1(\Omega)} + k||v||^2_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\geq ||v||^2_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Remarque 3.3.4. *Si on avait*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \textit{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + ku = g & (k>0) \textit{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{PC}$$

$\Rightarrow a(u;v) = \int_\Omega \overrightarrow{\nabla} u.\overrightarrow{\nabla} v + k\int_{\partial\Omega} uv$
$a(v;v) = ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)} + k||v||^2_{L^2(\partial\Omega)} \geq \beta ||v||^2_{H^1(\Omega)}$ *?*
or : l'inégalité de Poincaré généralisée dans $H^1(\Omega)$ *:*

$$||v||_{L^2(\Omega)} \leq D(||v||_{L^2(\partial\Omega)} + ||\nabla v||_{L^2(\Omega)})$$

$\Rightarrow a(v;v) \geq Min(1;k)(||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)} + ||v||^2_{L^2(\partial\Omega)})$
or $||v||^2_{L^2(\Omega)} \leq 2D^2(||v||^2_{L^2(\partial\Omega)} + ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)})$
$\Rightarrow ||v||^2_{H^1(\Omega)} \leq 2D^2||v||^2_{L^2(\partial\Omega)} + (2D^2+1)||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)}$
$\Rightarrow ||v||^2_{H^1(\Omega)} \leq (2D^2+1)(||v||^2_{L^2(\partial\Omega)} + ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega)})$
$\Rightarrow a(v;v) \geq \frac{Min(1;k)}{2D^2+1}||v||^2_{H^1(\Omega)}$

3.3.3 $(PC) \Leftrightarrow (PV)$

Soit u solution de (PV) et $u \in H^2(\Omega)$

$$\int_\Omega (\overrightarrow{\nabla} u.\overrightarrow{\nabla} v + uv) + k\int_{\partial\Omega} uv = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv; \forall v \in H^1(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow -\int_\Omega \Delta uv + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_\Omega uv + k\int_{\partial\Omega} uv = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv; \forall v \in H^1(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega (-\Delta u + u - f)v = \int_{\partial\Omega} (g - ku\frac{\partial u}{\partial n})v; \forall v \in H^1(\Omega)$$

$v \in C_0^\infty \subset H^1(\Omega) \Rightarrow v/_{\partial\Omega} = 0$
$\Rightarrow \underbrace{\int_\Omega (-\Delta u + u - f)v}_{\in L^2(\Omega)} = 0; \forall v \in C_0^\infty = \mathcal{D}(\Omega)$
$\Rightarrow -\Delta u + u - f) = 0$ (pp) dans Ω
or $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ on pose $U = -\Delta u + u - f \in L^2(\Omega)$
soit $\varphi \in L^2(\Omega)$: $\int_\Omega U\varphi = \int_\Omega U(\varphi - \varphi_n)$ car $\int_\Omega U\varphi_n = 0$
$|\int_\Omega U\varphi| \leq ||U||_{L^2(\Omega)} \underbrace{||\varphi - \varphi_n||_{L^2(\Omega)}}_{=0} \Rightarrow \int_\Omega U\varphi = 0; \forall \varphi \in L^2(\Omega) \Rightarrow U = 0$ (pp) dans Ω

$\Rightarrow -\Delta u + u = f$ (pp) dans Ω

$\Rightarrow \int_{\partial\Omega}(g - ku\frac{\partial u}{\partial n})v = 0\,;\, \forall v \in H^1(\Omega)$ on pose $V = \frac{\partial u}{\partial n} + ku - g \in L^2(\partial\Omega) \Rightarrow \int_{\partial\Omega} Vv = 0\,;\, \forall v \in H^1(\Omega)$

on note $Im(tr(H^1(\partial\Omega))) = H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$

on a de plus $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$

soit $\psi \in L^2(\partial\Omega) \exists \psi_n \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : ||\psi - \psi_n||_{L^2(\partial\Omega)} \to 0$

$\int_{\partial\Omega} V\psi = \int_{\partial\Omega} V(\psi - \psi_n) \leq ||V||_{L^2(\partial\Omega)}||\psi - \psi_n||_{L^2(\partial\Omega)} \to 0$

$\Rightarrow \int_{\Omega} V\psi = 0 \forall \psi \in L^2(\partial\Omega)$

$\Rightarrow V = 0$ (pp) dans $\Omega \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} + ku - g = 0$ (pp) dans Ω

CONCLUSION

Dans ce mémoire nous avons présenté les théorèmes et propriétés essentielles des espaces fonctionnelle utilisé dans l'étude de quelques équation différentielle partielle, qui nous permettent d'avoir l'existence, l'unicité et la régularité des solutions. nous avons commencé par introduire les définitions et les propriétés des espaces de Banach , Hilbert et Sobolev ensuite nous avons appliqué le théorème de Lax-Milgram pour étudier quelques exemples pratique dans le domaine de la mécanique des solides déformable .

BIBLIOGRAPHIE

[All05] Grégoire Allaire. *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique.* Editions Ecole Polytechnique, 2005.

[BB11] Haim Brezis and Haim Brézis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, volume 2. Springer, 2011.

[Bir27] George David Birkhoff. *Dynamical systems*, volume 9. American Mathematical Soc., 1927.

[Bou16] Driss Boularas. *Fondements des équations différentielles ordinaires.* Ellipses, 2016.

[Boy14] Franck Boyer. Analyse fonctionnelle. 2014.

[Cau26] Augustin Louis Cauchy. *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie*, volume 2. de Bure, 1826.

[d'A68] Jean Le Rond d'Alembert. *Opuscules mathématiques ou Mémoires sur différens sujets de géométrie, de méchanique, etc*, volume 5. 1768.

[DM05] Lokenath Debnath and Piotr Mikusinski. *Introduction to Hilbert spaces with applications.* Academic press, 2005.

[Eul48] Leonhard Euler. *Introductio in analysin infinitorum*, volume 2. Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios, 1748.

[Eul11] Leonhard Euler. *Vollständige Anleitung zur Algebra*, volume 1. Teubner, 1911.

[Eva10] Lawrence C Evans. *Partial differential equations*, volume 19. American Mathematical Soc., 2010.

[FD+22] Jean Baptiste Joseph Fourier, Gaston Darboux, et al. *Théorie analytique de la chaleur*, volume 504. Didot Paris, 1822.

[Fuc77] Lazarus Fuchs. Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces. extrait d'une lettre adressée à m. hermite. 1877.

[GP05] Karl Friedrich Gauss and Peter Pesic. *General investigations of curved surfaces.* Courier Corporation, 2005.

[HL09] Francis Hirsch and Gilles Lacombe. *Eléments d'analyse fonctionnelle : cours et exercices avec réponses.* Dunod, 2009.

[Lag13] Joseph Louis Lagrange. *Théorie des fonctions analytiques : contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.* Ve. Courcier, 1813.

[Li13] Daniel Li. *Cours d'Analyse Fonctionnelle avec 200 Exercices Corrigés.* Ellipses Marketing, 2013.

[Lio03] Roger Liouville. Sur une équation différentielle du premier ordre. *Acta mathematica*, 27:55–78, 1903.

[LM12] Jacques Louis Lions and Enrico Magenes. *Non-homogeneous boundary value problems and applications : Vol. 1*, volume 181. Springer Science & Business Media, 2012.

[LS98] Lacroix-Sonrier. *Distributions, espaces de Sobolev : Applications.* Ellipses Marketing, 1998.

[Nem15] Viktor Vladimirovich Nemytskii. *Qualitative theory of differential equations*, volume 2705. Princeton University Press, 2015.

[PAR88] J.-M. Thomas P. A. Raviart. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.* Masson, 1988.

[Rud91] Walter Rudin. *Functional analysis.* McGraw-Hill, 1991.

[Sib] Sibirskiĭ. *Introduction to the algebraic theory of invariants of differential equations.*

[VOE01] Jean VOEDTS. *Cours de mathematiques MP.* Ellipses Marketing, 2001.

[VRLJ22] Henri Villat, Henri Ame Resal, Joseph Liouville, and Camille Jordan. *Journal de mathematiques pures et appliquees.* Gauthier-Villars, 1922.

[Wlo87] J. Wloka. *Partial differential equations.* Cambridge University Press, 1987.