

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur Et de La Recherche Scientifique

Faculté des sciences et
Technologie

Département d'hydraulique et
de génie civil

جامعة غرداية



كلية العلوم والتكنولوجيا

قسم الري والهندسة المدنية

Université de Ghardaïa

Niveau : 2ème année

Filière : Génie civil

Spécialité : Génie civil

Cours de la résistance des matériaux

Réaliser par : Dr. DAHEUR Elhadj Guesmia

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2019/2020

Semestre: 4

Unité d'enseignement: UEF 2.2.3

Matière : Résistance des matériaux

VHS: 45h00 (Cours: 1h30, TD: 1h30)

Crédits: 4

Coefficient: 2

Objectifs de l'enseignement:

Apprendre les notions de base de la résistance des matériaux, les buts et les hypothèses de la RDM, la notion des efforts internes, caractéristiques géométriques des sections, la loi de comportement des matériaux, notion de contraintes admissibles et le dimensionnement des pièces sous sollicitations simples.

Connaissances préalables recommandées :

Mécanique rationnelle et analyse des fonctions.

Contenu de la matière :

Chapitre 1. Introduction et généralités (2 semaines)

Buts et hypothèses de la résistance des matériaux, Différents types de chargements, Liaisons (appuis, encastremets, rotules), Principe Général d'équilibre -Équations d'équilibres, Méthode des sections -Notion des efforts internes : Effort normal N, Effort tranchant T, Moment fléchissant M, Définitions, conventions de signes et unités.

Chapitre 2. Caractéristiques géométriques des sections droites (2 semaines)

Centre de gravité, Moments statiques, Moments d'inertie d'une section droite, Transformation des moments d'inertie. Axes principaux centraux, moments d'inertie principaux.

Chapitre 3. Traction simple et compression simple (3 semaines)

Définitions, Efforts normaux de traction et de compression, Contrainte normale, Déformation élastique, Loi de Hooke, Module de Young, Diagramme contrainte-déformation, Condition de résistance et notion de contrainte admissible.

Chapitre 4. Flexion simple (4 semaines)

Définitions et hypothèses, Effort tranchants, Moments fléchissant, Relation différentielle entre la charge, Effort tranchant et Moment fléchissant. Diagramme des efforts tranchants et moments fléchissant, Contraintes en flexion simple, Notion de l'axe neutre et dimensionnement. Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (notion de la flèche), Calcul de la contrainte tangentielle.

Chapitre 5. Cisaillement (2 semaines)

Définitions, Cisaillement simple, Cisaillement pur, Contrainte de cisaillement, Déformation élastique en cisaillement, Condition de résistance au cisaillement.

Chapitre 6. Torsion (2 semaines)

Définitions, Contrainte tangentielle ou de glissement, Déformation élastique en torsion, Condition de résistance à la torsion.

Mode d'évaluation:

Contrôle Continu : 40%; Examen: 60%.

Références bibliographiques :

1. F. Beer, Mécanique à l'usage des ingénieurs – statique, McGraw-Hill, 1981.
2. G. Pissarenko et all, Aide-mémoire de résistance des matériaux.
3. I. Mirolioubov et coll, "Problèmes de résistance des matériaux", Editions de Moscou.
4. L. Aleinik& J. Durler, "Résistance des matériaux", Ed. Spes, Dunod.

5. M. Kerguignas&G. Caignaert, "Résistance des matériaux", Ed. Dunod Université.
6. P. Stepine, Résistance des matériaux, Editions MIR ; Moscou, 1986.
7. S. Timoshenko, Résistance des matériaux, Dunod, 1986.
8. William et Nash, Résistance des matériaux, cours et problème, série Schaum, 1983.

Sommaire

<i>Chapitre I : Généralités</i>	
I.1 Introduction	1
I.2 Hypothèses générales de la RDM	1
I.3 Différents types de sollicitations	2
I.4 Différents types des appuis	3
I.5 Notion des efforts internes	5
I.5 Convention des signes et unités	7
<i>Chapitre II : Caractéristiques géométriques des formes</i>	
II.1 Introduction	8
II.2 Caractéristiques géométriques des formes	8
II.3 Formule de transformation des moments d'inertie	10
II.4 Moments d'inertie principaux	12
II.5 Propriétés des axes principaux d'inertie	13
II.6 Présentation géométrique des moments d'inertie	13
II.7 Exemple d'application	14
<i>Chapitre III : Traction et Compression</i>	
III.1 Définition	17
III.2 Effort et contrainte normale	17
III.3 Courbe contrainte - déformation	18
III.4 Condition de résistance	23
III.5 Exemple d'application	23
<i>Chapitre IV : Flexion simple</i>	
IV.1 Définitions	25
IV.2 Efforts tranchants, moments fléchissant	25
IV.3 Diagrammes des Efforts tranchants et des moments fléchissant	28
IV.4 Contraintes normales en flexion simple	31
IV.5 Vérification par rapport aux contraintes normales	33
IV.6 Contraintes tangentielles en flexion	34
IV.7 Calcul de résistance en flexion simple	36
IV.8 Exemple	36
<i>Chapitre V : Cisaillement</i>	
V.1 Définitions	40
V.2 Contrainte de cisaillement	40
V.3 Déformation élastique en cisaillement	41
V.4 Condition de résistance au cisaillement	42
V.5 Applications	43
V.6 Exemple	43
<i>Chapitre VI : Torsion</i>	
VI.1 Définitions	45
VI.2 Déformation	45
VI.3 Contrainte	46
VI.4 Condition de résistance	48
VI.5 Condition de rigidité	49
VI.6 Exemples d'application	49

Introduction

La résistance des matériaux est l'étude de la résistance et de la déformation des solides. Elle permet de définir les formes, les dimensions et les matériaux des pièces mécaniques de façon à maîtriser leur résistance, leur déformation tout en optimisant leur coût.

Pour réaliser un calcul de résistance des matériaux, nous avons besoin de connaître les actions mécaniques exercées sur le mécanisme (ces actions sont déterminées dans l'étude de statique ou de dynamique) et les matériaux utilisés. L'étude de résistance des matériaux va permettre de définir les sollicitations et les contraintes qui en résultent.

L'objet de la résistance des matériaux est l'étude de la stabilité interne c'est à dire la détermination des contraintes et déformations à l'intérieur de la matière et les déplacements des lignes moyennes des structures générés (machines en génie mécanique, bâtiment en génie civil, ...)

Ce polycopié s'adresse aux étudiants de deuxième année LMD en Génie Civil. Il est divisé en six chapitres. Le contenu de chaque chapitre est conforme au programme de la deuxième année licence en Génie Civil retenue par la Comité Pédagogique National du Domaine Sciences et Technologies.

Généralités

I.1 Introduction :

La résistance des matériaux est une partie de la mécanique appliquée qui a pour objectif d'étudier le comportement des éléments de construction et de pièces sous l'action des charges.

La RDM nous permet d'étudier :

- **La résistance** qui est la capacité d'une structure et de ses éléments de supporter, sans se détruire, une charge déterminée ;
- **La rigidité** qui est la capacité d'une structure et de ses éléments de s'opposer à l'action déformatrice des charges extérieures (pas de déformation excessive) ;
- **Stabilité** qui est la capacité d'une structure et de ses éléments de conserver une position d'équilibre donnée correspondant à l'état d'équilibre initial.

I.2 Hypothèses générales de la RDM :

Les principales hypothèses de la résistance des matériaux sont les suivants :

L'homogénéité, l'isotropie et la continuité du matériaux : On suppose que le matériau possède les mêmes propriétés élastiques en tous les points du corps, dans toutes les directions en un point quelconque du corps, et que le matériau est assimilé à un milieu continu.

L'élasticité et la linéarité du matériau : On suppose admet qu'en chaque point contraintes et déformation sont proportionnelles et qu'après déformation, l'élément revient à son état initial.

La petitesse des déformations : les déformations dues aux charges sont négligeables par rapport aux dimensions des éléments et la configuration géométrique reste inchangée.

Hypothèses sur les déformations (Hypothèse de Navier-Bernoulli) : Les sections planes et droites (normales à la ligne moyenne) avant déformation restent planes et droites après déformation.

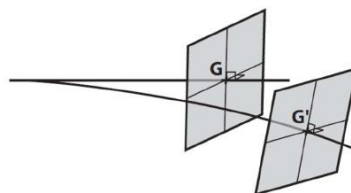


Figure I-1 : Hypothèse de Navier-Bernoulli.

Hypothèse de Saint Venant : Tous les efforts qui interviennent dans la théorie peuvent être schématisés par leur torseur résultant.

Ces hypothèses simplificatrices conduisent à des solutions approchées qui permettent en général une bonne approximation du comportement des structures soumises à différents types de charges.

I.3 Différents types de sollicitations :

I.3.1 Traction et compression : la traction ou la compression ont lieu lorsque les forces opposées sont appliquées le long de l'axe d'une barre (figure I-2).

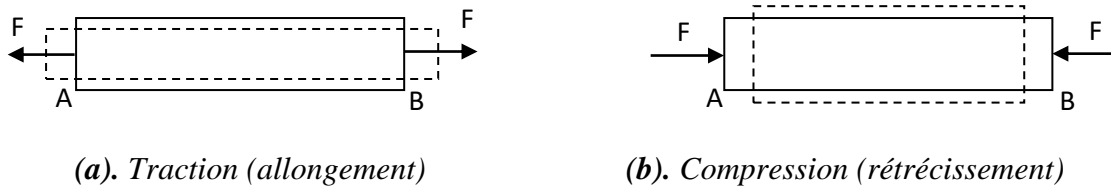


Figure I-2 : Traction et compression.

I.3.2 Le cisaillement : il a lieu lorsque les forces extérieures provoquent un déplacement de deux sections planes parallèles l'une par rapport à l'autre, la distance entre elles restant inchangée (figure I-3).



Figure I-3 : Cisaillement.

I.3.3 La torsion : Une poutre est sollicitée en torsion lorsque les actions aux extrémités se réduisent à deux moments de torsion M_t égaux et opposés, portés par la ligne moyenne L_m .

La déformation de torsion s'accompagne d'une rotation transversale de la plaque l'une par rapport à l'autre autour de l'axe de ce dernier (figure I-4).

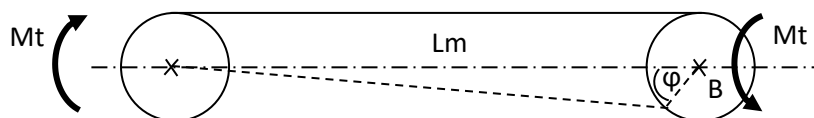


Figure I-4 : Une pièce soumise à la torsion.

I.3.4 La flexion : consiste en un gauchissement de l'axe d'une barre droite

Le chargement est un moment autour l'axe Z. Le moment M_z est appelé moment fléchissant.

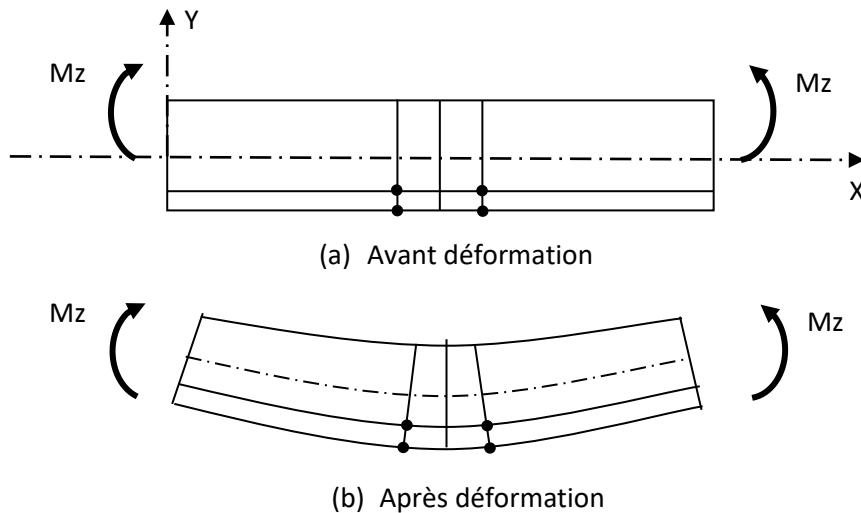


Figure I-5 : Une poutre soumise à la flexion.

I.4 Différents types des appuis :

Une structure est reliée au monde extérieur par un certain nombre de liaisons. Une liaison impose des conditions cinématiques en un point. Pour maintenir ces liaisons, il faut exercer des efforts de liaison qui sont des inconnues du problème.

Les liaisons dans le plan sont de 3 sortes :

I.4.1 Appui simple :

Ce type d'appui matérialisé par la Figure I-6, laisse à la structure toute liberté de pivoter autour de O (extrémité de la poutre) et de se déplacer perpendiculairement à la droite joignant les points de contact. Si on néglige les frottements, la réaction d'appui à la direction de la droite précitée, et introduit une seule inconnue dans l'étude de la poutre.

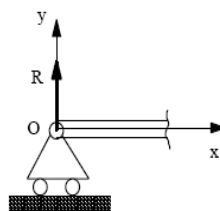


Figure I-6 : Appui simple

I.4.2 Appui double :

Matérialisé par une rotule (Figure I-7) cet appui autorise les rotations d'une extrémité de la poutre ou d'un des éléments constituant la structure. La direction de la réaction R est inconnue, mais la ligne d'action passe par le centre de l'articulation.

L'articulation introduit 2 inconnues, par exemple les projections sur deux directions du plan moyen.

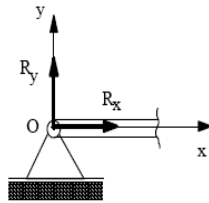


Figure I-7 : Appui double

I.4.3 Encastrement :

L'encastrement schématisé sur la Figure I-8 interdit tout déplacement de la section droite de l'appui. Sa réaction est une force de densité variable répartie sur toute l'étendue de la section.

Ce type d'appui introduit donc 3 inconnues, les deux projections de R sur deux axes du plan moyen et l'intensité du moment M qui est perpendiculaire au plan moyen.

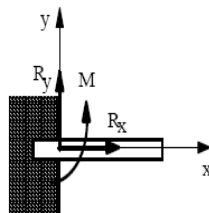


Figure I-8 : Encastrement

I.5 Notion des efforts internes :

Sous l'effet des charges extérieures, les forces entre les particules d'un corps (élément) en équilibre varient. En Résistance des Matériaux, on appelle souvent cette variation des forces *efforts internes*.

Afin de faciliter l'étude des efforts exercés sur chaque particule matérielle on considère une section transversale d'un élément soumis à une sollicitation (Figure I-9).

Tout comme n'importe quel système de forces, les efforts intérieurs répartis sur toute la section peuvent être rapportés à un point (par exemple le centre de gravité de la section), et de ce fait on distingue le vecteur force F (N , T_z , T_y) et le vecteur moment M (M_x , M_y , M_z) résultant des forces intérieures dans la section. Il convient d'adopter les dénominations suivantes pour les forces et moments agissant dans une section.

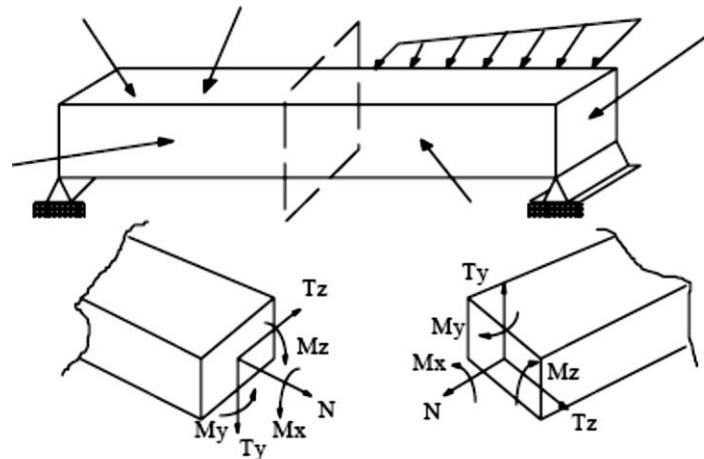


Figure I-9

1.5.1 Effort Normal :

La composante N de la résultante F représente la somme des projections de toutes les forces intérieures agissant suivant la normale de la section (ou suivant l'axe longitudinal de l'élément). L'effort normal provoque une déformation longitudinale de l'élément. N est considéré positif s'il s'agit d'une traction et négatif dans le cas contraire.

1.5.2 Efforts tranchants :

Les forces transversales T_z , et T_y sont les sommes des projections de toutes les forces intérieures dans la section sur les axes centraux principaux de cette dernière. Ces efforts tranchants provoquent le cisaillement des bords de la section respectivement dans la direction des axes Z et Y . Le sens de T sur le plan est positif par convention quand il tend à faire tourner un élément entre deux sections dans le sens des aiguilles d'une montre comme indiqué sur la Figure I-10.

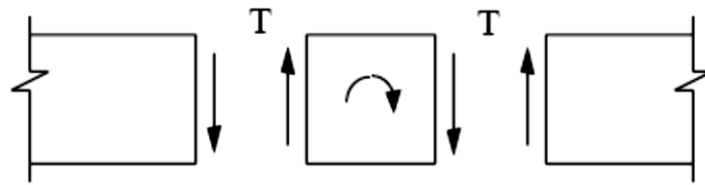


Figure I-10

I.5.3 Moments Fléchissant :

Les composantes M_y , et M_z du vecteur moment résultant représentent les sommes des moments de toutes les forces intérieures dans la section, par rapport aux axes d'inertie principaux de cette dernière Y et Z respectivement. La Figure I-11 indique le sens positif des moments dans le plan qui par convention tend les fibres inférieures et comprime les fibres supérieures de la section.

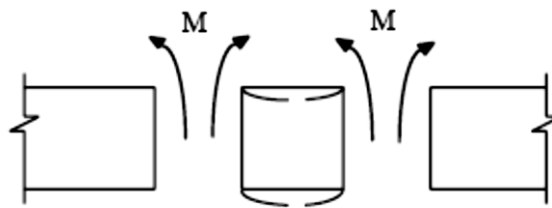


Figure I-11

IV.1.4 Moment de torsion :

Le moment de torsion M_x (ou M_t) est la somme des moments de toutes les forces intérieures dans la section par rapport à l'axe de la barre X. Le moment de torsion est positif lorsqu'il tend à tourner la section dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique) en regardant la section du côté de la normale extérieure (Figure I-12)

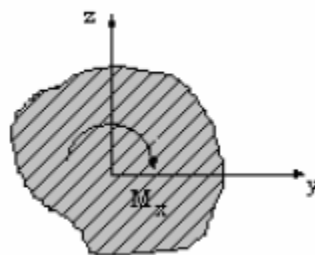


Figure I-12

I.5 Convention des signes et unités :

Généralement on utilise le système Cartésien ou rectangulaire pour toutes les structures. Cependant, pour les structures en arc, le système polaire s'avère plus pratique. Le premier ayant les axes OX, OY et OZ mutuellement perpendiculaire. Les sens positifs de ces axes obéissent à la règle de la main droite. Comme indiqué ci-dessous (Figure I-13), on choisit les sens positifs de deux axes X et Y par exemple, le sens positif de l'axe Z est suivant la direction d'une vis tournant de l'axe X vers l'axe Y.

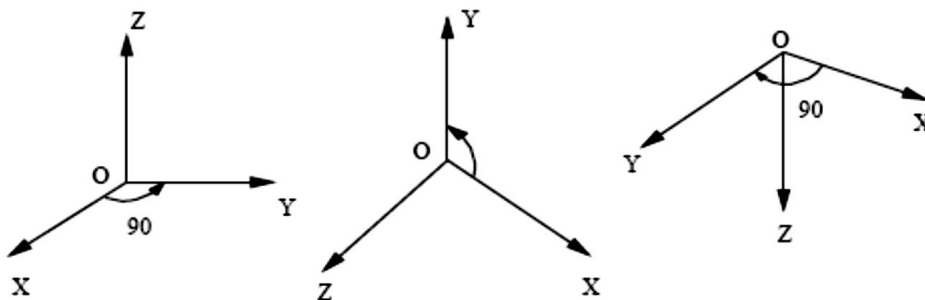


Figure I-13

Les unités de mesure utilisées sont principalement celles du système d'unités international (SI) :

- Longueur : (le mètre) m
- Masse : (le kilogramme) kg
- Temps : (la seconde) s
- Force : (le Newton) N, kN
- Contrainte : N/mm^2
- Travail : (Joule) $\text{J} = \text{N.m}$

Caractéristiques géométriques des formes

II.1 Introduction :

La variété des formes des sections transversales des éléments utilisés dans les constructions n'est pas un fait du hasard. Dans la plupart des cas ces formes ont été développées pour répondre à des critères de résistance, de rigidité ou de stabilité. Ce chapitre étudie les principales caractéristiques des sections planes, leurs méthodes de calcul et leurs propriétés vis à vis les différents cas de sollicitations.

II.2 Caractéristiques géométriques des formes :

II.2.1 Centre de gravité (CDG) :

On appelle centre de gravité d'une section le point à travers lequel si on applique une force, elle résulte en une pression uniforme sur toute la section. Les coordonnées du centre de gravité G (X_G, Y_G) d'une section homogène (S) (Figure II-1) sont données par les relations :

$$X_G = \frac{1}{S} \iint x ds \quad (\text{II-1})$$

$$Y_G = \frac{1}{S} \iint y ds \quad (\text{II-2})$$

$$S = \int ds \quad (\text{II-3})$$

x et y étant les coordonnées de l'aire élémentaire ds .

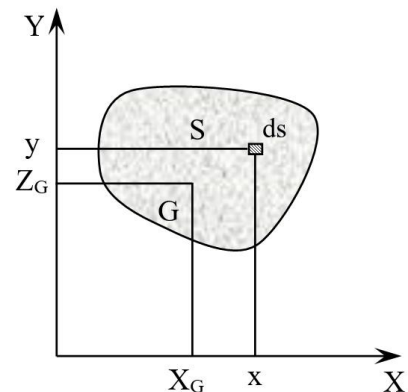


Figure II-1

Pour les figures complexes les coordonnées de CDG sont

$$X_G = \frac{\sum x_i s_i}{\sum s_i} \quad (\text{II-4})$$

$$Y_G = \frac{\sum y_i s_i}{\sum s_i} \quad (\text{II-5})$$

x_i et y_i forment les coordonnées de CDG de S_i .

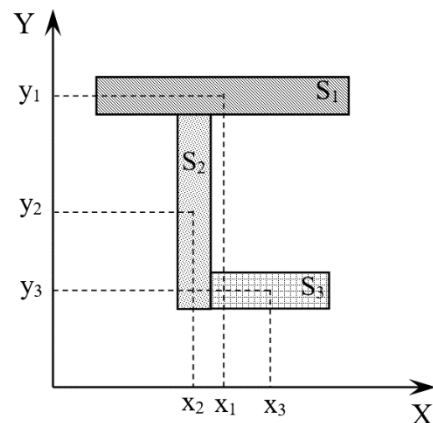


Figure II-2

II.2.2 Moments statiques :

On considère l'aire d'une section (S) dans le plan défini par le système d'axe XOY. On appelle les moments statiques de l'aire (S) par rapport aux axes OX et OY les quantités :

$$S_x = \iint y ds \quad (\text{II-6})$$

$$S_y = \iint x ds \quad (\text{II-7})$$

Remarque :

- S_x et S_y peuvent être positifs, négatifs ou nuls si le CDG passent par l'axe.
- $S_x = \iint y ds = Y_G \times S$; $S_y = \iint x ds = X_G \times S$
- Si les axes X et Y passent par le CDG du corps, $S_x = S_y = 0$, OX et OY sont alors des « axes centraux »
- Figure complexe :

$$S_x = \sum y_i s_i \quad \text{et} \quad S_y = \sum x_i s_i$$

II.2.3 Moments quadratiques (Moments d'inertie des sections) :

Les moments d'inertie d'une surface (S) quelconque par rapport à OX et OY sont les suivants :

$$I_x = \iint y^2 ds \quad (\text{II-8})$$

$$I_y = \iint x^2 ds \quad (\text{II-9})$$

- ✚ Les moments d'inertie par rapport aux axes passant par le centre de gravité de la section sont des moments centraux.
- ✚ Les moments d'inertie de la section représentent la capacité de la section à s'opposer à la déformation latérale.

II.2.4 Moments d'inertie polaire :

Le moment d'inertie représente la capacité de la section à s'opposer aux déformations angulaires sous l'effet de la torsion.

Le moment d'inertie polaire d'une surface (S) par rapport à un point donné (pôle O) l'intégrale suivant :

$$I_\rho = \iint r^2 ds = \iint (y^2 + x^2) ds = I_x + I_y \quad (\text{II-10})$$

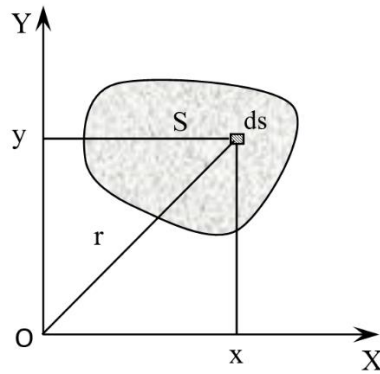


Figure II-3

II.2.5 Produit d'inertie (moment d'inertie centrifuge) :

On appelle moment produit, l'intégrale des produits des propriétés des aires élémentaires par leurs distances comptées à partir des axes de coordonnées X, Y :

$$I_{xy} = \iint xy ds \quad (\text{II-11})$$

✚ Remarque :

- Les moments d'inertie quadratiques et polaire sont toujours positifs ;
- Selon la disposition des axes, I_{XY} peut être positif, négatif ou nul ;
- En chaque point d'une aire plane, il existe deux axes orthogonaux par rapport auxquels le produit d'inertie est nul ($I_{xy} = 0$). Les deux axes ainsi définis sont appelés « axes principaux d'inertie » ;
- Les axes sont principaux quand l'un des axes au moins constitue un axe de symétrie de la section. En effet, en raison de symétrie le produit d'inertie est nul par rapport à cet axe qui est donc une direction principale, la seconde étant nécessairement orthogonale.

II.3 Formule de transformation des moments d'inertie :

Les moments d'inertie d'une section varient selon la disposition des axes par rapport auxquels ces moments sont calculés.

Deux types de transformations seront étudiés : translation et rotation d'axes. La variation des moments d'inertie par rapport à un système d'axes quelconques, est déterminée à l'aide d'une combinaison de deux transformations partant d'un système d'axe central.

II.3.1 Translation d'axes :

Les formules définies ci-dessous permettent la détermination des moments d'inertie par rapport à des axes X, Y parallèles à des axes centraux X', Y' dont les moments sont supposés connus.

On a : X' axe central ; $I_{x'}$ connu

Et on veut déterminer I_x

$$\begin{aligned} I_x &= \iint y^2 ds = \iint (y' + b)^2 ds \\ &= \iint (y'^2 + b^2 + 2y'b) ds \\ &= b^2 \iint ds + 2b \iint y' ds + \iint y'^2 ds \end{aligned}$$

Comme les moments statiques de l'air par rapport aux axes centraux sont nuls le terme

$$2b \iint y' ds = 0, \text{ donc}$$

$$I_x = I_{x'} + b^2 S \quad (\text{II-12})$$

On aurait de même :

$$I_y = I_{y'} + a^2 S \quad (\text{II-13})$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + ab S \quad (\text{II-14})$$

D'où le théorème d'Huygens :

1. Le moment d'inertie d'une surface par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie de cette surface par rapport à l'axe parallèle passant par le centre de gravité, augmenté du produit de l'aire par le carré de la distance mutuelle des deux axes.
2. Le moment d'inertie centrifuge par rapport à un système d'axes orthogonal est égal au moment d'inertie centrifuge par rapport au système d'axes centraux parallèles aux axes donnés plus le produit de l'aire de la section par les coordonnées de son centre de gravité dans le nouveau système d'axes.

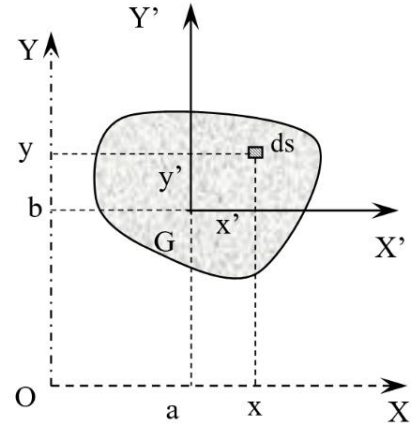


Figure II-4

II.3.2 Rotation d'axes :

Les moments et produits d'inertie sont supposés connus dans le système d'axes OXY. Les moments et produits d'inertie par rapport au système d'axes OX'Y' obtenu par une rotation α des axes initiaux sont donnés par :

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \quad (\text{II-15})$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{xy} \sin 2\alpha \quad (\text{II-16})$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \quad (\text{II-17})$$

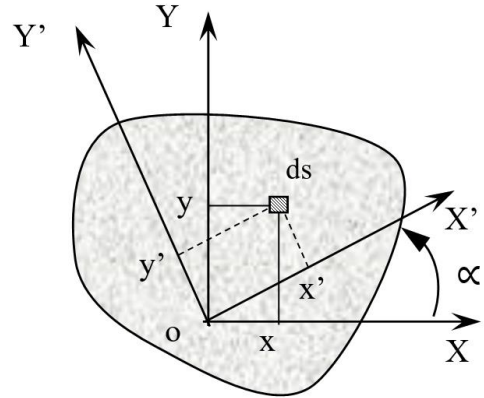


Figure II-5

II.4 Moments d'inertie principaux :

Calcul de α_0 ; angle auquel $I_{x'}$ et $I_{y'}$ sont min et max

Ils correspondent à un moment d'inertie centrifuge $I_{x'y'} = 0$.

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \quad (\text{II-18})$$

- ✚ Cette formule détermine la position des deux axes dont le moment d'inertie axial est maximal pour l'un et minimal pour l'autre.
- ✚ Ces axes sont dits « principaux » ;
- ✚ Les moments d'inertie par rapport aux axes principaux sont dits « moment d'inertie principaux » ;
- ✚ La formule des moments d'inertie principaux

$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2} \quad (\text{II-19})$$

$$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2} \quad (\text{II-20})$$

II.5 Propriétés des axes principaux d'inertie :

- ✚ Par rapport aux axes principaux ; le moment d'inertie centrifuge $I_{x'y'} = 0$
- ✚ Si une surface plane présente un axe de symétrie, cet axe est un axe principal d'inertie, le second axe principal d'inertie passe par le CDG et est perpendiculaire à l'axe de symétrie.
- ✚ Si une surface présente 2 axes de symétrie ; ceux-ci sont des axes principaux d'inertie.
- ✚ Si une surface plane présente plus de deux axes de symétrie, tous les axes passant par le centre de gravité sont des axes principaux d'inertie, et tous les moments d'inertie par rapport à ces axes sont égaux.

II.6 Présentation géométrique des moments d'inertie (Cercle de Mohr) :

II.6.1 Problème direct :

I_x, I_y, I_{xy} connus ; $I_{\max}, I_{\min}, \alpha$ inconnus.

- On choisit un système de coordonnées orthogonal $O I_{x,y}, I_{xy}$ et une échelle adéquate.
- On construit A (I_x, I_{xy}) et B ($I_y, -I_{xy}$)
- On relie AB (diamètre qui coupe l'axe $O I_{x,y}$ en C)
- Le rayon du cercle est : $AC = BC = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2}$
- On trace le cercle qui coupe les abscisses en A' et B'
- On mesure les distances OA' et OB' et on obtient I_{\min} et I_{\max} .
- On mesure l'angle $BCB' = 2\alpha_0$

II.6.2 Problème indirect :

I_x, I_y, I_{xy} inconnus ; $I_{\max}, I_{\min}, \alpha$ connus.

- On choisit un système de coordonnées $O I_{x,y}, I_{xy}$
- On porte sur l'axe des abscisses, en échelle requise, OA' et OB'
- On localise le centre du cercle C : $B'C = A'C = \frac{1}{2} (I_{\max} - I_{\min})$
- On trace le cercle de rayon A'C
- On détermine le point B d'un angle $B'CB = 2\alpha_0$ et le point A diamétralement opposé
- On obtient les valeurs de I_x, I_y, I_{xy} en projetant A et B sur les axes

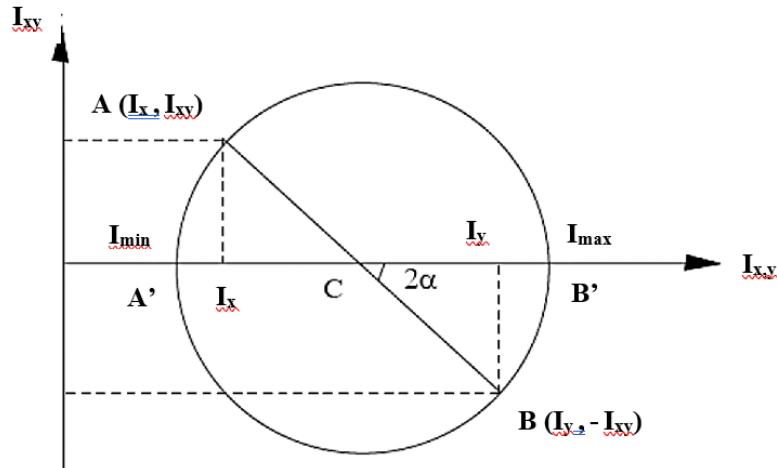
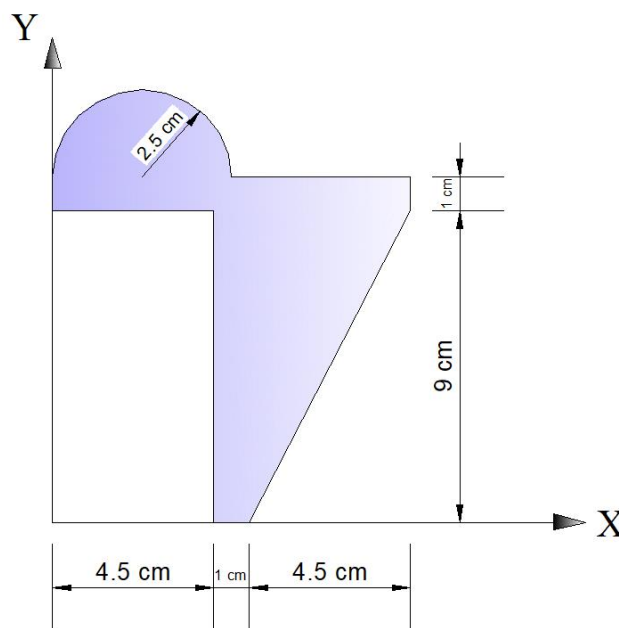


Figure II-6 : Cercle de Mohr

II.7 Exemple d'application :

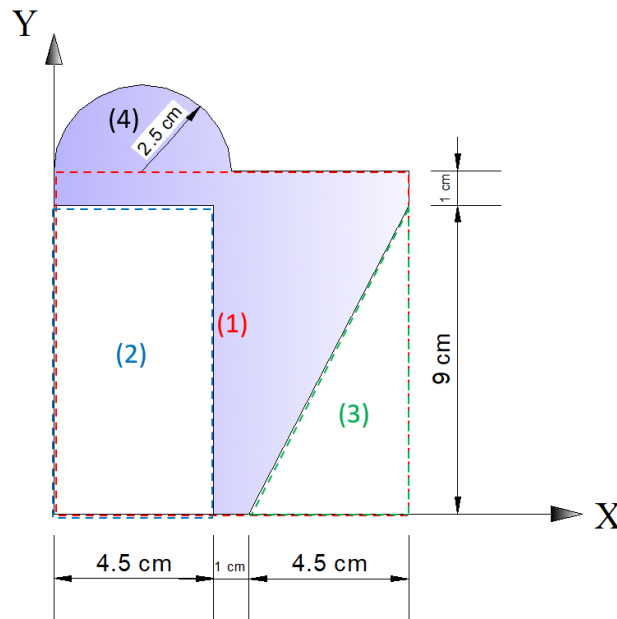
Soit la figure ci-après.



Calculer :

1. La position du centre de gravité par rapport à (X, Y).
2. Les moments d'inertie par rapport au centre de gravité.
3. Le produit d'inertie par rapport au centre de gravité.
4. L'angle de rotation des axes principaux.
5. Les moments d'inertie principaux.

Solution :



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Figures	X_i (cm)	Y_i (cm)	S (cm)	$I_{X'Y'}$ (cm ⁴)	$I_{X'}$ (cm ⁴)	$I_{Y'}$ (cm ⁴)	b_i (cm)	a_i (cm)	I_{XG_i} (cm ⁴)	I_{YG_i} (cm ⁴)	$I_{XG_i YG_i}$ (cm ⁴)
Carrée (10x10)	5	5	100	0	833.33	833.33	-2.45	-0.325	1433.58	843.9	79.62
Rectangle (4.5x9)	2.25	4.5	40.5	0	273.37	68.34	-2.95	-3.075	625.83	451.3	367.86
Triangle (4.5x9)	8.5	3	20.25	-22.78	91.125	22.78	-4.45	3.175	492.12	226.91	-308.89
Demi- cercle (R=2.5)	2.5	11.06	9.82	0	4.297	15.23	3.61	-2.825	132.27	93.6	-100.15

1. La position du centre de gravité par rapport à (X, Y).

$$X_G = \frac{\sum 1 \times 3}{\sum 3} \quad Y_G = \frac{\sum 2 \times 3}{\sum 3} \rightarrow (X_G, Y_G) = (5.325, 7.45)$$

2. Les moments d'inertie par rapport au centre de gravité.

✚ Pour calculer les moments d'inertie de chaque figure, par rapport au centre de gravité, on applique Le théorème d'Huygens :

$$I_{xG_i} = I_{x'} + b^2 S \rightarrow 9 = 5 + 7^2 \times 3$$

$$I_{yG_i} = I_{y'} + a^2 S \rightarrow 10 = 6 + 8^2 \times 3$$

$$b_i = Y_i - Y_G \rightarrow 7 = 2 - Y_G \quad \text{et} \quad a_i = X_i - X_G \rightarrow 8 = 1 - X_G$$

✚ *Les moments d'inertie globale / CDG :*

$$I_x = \sum I_{xGi} \text{ et } I_y = \sum I_{yGi} \quad \rightarrow I_x = 447.90 \text{ cm}^4 \text{ et } I_y = 259.29 \text{ cm}^4$$

3. Le produit d'inertie / CDG :

✚ *Pour calculer les produits d'inertie de chaque figure / CDG, on applique Le théorème d'Huygens :*

$$I_{xGi} = I_{x'y'} + abS \quad \rightarrow 11 = 4 + 7 \times 8 \times 3$$

✚ *Le produit d'inertie / CDG*

$$I_{xy} = \sum I_{xGi} \rightarrow I_{xy} = -79.49 \text{ cm}^4$$

4. L'angle de rotation des axes principaux.

$$\tan 2 \alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2(-79.49)}{(259.29 - 447.9)} = 0.843 \quad \rightarrow \alpha_0 = 20^\circ$$

5. Les moments d'inertie principaux.

$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2} = \frac{259.29 + 447.9}{2} + \sqrt{(94.305)^2 + (-79.49)^2}$$

$$I_{max} = 476.93 \text{ cm}^4$$

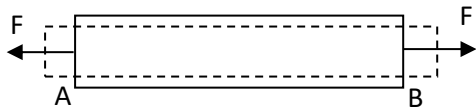
$$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2} = \frac{259.29 + 447.9}{2} - \sqrt{(94.305)^2 + (-79.49)^2}$$

$$I_{min} = 230.26 \text{ cm}^4$$

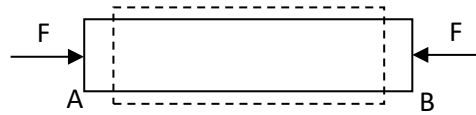
Traction et Compression

III.1 Définition :

Une poutre droite est sollicitée en traction ou en compression simple si elle est soumise à deux forces directement opposées qui tendent à l'allonger ou à rétrécir (figure III-1).



(a). Traction (allongement)



(b). Compression (rétrécissement)

Figure III-1

III.2 Effort et contrainte normale :

On considère une barre rectiligne, de section S liée à un massif fixe à son extrémité supérieure (Figure III-2). A l'autre extrémité, elle est soumise à l'action d'une force N suivant son axe.

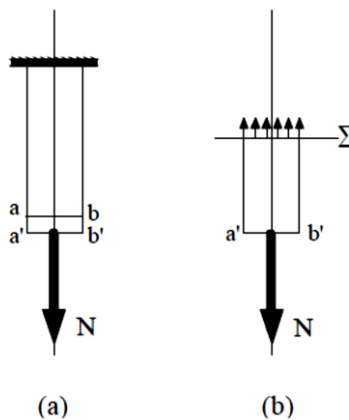


Figure III-2 : Barre encastrée sollicitée en traction.

D'après le principe de l'action et de la réaction, le massif exerce une force de réaction égale et opposée à N . La barre est alors soumise à **un effort normal**. Sa base $-ab-$ se déplace alors parallèlement à elle-même pour venir en $(a'b')$. Toutes les fibres ont subi, si l'effort est un effort de traction, le même allongement (hypothèse de Navier-Bernoulli : les sections droites restent planes et perpendiculaires à l'axe) et supportent donc la même tension.

Imaginons qu'on coupe la barre par un plan Σ perpendiculaire à l'axe de la pièce. Pour maintenir le tronçon inférieur en équilibre, il faut placer dans Σ une force intérieure égale et opposée à N .

L'hypothèse de Navier-Bernoulli permet d'écrire :

$$\sigma = \frac{N}{S} \quad (\text{III-1})$$

σ est appelé **contrainte normale**. Elle représente l'intensité de l'effort normal par unité de surface. σ se mesure en (N/m^2) ou Pascal (Pa).

III.3 Courbe contrainte - déformation :

La courbe contrainte déformation est une courbe caractérisant le matériau. Elle est obtenue empiriquement d'un essai de traction. L'essai est réalisé sur une machine de traction : on applique lentement et progressivement à une éprouvette de forme et dimensions normalisées, un effort de traction croissant dont l'intensité varie de 0 à F .

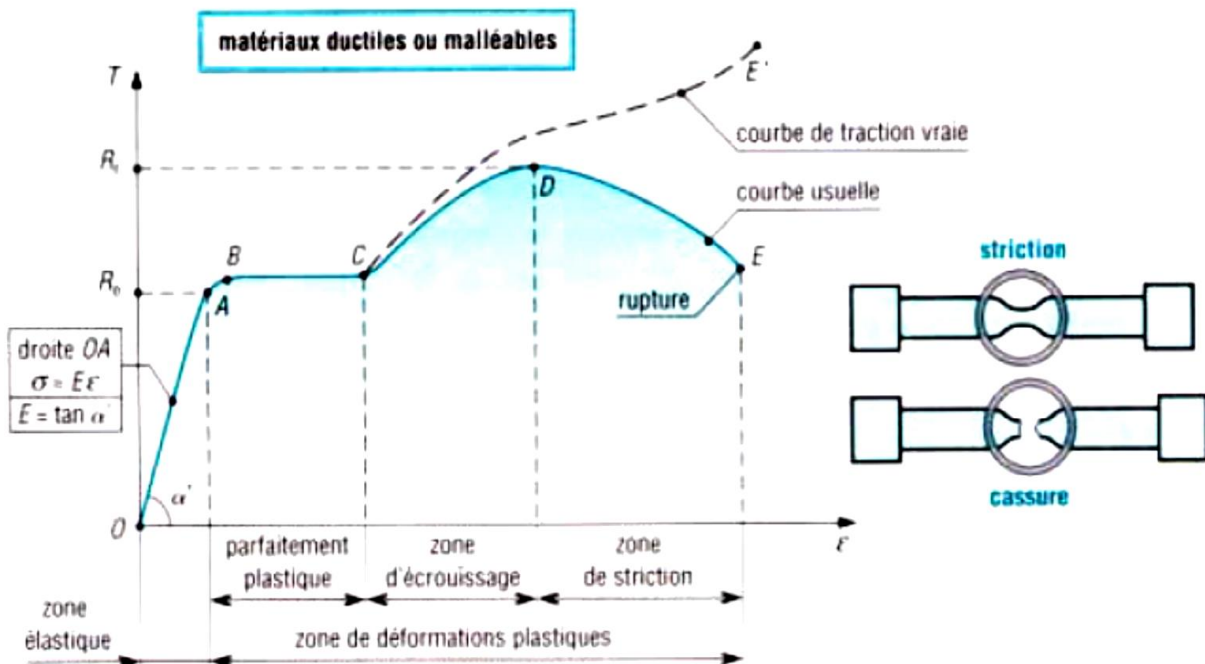


Figure III-3 : Courbe contrainte-déformation pour un essai de traction (Timoshenko, 1986).

✚ Zone élastique OA :

L'éprouvette se comporte élastiquement (comme un ressort) et revient toujours à sa longueur initiale dès que la charge est relâchée. Le point A, auquel correspond la limite élastique σ_e , marque la fin de cette zone. La proportionnalité entre la contrainte σ et la déformation ε se traduit par la **loi de Hooke** ($\sigma = E \cdot \varepsilon$).

$E = \tan \alpha'$ caractérise la pente de la droite OA et $\sigma = E \cdot \varepsilon$ son équation.

✚ Zone de déformation plastique AE :

On distingue encore trois zones BC, CD et DE. Dans la zone BC, parfaitement plastique, la contrainte reste constante et l'allongement se poursuit jusqu'en C. Entre C et D, zone d'écrouissage, le matériau subit un changement de structure qui accroît sa résistance. Le point D, auquel correspond la résistance maximale σ_m , marque la fin de cette zone. Enfin, entre D et E, l'éprouvette subit une striction amenant une diminution de la section avec étranglement. La rupture se produit au point E, auquel correspond la résistance à la rupture σ_r .

Si le matériau est fragile. Dans ce cas, la courbe se réduit presque à la zone de déformation élastique (Figure III-4).

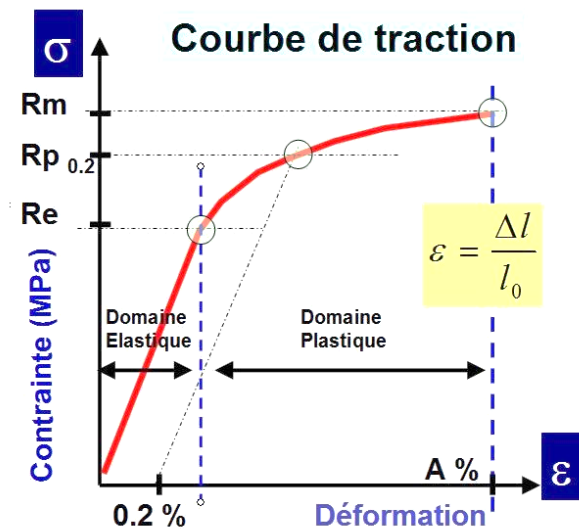


Figure III-4 : Courbe contrainte-déformation pour un essai de traction le cas d'un matériau fragile.

 **Caractéristiques fondamentales :**

Limite élastique	$\sigma_e = F_e/A_0$	σ_e : Limite élastique (Mpa) ; F_e : Charge maxi élastique (N) ; A_0 : Section initiale mm ² .
Résistance à la rupture	$\sigma_r = F_r/A_0$	σ_r : Résistance à la rupture (Mpa) ; F_r : Charge à la rupture (N) ; A : Section initiale mm ² .
Déformation	$\varepsilon = \Delta L/L_0$	$\Delta L = L - L_0$: Allongement (mm) ; L_0 : Longueur initiale (mm) ; ε : Allongement (ou déformation).

III.3.1 La loi de Hooke :

Soit une barre prismatique de longueur L soumise à un effort de traction P (Figure III-5).

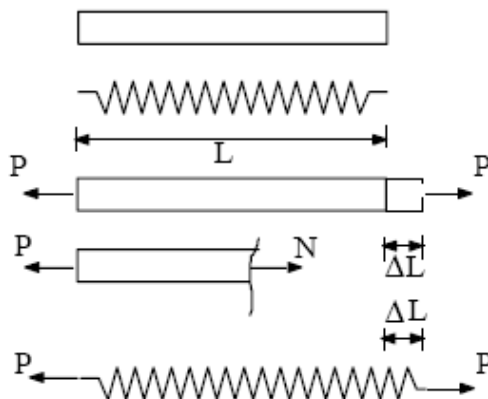


Figure III-5

La contrainte normale : $\sigma = \frac{N}{A}$

Avec

$N = P$ effort de traction ; A : aire de la section.

La déformation relative : $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$

$$\Delta L = L - L_0$$

L_0 : allongement de l'éprouvette avant déformation.

L : allongement de l'éprouvette après déformation.

Pour un grand nombre de matériaux, l'essai de traction montre qu'il existe une zone élastique pour laquelle l'effort F de traction est proportionnel à l'allongement ΔL .

Autrement dit, le rapport $F/\Delta L$ est constant (analogie avec un ressort $F = k x$).

Cette propriété est énoncée par la loi de Hooke : en déformation élastique, la contrainte normale σ est proportionnelle à l'allongement relatif ε :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (\text{III-2})$$

Module de Young :

Le coefficient E de la loi de Hooke s'appelle Module de Young ou module d'élasticité longitudinale : il caractérise la rigidité du matériau c'est-à-dire sa propriété de résister à la déformation longitudinale.

Nous avons $\sigma = E\varepsilon$ d'où

$$\frac{N}{A} = E \frac{\Delta L}{L} \rightarrow \Delta L = \frac{NL}{EA} \quad (\text{III-3})$$

La rigidité longitudinale ou l'aptitude d'un élément à se déformer longitudinalement dépend donc des caractéristiques mécaniques et géométriques de l'élément.

Pour une barre composée de plusieurs tronçons, la déformation totale est donnée par :

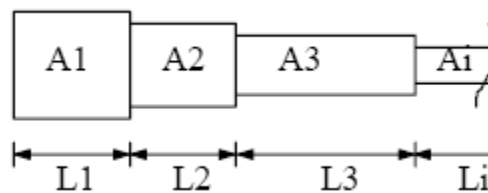


Figure III-6

$$\Delta L = \sum \frac{N_i L_i}{E_i A_i} \quad (\text{III-4})$$

Et pour le cas le plus général où l'aire de la section droite et l'effort normal N varient le long de la ligne moyenne de l'élément, l'équation (III-4) devient alors :

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N(x)}{EA(x)} dx \quad (\text{III-5})$$

Coefficient de poisson :

Le coefficient de Poisson caractérise le rapport entre la déformation transversale ε_x et la déformation longitudinale ε_l :

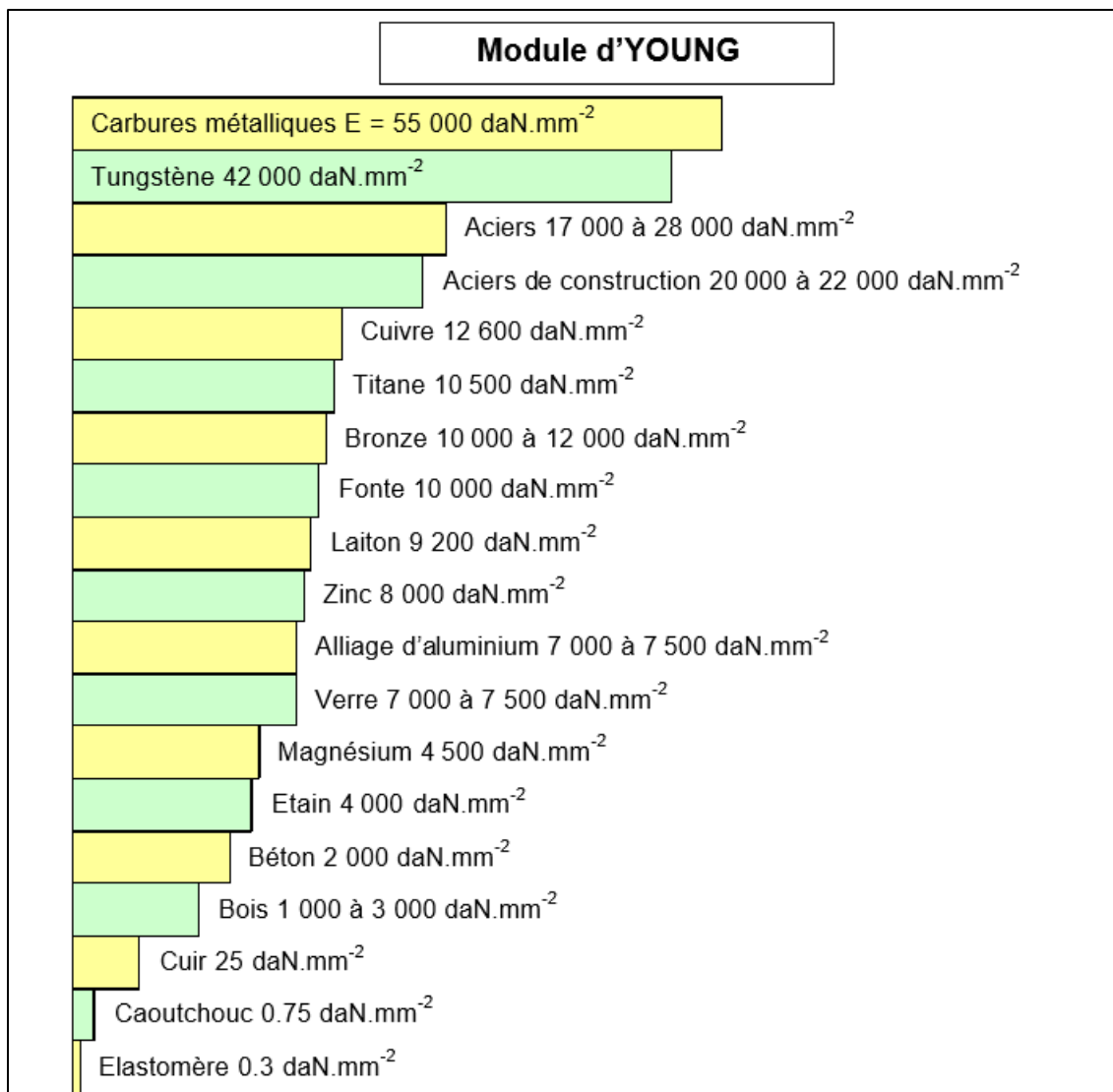
$$\varepsilon_l = \frac{\Delta L}{L_0} \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta d}{d_0} \quad \text{Alors :}$$

$$\gamma = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_l} \quad (\text{III-6})$$

Ce coefficient caractérise l'aptitude du matériau à subir des déformations transversales.

- ✓ Pour tous les matériaux : $0 \leq \gamma \leq 0.5$
- ✓ Pour la plupart d'entre eux : $0.25 \leq \gamma \leq 0.35$
- ✓ Pour l'acier : $\gamma \approx 0.3$

Exemples de valeurs de module d'Young :



III.4 Condition de résistance :

Pour des conditions de sécurité liées à l'usage de l'appareil, la contrainte σ précédemment déterminée doit rester inférieure à une contrainte limite admissible $[\sigma]$ définie à partir de la limite élastique σ_e du matériau, déterminée par l'essai de traction.

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_e}{n} \quad (\text{III-7})$$

Avec

$[\sigma]$: la contrainte admissible pour le matériau étudié ;

σ_e : la limite élastique en traction ;

n : est le coefficient de sécurité ($n > 1$).

III.5 Exemple d'application :

Calculer pour la barre ci-dessous, l'effort normal N et la contrainte σ subie par toutes les sections droites.

Calculer les déplacements verticaux de toutes les sections droites.

Tracer le diagramme de N , σ et ΔL .

Données :

$$L_1 = 2 \text{ m} ; A_1 = 1 \text{ cm}^2$$

$$L_2 = 1 \text{ m} ; A_2 = 2 \text{ cm}^2$$

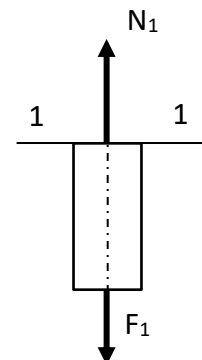
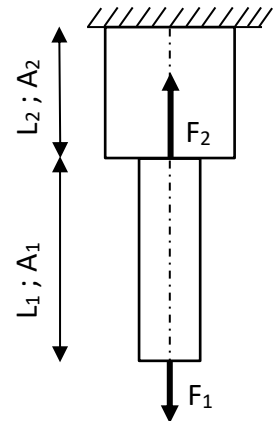
$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ Mpa}$$

Solution :

Section 1-1

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_1 = +10 \text{ kN (traction)}$$

$$\sigma_{1-1} = \frac{N_1}{S_1} = \frac{10}{1 \times 10^{-4}} = 10^5 \text{ kN/m}^2 = 10^2 \text{ MPa (traction)}$$

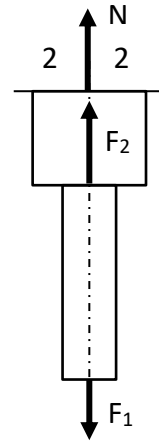


Section 2-2

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_2 = -30kN \text{ (compression)}$$

$$\sigma_{2-2} = \frac{N_2}{S_2} = \frac{-30}{2 \times 10^{-4}} = -15 \times 10^4 \text{ kN/m}^2$$

$$= -150MPa \text{ (compression)}$$



Calcul des déplacements :

Section A-A :

$$\Delta L_{A-A} = 0 \text{ (fixe)}$$

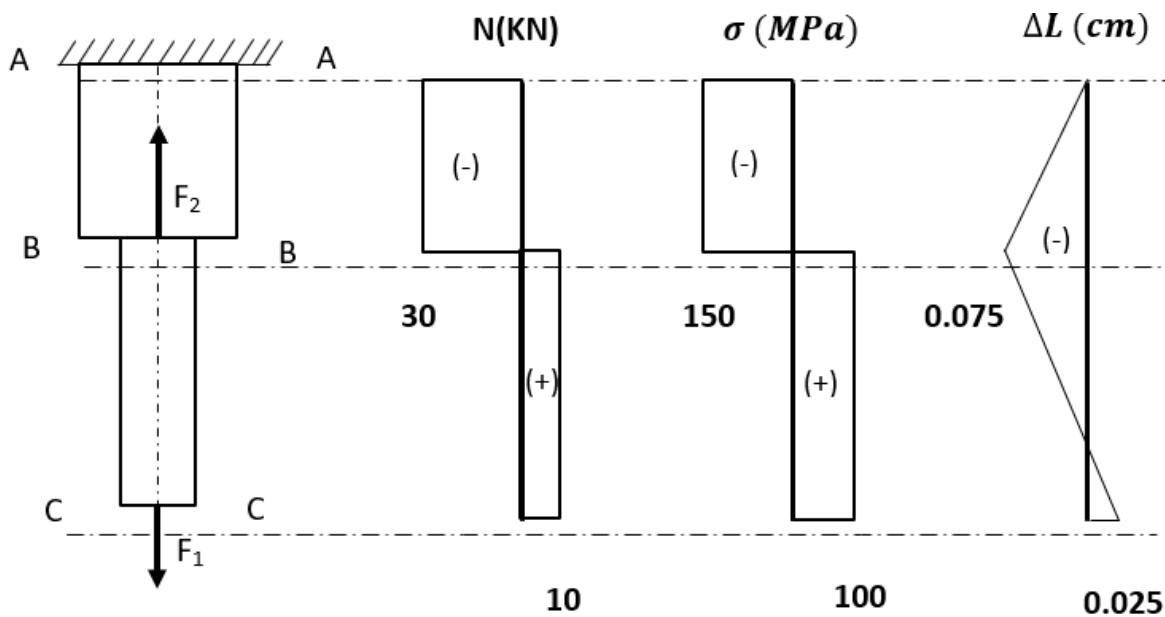
Section B-B :

$$\Delta L_{B-B} = \frac{N_2 \times L_2}{E \times S_2} = \frac{\sigma_2 \times L_2}{E} = \frac{-150 \times 1}{2 \times 10^5} = -0,00075 \text{ m} = -0,075 \text{ cm} (\uparrow)$$

Section C-C :

$$\Delta L_{C-C} = \Delta L_{B-B} + \frac{N_1 \times L_1}{E \times S_1} = \frac{\sigma_1 \times L_1}{E} = -0,00075 + \frac{100 \times 2}{2 \times 10^5} = 0,025 \text{ cm} (\downarrow)$$

Diagramme de N, σ et ΔL :



Flexion simple

IV.1 Définitions :

Une poutre est soumise à la flexion lorsque les forces qui lui sont appliquées tendent à faire varier sa courbure (Figure IV-1). La déformation résultante de ce genre de sollicitation est connue sous le nom de la *flèche*.

L'état d'une section de poutre ou de toutes les composantes des efforts internes, seule un moment fléchissant M_y ou M_z n'est pas nul, est dit état de *flexion plane pure*.

Lorsque l'effort tranchant n'est pas nul, en ce cas la sollicitation est dite *flexion simple*.

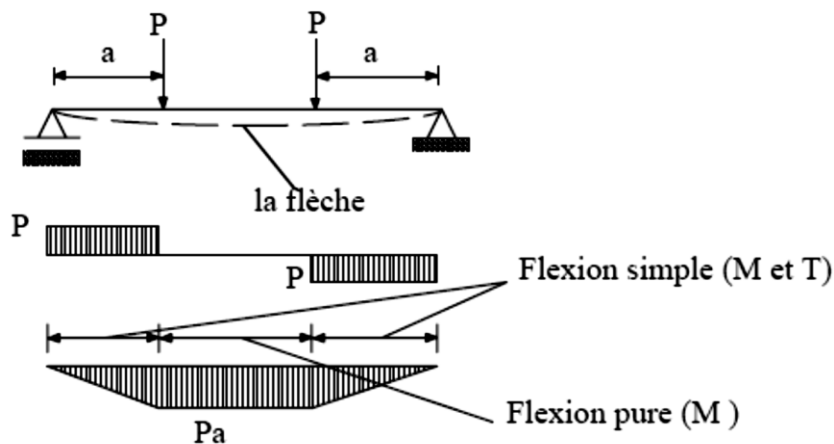


Figure IV-1

IV.1.1 Hypothèses :

- a) Les déformations sont élastiques et suffisamment petites pour ne pas modifier l'intensité des forces ni leurs distances respectives.
- b) Toute fibre contenue dans un plan de symétrie demeure dans ce plan pendant la déformation.
- c) Hypothèse de Navier-Bernoulli : les sections droites de la poutre demeurent planes et perpendiculaires à l'axe de celle-ci après déformation.

IV.2 Efforts tranchants, moments fléchissant :

Soit la poutre ci-dessous soumise à la flexion simple (Figure IV-2). Imaginons une coupure en un point C (d'abscisse x) qui divise la poutre en deux parties notées gauche et droite. Chacune

de ces deux parties est en équilibre sous l'action des efforts extérieurs qu'elle reçoit et sous l'action des effets de l'autre partie (efforts intérieurs).

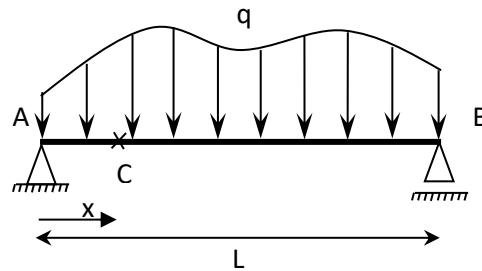


Figure IV-2

Chacune des deux parties agit sur l'autre de sorte que :

- Tous les mouvements horizontaux, verticaux et de rotation d'une partie par rapport à l'autre sont nuls.
- Chaque partie est en équilibre

Pour qu'il y ait concordance en signe entre les deux parties, on utilise la convention de signe montrée sur la figure IV-3.

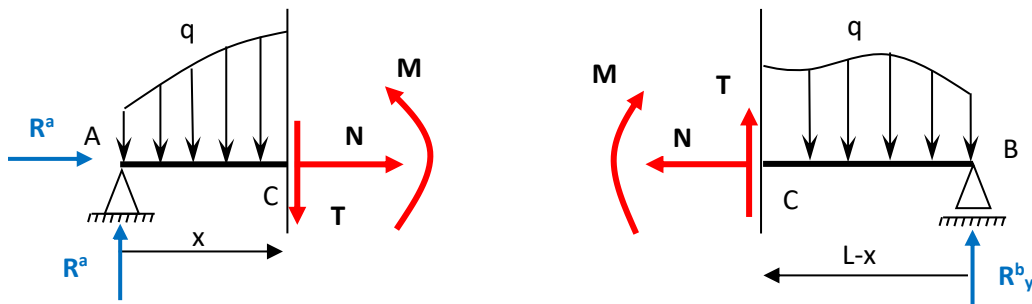


Figure IV-3

L'effort tranchant $T(x)$ dans une section d'abscisse x , séparant la poutre orientée en une partie gauche et une partie droite, est la résultante des forces extérieures s'exerçant sur la partie gauche.

Le moment fléchissant $M(x)$ dans une section d'abscisse x , séparant la poutre orientée en une partie gauche et une partie droite, est la somme des moments extérieurs (dus aux couples concentrés et aux efforts d'action et de réaction) s'exerçant sur la partie gauche.

IV.2.1 Relations différentielles entre les charges et les efforts :

Ils existent des relations différentielles entre les forces extérieures et intérieures et qui constituent la base de la méthode directe pour la détermination des efforts internes.

Pour déterminer ces relations on considère un cas de charge arbitraire d'un système de sollicitations donné dans un plan (Figure IV-4) avec :

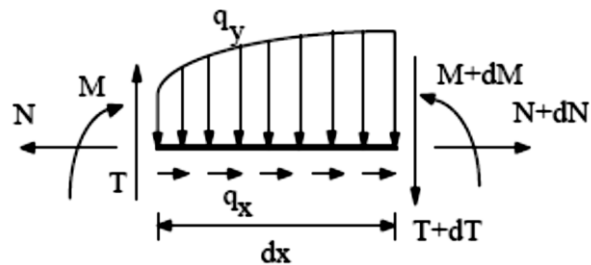


Figure IV-4

q_x : intensité de la charge extérieure selon l'axe X

q_y : intensité de la charge extérieure selon l'axe Y

La relation entre l'intensité de la charge q_x et l'effort normal est obtenue par l'équation d'équilibre d'un élément dx et peut être exprimée par :

$$N - q_x(x)dx - N - dN = 0$$

$$\Rightarrow dN/dx = - q_x(x) \quad (IV-1)$$

Entre l'intensité q_y , l'effort tranchant T et le moment fléchissant M qui agissent dans une certaine section, existent les relations différentielles suivantes :

$$T - q_y(x)dx - T - dT = 0$$

$$\Rightarrow dT/dx = - q_y(x) \quad (IV-2)$$

$$M + Tdx - q_y(x) dx^2/2 - M - dM = 0$$

En négligeant le terme quadratique en dx^2 on obtient :

$$dM/dx = T \text{ ou } d^2M/dx^2 = - q_y \quad (IV-3)$$

IV.3 Diagrammes des Efforts tranchants et des moments fléchissant :

En général, les efforts tranchants et moments agissant dans différentes sections varient le long de la poutre.

Le diagramme des efforts tranchants est la courbe représentative de la fonction $T(x)$ et le diagramme des moments fléchissant est la courbe représentative de la fonction $M(x)$, où x est l'abscisse de la poutre de l'une de ses extrémités.

Pour pouvoir tracer les diagrammes, il est indispensable de connaître toutes les forces extérieures y compris les réactions qui doivent être préalablement déterminées.

Le tracé des diagrammes des efforts tranchants et des moments peut être fait à l'aide de la méthode des sections ou la méthode directe.

IV.3.1 La méthode des sections :

La méthode des sections est basée sur le fait que si un élément est en équilibre, sous l'action des forces extérieures, alors n'importe quelle partie de cet élément sous l'action des forces qui lui sont appliquées, est équilibré par un système de forces intérieures agissant dans la section.

On considère l'élément AB plan, soumis à l'action d'un système de forces extérieures (Figure IV-5). Pour calculer les efforts et moments dans n'importe quelle section, on coupe à l'endroit voulu l'élément AB en deux parties. Les valeurs numériques des efforts N , T , et M sont égaux aux sommes algébriques des projections et des moments des forces extérieures agissant sur une des parties (gauche ou droite) de l'élément sectionné, généralement sur celle où les projections et moments se calculent plus facilement.

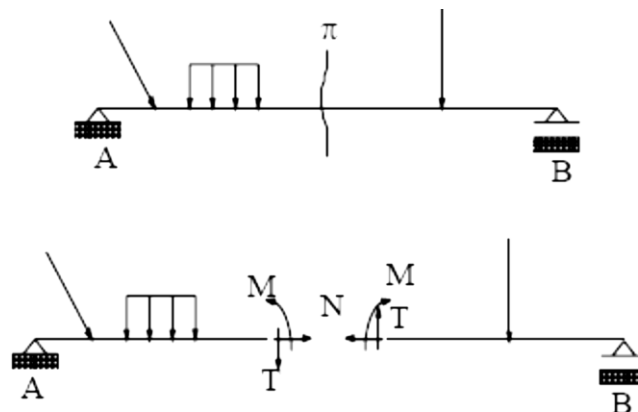


Figure IV-5

Cette méthode consiste à trouver les expressions des efforts et moment pour chaque zone en fonction de l'abscisse x de la ligne moyenne de la poutre. Ces expressions peuvent être établies par les équations d'équilibre de toutes les forces (y compris les réactions des appuis) appliquées à gauche ou à droite de la section considérée. Une fois que ces expressions sont déterminées, on peut alors tracer leurs diagrammes.

IV.3.1.1 Les zones des efforts internes :

Les variations d'un effort ou moment dans une zone (ou tronçon) d'une poutre est caractérisé par une même loi mathématique. En pratique l'extrémité d'une zone est imposée par l'extrémité de la poutre (extrémité libre appuis de rive ou intermédiaire), changement brutal de la charge, ou le changement brutal de la direction de l'axe de la poutre (Figure IV-6).

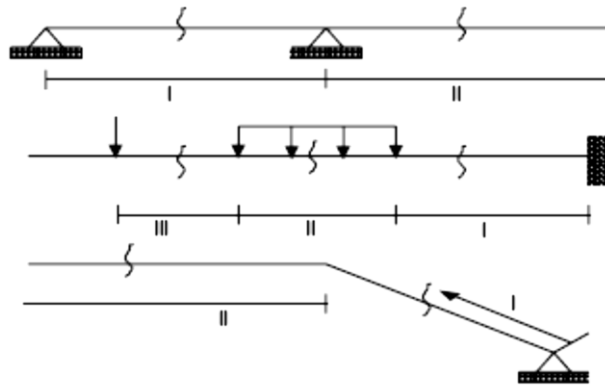
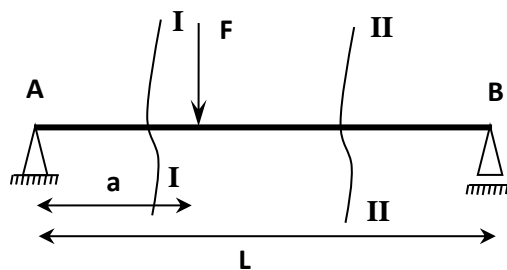


Figure IV-6

IV.3.1.2 Exemple :

Déterminer les expressions des efforts internes (N, M et T) de la poutre AB



Section I-I : $0 \leq x < a$ **Equation de la statique**

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_I(x) + R_x^a = 0$$

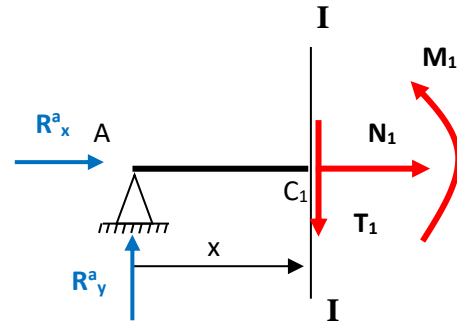
$$\rightarrow N_I(x) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_y^a - T_I(x) = 0$$

$$\rightarrow T_I(x) = R_y^a$$

$$\sum M / C_1 = 0 \rightarrow -R_{Ay} \cdot x + M_I(x) = 0$$

$$\rightarrow M_I(x) = R_y^a \cdot x$$

**Section II-II $a \leq x < L$**

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_2(x) + R_x^a = 0$$

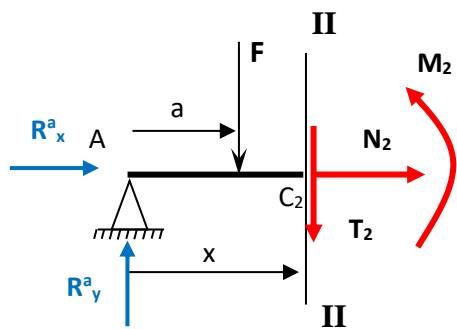
$$\rightarrow N_2(x) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_y^a - T_2(x) - F = 0$$

$$\rightarrow T_2(x) = R_y^a - F$$

$$\sum M / C_2 = 0 \rightarrow -R_{Ay} \cdot x + M_2(x) + F(x-a) = 0$$

$$\rightarrow M_2(x) = R_y^a \cdot x - F(x-a)$$

**IV.3.2 La méthode directe :**

La méthode directe est très rapide généralement utilisée dans les cas de chargements simples. Elle consiste à déterminer les valeurs numériques des efforts intérieurs aux extrémités de chaque tronçon. Ces points sont joints par des lignes ou courbes dont les caractéristiques sont déterminées sur la base des relations différentielles entre les efforts intérieurs et les forces extérieures.

a) Sur les tronçons où il n'y a pas de charge répartie, le diagramme des T est délimité par des droites parallèles à la base tandis que le diagramme des M l'est, dans le cas le plus général, par des droites obliques.

b) Sur les tronçons où la poutre supporte une charge répartie, le diagramme des T est délimité par des droites obliques tandis que celui des M l'est par des paraboles carrées. Quand on trace le diagramme des M du côté des fibres tendues, l'incurvation de la parabole est dirigée dans le sens contraire de la charge q_y .

c) Les maximums et minimums des M coïncident avec les sections où $T = 0$.

d) Dans les sections où les charges concentrées sont appliquées à la poutre, le diagramme des T est caractérisé par des passages brusques aux niveaux de ces charges, celui des M, il y aura des brisures dont la pointe sera dirigée dans le sens de la ligne d'action de la force.

e) Dans les sections où des moments concentrés sont appliqués à la poutre, le diagramme des moments sera marqué par des passages brusques d'une valeur proportionnelle à ces moments tandis que sur le diagramme des T, il n'y aura aucune modification.

IV.4 Contraintes normales en flexion simple :

Des contraintes normales se développent dans les sections transversales d'une poutre soumise à un moment fléchissant. La Figure IV-7 montre les fibres tendues et comprimées externes d'un tronçon de poutre fléchi. Dans la zone comprimée les fibres se raccourcissent tandis que dans la zone de traction elles s'allongent. Ces deux zones sont séparées par un plan neutre ayant un rayon de courbure R et dont la longueur ne varie pas lors de la flexion. L'allongement relatif d'une fibre se trouvant à une distance y de l'axe neutre peut être écrit :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{IV-4})$$

$$\varepsilon = \frac{(R+y)d\theta - dx}{dx} \quad (\text{IV-5})$$

Avec:

$$dx = R d\theta \quad (\text{IV-6})$$

$$\rightarrow \varepsilon = \frac{y}{R} \quad (\text{IV-7})$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{Loi de Hook} \quad (\text{IV-8})$$

$$\text{D'où : } \sigma = \frac{E}{R} y \quad (\text{IV-9})$$

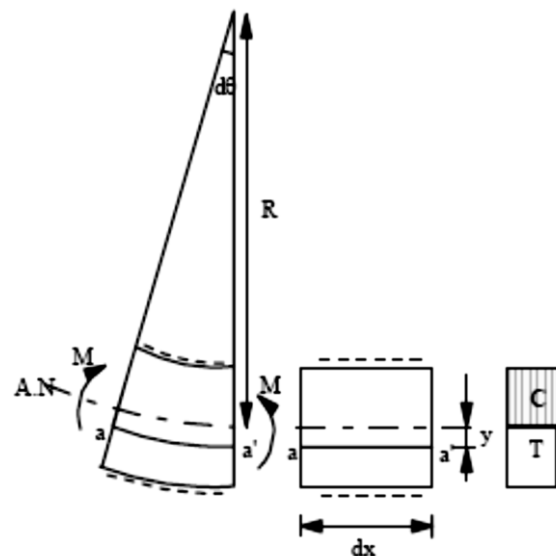


Figure IV-7

La condition d'équilibre qui lie les contraintes et les efforts internes dans la section transversale d'une poutre est :

$$M = \int \sigma y ds \quad (\text{IV-10})$$

En Introduisant la valeur de σ de l'équation (IV-9) dans l'expression (IV-10) on obtient :

$$M = \int \frac{E}{R} y^2 ds \quad (IV-11)$$

$$M = \frac{E}{R} \int y^2 ds \quad (IV-12)$$

$$M = \frac{EI_z}{R} \quad (IV-13)$$

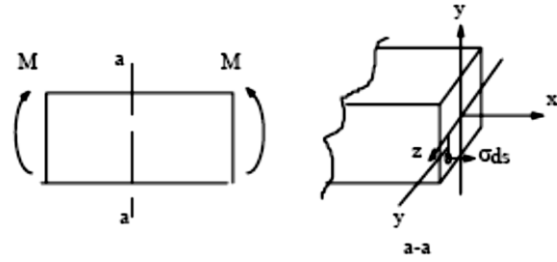


Figure IV-8

En introduisant l'équation (IV-13) dans (IV-19), la contrainte normale en tout point de la section de la poutre distante de y de l'axe x a pour valeur :

$$\sigma = \frac{My}{I_z} \quad (IV-14)$$

L'équation (IV-14) est appelée formule de Navier dont on note que :

- ✚ Les contraintes sont proportionnelles au moment fléchissant et inversement proportionnelles au moment d'inertie I.
- ✚ Les contraintes varient linéairement avec la distance y de l'axe neutre.
- ✚ La fibre la plus sollicitée (la contrainte de traction ou de compression maximale) est située au point le plus éloigné de l'axe neutre.

L'application de cette formule est générale, mais on ne considérera que les cas particuliers suivants:

IV.4.1 Cas d'une section ayant un axe de symétrie horizontal :

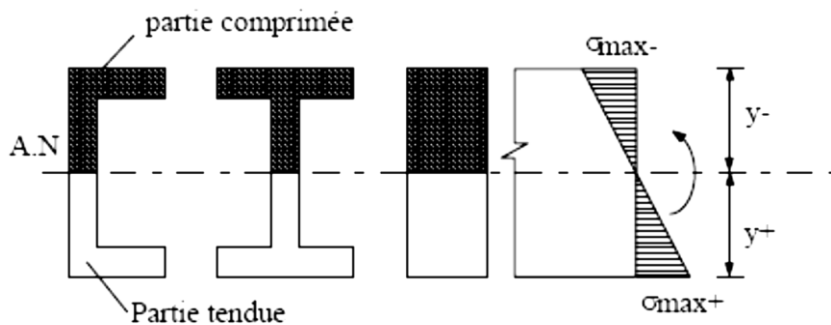


Figure IV-9

$$y_{max}^- = y_{max}^+ \quad (IV-15)$$

$$|\sigma_{max}^-| = |\sigma_{max}^+| = \sigma_{max} = \frac{My_{max}}{I_x} \quad (IV-16)$$

σ_{\max} : La contrainte normale maximale.

$W_y = \frac{I_x}{y_{\max}}$: Module résistant de la section.

IV.4.2 Cas d'une section n'ayant pas un axe de symétrie horizontal :

Dans ce cas les contraintes de traction et de compression maximales sont différentes.

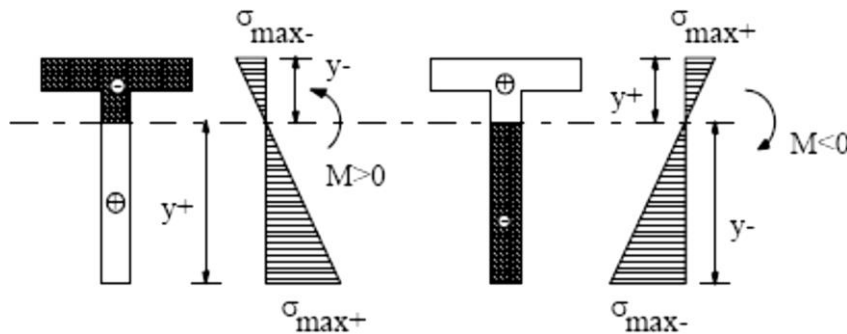


Figure IV-10

$$|\sigma_{\max}^-| = \left| \frac{My_{\max}^-}{I_x} \right| \quad (\text{IV-17})$$

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{My_{\max}^+}{I_x} \quad (\text{IV-18})$$

σ_{\max}^- : Contrainte de compression max.

σ_{\max}^+ : Contrainte de traction max.

y_{\max}^- et y_{\max}^+ : Distances des fibres comprimées et tendues les plus éloignées

IV.5 Vérification par rapport aux contraintes normales :

La vérification d'une poutre en flexion se fait à partir de la condition de résistance par rapport aux contraintes normales maximales dans la section.

a) Pour une section symétrique :

$$|\sigma_{\max}| = \left| \frac{My_{\max}}{I_z} \right| \leq \min([\sigma_-], [\sigma_+]) \quad (\text{IV-19})$$

b) Pour une section non symétrique :

$$\text{Si : } [\sigma_-] = [\sigma_+] = [\sigma] \rightarrow \max(|\sigma_{max}^-|, |\sigma_{max}^+|) \leq [\sigma] \quad (\text{IV-20})$$

$$\text{Si : } [\sigma_-] \neq [\sigma_+] \rightarrow \begin{cases} |\sigma_{max}^-| \leq [\sigma_-] \\ |\sigma_{max}^+| \leq [\sigma_+] \end{cases} \quad (\text{IV-21})$$

IV.6 Contraintes tangentielles en flexion :

Quand une poutre est soumise à l'action simultanée d'un moment fléchissant et d'un effort tranchant, en plus des contraintes normales, des contraintes tangentielles apparaissent aussi au niveau des sections droites. Aux contraintes tangentielles d'un élément unitaire figure IV-9 sont associées des contraintes tangentielles égales sur les facettes horizontales (réciprocité des contraintes tangentielles). L'existence de ces contraintes suivant les couches horizontales de la poutre peut être démontrée par superposition de deux poutres de hauteur (h) simplement appuyées aux extrémités et soumises à une force concentrée à mi-travée (figure IV-10). On constate qu'il y a un glissement des fibres inférieures ce qui signifie qu'il y a des contraintes tangentielles horizontales empêchant ce glissement dans le cas d'une poutre équivalente de hauteur 2h.

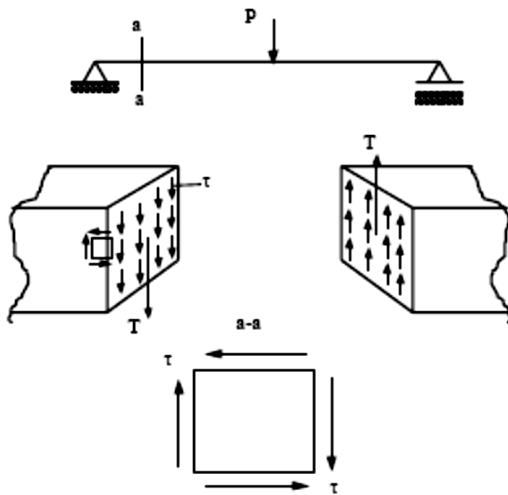


Figure IV-9

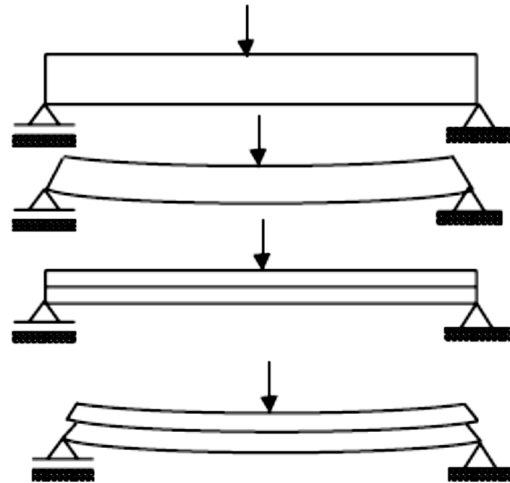


Figure IV-10

Considérons un tronçon de poutre de longueur dx soumis à un effort tranchant constant T et un moment fléchissant variant de M à M+dM. (Figure IV-11)

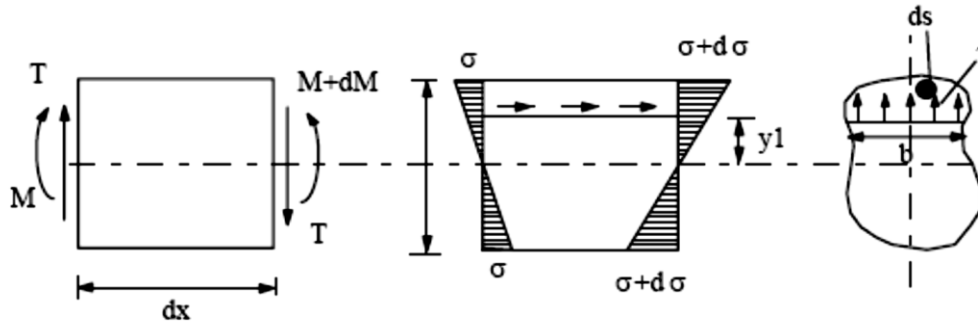


Figure IV-11

La partie supérieure de l'élément dx à une distance y_1 de l'axe neutre est en équilibre sous l'action des contraintes σ à gauche de l'élément dx , $\sigma+d\sigma$ à droite de l'élément et de la contrainte tangentielle horizontale τ .

Ecrivons l'équation d'équilibre :

$$\int \sigma ds - \int (\sigma + d\sigma) ds + \int \tau b dx = 0 \quad (\text{IV-22})$$

En supposant que les contraintes tangentielles sont constantes dans la section $b dx$:

$$\tau b dx = \int d\sigma ds = \int \frac{dM}{I} y ds \quad (\text{IV-23})$$

$$= \frac{dM}{I} \int y ds \quad (\text{IV-24})$$

$$= \frac{dM}{I} S_1^* \quad (\text{IV-25})$$

$$\rightarrow \frac{dM}{dx} \frac{S_1^*}{I b} = \frac{T S_1^*}{I b} \quad (\text{IV-26})$$

En un point arbitraire d'une section droite d'une poutre soumise à l'action simultanée d'un effort tranchant et d'un moment fléchissant, la valeur de la contrainte tangentielle est déterminée par :

$$\tau = \frac{T S_z}{I_z b} \quad (\text{IV-27})$$

Avec:

τ : Contrainte tangentielle.

b : Largeur de la section dans la couche considérée.

I_z : Moment d'inertie.

S_z : Moment statique de l'aire située soit au-dessous soit au-dessus de la couche considérée.

T : L'effort tranchant.

La contrainte tangentielle varie avec l'ordonnée y comme le rapport S^*z / b . τ est nul aux points les plus éloignés du centre de gravité et passe par un maximum pour l'ordonnée correspondant au maximum de S^*z / b .

IV.7 Calcul de résistance en flexion simple :

Dans le cas général d'une poutre en flexion simple, les valeurs maximales des contraintes normales et celle des contraintes tangentielles se trouvent en des points différents. Dans les points où σ est maximale $\tau = 0$, par contre là où τ est maximale $\sigma = 0$.

D'habitude on vérifie les contraintes normales et tangentielles séparément.

Comme le cas d'une flexion pure, la condition de résistance s'écrit :

$$|\sigma_{max}| = \frac{M_{max}y}{I} \leq [\sigma] \quad (\text{IV-28})$$

On devra aussi vérifier :

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}S^*_{max}}{bI} \leq [\tau] \quad (\text{IV-29})$$

IV.8 Exemple :

Soit la poutre représentée sur la figure IV-12 ci-après.

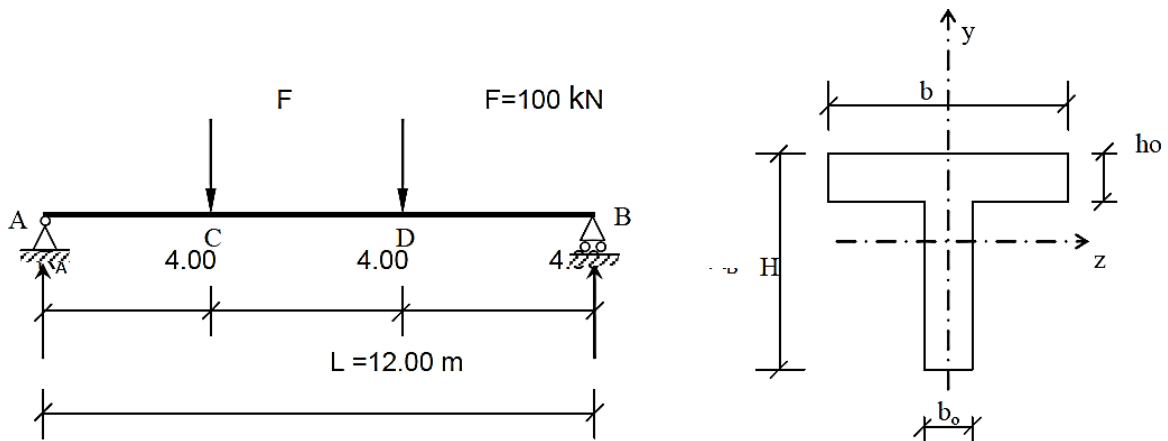


Figure IV-12

- 1) Déterminer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissant le long de la poutre ;
- 2) Tracer le diagramme de la contrainte normale σ , au niveau de la section la plus sollicitée ;
- 3) Tracer l'allure du diagramme de la contrainte tangentielle au niveau de la section C et calculer τ_{\max} .

Données : $H=80$ cm, $b=100$ cm, $h_o=20$ cm et $b_o=30$ cm

Solution :

1) Efforts internes :

On a $R_A = R_B = 100$ kN (par raison de symétrie) ;

Pour $0 \leq x \leq 4m$:

$$T_1 = - R_A = -100 \text{ kN}$$

$$M_1 = R_A \cdot x = 100 \cdot x \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} M_1 = 0 \\ M_1 = 400 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{matrix}$$

Pour $4 \leq x \leq 8m$:

$$T_2 = - R_A + F = -100 + 100 = 0$$

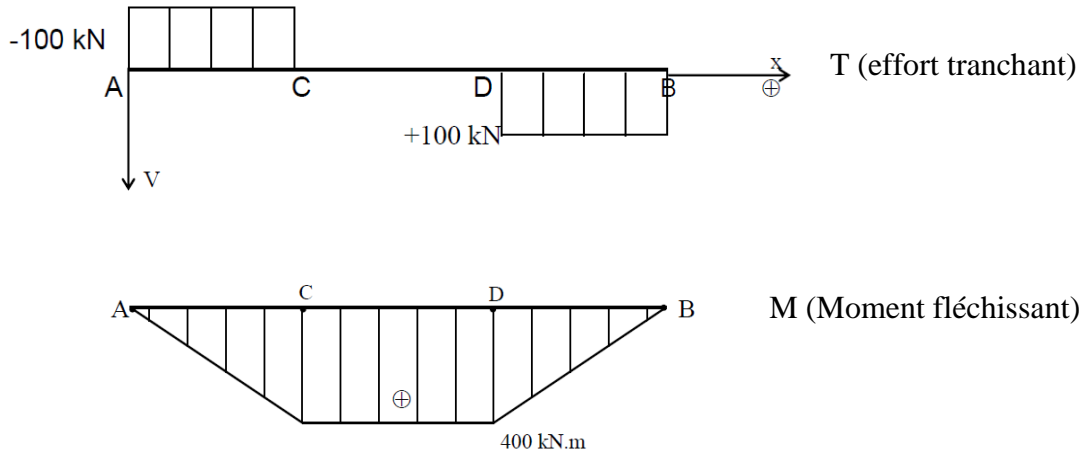
$$M_2 = R_A \cdot x - F(x-4) \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 8 \end{cases} \quad \begin{matrix} M_2 = 400 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_2 = 400 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{matrix}$$

Pour $0m \leq x \leq 4m$ (droite) :

$$T_3 = + R_B = +100 \text{ kN}$$

$$M_3 = R_B \cdot x = 100 \cdot x \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} M_3 = 0 \\ M_3 = 400 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{matrix}$$

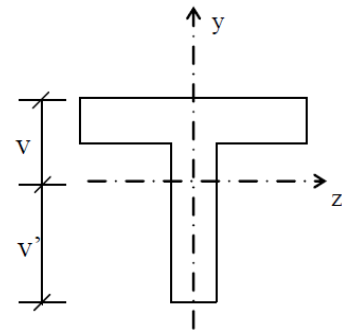
✚ Diagramme des efforts internes :



2) Diagramme de σ :

✚ Caractéristiques géométriques de la section :

- Surface : $S = 3800 \text{ cm}^2$
- Position de G : $v = 28.95 \text{ cm}$; $v' = 51.05 \text{ cm}$.
- Inertie : $I_{GZ} = 2122456.17 \text{ cm}^4$

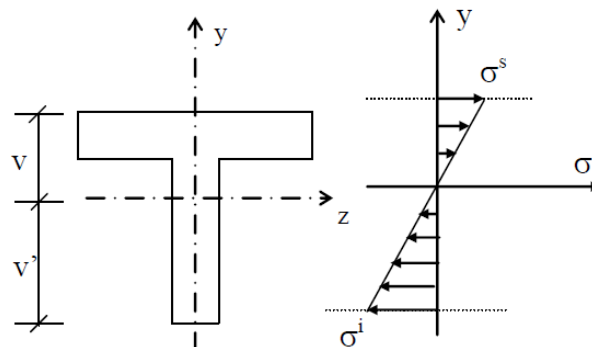


✚ Contrainte normale :

$$\sigma = \frac{M_{max} \times y}{I_z} \quad \text{Avec } M_{max} = 400 \text{ kN.m (dans la section la plus sollicitée)}$$

$$\rightarrow \sigma_s = \frac{400 \times 10^6 \times 28.95}{2122456.17} = 5.5 \text{ MPa (compression)}$$

$$\sigma_i = \frac{400 \times 10^6 \times 51.05}{2122456.17} = 9.7 \text{ MPa (traction)}$$



3) Diagramme de τ :

$\tau = \frac{TS_z}{I_z b}$ Dans la section C, l'effort tranchant $T = 100$ kN.

Section 1-1 :

$$S_{1-1} = 0 \quad (S=0) \rightarrow \tau_{1-1} = 0$$

Section 2-2 :

$$S_{2-2} = S \times y = 100 \times 20 \times 18.95 = 37900 \text{ cm}^3$$

$$\rightarrow \tau_{2-2} = \frac{100 \times 10^3 \times 37900}{2122456.17 \times 100} = 1,785 \text{ MPa}$$

Section 3-3 :

$$S_{3-3} = S_{2-2} = 37900 \text{ cm}^3$$

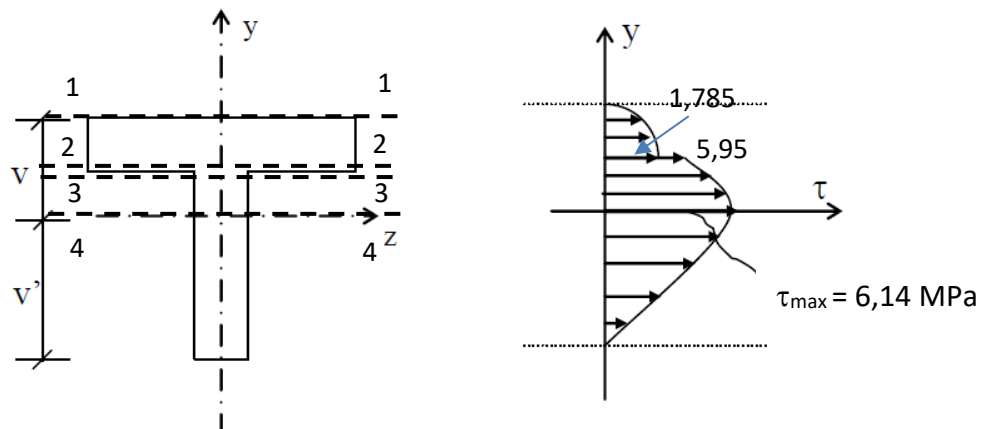
$$\rightarrow \tau_{3-3} = \frac{100 \times 10^3 \times 37900}{2122456.17 \times 30} = 5,95 \text{ MPa}$$

Section 4-4 :

$$S_{4-4} = S_{3-3} + 8,95 \times 30 \times \frac{8,95}{2} = 39101,5 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{4-4} = \frac{100 \times 10^3 \times 39101,5}{2122456.17 \times 30} = 6,14 \text{ MPa}$$

D'où l'allure suivant du diagramme de la contrainte tangentielle :



Cisaillement

V.1 Définitions :

Une pièce est sollicitée au cisaillement lorsqu'elle est soumise à deux forces opposées perpendiculairement à l'axe. Sous l'action de ces deux forces la pièce tend à se séparer en deux tronçons E1 et E2 glissant l'un par rapport à l'autre.

- Si les points d'application des forces étant légèrement décalées (d'une quantité notée d sur la figure V-a), On a du *cisaillement simple*.
- Si les deux forces ont la même droite d'action, on a du *cisaillement pur* (figure V-b).

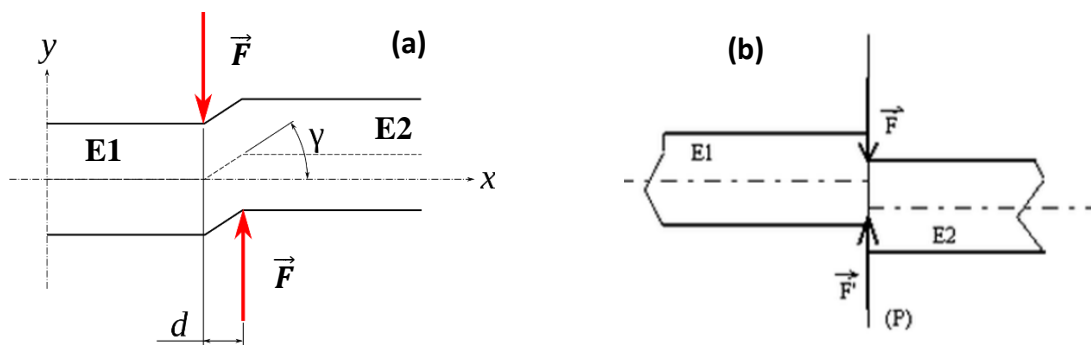


Figure V-1

V.2 Contrainte de cisaillement :

Considérons le cas d'un tronçon de poutre à deux forces comme le montre la Figure V-2. Nous avons l'effort tranchant :

$$T = F \quad (\text{V-1})$$

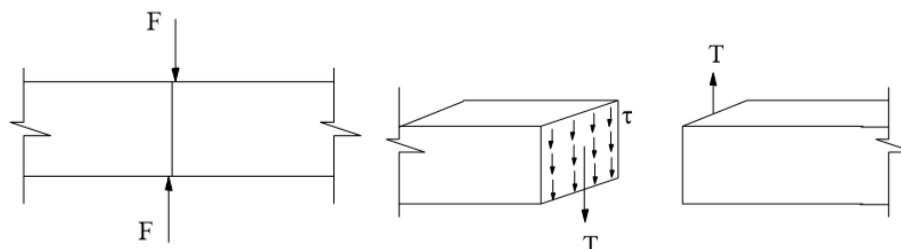


Figure V-2

Et la relation entre l'effort tranchant et la contrainte tangentielle agissant sur la face de la section s'écrit :

$$T = \iint_S \tau ds \quad (\text{V-2})$$

Pour une distribution uniforme des contraintes sur le plan de la section l'équation s'écrit donc :

$$T = \tau S \quad (\text{V-3})$$

$$\rightarrow \tau = \frac{T}{S} \quad (\text{V-4})$$

$$\rightarrow \tau = \frac{F}{A} \quad (\text{V-5})$$

τ : contrainte tangentielle en MPa ou N/mm^2

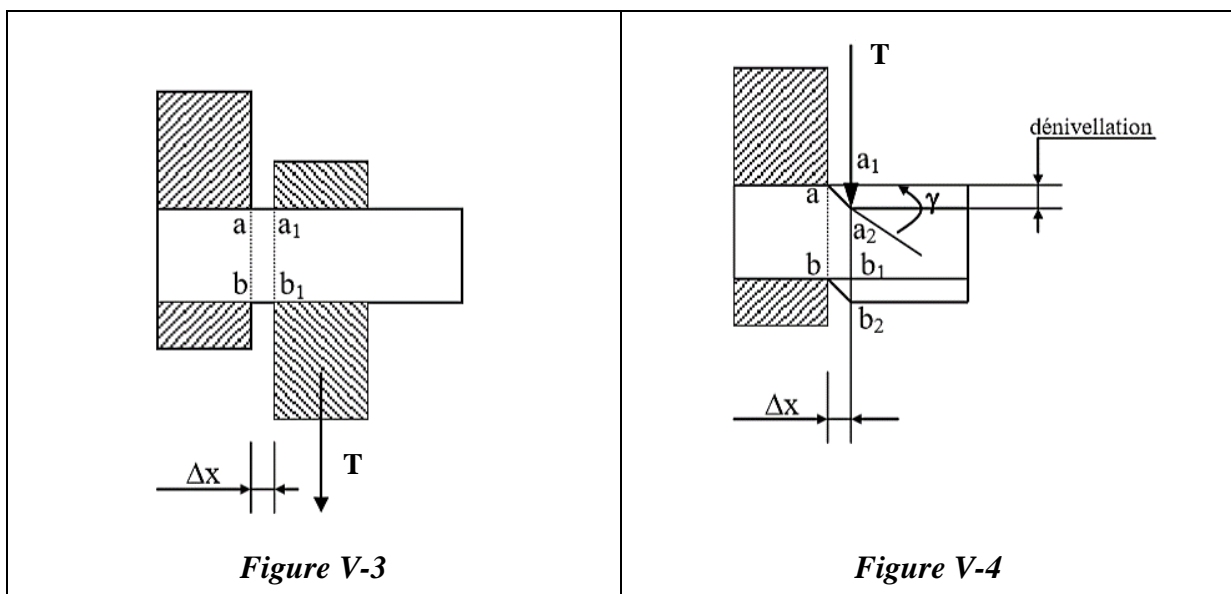
T : effort tranchant en N

A : aire de la section droite cisailée en mm^2

V.3 Déformation élastique en cisaillement :

Soit une pièce soumise à un effort de cisaillement comme l'indique le montage de la figure V-3. Les sections ab et a_1b_1 sont très voisines et distantes de Δx négligeable.

Après déformation, la section a_1b_1 vient en a_2b_2 et la dénivellation a_1a_2 mesure alors le glissement transversal (figure V-4).



Si on admet que aa_2 reste rectiligne, on définit la déformation par le rapport :

$$\tan \gamma = \frac{a_1 a_2}{\Delta x} \quad (\text{V-6})$$

Avec γ : angle de glissement [rd].

Puisque nous restons dans le domaine élastique, la contrainte de cisaillement τ varie linéairement en fonction de l'angle de glissement γ , on introduit alors le module de Coulomb \mathbf{G} telle que (par analogie avec la traction et la compression ($\sigma = E\varepsilon$)) :

$$\tau = G\gamma \quad (\text{V-7})$$

\mathbf{G} : appelé module d'élasticité transversale ou module de coulomb [N/mm^2].

Le coefficient de proportionnalité \mathbf{G} est appelé module d'élasticité transversale ou de cisaillement et est semblable au module de Young \mathbf{E} , pour la traction et la compression.

$$\mathbf{G} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{V-8})$$

ν : étant le coefficient de Poisson.

V.4 Condition de résistance au cisaillement :

Pour qu'une pièce sollicitée en cisaillement résiste en toute sécurité, il faut que la contrainte de cisaillement ne dépasse pas une valeur critique $[\tau]$ appelée contrainte admissible en cisaillement :

$$\tau \leq [\tau] \quad (\text{V-9})$$

$[\tau]$ est une caractéristique du matériau, elle ne dépend pas des dimensions de la pièce sollicitée en cisaillement. Elle représente généralement (éventuellement à un coefficient de sécurité près) la limite d'élasticité transversale de la pièce, c'est-à-dire la contrainte au-delà de laquelle la pièce ne reprend pas sa forme initiale après annulation de l'application de l'effort tranchant.

$$[\tau] = \frac{\tau_e}{n} \quad (\text{V-10})$$

Où τ_e est la limite élastique en cisaillement ; n est le coefficient de sécurité.

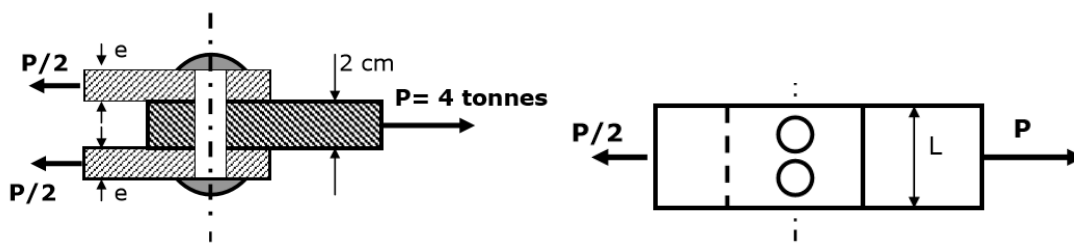
V.5 Applications :

En pratique, un bon nombre d'éléments de structure travaille principalement sous cisaillement. Le cisaillement peut être utilisé dans le dimensionnement de pièces travaillant en cisaillement. Les exemples les plus simples sont les assemblages par boulons ou par rivets, ou encore les assemblages par soudure.

V.6 Exemple :

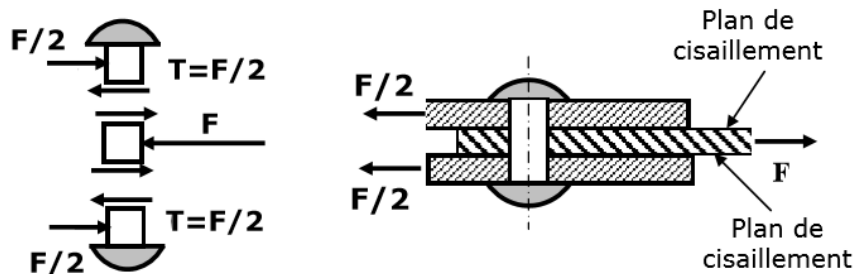
Trois tôles en acier sont assemblées entre elles par deux rivets de diamètre chacun égale à 17 mm.

1. Vérifier la résistance des rivets si la contrainte admissible de cisaillement $[\tau] = 900 \text{ kg/cm}^2$.
2. Déterminer l'épaisseur minimale de chacune de deux tôles si $[\sigma] = 1200 \text{ kg/cm}^2$.



Solution :

1. Nous avons ici deux plans de cisaillement. La force de cisaillement (effort tranchant) appliquée à la section cisailée, au niveau d'un seul plan de cisaillement est : $T_1 = \frac{F}{2}$



S'il y a n est rivets : $T_1 = \frac{F/n}{2}$

La contrainte de cisaillement sur la section cisailée (revenant à chaque rivet) est

$$\tau_1 = \frac{F/2n}{A_1}; A_1 = \frac{\pi d^2}{4}$$

Avec la condition de résistance : $\tau \leq [\tau]$

On écrit

$$\tau_1 = \frac{2F}{n\pi d^2} \leq [\tau] \quad \tau_1 = \frac{2 \times 4 \times 10^3}{2\pi(17)^2} = 440,6 \text{ kg/cm}^2$$

$\rightarrow \tau_1 = 440,6 \text{ kg/cm}^2 < [\tau] = 900 \text{ kg/cm}^2$ Condition vérifiée

2. La contrainte normale dans une des deux tôles à la section dangereuse est

$$\sigma_{1-1} = \frac{N}{A_{1-1}} = \frac{F/2}{e(5 - 2 \times 1,7)} = \frac{2 \times 10^3}{1,6 \times e} \leq 1200$$

$\rightarrow e \geq 1,04 \text{ cm}$

Donc l'épaisseur minimale que devrait avoir chacune de deux tôles est au moins égale à 10,4 mm.

Torsion

VI.1 Définitions :

Une poutre est sollicitée à la torsion simple si elle est soumise à deux couples de moments opposés portés par la ligne moyenne (figure VI-1).

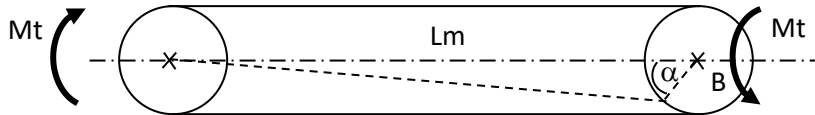


Figure VI-1

VI.2 Déformation :

Soit une poutre circulaire à section constante soumise à deux couples \mathbf{Mt} et $-\mathbf{Mt}$ égaux et opposés d'axe la ligne moyenne de la poutre (figure VI-2).

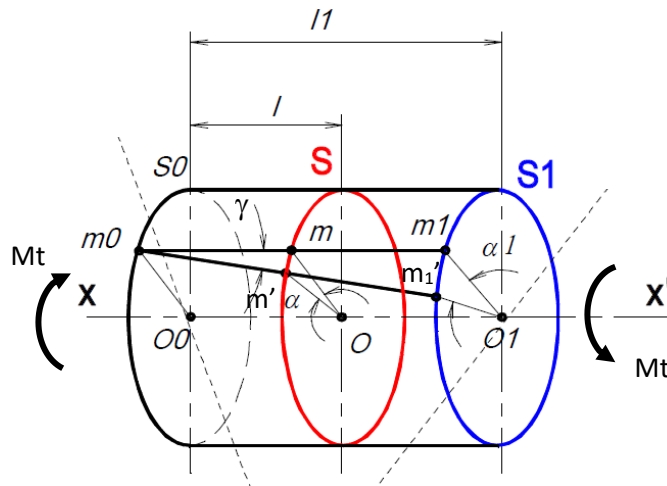


Figure VI-2

Constatations expérimentales :

- Toute section plane et normale à l'axe du cylindre reste plane et normale à l'axe.
- La distance relative entre deux sections reste sensiblement constante.
- La section (S) subit uniquement une rotation d'angle α proportionnel à sa distance l par rapport à la surface (S_0).
- Avant déformation, les points m_0 , m et m_1 sont situés sur la même génératrice rectiligne.

- Après déformation, le point m vient en m' et le point m_1 vient en m_1' et les points m_0 , m' et m_1' forment une hélice.
- Les sections droites tournent ou glissent en bloc les unes par rapport aux autres (rotation d'axe la ligne moyenne).

Soient : α : angle de torsion entre les sections droites (S_0) et (S).

α_1 : angle de torsion de la poutre.

Si on suppose que les sections droites tournent toutes entre elles de la même façon, alors l'angle de torsion entre deux sections droites quelconque est proportionnel à la distance entre celles-ci:

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\alpha_1}{l_1} = \theta \quad (\text{VI-1})$$

Avec : θ : angle unitaire de torsion en [rd/mm].

D'autre part l'angle : $m_1 m_0 m_1' = \gamma$

Dans la zone des déformations élastiques, l'angle γ est petit, donc, l'arc $mm' = \alpha \rho = \gamma l$.

La fibre $m_0 m$ a subi une distorsion ou glissement γ tel que :

$$\gamma = \frac{\alpha \times \rho}{l} = \theta \rho \quad (\text{VI-2})$$

Avec : γ : angle de glissement en [rd].

ρ : Distance du point m à la ligne neutre ou axe de la pièce qui ne subit aucun effort [mm].

VI.3 Contrainte :

Si on admet l'hypothèse que la distance relative entre deux sections reste constante au cours de la déformation, donc l'allongement $\Delta x = 0$, alors on peut écrire que la déformation longitudinale $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x} = 0$ en tout point de la section (S). On admet donc que la composante normale du vecteur contrainte est nulle : $\sigma = 0$.

La loi de Hooke pour les contraintes tangentielles s'exprime donc par :

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (\text{VI-3})$$

Sachant que $\gamma = \theta\rho$, donc :

$$\tau = G \cdot \theta \cdot \rho \quad (\text{VI-4})$$

Où :

τ : Contrainte tangentielle de torsion [MPa].

G : est le module d'élasticité transversale ou module de Coulomb [MPa].

La figure VI-3 montre la répartition des contraintes au niveau de la section (S).

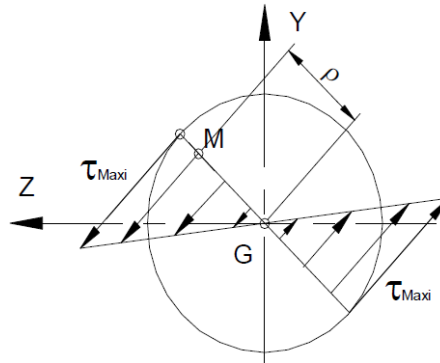


Figure VI-3 : Diagramme de répartition des contraintes dans une section droite.

Remarque : la contrainte maximale τ_{max} est atteinte pour les points M périphériques de la surface du solide tels que $\rho = R$ (Rayon).

Relation entre la contrainte et le moment de torsion :

Nous avons :

$$M_t = \int_S \rho \cdot \tau \cdot ds = \int_S \rho^2 \cdot G \cdot \theta \cdot ds = G \cdot \theta \int_S \rho^2 ds$$

Or $\int_S \rho^2 ds$ représente le moment quadratique polaire I_0 de la section (S) [mm⁴].

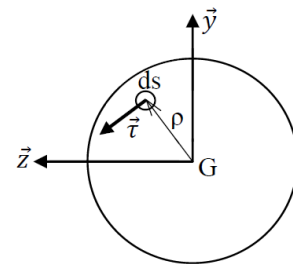


Figure VI-4

$$\rightarrow M_t = G \cdot \theta \cdot I_0 \quad (\text{VI-5})$$

M_t : moment de torsion en [N.mm].

D'après l'équation (IV-5), on trouve :

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_0} \quad (\text{VI-6})$$

Remplaçant (IV-6) dans (IV-4), on trouve :

$$\tau = \frac{M_t}{I_0} \cdot \rho \quad (\text{VI-7})$$

Remarque :

Si la section (S) est une section cylindrique de diamètre D, alors :

$$I_0 = \frac{\pi D^4}{32} \text{ et } 0 \leq \rho \leq \frac{D}{2}$$

La contrainte maximale est sur la périphérie : $\rho_{max} = \frac{D}{2}$ donc : $\tau_{max} = \frac{M_t}{I_0} \times \frac{D}{2}$

$$\rightarrow \tau_{max} = \frac{32M_t}{\pi D^4} \times \frac{D}{2} \rightarrow \tau_{max} = \frac{16M_t}{\pi D^3}$$

VI.4 Condition de résistance :

Lorsque le moment de torsion est variable le long de l'arbre, on prend sa valeur maximale soit $M_{t \max}$.

Soit ρ_{max} la valeur maximale de ρ ; Dans la plupart des cas ρ_{max} est égal au rayon maximum de l'arbre.

La contrainte maximale de torsion s'exprime par :

$$|\tau|_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{\left(\frac{I_0}{\rho_{max}}\right)} \quad (\text{VI-8})$$

Le rapport $\frac{I_0}{\rho_{max}}$ s'appelle le « **module de torsion** » si la section (S) est une section cylindrique

$$\frac{I_0}{\rho_{max}} = \frac{\pi D^3}{16}$$

La condition de résistance est :

$$|\tau|_{max} \leq \tau_{adm} \quad (\text{VI-9})$$

En torsion la contrainte admissible $\tau_{adm} = \frac{\tau_e}{S} = \frac{(R_{eg})}{S} = \tau_P = (R_P)$

τ_P ou (R_P) : contrainte pratique de cisaillement

S : coefficient de sécurité

VI.5 Condition de rigidité :

Le calcul des dimensions des arbres de transmission ou barres de torsion se fait plus par une condition de déformation qu'une condition de résistance. En effet pour assurer une transmission rigide et éviter les vibrations, l'angle de torsion unitaire θ ne doit pas dépasser pendant le service, une valeur limite θ_{lim} . D'où la condition de rigidité d'une pièce en torsion :

$$\theta = \frac{M_t}{G.I_0} \leq \theta_{lim} \quad (\text{VI-10})$$

VI.6 Exemples d'application :

Soit deux arbres de transmission construit à partir d'un même acier ($G = 8.10^4$ MPa), le premier est plein de diamètre D_1 , et le seconde est creux (D : diamètre extérieur, d : diamètre intérieur, sachant que $d=0.8D$).

Le couple à transmettre est de 200 N.m et $\tau_P = 100$ MPa

Questions :

- 1/ Calculer D_1 .
- 2/ Calculer D et d .
- 3/ Déterminer le rapport de poids entre ces deux arbres.

Solution :

- 1/ Calculons D_1 .

$$|\tau|_{max} \leq \tau_{adm} = \tau_P$$

Section cylindrique, donc :

$$\tau_{max} = \frac{16M_t}{\pi D^3} \leq \tau_P \rightarrow D_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{t_{max}}}{\pi \tau_P}} \rightarrow D_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \times 200}{\pi \times 100}} \rightarrow D_1 \approx 21.67 \text{ mm}$$

2/ Calculons D et d.

$$|\tau|_{max} \leq \tau_{adm} = \tau_P$$

$$\text{Section cylindrique} \rightarrow I_o = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} \rightarrow I_o = \frac{\pi D^4(1 - 0.8^4)}{32} \text{ et } \rho_{max} = \frac{D}{2}$$

$$\rightarrow \tau_{max} = \frac{16M_t}{\pi D^3(1 - 0.8^4)} \leq \tau_P \rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi \tau_P(1 - 0.8^4)}} \rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \times 200}{\pi \times 100 \times 0,59}}$$

$$\rightarrow D \approx 25.8mm$$

$$\text{Nous avons : } d = 0.8D \rightarrow d = 0.8 \times 25.8 \approx 20.64mm$$

Références Bibliographique

1. Jean-Claude Doubrère, résistance des matériaux, 11^{ème} édition.
2. Jean-Claude Doubrère, résistance des matériaux, 12^{ème} édition.
3. L. Aleinik & J. Durler, "Résistance des matériaux", Ed. Spes, Dunod.
4. Nouredine BOURAHLA, Résistance des matériaux de base
5. S. Timoshenko, Résistance des matériaux, Dunod, 1986.
6. Zamila HARICHANE, Polycopié de Résistance des Matériaux.
7. William et Nash, Résistance des matériaux, cours et problème, série Schaum, 1983.