

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique  
Université de Ghardaia



Faculté des Science et de Technologie  
Département de Mathématique et d'informatique



Projet de fin d'étude présenter en vue de l'obtention de diplôme de  
**MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatiques  
Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Applications

**THÈME**

---

**Le nombre maximum de cycles  
limites d'une famille des systèmes  
différentiels**

---

Présenté par :

GUERBOUY Habiba

Soutenu publiquement le :22/09/ 2020

Devant le jury :

Latrach Ismail :	MAA , Univ. Ghardaia	Président
Kina Abdelkrim :	MAA, Univ. Ghardaia	Encadreur
Elhaj Moussa Yacine :	MAA, Univ. Ghardaia	Examinateur

Année universitaire 2019/2020

## Dedicace

Avant tous propos, je tiens à rendre grâce à "Allah" qui ma guidé sur la bonne voie :

Je dédie ce modeste travail :

À mes très chers parents ma mère et mon père  
qui m'ont bien élevés, aidés soutenus et encouragés durant toutes ces années  
d'étude, qu'Allah les protège

Mes frères et ma soeurs : Billa ,Kouider Karim ,Aicha

Toute la famille Guerbouy

Toute mes amies :

A tous les enseignants du département de Mathématiques

Tous mes collègues de ma promotion de Master 2 Mathématiques 2019

Habiba Guerbouy  
Ghardaia 2020

## Remerciement

Au terme de la rédaction de ce mémoire, je remercie **ALLAH** qui m'a toujours donné la patience et le courage durant ces longues années d'étude, et la force d'accomplir ce Modeste travail

Je remercie mon encadreur Monsieur **Kina Abdelkrim** pour le sujet qu'il m'a proposé et pour l'attention et la disponibilité dont il a su faire preuve au long de la préparation de ce mémoire et pendant mon parcours de master.

Je voudrais également remercier Monsieur **Latrach Ismail** et Monsieur **Elhaj Moussa Yacine** pour l'honneur qu'ils m'ont fait en portant leurs attention sur ce travail.

Merci à tous ceux qui m'ont enseigné en primaire, collège, lycée, université et ailleurs, et tous les personnels de ces établissements, sans eux je suis rien. Merci à tous les mathématiciens...

Merci mes amis, merci à tout ceux qui ont contribué de près ou de loin dans ce travail.

Et enfin dois-je dire à quel point mes parents sont aujourd'hui dans mes pensées ! mes parents qui m'ont toujours soutenu dans mes épreuves aussi bien au niveau moral, que matériel. Je leur adresse aujourd'hui un témoignage d'amour filial, et de reconnaissance.

Habiba Guerbouy  
Ghardaia 2020

## Résumé

Dans ce mémoire on présente quelque notion fondamentale sur la théorie qualitative des équations différentielles plus les systèmes différentiels non linéaire planaires.

On présent une résultat sur le nombre maximum des cycles limites obtenue par N.Mellahi ,A. Boulfoul and A.Makhlouf ,et publié dans le journal "Applied Analysis and Computation".intitule( On The Limit Cycles For A Class Of Generalized Kukles Differential Systems ).864-883 .2019 [5] ce article il étudier le nombre maximal des cycle limites des systèmes différentiels ordinaires dépendant d'un petit paramètre. Plus particulièrement,on étudie des systèmes différentiels de Kukles généralisés de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - l(x)y^3, \end{cases}$$

où  $f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x)$ ,  $g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x)$ ,  $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$  et  $l(x) = \varepsilon l_1(x) + \varepsilon^2 l_2(x)$  Pour chaque  $k = 1, 2$   $f_k, g_k, h_k$  et  $l_k$  sont de degrés  $n_1, n_2, n_3$  et  $n_4$  respectivement et  $\varepsilon$  est un petit paramètre est utilisant la théorie de moyennisation d'ordre un et deux

## Abstract

In this dissertation , we present some fundamental notion on the qualitative theroe of differential equation plus the planar nolinear equation differential systems .

We present a result on the maximum number of limit cycles obtained by Mellahi N, Boulfoul A and Makhlouf A .and published in the journal "Applied Analysis and Computation".entitled ( On The Limit Cycles For A Class Of Generalized Kukles Differential Systems ).864-883 .2019 [5] .

This article[5] he study the maximum number of limit cycles of ordinary differential systems depending on a small parameter. More particularly, we study generalized Kukles differential systems of the form :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - l(x)y^3, \end{cases}$$

where  $f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x)$ ,  $g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x)$ ,  $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$  and  $l(x) = \varepsilon l_1(x) + \varepsilon^2 l_2(x)$  where  $f_k, g_k, h_k$  and  $l_k$  have degree  $n_1, n_2, n_3$  and  $n_4$  respectively for each  $k = 1, 2$  and  $\varepsilon$  is a small parameter.

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>v</b>
<b>1 Notions générales sur les systèmes différentiels polynomiaux</b>	<b>1</b>
1.1 Systèmes différentiels polynomiaux . . . . .	1
1.2 Champ de vecteurs . . . . .	1
1.2.1 Portrait de phases . . . . .	3
1.2.2 Flot . . . . .	3
1.2.3 Existence et unicité des solutions . . . . .	4
1.3 Points singuliers . . . . .	4
1.3.1 Linéarisation et matrice jacobienne . . . . .	5
1.3.2 Nature des points singulier . . . . .	6
1.3.3 Équivalence topologique . . . . .	12
1.3.4 Le théorème de Hartman-Grobman . . . . .	12
1.3.5 Stabilité de l'équilibre . . . . .	13
1.4 Courbes invariantes . . . . .	13
1.5 Orbite périodique . . . . .	14
1.6 Cycle limite . . . . .	14
1.6.1 Existence et non-existence de cycle limite . . . . .	15
1.6.2 Stabilité des cycles limites . . . . .	15
1.6.3 Théorie de bifurcation . . . . .	18
<b>2 Théorie de la moyennisation</b>	<b>22</b>
2.1 Théorème de moyennisation du premier ordre . . . . .	23
Applications . . . . .	24
2.2 théorème de moyennisation du deuxième ordre . . . . .	25
Applications . . . . .	25

<b>3</b>	<b>Sur les cycles limites pour une classe de Systèmes différentiels de Kukles généralisés</b>	<b>29</b>
3.0.1	Preuve du théorème 3.0.1 . . . . .	32
3.0.2	preuve théorème 3.0.2 . . . . .	35
3.1	Applications . . . . .	55
3.2	Application . . . . .	56
	<b>Bibliographie</b>	<b>56</b>

## Introduction générale

Les équations différentielles sont apparues la première fois à la fin du 17<sup>ème</sup> siècle dans les travaux de Isaac Newton, Leibniz et Bernoulli. Elles se sont produites comme conséquence normale des efforts de ces grands savants d'appliquer les nouvelles idées du calcul à certains problèmes en mécanique. Plus tard la théorie d'intégration des équations différentielles a été développée par des mathématiciens et des mécaniciens comme Lagrange, Poisson, Hamilton et Liouville aux 18<sup>ème</sup> siècle et 19<sup>ème</sup> siècles. Pendant plus de 300 ans, les équations différentielles ont servi l'outil essentiel pour d'écrire et analyser des problèmes dans beaucoup de disciplines scientifiques (Mécanique, Géométrie, Physique,...).

Un des problèmes principaux dans la théorie qualitative des équations différentielles est l'étude de l'intégrabilité et les cycles limites des systèmes différentiels planaires polynomiaux.

Les cycles limites ont été introduits pour la première fois par H. Poincaré en 1881 dans son "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle" [36]. Un cycle limite est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques d'une équation différentielle. Rigoureusement, le modèle de Volterra n'admet un cycle limite que dans une version modifiée par l'écologiste canadien Holling, mais nous n'entrerons pas dans les détails. D'autres systèmes, plus complexes, peuvent avoir plusieurs cycles limites. Le comportement asymptotique sera encore périodique, mais la convergence aura lieu vers tel ou tel cycle limite selon la position initiale.

L'importance de pouvoir déterminer le nombre des cycles limites fait la seconde partie du 16<sup>ème</sup> problème de Hilbert[21] qui peut être formulée de la façon suivante : Quel est le nombre maximum des cycles limites noté  $H(n)$  que peut avoir le système polynomial planaire de degré  $n$

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases}$$

où  $F(x, y)$  et  $G(x, y)$  sont des polynôme.

Ce problème n'est toujours pas résolu 112 ans après son énoncé ! En 1923, Dulac [13] proposa une démonstration assurant que ce nombre est fini pour tout  $n$  ; mais cette démonstration comportait une erreur. La résolution de Dulac a été faite d'une façon indépendante par Ecalle, Martinet et Moussu en 1987, Ilyashenko en 1991 et par Ecalle en 1992. Cette résolution permet de prouver que le champ de vecteurs polynomial possède un nombre fini de cycles limites. Mais ils n'ont pas pu trouver une estimation uniforme de ce nombre.

Dans ce mémoire , on étudie les cycles limites des systèmes différentiels non autonomes en utilisant la méthode de moyennisation d'ordre un et deux. On s'intéresse à la recherche du nombre maximum de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire  $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$  , perturbé par une classe d'équations différentielles de Kukles généralisée de la forme.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - l(x)y^3, \end{cases}$$

où  $f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x)$ ,  $g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x)$ ,  $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$  et  $l(x) = \varepsilon l_1(x) + \varepsilon^2 l_2(x)$  Pour  $k = 1, 2$   $f_k, g_k, h_k$  et  $l_k$  sont de degrés  $n_1, n_2, n_3$  et  $n_4$  respectivement et  $\varepsilon$  est un petit paramètre.

Cet mémoire se compose en trois chapitres :

Le premier chapitre , qui est plutôt un glossaire, regroupe quelques notions préliminaires sur les systèmes différentiels planaires. nous avons commençons par définir les systèmes différentiels polynomiaux ,le portrait de phases, les points singuliers, la linéarisation des systèmes différentiels non linéaires au voisinage de ces points, les courbes invariantes, Ensuite nous introduisons la notion d'un cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite d'un système planaire

Le deuxième chapitre , on va présentons des théorèmes importants de la méthode de moyennisation du premier et deuxième ordre avec des exemples. On applique ces théorèmes pour la recherche des cycles limites de problème étudiés dans le chapitre trois .

Le troisième chapitre , est basé sur la détermination du nombre maximum des cycles limites d'une classe des systèmes différentiels polynomiaux de Kukles généralisés . Nous traitons cette étude en utilisant le théorème de la moyennisation du premier et deuxième ordre.



## Notions générales sur les systèmes différentiels polynomiaux

L'objectif de ce chapitre est de présenter certaines notions et résultats qui concernent la théorie qualitative des systèmes différentiels en particulier les systèmes différentiels polynomiaux.

### 1.1 Systèmes différentiels polynomiaux

**Définition 1.1.1.** [15]

Un système différentiel polynomial est un système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = Q(x, y), \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = P(x, y). \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes à coefficients réels si  $m = \max(\deg P, \deg Q)$  le degré maximal de  $P$  et  $Q$  on dit que le système (1.1) est de degré  $m$ .

### 1.2 Champ de vecteurs

Avant de passer à l'étude d'un système différentiel, il est pratique de représenter graphiquement le champ de vecteurs qui nous donne des renseignements précieux sur les différentes formes des solutions possibles ainsi que leur comportement asymptotique.

**Définition 1.2.1.** [15]

On appelle champ de vecteurs, une région du plan dans laquelle existe en tout point un vecteur  $\vec{V}(M, t)$ .

On suppose donné un champ de vecteurs de classe  $C^1$  dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire une application :

$$M(x, y) \mapsto \vec{V}(M) = \frac{d\vec{M}}{dt} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix},$$

où  $f_1$  et  $f_2$  sont de classe  $C^1$  sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

**Remarque 1.2.1.** [15]

le champ de vecteurs  $\chi$  associé au système différentiel polynômial (1.1)

$$\vec{V}(M) = \frac{d\vec{M}}{dt} \iff \begin{cases} \dot{x} = Q(x, y), \\ \dot{y} = P(x, y). \end{cases}$$

c'est-à-dire le système (1.1) est équivalent au champ de vecteurs

$$\begin{pmatrix} Q(x, y) \\ P(x, y) \end{pmatrix},$$

On peut l'écrire aussi sous la forme suivante :

$$\chi = Q \frac{\partial}{\partial x} + P \frac{\partial}{\partial y},$$

Nous rappelons que pour une solution définie une courbe intégrale le vecteur tangent  $\varphi'(t)$  à  $\varphi(t)$  coïncide avec la valeur du champ de vecteurs  $\chi$  au point  $\varphi(t)$ ; voir la figure suivante.

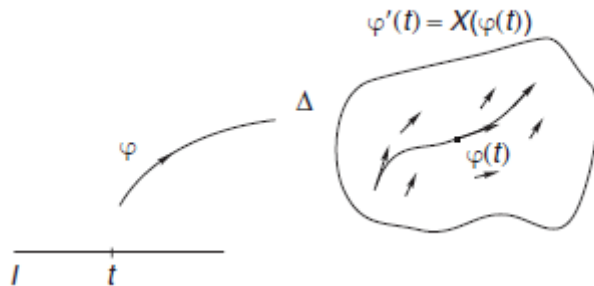


FIGURE 1.1 – Le champ de vecteur .

**Exemple 1.2.1.** Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^2. \end{cases} \quad (1.2)$$

qui peut être réduit à l'équation différentielle  $y' = \frac{x^2}{y}$ .

Le champ de vecteurs associé au système (1.2) est donné par la figure(1.2)

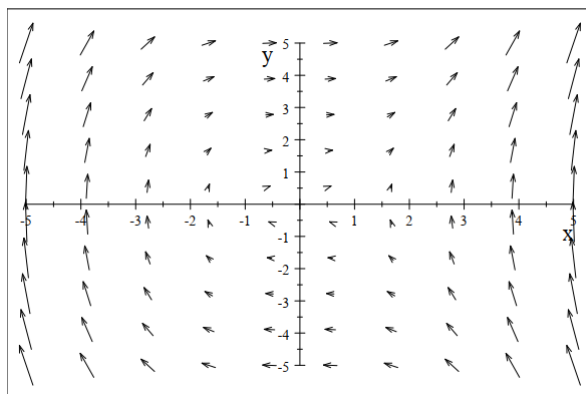


FIGURE 1.2 – Champs de vecteurs associé au système(1.2)

### 1.2.1 Portrait de phases

**Définition 1.2.2.** [42]

Le plan  $\mathbb{R}^2$  est appelé plan de phases et les solutions d'un champ de vecteurs  $\chi$  représentent dans le plan de phases des orbites.

Le portrait de phases d'un champ de vecteurs  $\chi$  est l'ensemble des orbites dans le plan de phases.

Les solutions maximales d'une système différentielle sont appelées courbes intégrales du champ de vecteurs. elles sont tangentes en chaque point au champ de vecteurs.

**Exemple 1.2.2.** *L'ensemble de courbes solutions du système (1.2) est donné par  $y^2 = \frac{2}{3}x^3 + c$  où  $c$  est une constante réelle, et sa représentation graphique est donnée par la figure(1.3).*

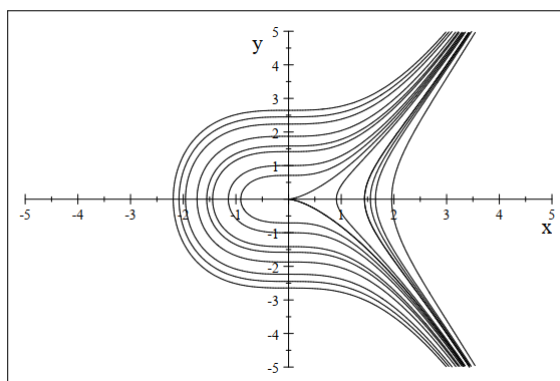


FIGURE 1.3 – Portrait de phase du système(1.2)

### 1.2.2 Flot

Soit  $(x, y)$  un point de  $\mathbb{R}^2$ , on note  $\psi_t((x, y))$  la position de  $(x, y)$  après un déplacement d'une durée  $t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ).

**Définition 1.2.3.** [15]

L'application

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x, y), t) &\longmapsto \psi_t((x, y))\end{aligned}$$

est appelée le flot (associé au champ  $(P, Q)$ ), vérifiant les trois propriétés suivantes :

i )  $\frac{d}{dt}\psi_t((x, y)) = (Q(\psi_t(x, y)), P(\psi_t(x, y))),$

ii )  $\psi_0((x, y)) = (x, y),$

iii )  $\psi_{t+s}((x, y)) = \psi_t(\psi_s((x, y))),$

pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $t, s \in \mathbb{R}$  :

Les deux points i) et ii) signifient que  $\psi_t((x, y))$  est la solution maximale qui passe par  $(x, y)$  à  $t = 0$ .

La point iii) est une nouvelle formulation du caractère autonome de (1.1) : au lieu de se déplacer pendant  $t + s$  on peut le faire pendant  $t$ , prendre une pause, ensuite poursuivre, puis finir son bout de chemin pendant une durée  $s$  :entre- temps le champ de vecteurs n'a pas été modifié .

### 1.2.3 Existence et unicité des solutions

Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $t_0 < t < t_0 + T$ ,  $x \in D$  et  $f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.2.4.** [42] Soit l'application  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  .

On dit que  $f$  satisfait la condition de Lipschitz par rapport à  $x$  si :

$$\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leq L \| x_1 - x_2 \|,$$

où  $x_1, x_2 \in D$ , et  $L$  est une constante

**Théorème 1.2.5. existence et unicité**[42] *Considérons le système (1.1) avec la condition initiale  $X(t_0) = X_0 = (x_0, y_0)$  et  $F = (P, Q)$  ,*

*où  $X \subset D \in \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 < t < t_0 + T$  .*

*On suppose que :*

i)  $F(t, X)$  est continue par rapport à  $t$  ,  $X$  sur  $G = [t_0, t_0 + T] \times D$  :

ii)  $F(t, X)$  satisfait la condition de Lipschitzienne en  $X$  .

*Alors la solution est unique.*

### 1.3 Points singuliers

Les points singuliers jouent un rôle important dans l'étude des systèmes différentiels en particulier ceux qui sont non-linéaires au voisinage de ces points.

Henri Poincaré (1854-1912) montra qu'au lieu de calculer les solutions détaillées, il suffit de connaître les points singuliers ainsi que leur stabilité. Le comportement des solutions à l'infini ( $t$  tend vers  $\pm\infty$ ) est l'une des questions essentielles, et souvent difficiles, que l'on se pose à propos des équations différentielles.

**Définition 1.3.1.** [42]

Un point  $(x^*, y^*)$  est dit un point d'équilibre du système (1.1) s'il vérifie :

$$P(x^*, y^*) = Q(x^*, y^*) = 0.$$

**Remarque 1.3.1.**

La notion de point d'équilibre est la même que celle de point singulier pour le champ de vecteurs. on parle plutôt de point singulier lorsque l'on regarde le champ de vecteurs pour lui même et de point d'équilibre lorsqu'on s'intéresse aux trajectoires.

### 1.3.1 Linéarisation et matrice jacobienne

**Définition 1.3.2.** [41]

La matrice

$$D\chi(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial P}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial P}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}.$$

est appelée la matrice Jacobienne associée au champ de vecteurs  $\chi$  au voisinage d'un point singulier  $(x^*, y^*)$

On considérons le système non linéaire (1.1) son linéarisé est donné par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial P}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial P}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

**Exemple 1.3.1.** [35] Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 - 1, \\ \dot{y} = 2y, \end{cases} \quad (1.4)$$

d'où

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 - 1 \\ 2y \end{pmatrix},$$

Pour trouver les points d'équilibre on va résoudre le système d'équation

$F(x^*, y^*) = 0$  : c-à-dire  $Q(x^*, y^*) = P(x^*, y^*) = 0$  sont  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$

La matrice Jacobienne de système (1.4) en  $(x, y)$  est :

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

au point  $(1, 0)$  :

$$DF(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

au point  $(-1, 0)$  :

$$DF(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Les systèmes linéarisés associés sont :

Au point  $(1, 0)$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x, \\ \dot{y} = 2y. \end{cases}$$

Au point  $(-1, 0)$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x, \\ \dot{y} = 2y. \end{cases}$$

**Définition 1.3.3.** [15]

- Le point singulier  $(x^*, y^*)$  du système (1.1) est dit hyperbolique si les valeurs propres de la matrice  $D\chi(x^*, y^*)$  ont toutes une partie réelle non nulle. Dans le cas contraire le point singulier est dit non hyperbolique.
- Le point singulier  $(x^*, y^*)$  du système (1.1) est appelé dégénéré si les valeurs propres de la matrice  $D\chi(x^*, y^*)$  sont non nulle.
- Le point singulier  $(x^*, y^*)$  du système (1.1) est dit semi-hyperbolique si une valeur propre de la matrice  $D\chi(x^*, y^*)$  est nulle .

### 1.3.2 Nature des points singulier

Le flot de (1.1) au voisinage d'un point singulier  $(x^*, y^*)$  est classé selon les valeurs propres de la matrice  $D\chi((x^*, y^*))$  son déterminant, ainsi que sa trace. Les valeurs propres de  $D\chi$  sont des solutions de l'équation caractéristique.

$$\lambda^2 - tr(D\chi)\lambda + \det(D\chi) = 0,$$

avec

$$tr(D\chi) = \lambda_1 + \lambda_2,$$

et

$$\det(D\chi) = \lambda_1\lambda_2,$$

$$\Delta D\chi = \text{tr}(D\chi)^2 - 4 \det(D\chi),$$

alors on a

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\text{tr}(D\chi) \pm \sqrt{\Delta}),$$

On distingue les différents cas selon ces valeurs propres

1. Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles non nulles et de signe différent alors le point singulier  $(x^*, y^*)$  est appelé un point selle il est toujours instable (voir Figure 1.4)

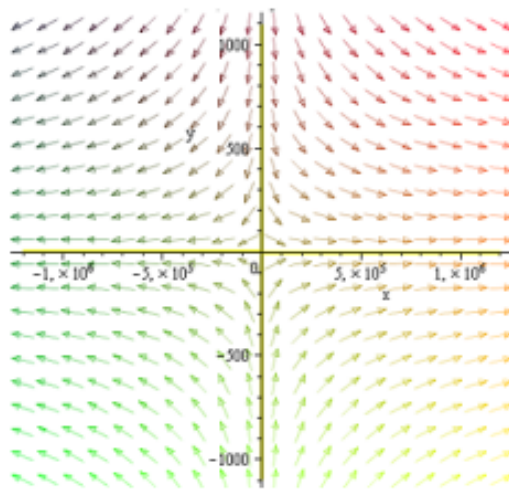


FIGURE 1.4 – selle

2. Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles de même signe on a trois cas :
  - a) Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$  le point singulier  $(x^*, y^*)$  est appelé un noeud stable (voir Figure 1.5).
  - b) Si  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  le point singulier  $(x^*, y^*)$  est appelé un noeud instable (voir Figure 1.6).
  - c) Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  le point singulier  $(x^*, y^*)$  est appelé noeud propre
    - il est stable pour  $\lambda < 0$  (voir Figure 1.7).
    - il est instable pour  $\lambda > 0$  (voir Figure 1.8).
3. Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont complexes et  $\text{Im}(\lambda_{1,2}) < 0$  alors le point singulier  $(x^*, y^*)$  est appelé un foyer.

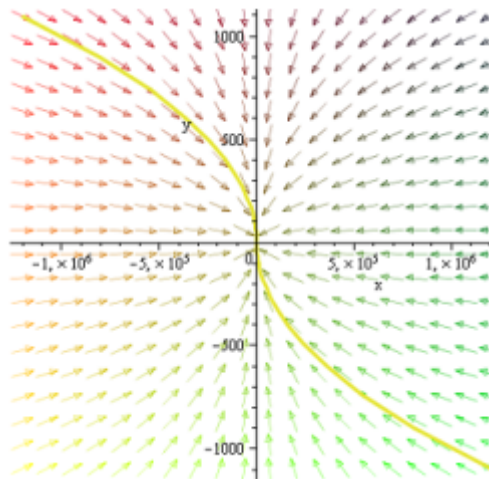


FIGURE 1.5 – noeud stable

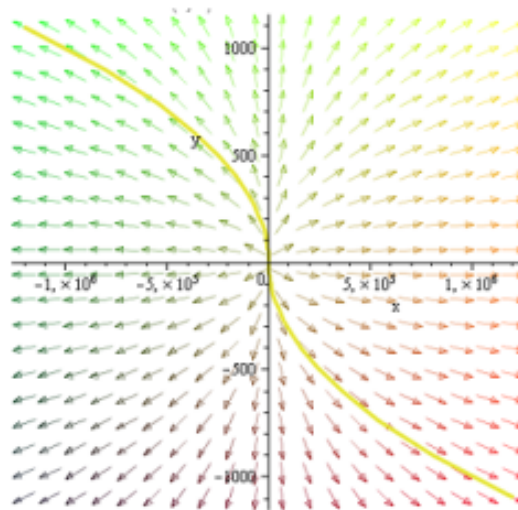


FIGURE 1.6 – noeud instable

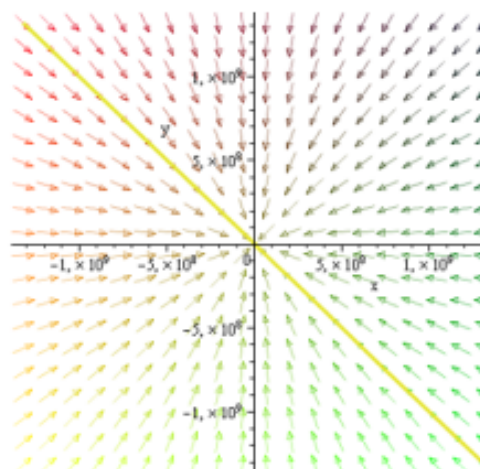


FIGURE 1.7 – noeud propre stable



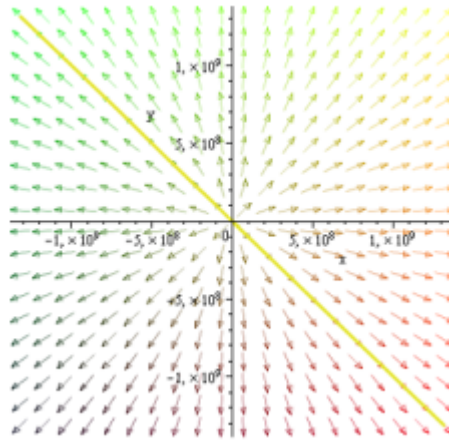


FIGURE 1.8 – noeud propre instable

- Il est stable si  $Re(\lambda_{1,2}) < 0$  (voir Figure1.9)
- Il est instable si  $Re(\lambda_{1,2}) > 0$  (voir Figure1.10).

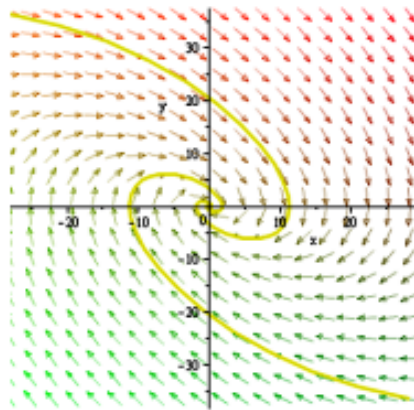


FIGURE 1.9 – foyer stable

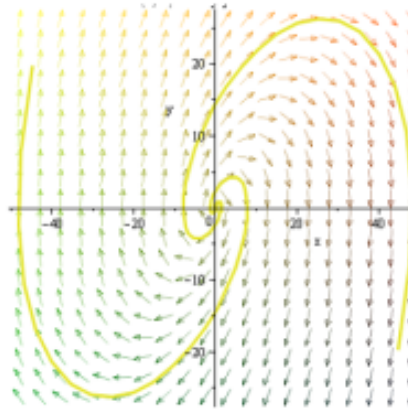


FIGURE 1.10 – foyer instable

4. Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont imaginaires pures, alors le point singulier  $(x^*, y^*)$  est appelé un centre, il est stable mais pas asymptotiquement stable (voir Figure 1.11).

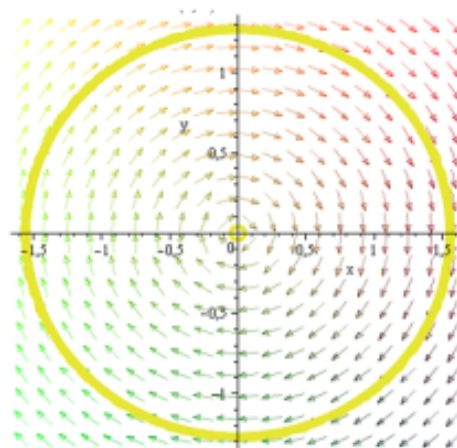


FIGURE 1.11 – centre

**Définition 1.3.4.** [35]

Soit  $(x^*, y^*)$  un point singulier d'un système différentiel (1.1)

1. Le point singulier est appelé selle s'il est hyperbolique et si  $A = D\chi((x^*, y^*))$  admet au moins une valeur propre est de partie réelle positive et au moins une valeur propre est de partie réelle négative.
2. Le point singulier est appelé puits si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = D\chi((x^*, y^*))$  ont des parties réelle négative.
3. Le point singulier est appelé source si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = D\chi((x^*, y^*))$  ont des parties réelle positives.

**Exemple 1.3.2.** [35] Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) = -y - xy, \\ \dot{y} = Q(x, y) = x + x^2, \end{cases} \quad (1.5)$$

La matrice Jacobienne du système (1.5) est :

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial(-y - xy)}{\partial x} \\ &= -y \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial(y - xy)}{\partial y} \\ &= -1 - x. \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial(x + x^2)}{\partial x} \\ &= 1 + 2x. \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= \frac{\partial(x + x^2)}{\partial y} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour trouver les points critiques on va résoudre le système d'équation :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -y - xy = 0, \\ x + x^2 = 0, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y(-1 - x) = 0, \\ x(1 + x) = 0, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \quad \vee \quad -1 - x = 0, \\ x = 0 \quad \vee \quad 1 + x = 0, \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \quad \vee \quad x = -1 \\ x = 0 \quad \vee \quad x = -1, \end{cases} \end{aligned}$$

donc les points des équilibres sont  $(0,0), (-1,0)$  pour obtenir la matrice jacobienne dans chaque point d'équilibre on va remplacer chaque couple  $(x, y)$  Par ça valeur.

$$A = DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = DF(-1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

écrivons l'équation caractéristique de la matrice associée à ce système on a  
1) Pour la matrice  $A$  :

$$A - \lambda I_d = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

d'où  $\lambda^2 + 1 = 0$ . Ses racines  $\lambda_1 = -i$  et  $\lambda_2 = i$  sont deux valeurs propres imaginaires pures : le point d'équilibre  $(0, 0)$  est un centre stable, mais pour le système non linéaire on ne peut rien dire (voir Figure 1.11).

2) Pour la matrice  $B$

De même manière pour la matrice  $B$  :  
on trouve : les valeurs propres sont  $\lambda = 0$  : le point d'équilibre  $(-1, 0)$  est dit semi-hyperbolique.

### 1.3.3 Équivalence topologique

**Définition 1.3.5.** [34]

Une application  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un homéomorphisme s'il est continu et bijective et a un inverse continu.

**Définition 1.3.6.** [34]

Soit deux systèmes autonomes dans le plan

$$\begin{cases} \dot{x} = Q_1(x, y), \\ \dot{y} = P_1(x, y). \end{cases} \quad (1.6)$$

et

$$\begin{cases} \dot{x} = Q_2(x, y), \\ \dot{y} = P_2(x, y). \end{cases} \quad (1.7)$$

définis sur deux ouverts  $U$  et  $V$  respectivement, sont topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme

$$h : U \rightarrow V$$

tel que  $h$  transforme les orbites de (1.6) en celles de (1.7) et préserve le sens du mouvement.

### 1.3.4 Le théorème de Hartman-Grobman

Le théorème de Hartman-Grobman nous permet de réduire l'étude d'un système différentiel au voisinage d'un point singulier hyperbolique, à l'étude d'un système linéaire topologiquement équivalent à (1.1) au voisinage de l'origine.

**Théorème 1.3.7.** [35]

Si  $(x^*, y^*)$  est un point singulier hyperbolique de système différentiel (1.1), alors il existe un voisinage de ce point dans lequel le système (1.1) est topologiquement équivalent à son linéarisé(1.3).

**Remarque 1.3.2.** Autrement dit, si l'origine est un point selle ou foyer ou noeud pour le système (1.3) alors le point singulier  $(x^*, y^*)$  sera respectivement selle ou foyer ou noeud pour le système (1.1).

Cependant si l'origine est de type centre pour le système (1.3) alors on ne peut rien dire sur la nature du point singulier  $(x^*, y^*)$  de (1.1).

### 1.3.5 Stabilité de l'équilibre

Un système non linéaire quelconque peut avoir plusieurs positions d'équilibre qui peuvent être stables ou instables. Il existe de nombreuses notions de stabilité pour les systèmes différentiels non linéaires. Nous étudions ici la stabilité au sens de Lyapounov .

**Définition 1.3.8.** [14]

Soit  $\psi_t$  la solution du système (1.1) .

1. On dit qu'un point d'équilibre au sens de Lyapounov  $(x^*, y^*)$  est stable si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \| (x, y) - (x^*, y^*) \| < \eta \implies (\forall t > 0, \| \psi_t(x, y) - (x^*, y^*) \| < \varepsilon),$$

2.  $(x^*, y^*)$  est asymptotiquement stable si et seulement si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \| \psi_t(x, y) - (x^*, y^*) \| = 0.$$

## 1.4 Courbes invariantes

**Définition 1.4.1.** [15]

On appelle courbe invariante du système (1.1), toute courbe d'équation  $f(x, y) = 0$  du plan de phase pour laquelle il existe une fonction  $K = K(x, y)$  appelée cofacteur associé à la courbe invariante, telle que

$$Q(x, y) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + P(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} = K(x, y) f(x, y). \quad (1.8)$$

Cette égalité montre que sur la courbe invariante le gradient  $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$  de  $f$  est orthogonal au champs de vecteurs  $\chi = (P, Q)$ , donc en tout point de la courbe invariante le champs de vecteurs est tangent à cette courbe, donc elle est formée de solutions (ou trajectoires) du champs de vecteurs  $\chi$ , ce qui justifie son appellation.

**Remarque 1.4.1.**

Une courbe invariante  $C_f$  est dite algébrique si  $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$  et elle est invariante pour le flot du système (1.1) dont le cofacteur  $k(x, y)$  est toujours un polynôme de degré  $k(x, y) \leq n - 1$ .

**Définition 1.4.2.**

Une courbe invariante  $f(x, y) = 0$  est dite algébrique de degré  $n$  si  $f(x, y)$  est un polynôme de degré  $n$ .

**Proposition 1.4.1.** [15]

Soient  $f(x, y) = 0$ ,  $g(x, y) = 0$  deux courbes algébriques invariantes du système (1.1) de cofacteurs respectifs  $k_f(x, y)$ ,  $k_g(x, y)$  respectivement, alors le produit  $(fg)(x, y) = 0$  est aussi une courbe algébrique invariante du système (1.1) dont le cofacteur est  $k_f(x, y) + k_g(x, y)$ .

## 1.5 Orbite périodique

**Définition 1.5.1.** [43]

La solution  $\psi(t) = (x(t), y(t))$  du système (1.1) est dit *périodique* s'il existe  $T > 0$  tel que :

$$\psi(t + T) = \psi(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

$T$  est sa période.

Dans le plan des phases une solution périodique est représentée par une courbe fermée, (**Orbite périodique**).

**Proposition 1.5.1.**

Toute solution périodique entoure au moins un point d'équilibre.

**Définition 1.5.2.** [35]

$\gamma((x(0), y(0))) = \{(x, y) \in \Omega \mid (x(t), y(t)) = \psi_t((x(0); y(0))), 0 < t < T\}$  est une orbite périodique stable si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un voisinage  $V(\gamma(x(0), y(0)))$  tel que :

$$\forall (x, y) \in V(\gamma(x(0), y(0))), \forall t \geq 0, d(\psi_t(x, y), \gamma(x(0), y(0))) < \varepsilon,$$

est asymptotiquement stable si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\psi_t(x, y), \gamma(x(0), y(0))) = 0.$$

## 1.6 Cycle limite

**Définition 1.6.1.** [41]

On appelle cycle limite du système (1.1), toute orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les solution périodiques de ce système.

**Remarque 1.6.1.**

Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.

### 1.6.1 Existence et non-existence de cycle limite

Une condition suffisante de non-existence de solution périodique (et donc de cycle limite) est donnée par les deux théorèmes suivants :

**Théorème 1.6.2.** [15]

Dans une région du plan de phases, la quantité :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y},$$

garde un signe constant le système (1.1) n'admet pas des orbites fermées dans ce domaine donc n'admet pas de cycle limite.

**Théorème 1.6.3.** [34]

Si toutes les trajectoires du système (1.1) entrent transversalement dans un domaine fermé et borné  $D$  du plan ne contenant pas de points d'équilibre du système (1.1), et ne ressortent pas de ce domaine, alors ce domaine contient au moins une orbite périodique.

### 1.6.2 Stabilité des cycles limites

Le théorème suivant permet de caractériser la stabilité d'un cycle limite

**Théorème 1.6.4.** [46]

Soit  $\psi(t)$  une orbite périodique du système (1.1) de période  $T$ .

Alors,  $\psi(t)$  est un cycle limite stable si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\psi(t)) dt < 0,$$

et est un cycle limite instable si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\psi(t)) dt > 0,$$

Il peut être un cycle limite stable, instable ou semi-stable ou peut appartenir à une bande continue des cycles si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\psi(t)) dt = 0.$$

**Remarque 1.6.2.**

Lorsque la quantité  $\int_0^T \operatorname{div}(\psi(t)) dt$  est différente de zéro, on dit que le cycle limite  $\psi$  est hyperbolique.

**Exemple 1.6.1.** [34] Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - 2x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + 2y - 2y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (1.9)$$

Pour résoudre ce système, on pose

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta), \\ y = r \sin(\theta). \end{cases}$$

la formulation du système permet de passer des coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  au coordonnées polaires  $(r, \theta)$

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta = 2r \cos \theta - r \sin \theta - 2r^3 \cos \theta, \\ \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta = r \cos \theta + 2r \sin \theta - 2r^3 \sin \theta. \end{cases} \quad (1.10)$$

Cela veut dire que :

$$\cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{y} = \dot{r} \cos^2 \theta + \dot{r} \sin^2 \theta = \dot{r} = 2r \cos^2 \theta + 2r \sin^2 \theta - 2r^3 \cos^2 \theta - 2r^3 \sin^2 \theta = 2r - 2r^3.$$

et

$$\begin{aligned} r \dot{\theta} \sin^2 \theta + r \dot{\theta} \cos^2 \theta &= r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned}$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = 2(r - r^3), \\ \frac{d\theta}{dt} = 1. \end{cases} \quad (1.11)$$

Considérons maintenant  $\theta$  comme une variable indépendante, on obtient :

$$\frac{dr}{d\theta} = 2(r - r^3)$$

donc

$$r' = 2r - 2r^3 \quad (1.12)$$

c'est une équation de Bernoulli on divise l'équation (1.12) par  $2r^3$  on obtient :

$$\frac{r'}{2r^3} - \frac{1}{r^2} = -1 \quad (1.13)$$

On pose

$$z = \frac{1}{r^2}$$

On dérive, on obtient

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{-2r'}{r^3}$$



En remplaçant dans (1.13), on aura

$$\frac{-1}{4} \frac{dz}{d\theta} - z(\theta) = -1$$

alors

$$-z' - 4z = -4 \quad (1.14)$$

C'est une équation différentielle linéaire en  $z$  et  $z'$  non homogène pour résoudre cette équation, on cherche la solution homogène pour résoudre cette équation.

On considère l'équation homogène associée

$$-\frac{dz}{d\theta} - 4z = 0$$

On se ramène à une équation à variables séparées

$$-\frac{dz}{z} = 4d\theta$$

En intégrant, on trouve

$$z(\theta) = c_1(\theta) \exp(-4\theta)$$

En dérivant, on trouve

$$\frac{dz}{d\theta} = c_1'(\theta) \exp(-4\theta) - 4c_1(\theta) \exp(-4\theta)$$

On substitue  $z$  et  $z'$  dans (1.14), on aura

$$\begin{aligned} -4 &= -c_1'(\theta) \exp(-4\theta) + 4c_1(\theta) \exp(-4\theta) - 4c_1(\theta) \exp(-4\theta) \\ &= -c_1'(\theta) \exp(-4\theta) \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$c_1'(\theta) = 4 \exp(4\theta)$$

donc

$$c_1(\theta) = \exp(4\theta) + c$$

On revient à la solution, on trouve

$$z(\theta) = 1 + c(\theta) \exp(-4\theta)$$

On a, d'après ce qui précède

$$z = \frac{1}{r^2}$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{1}{z} \\ &= \frac{1}{1 + c \exp(-4\theta)} \end{aligned}$$

pour  $c = 0$ , on a l'orbite périodique  $r^2 = 1$ . dans le plan de phase c'est le cercle d'équation  $x^2 + y^2 = 1$  pour montre l'orbite périodique est isolé on va démontre que  $\int_0^{2\pi} \text{div}(\psi(t))dt \neq 0$  on

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1, K(x, y) = -2(x^2 + y^2)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \text{div}(\psi(t))dt &= \int_0^{2\pi} \text{div}(\cos t, \sin t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} K(\cos t, \sin t)dt \\ &= - \int_0^{2\pi} 2(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= -4\pi \neq 0. \end{aligned}$$

Donc, le système (1.9) a un cycle limite hyperbolique  $\psi(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$  qui est stable Voir figure(1.12)

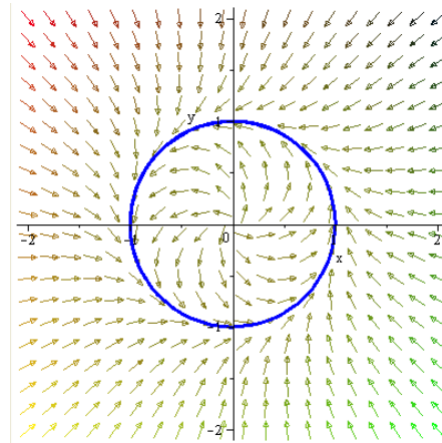


FIGURE 1.12 – Cycle limite du système

### 1.6.3 Théorie de bifurcation

Soit le système dynamique non linéaire suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu), \quad (1.15)$$

où  $\mu \in \mathbb{R}$  est un paramètre de contrôle,  $f \in C^1(U)$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$

**Définition 1.6.5.** [34]

la bifurcation est un changement qualitatif de la dynamique lorsqu'on modifie  $\mu$

**Définition 1.6.6.** [42]

Considérons l'équation (1.15) avec  $f(0, \mu) = 0$  (solution  $x = 0$ ). La valeur du paramètre  $\mu = \mu_c$  est appelée la valeur de la bifurcation s'il existe une solution non triviale dans chaque voisinage de  $(0, \mu_c)$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .

**Exemple 1.6.2.** soit le système différentiel paramétré suivant :

$$F(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = -y + \mu x, \\ \dot{y} = x + \mu y. \end{cases} \quad (1.16)$$

Pour trouver les points d'équilibre on va résoudre le système d'équation :

$$\begin{cases} -y + \mu x = 0, \\ x + \mu y = 0. \end{cases}$$

Le système (1.16) a un seul point d'équilibre  $(0, 0)$ . La matrice Jacobienne du système (1.16) est :

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix},$$

elle admet les valeurs propres  $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$

1. Si  $\mu < 0$ , alors l'origine est un foyer stable.
2. Si  $\mu > 0$ , alors l'origine est un foyer instable.
3. Si  $\mu = 0$ , cette matrice admet une pair de valeurs propres imaginaires pures, donc l'origine est un centre.

Quand ce paramètre change de signe (c-à-d passant du négatif au positif), le système change de stabilité et passe de stable à instable.

On dit, qu'il y a une bifurcation et dans ce cas  $\mu = 0$  est la valeur de bifurcation.

Il existe deux types de bifurcations : les bifurcations locales et les bifurcations globales. Les bifurcations "locales" sont appelées ainsi car elles peuvent toujours être identifiées lors d'une linéarisation du système au voisinage de la solution. Le critère de détection utilisé dans le cas des bifurcations locales concerne les valeurs propres du Jacobien qui intervient au premier ordre dans la linéarisation. Par contre, les bifurcations "globales" ne font donc pas forcément intervenir le voisinage de la solution, ici, les linéarisations locales autour de la solution ne seront donc d'aucune aide. C'est pour cela que ces bifurcations sont appelées globales. Ci dessous, un exemple d'une bifurcation locale

**Exemple 1.6.3.** (Bifurcation selle-noeud)[41]

Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2, \\ \dot{y} = -y, \end{cases} \quad (1.17)$$

Selon le signe de  $\mu$ , on distingue trois cas :

- Si  $\mu > 0$  dans ce cas le système admet deux points d'équilibre de coordonnées :  $(-\sqrt{\mu}, 0)$  et  $(\sqrt{\mu}, 0)$ . La matrice jacobienne du système s'écrit

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Au point  $(\sqrt{\mu}, 0)$ , la matrice jacobienne s'écrit

$$J(\sqrt{\mu}, 0) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Cette matrice admet deux valeurs propres réelles négatives  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -2\sqrt{\mu}$ , d'où le point d'équilibre  $(\sqrt{\mu}, 0)$  est un noeud stable.

Au point  $(-\sqrt{\mu}, 0)$ , la matrice jacobienne s'écrit

$$J(-\sqrt{\mu}, 0) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice admet deux valeurs propres réelles de signe différent  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 2\sqrt{\mu}$ , d'où le point d'équilibre est un point selle instable.

Donc, quand  $\mu > 0$  le système admet deux points d'équilibres, le premier du type noeud et le deuxième du type selle.

- Si  $\mu = 0$ , le système (1.17) devient

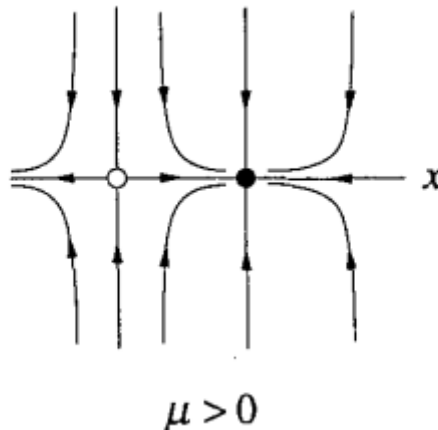
$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2, \\ \dot{y} = -y, \end{cases}$$

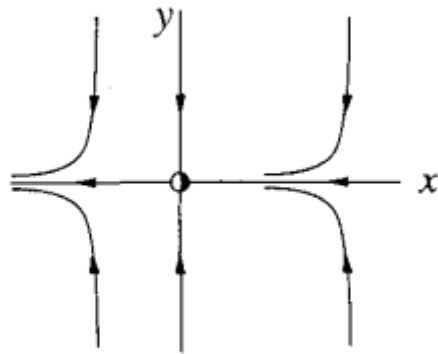
L'unique point critique du système est l'origine. La matrice jacobienne associée s'écrit

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

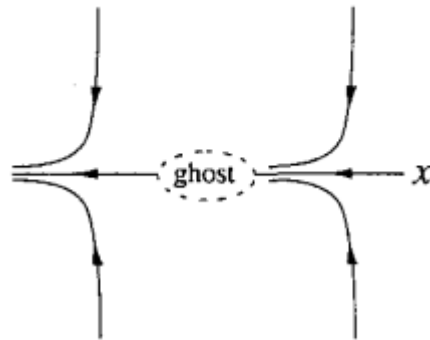
Donc le point d'équilibre  $(0, 0)$  est non hyperbolique. L'étude de la première équation montre que  $x = 0$  est point d'équilibre non hyperbolique et la deuxième équation montre que  $y = 0$  est point d'équilibre asymptotiquement stable

- Si  $\mu < 0$  dans ce cas le système (1.17) n'admet aucun point d'équilibre car  $x \in \mathbb{R}$ .





$$\mu = 0$$



$$\mu < 0$$

*Cette bifurcation est une bifurcation locale appelée "selle-noeud" correspond à l'apparition de deux points d'équilibre, l'un stable (un noeud) et l'autre instable (un point selle) et au point de bifurcation  $\mu = 0$  les deux points d'équilibre disparaissent et un point non hyperbolique apparait, qui en  $\mu > 0$  lui même disparaît : cette bifurcation correspond donc au changement de nombre de points d'équilibre et leur stabilité.*

## Théorie de la moyennisation

La théorie de moyennisation est l'une des plus importantes théories perturbatives utilisée actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. Cette théorie est une théorie classique qui donne des conditions pour lesquelles les points singuliers du système moyenné fournissent des cycles limites pour des systèmes différentiels ayant un centre. Elle s'applique aux systèmes de la forme  $\dot{x} = \varepsilon f(x, t)$ , où  $\varepsilon$  est suffisamment petit, et  $f(t, x)$  est  $T$ -périodique en la première variable.

Les contributions théoriques essentielles de la théorie de moyennisation ont été faites en 1930 par Krylov et Bogoliubov [9]. En 1937, la théorie introduite par Krylov et Bogoliubov [8] permet de trouver le premier ordre de la solution d'équations différentielles non linéaires telles qu'un oscillateur linéaire perturbé par une force extérieure. Ensuite elle est formulée en 1945 par Bogoliubov [7], et par Bogoliubov et Mitropolsky en 1961 [10]. En 1966, Roseau [37] donna une démonstration basée sur le lemme de Gronwall. Une étape importante a été franchie ensuite par Krylov et Bogoliubov qui ont traité le cas quasi-périodique. Pour plus de détails, voir le livre de Sanders, Verhulst [23].

Buic et Llibre [12] en 2004 s'intéressés aussi au problème de la recherche des solutions périodiques pour des systèmes différentiels perturbés. Ils ont réussi à introduire une nouvelle approche pour ce problème. En effet, pour montrer ce résultat, ils ont remplacé le théorème des fonctions implicites par la théorie de degré de Brouwer en utilisant des méthodes topologiques pour résoudre des équations d'opérateurs équivalent à ce problème, sachant que ces équations d'opérateurs sont de dimension finie ou de dimension infinie. De plus, ils ont donné pour la première fois un résultat sur la moyennisation d'ordre trois pour des équations différentielles d'ordre un.

En 2013, Giné, Grau et Llibre [28] dans un travail récent ont introduit la moyennisation d'ordre arbitraire  $k$  pour des équations différentielles d'ordre un.

En 2014, Llibre, Novaes et Teixeira [25] ont présenté un résultat général qui est la théorie de moyennisation pour la recherche des solutions périodiques d'ordre arbitraire  $k$  pour des équations différentielles continues de dimension  $n$ .

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la méthode de moyennisation qui est appliquée

aux systèmes de la forme :

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon), \quad (2.1)$$

où  $t \in I \subset \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon$  un petit paramètre et  $f$  est  $T$ -périodique en  $t$  l'équation moyennée associée à (2.1) s'écrit

$$\dot{x} = \varepsilon f^0(x),$$

où

$$f^0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, 0) dt,$$

## 2.1 Théorème de moyennisation du premier ordre

On considère le système différentiel

$$\dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.2)$$

où  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D$  est un domaine borné et  $t \geq 0$ . Supposons que  $F(t, x)$  et  $R(t, x, \varepsilon)$  sont des fonctions  $T$ -périodiques en  $t$ .

Le système moyenné associé au système (2.2) est

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y), \quad (2.3)$$

où

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, y) ds, \quad (2.4)$$

### **Théorème 2.1.1.** [26]

Soit le système (2.2), on suppose que  $F, G, D_x F, D_x^2 F$  et  $D_x R$  sont continues et bornées par une constante  $M$  dans  $[0, \infty) \times D$  avec  $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Supposons aussi que  $F$  et  $R$  sont  $T$ -périodiques en  $t$ , où  $T$  indépendante de  $\varepsilon$ .

Alors :

1. Si  $p \in D$  est un point singulier de système moyenné (2.3) tel que :

$$\det(D_x f^0(p)) \neq 0, \quad (2.5)$$

alors pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, il existe une solution  $T$ -périodiques  $x(t, \varepsilon)$  du système (2.2) telle que  $x(0, \varepsilon) \rightarrow p$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$

2. Si le point singulier  $y = p$  du système moyenné (2.3) est hyperbolique alors pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, la solution périodique correspondante  $x(t, \varepsilon)$  du système (2.2) est unique, hyperbolique et de même stabilité que  $p$

**Preuve 1.** [26]

**Applications**[26] Considérons l'équation de Van Der Pol :

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x},$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases} \quad (2.6)$$

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , ce système devient :

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta = r \sin \theta, \\ \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta = -r \cos \theta + \varepsilon(1 - r^2 \cos^2 \theta)r \sin \theta. \end{cases} \quad (2.7)$$

le système (2.7) devient :

$$\begin{aligned} \cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{y} &= \dot{r} \cos^2 \theta + \dot{r} \sin^2 \theta \\ \dot{r} &= \varepsilon(1 - r^2 \cos^2 \theta)r \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r\dot{\theta} \sin^2 \theta + r\dot{\theta} \cos^2 \theta &= -r \sin^2 \theta - r \cos^2 \theta + \varepsilon \cos \theta(1 - r^2 \cos^2 \theta)r \sin \theta \\ \dot{\theta} &= -1 + \varepsilon \cos \theta(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta, \end{aligned}$$

alors le système (2.6) devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta, \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \cos \theta(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta. \end{cases} \quad (2.8)$$

est équivalent à

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta}{-1 + \varepsilon \cos \theta(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta},$$

On sait que

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + O(z^2), \quad |z| < 1,$$

En posant  $z = \varepsilon \cos \theta(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta$ . on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta + O(\varepsilon^2), \quad (2.9)$$

l'équation (2.9) doit s'écrire sous la forme de système (2.2), ainsi on peut appliquer la méthode de moyennisation en prenant  $x = r, t = \theta, T = 2\pi$  et  $F(\theta, r) = r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta$

la fonction moyennée de système (2.9) :

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, r) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta d\theta, \\ &= \frac{-r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 - \cos 2\theta}{2} - \frac{r^2}{4} \left( \frac{1 - \cos 4\theta}{2} \right) \right) \\ &= \frac{-r}{2\pi} \left( \frac{1}{2} \left( \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) - \frac{r^2}{8} \left( \theta - \frac{\sin 4\theta}{2} \right) \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{8} r(r^2 - 4). \end{aligned}$$



Maintenant :  $f^0(r) = \frac{1}{8}r(r^2 - 4) = 0 \Rightarrow r = 2$  (puisque  $r$  doit être positif).

$$\text{(Sachant que : } (D_r f^0(r) = \frac{1}{8}(3r^2 - 4)).$$

La seule racine positive de  $f^0(r)$  est  $r = 2$ . Comme  $D_r f^0(2) = 1$ , d'après le Théorème (2.1.1) il suit que le système (2.6) pour  $|\varepsilon| \neq 0$  suffisamment petit, admet un cycle limite qui est l'orbite périodique de rayon 2 du système non perturbé (2.6) avec  $\varepsilon = 0$ .

De plus comme  $D_r f^0(2) = 1 > 0$ , ce cycle limite est instable.

## 2.2 théorème de moyennisation du deuxième ordre

**Théorème 2.2.1.** [12]

On considère le système différentiel

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.10)$$

où  $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues,  $T$ -périodiques en la première variable.  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  : On suppose que

- i) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_1(t, \cdot) \in C^1(D)$ ,  $F_1, F_2, R$  et  $D_x F_1$  sont localement lipschitziennes par rapport à  $x$ , et  $R$  est différentiable par rapport à  $\varepsilon$ . On définit  $F_{10}, F_{20} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  par

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, y) ds,$$

$$F_{20}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T [D_x F_1(s, y) y_1(s, z) + F_2(s, z)] ds,$$

où

$$y_1 = \int_0^s F_1(t, z) dt.$$

- ii) pour  $V \in D$ , un ensemble ouvert et borné et pour tout  $\varepsilon \in ]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[ \setminus \{0\}$  ; il existe  $a_\varepsilon \in V$  tel que  $F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon) = 0$  et  $d_B(F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon), V, a_\varepsilon) \neq 0$  (i.e. le degré de Brouwer de  $F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon) |_{a_\varepsilon}$  est non nul)

Alors, pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, il existe une solution  $T$ -périodique isolée  $\varphi(\cdot, \varepsilon)$  de l'équation (2.10) telle que  $\varphi(0, \varepsilon) = a_\varepsilon$ .

**Preuve 2.** [12]

**Applications** Soit le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon(1 - x^2 y) + \varepsilon^2(x - y^2 x), \\ \dot{y} = -x + \varepsilon x y^2 - \varepsilon^2(1 - y^2 x) y. \end{cases} \quad (2.11)$$

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , ce système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon (\cos \theta + r^3 \cos \theta \sin \theta - 2r^3 \cos^3 \theta \sin \theta) + \varepsilon^2(r + 2r^4 \cos \theta - r^3 \cos^2 \theta - r^4 \cos^5 \theta \\ \quad - r^4 \cos \theta + r^3 \cos^4 \theta), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon\left(\frac{-\sin \theta}{r} + 2r^2 \cos^2 \theta - r^2 \cos^4 \theta\right) + \varepsilon^2(-r^2 \sin \theta \cos^3 \theta - r^3 \cos^2 \theta \sin \theta \\ \quad + r^2 \cos \theta \sin \theta + r^3 \sin \theta \cos \theta). \end{cases} \quad (2.12)$$

Le système (2.12) est équivalent à

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{-\varepsilon A - \varepsilon^2 B}{1 - (\varepsilon C + \varepsilon^2 D)} = -\varepsilon A - \varepsilon^2 B - \varepsilon^2 AC + O(\varepsilon^3) \\ &= \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

où

$$A = \cos \theta + r^3 \cos \theta \sin \theta - 2r^3 \cos^3 \theta \sin \theta, \quad (2.13)$$

$$B = r + 2r^4 \cos \theta - r^3 \cos^2 \theta - r^4 \cos^5 \theta - r^4 \cos \theta + r^3 \cos^4 \theta, \quad (2.14)$$

$$C = \frac{-\sin \theta}{r} + 2r^2 \cos^2 \theta - r^2 \cos^4 \theta, \quad (2.15)$$

$$D = -r^2 \sin \theta \cos^3 \theta - r^3 \cos^2 \theta \sin \theta + r^2 \cos \theta \sin \theta + r^3 \sin \theta \cos \theta. \quad (2.16)$$

$$(2.17)$$

$$F_1(r, \theta) = 2r^3 \cos^3 \theta \sin \theta - \cos \theta - r^3 \cos \theta \sin \theta,$$

$$\begin{aligned} F_2(r, \theta) &= r + 2r^4 \cos \theta - r^3 \cos^2 \theta - r^4 \cos^5 \theta - r^4 \cos \theta + r^3 \cos^4 \theta \\ &\quad + \frac{\cos \theta}{r} (2r^3 \cos^2 \theta \sin \theta - 1 - r^3 \sin \theta) (-\sin \theta + 2r^3 \cos^2 \theta - r^3 \cos^4 \theta), \end{aligned}$$

$$F_3(r, \theta) = O(\varepsilon^3).$$

On applique la méthode de moyennisation du deuxième ordre pour calculer  $F_{10}(r)$

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2r^3 \cos^3 \theta \sin \theta - \cos \theta - r^3 \cos \theta \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( 2r^3 \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta - \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta - r^3 \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} (2r^3 I_1 - I_2 - r^3 I_3), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = -\cos^4 \theta \Big|_0^{2\pi} + 3 \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta \\
 &= -\frac{1}{4} \cos^4 \theta \Big|_0^{2\pi} = 0, \\
 I_2 &= \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = (\sin \theta) \Big|_0^{2\pi} = 0, \\
 I_3 &= \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} (1 - \cos^2 \theta) = \frac{1}{2} (\sin^2 \theta) \Big|_0^{2\pi} = 0.
 \end{aligned}$$

d'où on a

$$F_{10}(r) = 0.$$

Calculons

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dr} F_1(r, \theta) &= 6r^2 \cos^3 \theta \sin \theta - 3r^2 \cos \theta \sin \theta, \\
 y_1(r, s) &= \int_0^s F_1(r, \theta) d\theta \\
 &= -\frac{1}{2} r^3 \cos^4 \theta + \frac{1}{2} r^3 - \sin \theta - \frac{1}{2} r^3 \sin^2 \theta. \\
 &= -\frac{1}{2} r^3 \cos^4 \theta + \frac{1}{2} r^3 - \sin \theta - \frac{1}{2} r^3 (1 - \cos^2 \theta) \\
 &= -\frac{1}{2} r^3 \cos^4 \theta - \sin \theta + \frac{1}{2} r^3 \cos^2 \theta \\
 &= -\frac{1}{2} r^3 \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) - \sin \theta \\
 &= -\frac{1}{2} r^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \sin \theta.
 \end{aligned}$$

Alors

$$f^1(r, s) = \frac{d}{dr} F_1(r, s) y_1(r, s) = (6r^2 \cos^3 s \sin s - 3r^2 \cos s \sin s) \left( -\frac{1}{2} r^3 \cos^4 s \sin^2 s - \sin s \right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
 F_{20}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f^1(r, s) + F_2(r, s)] ds \\
 &= \\
 &= \frac{r}{8} (r^2 - 8).
 \end{aligned}$$

L'unique racine positive de  $F_{20}(r) = 0$  est  $r = 2\sqrt{2}$ . Comme  $\frac{d}{dr} (F_{10}(r) + \varepsilon F_{20}(r)) \Big|_{r=2\sqrt{2}} = 2\varepsilon \neq 0$ ; d'après le théorème (2.2.1), le système (2.7), pour  $0 < \varepsilon \ll 1$  suffisamment petit possède un seul cycle limite. Voir figure(2.1).

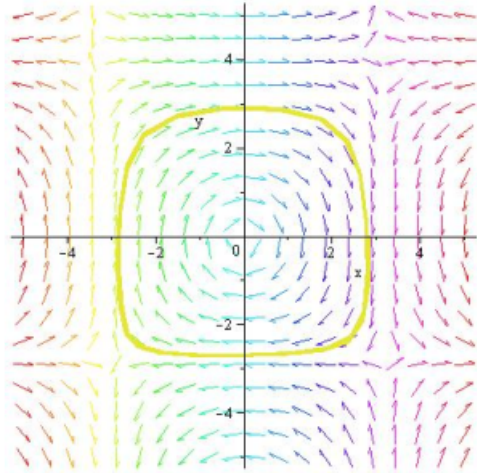


FIGURE 2.1 – Le cycle limite du système (2.7) pour  $\varepsilon = 0.1$ .

## Sur les cycles limites pour une classe de Systèmes différentiels de Kukles généralisés

La deuxième partie du 16<sup>ème</sup> problème de Hilbert, est complètement ouverte. Elle consiste en la recherche du nombre maximum et les dispositions relatives des cycles limites du champ de vecteurs :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases}$$

où  $P_n$  et  $Q_n$  sont des polynômes de degré  $n$  [[45],[10],[48] et [22]]. Même si le problème a été posé en 1900, c'est en 1987 que Ecalle et Ilyashenko ont prouvé que le champ de vecteurs polynômial possède un nombre fini de cycles limites. Les deux preuves sont un véritable (tour de force) et chacune nécessite un volume de 300 pages. Bien que le résultat de Ecalle et Ilyashenko montre que chaque champ de vecteurs polynômial individuel a un nombre fini de cycles limites, il est impossible d'en tirer une estimation uniforme sur le nombre de cycles limites. Ainsi, on sait qu'il y a un nombre fini de cycles limites, mais on n'a pas de majoration.

Ces dernières années, plusieurs articles ont été publiés sur les cycles limites de systèmes différentiels polynômiaux planaires. La raison principale de cette étude est le seizième problème, non résolu, de Hilbert. En particulier, un grand nombre d'articles sont consacrés aux cycles limites qui bifurquent en orbites périodiques à partir d'un centre.

Considérons le système différentiel polynômial de Kukles suivant

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x + Q(x, y), \end{aligned} \tag{3.1}$$

où  $Q(x, y)$  est polynômial avec des coefficients réels d'un degré donné.

Il a été initié par Kukles [27], donnant les conditions nécessaires et suffisantes dans le cas où  $Q(x, y)$  est un polynôme de degré  $n$ . Ce système cubique sans le terme  $y^3$  est appelé système Kukles réduit. Christopher et Lloyd [13] a présenté certains systèmes qui donnent au maximum cinq cycles limites bifurquant depuis l'origine. Dans [18], Grin et Schneider a étudié les conditions d'au plus un cycle

limite bifurquant de la origine pour (3.1) avec  $n = 3$ . Wu etc. a prouvé que le système de Kukles avec deux fines les foyers peuvent générer au moins six cycles limites en[44]. Dans [39], Sadovskii a résolu le problème problème de mise au point pour ce système avec un  $a_2a_7 \neq 0$  et a prouvé qu'il peut avoir sept limites cycles. Dans [38] apparaît une description des bifurcations locales des périodes critiques le voisinage d'un centre non dégénéré des systèmes de Kukles réduits. Liu etc dans [47] a introduit une classe de systèmes cubiques (3.1) avec une parabole invariante qui coexiste avec un centre sous des paramètres donnés. Dans [24], Chavarriga etc. a décrit un système cubique (3.1) qui a une hyperbole invariante pour coexister avec deux cycles limites.Par la suite, les intérêts des auteurs se sont transformés pour trouver le nombre maximum de petites cycles d'amplitude coexistant avec des ellipses invariantes. Dans [16], Giné a étudié la systèmes de la forme (3.1). Pour  $n = 4$  et  $n = 5$ , ils ont obtenu le maximum nombre de cycles de faible amplitude utilisant la méthode de calcul de Poincaré Les constantes de Liapunov voient [17]. Sáez et Szántó dans [40] a présenté une classe de quintic systèmes de la forme (3.1) ayant une ellipse invariante avec quelle petite amplitude les cycles limites bifurquant de l'origine coexistent. Dans [19], Zang etc a étudié le nombre et distribution des cycles limites pour une classe de systèmes de Kukles réduits sous cubique perturbation

Dans Llibre et Mereu [29] ont étudié par la méthode de la moyennisation le nombre des cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre linéaire  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ , du système différentiel polynômial de Kukles de type :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0y^3, \end{cases} \quad (3.2)$$

où les polynômes  $f(x), g(x)$  et  $h(x)$  sont de degrés  $n_1, n_2$  et  $n_3$  respectivement,  $d_0 \neq 0$  est un nombre réel

Dans Mellahi etc[4], en utilisant théorie de moyennisation pour étudié le nombre des cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre linéaire perturbé par une classe généralisée de systèmes différentiels de Kukles de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + l(x), \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - d_0y^3, \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $l(x), f(x), g(x)$  et  $h(x)$  sont de degrés  $m, n_1, n_2$  et  $n_3$  respectivement,  $d_0 \neq 0$  est un nombre réel

Dans ce chapitre, en utilisant la théorie de moyennisation du premier et du deuxième ordre, nous étudions le nombre maximal de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire  $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$  d'une classe de systèmes différentiels de Kukles plus généralisée que :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - l(x)y^3, \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x)$ ,  $g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x)$ ,  $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$  et  $l(x) = \varepsilon l_1(x) + \varepsilon^2 l_2(x)$  Pour chaque  $k = 1, 2$   $f_k, g_k, h_k$  et  $l_k$  sont de degrés  $n_1, n_2, n_3$

et  $n_4$  respectivement et  $\varepsilon$  est un petit paramètre

Cette étude a fait l'objet d'un article publié dans le journal .Applied Analysis and Computation

Mellahi N, Boufoul A and Makhlouf A. On The Limit Cycles For A Class Of Generalized Kukles Differential Systems .Applied Analysis and Computation .864-883 .2019 [5]

**Théorème 3.0.1.**

Pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites du système différentiel (3.4) qui bifurquent d'un centre linéaire  $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$  en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre est

$$\lambda_{1'} = \max\{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor + 1\}.$$

**Théorème 3.0.2.** Pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites du système différentiel (3.4) qui bifurquent d'un centre linéaire  $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$  en utilisant la théorie de moyennisation du deuxième ordre est

$$\lambda_{2'} = \max \left\{ \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_2 - 1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_4 - 1}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n_1 - 1}{2} \rfloor + \mu', \right. \\ \left. \lfloor \frac{n_2 - 1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n_4 - 1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor + 2, \lfloor \frac{n_3 - 1}{2} \rfloor + \mu' + 1 \right\}.$$

Où  $\mu' = \min\{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor + 1\}$ .

Dans Mellahi etc, il a été montré qu'il existe généralisées équation Kukles (3.3), comportant au moins  $\lambda_2 = \max\{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_2 - 1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1, \lfloor \frac{n_1 + 1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_3 + 3}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_2 + 1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor, \lfloor \frac{m - 1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_1 - 1}{2} \rfloor + \mu, \lfloor \frac{n_3 + 1}{2} \rfloor + \mu, 1\}$  cycles limite

Le résultat dans le théorème (3.0.2) améliore cette estimation inférieure ( $\lambda_{2'} > \lambda_2$  pour tous  $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1, n_3 \geq 1, m > 1$  et  $n_4 \geq \max\{3, n_2, m - 1\}$ ). Pour chaque fixe  $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1, n_3 \geq 1, m > 1$  il existe  $n_4' \geq \max\{3, n_2, m - 1\}$  tel que  $\lambda_{2'} > \lambda_2$  pour tout  $n_4 \geq n_4'$

**Lemme 3.0.1.**

$$J_i(\theta) = \int_0^\theta \cos^i t \sin t dt = \frac{1}{1+i} (1 - \cos^{i+1} \theta).$$

$$\tilde{J}_i(\theta) = \int_0^\theta \cos^i t \sin^3 t dt = \frac{2}{(i+1)(i+3)} - \frac{1}{1+i} \cos^{i+1} \theta + \frac{1}{i+3} \cos^{i+3} \theta$$

$$J_i(2\pi) = \tilde{J}_i(2\pi) = 0.$$

**Lemme 3.0.2.**

$$I_i(\theta) = \int_0^\theta \cos^i \theta d\theta = \begin{cases} \sum_{l=0}^k \gamma_{k,l} \sin(2l+1)\theta, & \text{si } i = 2k+1, \\ \delta_k + \sum_{l=1}^k \beta_{k,l} \sin(2l\theta), & \text{si } i = 2k. \end{cases}$$

Où

$$\delta_i = \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i}{i} \theta, \quad \gamma_{i,l} = \frac{1}{2^{2i}} \binom{2i+1}{i-l} \frac{1}{2l+1}, \quad \beta_{i,l} = \binom{2i}{i+l} \frac{1}{l}.$$

$$I_i(2\pi) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = 2k+1, \\ \frac{\pi \alpha_k}{2^{k-1} k!}, & \text{si } i = 2k, \end{cases}$$

Où

$$\alpha_k = 3 \cdot 5 \cdots (2k-1), \quad \alpha_{k+1} = (2k+1) \alpha_k$$

et

$$\begin{aligned} I_{2k+2}(2\pi) &= \frac{2k+1}{2k+2} I_{2k}(2\pi), \\ \tilde{I}_{2k}(2\pi) &= I_{2k}(2\pi) - I_{2k+2}(2\pi), \\ \tilde{\tilde{I}}_{2k}(2\pi) &= I_{2k}(2\pi) - 2I_{2k+2}(2\pi) + I_{2k+4}(2\pi). \end{aligned}$$

**Lemme 3.0.3.**

$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin(2l+1)\theta d\theta \neq 0$  si  $i$  pair et  $j$  impair,

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin(2l+1)\theta d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ impair ou } j \text{ pair}, \\ \pi C_{k,l}, & i = 2k, j = 1 \text{ et } l \geq 0, \\ \pi K_{k,l}, & i = 2k, j = 3 \text{ et } l \geq 0, \end{cases}$$

où  $C_{k,l}, K_{k,l}$  sont des constantes non nulles.

$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin(2l)\theta d\theta \neq 0$  si  $i$  et  $j$  impair,

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta \sin(2l)\theta d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } i \text{ impair ou } j \text{ pair}, \\ \pi \tilde{C}_{k,l}, & \text{si } i \text{ impair}, j = 1 \text{ et } l \geq 0, \\ \pi \tilde{K}_{k,l}, & \text{si } i \text{ impair}, j = 3 \text{ et } l \geq 0, \end{cases}$$

où  $\tilde{C}_{k,l}, \tilde{K}_{k,l}$  sont des constantes non nulles.

### 3.0.1 Preuve du théorème 3.0.1

Pour appliquer la moyennisation d'ordre un, on écrit le système (3.4), en coordonnées polaires

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \quad \text{et} \quad r > 0, \quad (3.5)$$



Posons :

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n_1} a_i x^i, g_1(x) = \sum_{i=1}^{n_2} b_i x^i, h_1(x) = \sum_{i=1}^{n_3} c_i x^i, \quad \text{et} \quad l_1(x) = \sum_{i=1}^{n_4} d_i x^i. \quad (3.6)$$

alors le système(3.4) avec  $k = 1$  peut s'écrire

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta = -r \sin \theta \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta = r \cos \theta - \varepsilon \left( \sum_{i=1}^{n_1} a_i r^i \cos^i \theta + \sum_{i=1}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin \theta \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=1}^{n_4} d_i r^{i+3} \cos^i \theta \sin^3 \theta \right). \end{cases} \quad (3.7)$$

Cela veut dire que :

$$\cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{y} = \dot{r} \cos^2 \theta + \dot{r} \sin^2 \theta =$$

$$\begin{aligned} \dot{r} = & -\varepsilon \left( \sum_{i=1}^{n_1} a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta + \sum_{i=1}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=1}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{n_4} d_i r^{i+3} \cos^i \theta \sin^4 \theta \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r \dot{\theta} \sin^2 \theta + r \dot{\theta} \cos^2 \theta &= r \dot{\theta} \\ &= r - \varepsilon \left( \sum_{i=1}^{n_1} a_i r^i \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=1}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^3 \theta + \sum_{i=1}^{n_4} d_i r^{i+3} \cos^{i+1} \theta \sin^4 \theta \right) \\ \dot{\theta} &= 1 - \frac{\varepsilon}{r} \left( \sum_{i=1}^{n_1} a_i r^i \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=1}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^3 \theta + \sum_{i=1}^{n_4} d_i r^{i+3} \cos^{i+1} \theta \sin^4 \theta \right). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \left( \sum_{i=1}^{n_1} a_i r^i \cos^i \theta \sin \theta + \sum_{i=1}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=1}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^3 \theta \right. \\ \quad \left. + \sum_{i=1}^{n_4} d_i r^{i+3} \cos^i \theta \sin^4 \theta \right), \\ \dot{\theta} = 1 - \frac{\varepsilon}{r} \left( \sum_{i=1}^{n_1} a_i r^i \cos^{i+1} \theta \sin \theta + \sum_{i=1}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^{i+1} \theta \sin^2 \theta \right. \\ \quad \left. + \sum_{i=1}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^{i+1} \theta \sin^3 \theta + \sum_{i=1}^{n_4} d_i r^{i+3} \cos^{i+1} \theta \sin^4 \theta \right). \end{cases} \quad (3.8)$$

On pose

$$\begin{aligned} R_j &= \cos^j \theta \sin \theta, \\ T_j &= \cos^j \theta \sin^2 \theta = \cos^j \theta - \cos^{j+2} \theta, \\ S_j &= \cos^j \theta \sin^3 \theta = \cos^j \theta \sin \theta - \cos^{j+2} \theta \sin \theta, \\ U_j &= \cos^j \theta \sin^4 \theta = \cos^j \theta - 2 \cos^{j+2} \theta + \cos^{j+4} \theta. \end{aligned}$$

Le système (3.8) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \left( \sum_{i=1}^{n_1} a_i R_i(\theta) r^i + \sum_{i=1}^{n_2} b_i T_i(\theta) r^{i+1} + \sum_{i=1}^{n_3} c_i S_i(\theta) r^{i+2} + \sum_{i=1}^{n_4} d_i U_i(\theta) r^{i+3} \right), \\ \dot{\theta} = 1 - \frac{\varepsilon}{r} \left( \sum_{i=1}^{n_1} a_i \cos^{i+1} \theta r^i + \sum_{i=1}^{n_2} b_i R_{i+1}(\theta) r^{i+1} + \sum_{i=1}^{n_3} c_i T_{i+1}(\theta) r^{i+2} + \sum_{i=1}^{n_4} d_i S_{i+1}(\theta) r^{i+3} \right). \end{cases} \quad (3.9)$$

Considérons maintenant  $\theta$  comme nouvelle variable indépendante, le système (3.9) s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-\varepsilon \left( \sum_{i=1}^{n_1} a_i R_i(\theta) r^i + \sum_{i=1}^{n_2} b_i T_i(\theta) r^{i+1} + \sum_{i=1}^{n_3} c_i S_i(\theta) r^{i+2} + \sum_{i=1}^{n_4} d_i U_i(\theta) r^{i+3} \right)}{1 - \frac{\varepsilon}{r} \left( \sum_{i=1}^{n_1} a_i \cos^{i+1} \theta r^i + \sum_{i=1}^{n_2} b_i R_{i+1}(\theta) r^{i+1} + \sum_{i=1}^{n_3} c_i T_{i+1}(\theta) r^{i+2} + \sum_{i=1}^{n_4} d_i S_{i+1}(\theta) r^{i+3} \right)}$$

On sait que :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + O(x^2)$$

d'où on pose

$$x = \frac{\varepsilon}{r} \left( \sum_{i=1}^{n_1} a_i \cos^{i+1} \theta r^i + \sum_{i=1}^{n_2} b_i R_{i+1}(\theta) r^{i+1} + \sum_{i=1}^{n_3} c_i T_{i+1}(\theta) r^{i+2} + \sum_{i=1}^{n_4} d_i S_{i+1}(\theta) r^{i+3} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= -\varepsilon \left( \sum_{i=1}^{n_1} a_i R_i(\theta) r^i + \sum_{i=1}^{n_2} b_i T_i(\theta) r^{i+1} + \sum_{i=1}^{n_3} c_i S_i(\theta) r^{i+2} + \sum_{i=1}^{n_4} d_i U_i(\theta) r^{i+3} \right) + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon F_1(\theta, r) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_1} a_i R_i(\theta) r^i - \sum_{i=0}^{n_2} b_i T_i(\theta) r^{i+1} - \sum_{i=0}^{n_3} c_i S_i(\theta) r^{i+2} - \sum_{i=0}^{n_4} d_i U_i(\theta) r^{i+3} \right) d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_1} a_i J_k(2\pi) r^i + \sum_{i=0}^{n_2} b_i \tilde{I}_k(2\pi) r^{i+1} + \sum_{i=0}^{n_3} c_i \tilde{J}_k(2\pi) r^{i+2} + \sum_{i=0}^{n_4} d_i \tilde{I}_k(2\pi) r^{i+3} \right). \end{aligned}$$

Où

$$J_k(2\pi) = \int_0^{2\pi} R_k(\theta) d\theta, \tilde{I}_k(2\pi) = \int_0^{2\pi} T_k(\theta) d\theta, \tilde{J}_k(2\pi) = \int_0^{2\pi} S_k(\theta) d\theta, \tilde{I}_k(2\pi) = \int_0^{2\pi} U_k(\theta) d\theta.$$

Pour calculer l'expression exacte de  $F_{10}$ , nous utilisons les expressions des intégrales de lemme (3.0.1) et lemme (3.0.2). Nous obtenons

$$\begin{aligned} J_i(2\pi) &= \tilde{J}_k(2\pi) = 0 \\ \tilde{I}_{2k}(2\pi) &= I_{2k}(2\pi) - I_{2k+2}(2\pi) = \left(1 - \frac{2k+1}{2k+2}\right) I_{2k}(2\pi) \\ &= \left(1 - \frac{2k+1}{2k+2}\right) \frac{\pi \alpha_k}{2^{k-1} k!} = \frac{\pi \alpha_k}{2^k (k+1)!} \\ \tilde{I}_{2k}(2\pi) &= I_{2k}(2\pi) - 2I_{2k+2}(2\pi) + I_{2k+4}(2\pi) = \left(1 - \frac{2k+1}{k+1} + \left(\frac{2k+3}{2k+4}\right) \left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)\right) \frac{\pi \alpha_k}{2^k (k+1)!} \\ &= \frac{3\pi \alpha_k}{2^{k+1} (k+2)} \end{aligned}$$

et  $I_i(2\pi) = 0$  si  $i$  impaire

Alors

$$F_{10}(r) = -\frac{r}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \tilde{I}_{2i}(2\pi) b_{2i} r^{2i} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} \tilde{I}_{2i}(2\pi) d_{2i} r^{2i+2} \right) \quad (3.10)$$

$$= -r \left( \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} b_{2i} r^{2i} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} \frac{3\alpha_i}{2^{i+2}(i+2)!} d_{2i} r^{2i+2} \right). \quad (3.11)$$

où

$$\alpha_k = 3.5 \dots (2k-1), \alpha_{k+1} = (2k+1)\alpha_k.$$

Donc le polynôme  $F_{10}$  a au plus  $\max\{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor + 1\}$  racines positives.

Par conséquent, le théorème (3.0.1) est prouvé

### 3.0.2 preuve théorème 3.0.2

Nous écrivons  $f_1, g_1, h_1$  et  $l_1$  comme dans (3.23), et

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^{n_1} p_i x^i, g_2(x) = \sum_{i=1}^{n_2} q_i x^i, h_2(x) = \sum_{i=1}^{n_3} s_i x^i, \quad \text{et} \quad l_2(x) = \sum_{i=1}^{n_4} w_i x^i,$$

la formulation du système (3.4) permet de passer des coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  au coordonnées polaires  $(r, \theta)$  on pose

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta), \\ y = r \sin(\theta). \end{cases}$$

alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta = -r \sin \theta, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta = r \cos \theta - \varepsilon \left( \sum_{i=1}^{n_1} a_i r^i \cos^i \theta + \sum_{i=1}^{n_2} b_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin \theta \right. \\ \quad \left. + \sum_{i=1}^{n_3} c_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=1}^{n_4} d_i r^{i+3} \cos^i \theta \sin^3 \theta \right) \\ \quad - \varepsilon^2 \left( \sum_{i=1}^{n_1} p_i r^i \cos^i \theta + \sum_{i=1}^{n_2} q_i r^{i+1} \cos^i \theta \sin \theta \right. \\ \quad \left. + \sum_{i=1}^{n_3} s_i r^{i+2} \cos^i \theta \sin^2 \theta + \sum_{i=1}^{n_4} w_i r^{i+3} \cos^i \theta \sin^3 \theta \right). \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Alors le système(3.4) peut s'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = -\varepsilon \left( \sum_{i=1}^{n_1} a_i R_i(\theta) r^i + \sum_{i=1}^{n_2} b_i T_i(\theta) r^{i+1} + \sum_{i=1}^{n_3} c_i S_i(\theta) r^{i+2} + \sum_{i=1}^{n_4} d_i U_i(\theta) r^{i+3} \right) \\ \quad - \varepsilon^2 \left( \sum_{i=1}^{n_1} p_i R_i(\theta) r^i + \sum_{i=1}^{n_2} q_i T_i(\theta) r^{i+1} + \sum_{i=1}^{n_3} s_i S_i(\theta) r^{i+2} + \sum_{i=1}^{n_4} w_i U_i(\theta) r^{i+3} \right), \\ \dot{\theta} = 1 - \frac{\varepsilon}{r} \left( \sum_{i=1}^{n_1} a_i \cos^{i+1} \theta r^i + \sum_{i=1}^{n_2} b_i R_{i+1}(\theta) r^{i+1} + \sum_{i=1}^{n_3} c_i T_{i+1}(\theta) r^{i+2} + \sum_{i=1}^{n_4} d_i S_{i+1}(\theta) r^{i+3} \right) \\ \quad - \frac{\varepsilon^2}{r} \left( \sum_{i=1}^{n_1} p_i \cos^{i+1} \theta r^i + \sum_{i=1}^{n_2} q_i R_{i+1}(\theta) r^{i+1} + \sum_{i=1}^{n_3} s_i T_{i+1}(\theta) r^{i+2} + \sum_{i=1}^{n_4} w_i S_{i+1}(\theta) r^{i+3} \right). \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Considérons maintenant  $\theta$  comme une variable indépendante, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \frac{-\varepsilon A - \varepsilon^2 B}{1 - \frac{1}{r}(\varepsilon C + \varepsilon^2 D)} \\ &= -\varepsilon A - \varepsilon^2 \left( B + \frac{1}{r} AC \right) \\ &= \varepsilon F_1(\theta, r) + \varepsilon^2 F_2(\theta, r) + O(\varepsilon^3).\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}A &= \sum_{i=1}^{n_1} a_i R_i(\theta) r^i + \sum_{i=1}^{n_2} b_i T_i(\theta) r^{i+1} + \sum_{i=1}^{n_3} c_i S_i(\theta) r^{i+2} + \sum_{i=1}^{n_4} d_i U_i(\theta) r^{i+3}, \\ B &= \sum_{i=1}^{n_1} p_i R_i(\theta) r^i + \sum_{i=1}^{n_2} q_i T_i(\theta) r^{i+1} + \sum_{i=1}^{n_3} s_i S_i(\theta) r^{i+2} + \sum_{i=1}^{n_4} w_i U_i(\theta) r^{i+3}, \\ C &= \sum_{i=1}^{n_1} a_i \cos^{i+1} \theta r^i + \sum_{i=1}^{n_2} b_i R_{i+1}(\theta) r^{i+1} + \sum_{i=1}^{n_3} c_i T_{i+1}(\theta) r^{i+2} + \sum_{i=1}^{n_4} d_i S_{i+1}(\theta) r^{i+3}, \\ D &= \sum_{i=1}^{n_1} p_i \cos^{i+1} \theta r^i + \sum_{i=1}^{n_2} q_i R_{i+1}(\theta) r^{i+1} + \sum_{i=1}^{n_3} s_i T_{i+1}(\theta) r^{i+2} + \sum_{i=1}^{n_4} w_i S_{i+1}(\theta) r^{i+3}.\end{aligned}$$

et

$$F_1(\theta, r) = - \sum_{i=1}^{n_1} a_i R_i(\theta) r^i - \sum_{i=1}^{n_2} b_i T_i(\theta) r^{i+1} - \sum_{i=1}^{n_3} c_i S_i(\theta) r^{i+2} - \sum_{i=1}^{n_4} d_i U_i(\theta) r^{i+3}, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}F_2(\theta, r) &= - \sum_{i=1}^{n_1} p_i R_i(\theta) r^i - \sum_{i=1}^{n_2} q_i T_i(\theta) r^{i+1} - \sum_{i=1}^{n_3} s_i S_i(\theta) r^{i+2} - \sum_{i=1}^{n_4} w_i U_i(\theta) r^{i+3} \\ &\quad - \frac{1}{r} \left( \sum_{i=1}^{n_1} a_i R_i(\theta) r^i + \sum_{i=1}^{n_2} b_i T_i(\theta) r^{i+1} + \sum_{i=1}^{n_3} c_i S_i(\theta) r^{i+2} + \sum_{i=1}^{n_4} d_i U_i(\theta) r^{i+3} \right) \\ &\quad \times \left( \sum_{i=1}^{n_1} a_i \cos^{i+1} \theta r^i + \sum_{i=1}^{n_2} b_i R_{i+1}(\theta) r^{i+1} + \sum_{i=1}^{n_3} c_i T_{i+1}(\theta) r^{i+2} + \sum_{i=1}^{n_4} d_i S_{i+1}(\theta) r^{i+3} \right).\end{aligned} \quad (3.15)$$

Afin de calculer  $F_{20}(r)$  nous avons besoin que  $F_{10}(r)$  soit identique à zéro (3.10),

$$\begin{cases} b_{2k} = \frac{-3}{2k-1} d_{2k-2}, & 0 \leq k \leq \mu', \\ b_0 = b_{2k} = d_{2k-2} = 0, & \mu' + 1 \leq k \leq \lambda'_1. \end{cases} \quad (3.16)$$

Où

$$\mu' = \min\left\{\left[\frac{n_2}{2}\right], \left[\frac{n_4}{2}\right] + 1\right\} \quad \lambda'_1 = \max\left\{\left[\frac{n_2}{2}\right], \left[\frac{n_4}{2}\right] + 1\right\}.$$

Tout d'abord, en utilisant (3.16) et en remplaçant dans (3.14) on obtient

$$\begin{aligned}
F_1(\theta, r) &= - \sum_{i=0}^{n_1} r^i a_i R_i(\theta) - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+2} b_{2k+1} T_{2k+1}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} S_i(\theta) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} r^{2k+4} d_{2k+1} U_{2k+1}(\theta) - \sum_{k=0}^{\mu'} r^{2k+1} b_{2k} T_{2k} + r^{2k+1} d_{2k-2} U_{2k-2} \\
&= - \sum_{i=0}^{n_1} r^i a_i R_i(\theta) - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+2} b_{2k+1} T_{2k+1}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} S_i(\theta) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} r^{2k+4} d_{2k+1} U_{2k+1}(\theta) - \sum_{k=0}^{\mu'} r^{2k+1} d_{2k-2} \left( \frac{-3}{2k-1} T_{2k} + U_{2k-2} \right). \\
&= - \sum_{i=0}^{n_1} r^i a_i R_i(\theta) - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+2} b_{2k+1} T_{2k+1}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} S_i(\theta) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} r^{2k+4} d_{2k+1} U_{2k+1}(\theta) - \sum_{k=0}^{\mu'} r^{2k+1} d_{2k-2} \left( \frac{-3}{2k-1} (\cos^{2k} \theta - \cos^{2k+2} \theta) \right. \\
&\quad \left. + (\cos^{2k-2} \theta - 2 \cos^{2k} \theta + \cos^{2k+2} \theta) \right) \\
&= - \sum_{i=0}^{n_1} r^i a_i R_i(\theta) - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+2} b_{2k+1} T_{2k+1}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} S_i(\theta) - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} r^{2k+4} d_{2k+1} \\
&\quad \times U_{2k+1}(\theta) - \sum_{k=0}^{\mu'} r^{2k+1} d_{2k-2} \left( \cos^{2k-2} \theta - \frac{4k+1}{2k-1} \cos^{2k} \theta + \frac{2k+2}{2k-1} \cos^{2k+2} \theta \right).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1(\theta, r)}{\partial r} &= - \sum_{i=0}^{n_1} i r^{i-1} a_i R_i(\theta) - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2k+2) r^{2k+1} b_{2k+1} T_{2k+1}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_3} (i+2) c_i \\
&\quad \times r^{i+1} S_i(\theta) - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} (2k+4) r^{2k+3} d_{2k+1} U_{2k+1}(\theta) - \sum_{k=0}^{\mu'} (2k+1) r^{2k} d_{2k-2} \\
&\quad \times \left( \cos^{2k-2} \theta - \frac{4k+1}{2k-1} \cos^{2k} \theta + \frac{2k+2}{2k-1} \cos^{2k+2} \theta \right).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

ensuite, en utilisant les intégrales de lemme(3.0.1)et lemme(3.0.2) , lemme(3.0.3) nous obtenons

$$\begin{aligned}
y(r, \theta) &= \int_0^\theta F_1(s, r) ds \\
&= - \sum_{i=0}^{n_1} r^i a_i J_i(\theta) - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2i+2} b_{2i+1} \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\gamma}_{i,l} \sin(2l+1)\theta - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{(i+2)} \tilde{J}_i(\theta) \\
&\quad - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} r^{2i+4} d_{2i+1} \sum_{l=0}^{i+2} \tilde{\gamma}_{i,l} \sin(2l+1)\theta - \sum_{i=0}^{\mu} r^{2i+1} d_{2i-2} - \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\beta}_{i,l} \sin(2l)\theta,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Où

$$\tilde{\gamma}_{i,l} = \begin{cases} \gamma_{i,l} - \gamma_{i+1,l}, & 0 \leq l \leq i, \\ -\gamma_{i+1,i+1}, & l = i+1. \end{cases}, \quad \tilde{\gamma}_{i,l} = \begin{cases} \gamma_{i,l} - 2\gamma_{i+1,l} + \gamma_{i+2,l}, & 0 \leq l \leq i, \\ -2\gamma_{i+1,i+1} + \gamma_{i+2,i+1}, & l = i+1, \\ \gamma_{i+2,i+2}, & l = i+2. \end{cases}$$

et

$$\tilde{\beta}_{i,l} = \begin{cases} \beta_{i-1} - \frac{4i+1}{2i-1}\beta_{i,l} + \frac{2i+1}{2i-1}\beta_{i+1,l}, & 0 \leq l \leq i-1, \\ -\frac{4i+1}{2i-1}\beta_{i,i} + \frac{2i+1}{2i-1}\beta_{i+1,i}, & l = i, \\ \frac{2i+1}{2i-1}\beta_{i+1,i+1}, & l = i+1. \end{cases}$$

Maintenant, nous déterminons la fonction correspondante

$$F_{20}(r) = F_{20}^1(r) + F_{20}^2(r),$$

avec

$$F_{20}^1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dF_1(r, \theta)}{dr} y(r, \theta) d\theta,$$

$$F_{20}^2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta.$$

Dans les lemmes qui suivent, nous calculons les intégrales  $F_{20}^1$  et  $F_{20}^2$

**Lemme 3.0.4.** *L'intégrale  $F_{20}^1(r)$  est un polynôme en  $r$  donnée par :*

$$\begin{aligned} F_{20}^1(r) &= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} a_{2s} b_{2k+1} r^{2s+2k+1} M_1^{s,k} + \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_{2s} b_{2k+1} r^{2s+2k+3} M_2^{s,k} \\ &+ \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\mu} a_{2s+1} d_{2k-2} r^{2s+2k+1} M_3^{s,k} + \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\mu} c_{2s+1} d_{2k-2} r^{2s+2k+3} M_4^{s,k} \\ &+ \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} a_{2s} d_{2k+1} r^{2s+2k+3} M_5^{s,k} + \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} c_{2s} b_{2k+1} r^{2s+2k+5} M_6^{s,k}, \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} M_1^{s,k} &= s \sum_{l=0}^{k+1} \tilde{\gamma}_{k,l} C_{s,l} - \frac{(k+1)\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+1}(2s+1)(k+s+2)!}, \\ M_2^{s,k} &= (s+1) \sum_{l=0}^{k+1} \tilde{\gamma}_{k,l} K_{s,l} - \frac{(k+1)(4k+10s+15)\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+2}(2s+1)(2s+3)(k+s+3)!}, \\ M_3^{s,k} &= \frac{2s+1}{2} \sum_{l=0}^{k+1} \tilde{\beta}_{k,l} \tilde{C}_{s,l} - \frac{3(2k+1)\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+2}(2k-1)(k+s+2)!}, \\ M_4^{s,k} &= \frac{2s+3}{2} \sum_{l=0}^{k+1} \tilde{\beta}_{k,l} \tilde{C}_{s,l} - \frac{15(2k+1)\alpha_{k+s}}{2^{k+s+3}(2k-1)(k+s+3)!}, \\ M_5^{s,k} &= s \sum_{l=0}^{k+1} \tilde{\gamma}_{k,l} C_{s,l} - \frac{3(k+2)\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+2}(2s+1)(k+s+3)!}, \\ M_6^{s,k} &= (s+1) \sum_{l=0}^{k+1} \tilde{\gamma}_{k,l} K_{s,l} - \frac{3(k+2)(4k+14s+21)\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+3}(2s+1)(2s+3)(k+s+4)!}. \end{aligned}$$

**Preuve.**D'après les expressions (3.18) et (3.19) nous obtenons

$$\begin{aligned}
F_{20}^1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dF_1(r, \theta)}{dr} \cdot y(r, \theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_1} i r^{i-1} a_i R_i(\theta) - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2k+2) r^{2k+1} b_{2k+1} T_{2k+1}(\theta) - \sum_{i=0}^{n_3} (i+2) c_i \right. \\
&\quad \times r^{i+1} S_i(\theta) - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} (2k+4) r^{2k+3} d_{2k+1} U_{2k+1}(\theta) - \sum_{k=0}^{\mu} (2k+1) r^{2k} d_{2k-2} \\
&\quad \left. \times \left( \cos^{2k-2} \theta - \frac{4k+1}{2k-1} \cos^{2k} \theta + \frac{2k+2}{2k-1} \cos^{2k+2} \theta \right) \right) y(r, \theta) d\theta.
\end{aligned}$$

alors

$$F_{20}^1(r) = N_1(r) + N_2(r) + N_3(r) + N_4(r) + N_5(r),$$

Où

$$\begin{aligned}
N_1(r) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1} R_i(\theta) y_1(\theta, r) d\theta, \\
N_2(r) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2k+2) b_{2k+1} r^{2k+1} T_{2k+1}(\theta) y_1(\theta, r) d\theta, \\
N_3(r) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{n_2} (i+2) c_i r^{i+1} S_i(\theta) y_1(\theta, r) d\theta, \\
N_4(r) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} (2k+4) r^{2k+3} d_{2k+1} U_{2k+1}(\theta) y_1(\theta, r) d\theta, \\
N_5(r) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\mu} (2k+1) r^{2k} d_{2k-2} \left( \cos^{2k-2} \theta - \frac{4k+1}{2k-1} \cos^{2k} \theta + \frac{2k+2}{2k-1} \cos^{2k+2} \theta \right) y_1(\theta, r) d\theta.
\end{aligned}$$

Pour simplifier l'expression du polynôme  $N_1(r)$ , nous utilisons les intégrales de lemme(3.0.1) et lemme(3.0.3). On a

$$\begin{aligned}
N_1(r) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \left( \sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1} R_i(\theta) \right) \left( - \sum_{j=0}^{n_1} a_j r^j J_j(\theta) \right) + \left( \sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1} R_i(\theta) \right) \left( - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2j+2} b_{2j+1} \right. \right. \\
&\quad \times \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} \sin(2l+1)\theta \left. \right) + \left( \sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1} R_i(\theta) \right) \left( - \sum_{j=0}^{n_1} c_j r^{j+2} \tilde{J}_j(\theta) \right) + \left( \sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1} R_i(\theta) \right) \\
&\quad \times \left( - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} r^{2j+4} d_{2j+1} \sum_{l=0}^{j+2} \tilde{\gamma}_{j,l} \sin(2l+1)\theta \right) + \left( \sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1} R_i(\theta) \right) \left( - \sum_{i=0}^{\mu} r^{2i+1} d_{2i-2} \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\beta}_{i,l} \sin(2l)\theta \right) \left. \right].
\end{aligned}$$

on obtient

$$N_1(r) = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1.$$

où

$$\begin{aligned} (a_1) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1} R_i(\theta) \right) \left( - \sum_{j=0}^{n_1} a_j r^j J_j(\theta) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_1} \frac{i}{1+j} a_i a_j r^{i+j-1} (R_i(\theta) - R_{i+j+1}(\theta)) \right) \\ &= \left( \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_1} \frac{i}{1+j} a_i a_j r^{i+j-1} (J_i(2\pi) - J_{i+j+1}(2\pi)) \right) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b_1) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1} R_i(\theta) \right) \left( - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2j+2} b_{2j+1} \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} \sin(2l+1)\theta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} i r^{i+2j+1} a_i b_{2j+1}(\theta) \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} \int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin(\theta) \sin(2l+1)\theta \right) \\ &= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} a_{2s} b_{2k+1} s \sum_{l=0}^{k+1} \tilde{\gamma}_{k,l} C_{s,l} r^{2i+2j+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c_1) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1} R_i(\theta) \right) \left( - \sum_{j=0}^{n_3} c_j r^{j+2} \tilde{J}_j(\theta) \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_3} i a_i r^{i+j+1} c_j \left( \frac{2}{(j+1)(j+3)} \int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin(\theta) d\theta - \frac{1}{1+j} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+1}(\theta) \sin(\theta) d\theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{j+3} \int_0^{2\pi} \cos^{i+j+3}(\theta) \sin(\theta) d\theta \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_3} i a_i r^{i+j+1} c_j \left( \frac{2}{(j+1)(j+3)} J_i(2\pi) - \frac{1}{1+j} J_{i+j+1}(2\pi) + \frac{1}{j+3} J_{i+j+3}(2\pi) \right) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d_1) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1} R_i(\theta) \right) \left( - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} r^{2j+4} d_{2j+1} \sum_{l=0}^{j+2} \tilde{\gamma}_{j,l} \sin(2l+1)\theta \right) \\ &= \frac{-1}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1} \right) \left( - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} r^{2j+4} d_{2j+1} \sum_{l=0}^{j+2} \tilde{\gamma}_{j,l} \int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin(\theta) \sin(2l+1)\theta \right) \\ &= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} a_{2s} d_{2k+1} s \sum_{l=0}^{k+2} \tilde{\gamma}_{k,l} C_{s,l} r^{2s+2k+1}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
(e_1) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_1} i a_i r^{i-1} R_i(\theta) \right) \left( - \sum_{i=0}^{\mu} r^{2i+1} d_{2i-2} \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\beta}_{i,l} \sin(2l)\theta \right). \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{k=0}^{\mu} i a_i d_{2k-2} r^{i+2k} \sum_{l=1}^{k+1} \tilde{\beta}_{k,l} \int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin(\theta) \sin(2l)\theta \right) \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{n_1-1}{2}} \sum_{k=0}^{\mu} \frac{2s+1}{2} a_{2s+1} d_{2k-2} \sum_{l=1}^{k+1} \tilde{\beta}_{k,l} \tilde{C}_{k,l} r^{2s+2k+1}.
\end{aligned}$$

Donc

$$N_1(r) = b_1 + d_1 + e_1.$$

L'intégrale  $N_2(r)$  est un polynôme de la variable  $r$  donnée par

$$N_2(r) = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + e_2,$$

en utilisant le lemme(3.0.2) et lemme(3.0.2),lemme(3.0.3) on trouve

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2k+2) b_{2k+1} r^{2k+1} T_{2k+1}(\theta) \right) \left( - \sum_{j=0}^{n_1} r^j a_j J_j(\theta) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{n_1} (2k+2) b_{2k+1} a_j r^{2k+j+1} \int_0^{2\pi} T_{2k+1}(\theta) J_j(\theta) d\theta \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{n_1} (2k+2) b_{2k+1} a_j r^{2k+j+1} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+j} (\cos^{2k+1} - \cos^{2k+3} - \cos^{2k+j+2} + \cos^{2k+j+4}) d\theta \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} (2k+2) b_{2k+1} a_{2s} r^{2k+2s+1} \frac{1}{1+2s} (-I_{2k+2s+2}(2\pi) + I_{2k+2s+4}(2\pi)) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} (2k+2) b_{2k+1} a_{2s} r^{2k+2s+1} \frac{1}{1+2s} \left( -\frac{\pi \alpha_{k+s+1}}{2^{k+s}(k+s+1)!} + \frac{\pi \alpha_{k+s+2}}{2^{k+s+1}(k+s+2)!} \right) \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} a_{2s} b_{2k+1} \frac{-(k+1) \alpha_{k+s+1}}{2_{k+s+1} (2s+1)(k+s+2)!} r^{2s+2k+1}. \\
(b_2) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2k+2) b_{2k+1} r^{2k+1} T_{2k+1}(\theta) \right) \left( - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2j+2} b_{2j+1} \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} \sin(2l+1)\theta \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2k+2) b_{2k+1} b_{2j+1} r^{2k+2j+3} \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} \int_0^{2\pi} (\cos^{2k+1}(\theta) \sin^2(\theta) \sin(2l+1)\theta) d\theta \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c_2) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2k+2)b_{2k+1}r^{2k+1}T_{2k+1}(\theta) \right) \left( - \sum_{i=0}^{n_3} r^{i+2}c_i\tilde{J}_i(\theta) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{n_3} (2k+2)b_{2k+1}c_i r^{2k+i+3} \int_0^{2\pi} (T_{2k+1}(\theta)\tilde{J}_i(\theta))d\theta \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} (2k+2)b_{2k+1}c_i r^{2k+i+3} \left( \frac{-1}{2s+1} I_{2k+2s+2}(2\pi) + \frac{4s+4}{(2s+3)(2s+1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times I_{2k+2s+4}(2\pi) - \frac{1}{2s+3} I_{2k+2s+6}(2\pi) \right) \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_{2s} b_{2k+1} \frac{-(k+1)(4k+10s+15)\alpha_{k+s+1}}{2_{k+s+2}(2s+1)(2s+3)(k+s+3)!} r^{2s+2k+3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d_2) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2k+2)b_{2k+1}r^{2k+1}T_{2k+1}(\theta) \right) \left( - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} r^{2j+4}d_{2j+1} \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} \sin(2l+1)\theta \right) \\
&= \frac{-1}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2k+2)b_{2k+1}r^{2k+1} \right) \left( - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} r^{2j+4}d_{2j+1} \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} \int_0^{2\pi} \cos^{2k+1}(\theta) \sin^2(\theta) \sin(2l+1)\theta \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(e_2) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2k+2)b_{2k+1}r^{2k+1}T_{2k+1}(\theta) \right) \left( - \sum_{i=0}^{\mu} r^{2i+1}d_{2i-2} \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\beta}_{i,l} \sin(2l)\theta \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{\mu} (2k+2)b_{2k+1}d_{2i-2}r^{2k+2i+2} \sum_{l=1}^{i+1} \tilde{\beta}_{i,l} \int_0^{2\pi} \cos^{2k+1}(\theta) \sin^2(\theta) \sin(2l)\theta d\theta \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nous avons que la somme des intégrales  $(a_2), (c_2)$  est le polynôme  $N_2(r)$ .

Pour trouve l'expression du polynôme  $N_3(r) = a_3 + b_3 + c_3 + d_3 + e_3$ , En utilisant les résultats de lemme(3.0.1) et lemme(3.0.3) . On a

$$\begin{aligned}
(a_3) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_3} (i+2)c_i r^{i+1} S_i(\theta) \right) \left( - \sum_{j=0}^{n_1} a_j r^j J_j(\theta) \right) d\theta. \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{n_1} (i+2)a_j c_i r^{i+j+1} \frac{1}{1+j} \int_0^{2\pi} (\cos^i(\theta) \sin(\theta) - \cos^{i+j+1}(\theta) \sin(\theta) \right. \\
&\quad \left. - \cos^{i+j+2}(\theta) \sin(\theta) + \cos^{i+j+3}(\theta) \sin(\theta)) d\theta \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{n_1} (i+2) a_j c_i r^{i+j+1} \frac{1}{1+j} (J_i(2\pi) - J_{i+j+1}(2\pi) - J_{i+j+2}(2\pi) + J_{i+j+3}(2\pi)) \right) \\
&= 0. \\
(b_3) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_3} (i+2) c_i r^{i+1} S_i(\theta) \right) \left( - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+2} b_{2k+1} \sum_{l=0}^{k+1} \tilde{\gamma}_{k,l} \sin(2l+1)\theta \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (i+2) c_i b_{2k+1} r^{i+2k+3} \right) \left( \sum_{l=0}^{k+1} \tilde{\gamma}_{k,l} \int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^3(\theta) \sin(2l+1)\theta \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (s+1) \sum_{l=0}^{k+1} \tilde{\gamma}_{k,l} K_{s,l} r^{2s+2k+3}. \\
(c_3) &= \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_3} (i+2) c_i r^{i+1} S_i(\theta) \right) \left( - \sum_{j=0}^{n_3} c_j r^{j+2} \tilde{J}_j(\theta) \right) \\
&= \left( - \sum_{j=0}^{n_3} \sum_{i=0}^{n_3} c_j r^{j+i+3} (i+2) c_i \int_0^{2\pi} S_i(\theta) \tilde{J}_j(\theta) \right) = 0. \\
(d_3) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_3} (i+2) c_i r^{i+1} S_i(\theta) \right) \left( - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} r^{2k+4} d_{2k+1} \sum_{l=0}^{k+2} \tilde{\gamma}_{k,l} \sin(2l+1)\theta \right) \\
&= \frac{-1}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_3} (i+2) c_i r^{i+1} \right) \left( - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} r^{2k+4} d_{2k+1} \sum_{l=0}^{k+2} \tilde{\gamma}_{k,l} \int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^3(\theta) \sin(2l+1)\theta \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} c_{2s} d_{2k+1} (s+1) \sum_{l=0}^{k+1} \tilde{\gamma}_{k,l} K_{s,l} r^{2s+2k+5}. \\
(e_3) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_3} (i+2) c_i r^{i+1} S_i(\theta) \right) \left( - \sum_{k=0}^{\mu} r^{2k+1} d_{2k-2} \sum_{l=1}^{k+1} \tilde{\beta}_{k,l} \sin(2l)\theta \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \sum_{K=0}^{\mu} c_{2s+1} d_{2k-2} \frac{2s+3}{2} \sum_{l=1}^{k+1} \tilde{\beta}_{k,l} \tilde{K}_{s,l} r^{2s+2k+3}.
\end{aligned}$$

alors

$$N_3(r) = b_3 + d_3 + e_3.$$

pour le calcul du polynôme  $N_4(r)$  En utilisant les résultats de lemme(3.0.1) et

lemme(3.0.2),lemme(3.0.3) nous avons

$$\begin{aligned}
(a_4) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} (2k+4)r^{2k+3} d_{2k+1} U_{2k+1}(\theta) \right) \left( - \sum_{j=0}^{n_1} a_j r^j J_j(\theta) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} (2k+4)r^{2k+2s+3} d_{2k+1} a_{2s} \int_0^{2\pi} U_{2k+1}(\theta) J_{2s}(\theta) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} (2k+4)r^{2k+2s+3} d_{2k+1} a_{2s} \frac{-1}{2s+1} (I_{2k+2s+2}(2\pi) - 2I_{2k+2s+4}(2\pi) + I_{2k+2s+6}(2\pi)) \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{K=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} a_{2s} d_{2k+1} \frac{-3(k+2)\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+2}(2s+1)(k+s+3)!} r^{2s+2k+3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b_4) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} (2k+4)r^{2k+3} d_{2k+1} U_{2k+1}(\theta) \right) \left( - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2j+2} b_{2j+1} \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} \sin(2l+1)\theta \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} (2k+4)r^{2k+2j+5} b_{2j+1} d_{2k+1} \right) \left( \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} \int_0^{2\pi} U_{2k+1}(\theta) \sin(2l+1)\theta \right) d\theta \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c_4) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} (2k+4)r^{2k+3} d_{2k+1} U_{2k+1}(\theta) \right) \left( - \sum_{j=0}^{n_3} c_j r^{i+2} \tilde{J}_i(\theta) \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{K=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} c_{2s} d_{2k+1} \frac{-3(k+2)(4k+14s+21)\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+3}(2s+1)(2s+3)(k+s+4)!} r^{2s+2k+5}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d_4) &= \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} (2k+4)r^{2k+3} d_{2k+1} U_{2k+1}(\theta) \right) \left( - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} r^{2j+4} d_{2j+1} \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} \sin(2l+1)\theta \right) = 0. \\
&= \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} (2k+4)r^{2k+3} d_{2k+1} \right) \left( - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} r^{2j+4} d_{2j+1} \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} \int_0^{2\pi} U_{2k+1}(\theta) \sin(2l+1)\theta \right) = 0.
\end{aligned}$$

$$(e_4) = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} (2k+4)r^{2k+3} d_{2k+1} U_{2k+1}(\theta) \right) \left( - \sum_{i=0}^{\mu} r^{2i+1} d_{2i-2} \sum_{l=0}^{i+1} \tilde{\beta}_{i,l} \sin(2l)\theta \right) = 0.$$

Nous avons que la somme des intégrales  $(a_4), (c_4)$  est le polynôme  $N_4(r)$ .

Enfin, pour le calcul du polynôme  $N_5(r)$ , en utilisant les intégrales

de lemme(3.0.2) et lemme(3.0.3)

$$(a_5) = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\mu} (2k+1)r^{2k} d_{2k-2} \left( \cos^{2k-2} \theta - \frac{4k+1}{2k-1} \cos^{2k} + \frac{2k+2}{2k-1} \cos^{2k+2} \theta \right) \right) \\ \times \left( - \sum_{j=0}^{n_1} a_j r^j J_j(\theta) \right)$$

$$= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\mu} a_{2s+1} d_{2k-2} \frac{3(2k+1)\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+2}(2k-1)(k+s+2)!} r^{2s+2k+1}.$$

$$(b_5) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\mu} (2k+1)r^{2k} d_{2k-2} \left( \cos^{2k-2} \theta - \frac{4k+1}{2k-1} \cos^{2k} + \frac{2k+2}{2k-1} \cos^{2k+2} \theta \right) \right)$$

$$\times \left( - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2j+2} b_{2j+1} \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} \sin(2l+1)\theta \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2k+1)r^{2k+2j+2} b_{2j+1} d_{2k-2} \right)$$

$$\times \left( \sum_{l=0}^{j+1} \tilde{\gamma}_{j,l} \int_0^{2\pi} \left( \cos^{2k-2} \theta - \frac{4k+1}{2k-1} \cos^{2k} + \frac{2k+2}{2k-1} \cos^{2k+2} \theta \right) \sin(2l+1)\theta d\theta \right)$$

$$= 0.$$

$$(c_5) = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\mu} (2k+1)r^{2k} d_{2k-2} \left( \cos^{2k-2} \theta - \frac{4k+1}{2k-1} \cos^{2k} + \frac{2k+2}{2k-1} \cos^{2k+2} \theta \right) \right)$$

$$\times \left( - \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} \tilde{J}_j(\theta) \right)$$

$$= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\mu} c_{2s+1} d_{2k-2} \frac{15(2k+1)\alpha_{k+s}}{2^{k+s+3}(2k-1)(k+s+3)!} r^{2s+2k+3}.$$

$$(d_5) = \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\mu} (2k+1)r^{2k} d_{2k-2} \left( \cos^{2k-2} \theta - \frac{4k+1}{2k-1} \cos^{2k} + \frac{2k+2}{2k-1} \cos^{2k+2} \theta \right) \right)$$

$$\times \left( - \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} r^{2j+4} d_{2j+1} \sum_{l=0}^{j+2} \tilde{\gamma}_{j,l} \sin(2l+1)\theta \right) = 0.$$

$$(e_5) = \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\mu} (2k+1)r^{2k} d_{2k-2} \left( \cos^{2k-2} \theta - \frac{4k+1}{2k-1} \cos^{2k} + \frac{2k+2}{2k-1} \cos^{2k+2} \theta \right) \right)$$

$$\times \left( - \sum_{i=0}^{\mu} r^{2i+1} d_{2i-2} \sum_{l=0}^{j+2} \tilde{\beta}_{i,l} \sin(2l)\theta \right) = 0.$$

le polynôme est  $N_5(r) = (a_5) + (c_5)$ . alors

$$F_{20}^1(r) = (b_1) + (a_2) + (c_2) + (b_3) + (e_1) + (a_5) + (d_3) + (a_4) + (c_4) + (c_5)$$

**Lemme 3.0.5.** *L'intégrale  $F_{20}^2(r)$  est un polynôme de la variable  $r$  donnée par*

$$\begin{aligned} F_{20}^2(r) = & - \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} r^{2s+1} \frac{\alpha_s}{2^{s+1}(s+1)!} q_{2s} - \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} r^{2s+3} \frac{3\alpha_s}{2^{s+2}(s+2)!} w_{2s} - \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} a_{2s} b_{2k+1} \\ & \times r^{2s+2k+1} \frac{\alpha_{s+k+1}}{2^{s+k+1}(s+k+2)!} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_{2s} b_{2k+1} r^{2s+2k+3} \frac{3\alpha_{s+k+1}}{2^{s+k+2}(s+k+3)!} \\ & - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} a_{2k} d_{2s+1} r^{2s+2k+3} \frac{3\alpha_{s+k+1}}{2^{s+k+2}(s+k+3)!} - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\mu} a_{2k+1} d_{2s-2} \\ & \times r^{2s+2k+1} \frac{3(k+1)\alpha_{s+k}}{2^{s+k}(2s-1)(s+k+2)!} - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} c_{2k} d_{2s+1} r^{2s+2k+3} \frac{15}{2^{s+k+3}} \\ & \times \frac{\alpha_{s+k+1}}{(s+k+4)!} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\mu} c_{2k+1} d_{2s-2} r^{2s+2k+3} \frac{3(3k-2s+4)\alpha_{s+k}}{2^{s+k+1}(2s-1)(s+k+3)!}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

**preuve**

En utilisant (3.16) et, en remplaçant en (3.15) nous obtenons

$$\begin{aligned} F_2(r, \theta) = & - \sum_{i=0}^{n_1} p_i r^i R_i(\theta) - \sum_{i=0}^{n_2} q_i r^{i+1} T_i(\theta) - \sum_{i=0}^{n_3} s_i r^{i+2} S_i(\theta) - \sum_{i=0}^{n_4} w_i r^{i+3} U_i(\theta) \\ & - \left( \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^{i-1} R_i(\theta) + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+1} b_{2k+1} T_{2k+1}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+1} S_i(\theta) \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2k+1} r^{2k+3} U_{2k+1}(\theta) + \sum_{k=0}^{\mu} d_{2k-2} r^{2k} (T_{2k-2}(\theta) - \frac{2k+2}{2k-1} T_{2k}(\theta)) \right) \\ & \times \left( \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^{i+1}(\theta) + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+2} b_{2k+1} R_{2k+2} + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} T_{i+1}(\theta) \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2k+1} r^{2k+4} S_{2k+2}(\theta) + \sum_{k=0}^{\mu} d_{2k-2} r^{2k+1} (R_{2k-1}(\theta) - \frac{2k+2}{2k-1} R_{2k+1}(\theta)) \right). \end{aligned}$$

on pose  $F_2(r, \theta) = F_2^1(r, \theta) + F_2^2(r, \theta)$ .

où

$$F_2^1(r, \theta) = - \sum_{i=0}^{n_1} p_i r^i R_i(\theta) - \sum_{i=0}^{n_2} q_i r^{i+1} T_i(\theta) - \sum_{i=0}^{n_3} s_i r^{i+2} S_i(\theta) - \sum_{i=0}^{n_4} w_i r^{i+3} U_i(\theta),$$

$$\begin{aligned}
F_2^2(r, \theta) = & - \left( \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^{i-1} R_i(\theta) + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+1} b_{2k+1} T_{2k+1}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+1} S_i(\theta) \right. \\
& + \left. \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2k+1} r^{2k+3} U_{2k+1}(\theta) + \sum_{k=0}^{\mu} d_{2k-2} r^{2k} (T_{2k-2}(\theta) - \frac{2k+2}{2k-1} T_{2k}(\theta)) \right) \\
& \times \left( \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^i \cos^{i+1}(\theta) + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+2} b_{2k+1} R_{2k+2} + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} T_{i+1}(\theta) \right. \\
& + \left. \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2k+1} r^{2k+4} S_{2k+2}(\theta) + \sum_{k=0}^{\mu} d_{2k-2} r^{2k+1} (R_{2k-1}(\theta) - \frac{2k+2}{2k-1} R_{2k+1}(\theta)) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{20}^2(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2^1(r, \theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2^2(r, \theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2^1(r, \theta) d\theta + \sum_{j=0}^{25} \Lambda_j.
\end{aligned}$$

Pour une expression explicite du polynôme  $F_{20}^2(r)$ , en utilisant les résultats de lemme(3.0.1) et lemme(3.0.2) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} R_i(\theta) &= \int_0^{2\pi} S_i(\theta) = \int_0^{2\pi} \cos^i \theta R_i(\theta) = \int_0^{2\pi} \cos^i \theta S_i(\theta) = \int_0^{2\pi} T_j(\theta) R_i(\theta) = \int_0^{2\pi} T_j(\theta) S_i(\theta) = \\
\int_0^{2\pi} U_j(\theta) R_i(\theta) &= \int_0^{2\pi} U_j(\theta) S_i(\theta) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} R_i(\theta) R_{2k+2} d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos^{i+1}(\theta) T_{2k+1} d\theta = \int_0^{2\pi} (\cos^{i+2k+2} - \cos^{i+2k+4}) = I_{i+2k+2}(2\pi) - I_{i+2k+4}(2\pi) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } i = 2s + 1, \\ \tilde{I}_{2k+2s+2}(2\pi) = \frac{\pi \alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+1} (k+s+2)!}, & \text{si } i = 2s, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} R_{2k+2}(\theta) S_i d\theta &= \int_0^{2\pi} R_i(\theta) S_{2k+2} d\theta = \int_0^{2\pi} T_{2k+1}(\theta) T_{i+1} d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^{i+1}(\theta) U_{2k+1} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos^{2k+2s+2} \theta - 2 \cos^{2k+2s+4} \theta + \cos^{2k+2s+6} \theta) d\theta \\
&= I_{2k+2s+2}(2\pi) - 2I_{2k+2s+4}(2\pi) + I_{2k+2s+6}(2\pi) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } i = 2s + 1, \\ \tilde{I}_{2k+2s+2}(2\pi) = \frac{3\pi\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+2}(k+s+3)!}, & \text{si } i = 2s, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} U_{2k+1}(\theta) T_i d\theta &= \int_0^{2\pi} S_{2k+1}(\theta) S_i d\theta \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } i = 2s + 1, \\ \tilde{I}_{2k+2s+2}(2\pi) - \tilde{I}_{2k+2s+4}(2\pi) = \frac{15\pi\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+3}(k+s+4)!}, & \text{si } i = 2s, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2^1(r, \theta) d\theta = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_1} p_i r^i R_i(\theta) + \sum_{i=0}^{n_2} q_i r^{i+1} T_i(\theta) + \sum_{i=0}^{n_3} s_i r^{i+2} S_i(\theta) + \sum_{i=0}^{n_4} w_i r^{i+3} U_i(\theta) \right) \\
&= \frac{-1}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_1} p_i r^i \int_0^{2\pi} R_i(\theta) + \sum_{i=0}^{n_2} q_i r^{i+1} \int_0^{2\pi} T_i(\theta) + \sum_{i=0}^{n_3} s_i r^{i+2} \int_0^{2\pi} S_i(\theta) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=0}^{n_4} w_i r^{i+3} \int_0^{2\pi} U_i(\theta) \right) \\
&= \frac{-1}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_2} q_i r^{i+1} \tilde{I}_i(2\pi) + \sum_{i=0}^{n_4} w_i r^{i+3} \tilde{I}_i(2\pi) \right) \\
&= - \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} r^{2s+1} \frac{\alpha_s}{2^{s+1}(s+1)!} q_{2s} - \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} r^{2s+3} \frac{3\alpha_s}{2^{s+2}(s+2)!} w_{2s}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^{i-1} R_i(\theta) \right) \left( \sum_{j=0}^{n_1} a_j r^j \cos^{j+1}(\theta) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{j=0}^{n_1} \sum_{i=0}^{n_1} a_i a_j r^{i+j-1}(\theta) \right) \left( \int_0^{2\pi} R_i(\theta) \cos^{j+1}(\theta) d\theta \right) \\
&= 0. \\
\Lambda_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^{i-1} R_i(\theta) \right) \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+2} b_{2k+1} R_{2k+2}(\theta) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{n_1} b_{2k+1} a_i r^{2k+i+1} \right) \left( \int_0^{2\pi} (R_i(\theta) R_{2k+2}(\theta)) d\theta \right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \frac{\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+2}(k+s+2)!} a_{2s} b_{2k+1} r^{2s+2k+1}. \\
\Lambda_3 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^{i-1} R_i(\theta) \right) \left( \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} T_{i+1}(\theta) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{j=0}^{n_3} \sum_{i=0}^{n_1} a_i c_i r^{i+j+1}(\theta) \right) \left( \int_0^{2\pi} (R_i(\theta) T_{j+1}(\theta)) \right) \\
&= 0. \\
\Lambda_4 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^{i-1} R_i(\theta) \right) \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} r^{2k+4} d_{2k+1} S_{2k+2}(\theta) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} a_i d_{2k+1} r^{i+k+3} \right) \left( \int_0^{2\pi} (R_i(\theta) S_{2k+2}(\theta)) \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} \frac{3\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+3}(k+s+3)!} a_{2s} d_{2k+1} r^{2s+2k+3}. \\
\Lambda_5 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^{i-1} R_i(\theta) \right) \left( \sum_{s=0}^{\mu} d_{2s-2} r^{2s+1} (R_{2s-1}(\theta) - \frac{2s+2}{2s-1} R_{2s+1}(\theta)) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{s=0}^{\mu} a_i d_{2s-2} r^{i+2s} \right) \left( \int_0^{2\pi} R_i(\theta) (R_{2s-1}(\theta) - \frac{2s+2}{2s-1} R_{2s+1}(\theta)) d\theta \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\mu} a_{2k+1} d_{2s-2} r^{2k+2s+1} \right) \left( (\tilde{I}_{2k+2s}(2\pi) - \frac{2s+2}{2s-1} \tilde{I}_{2k+2s+2}(2\pi)) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\mu} a_{2k+1} d_{2s-2} r^{2s+2k+1} \frac{-3(k+1)\alpha_{s+k}}{2^{s+k+1}(2s-1)(s+k+2)!}. \\
\Lambda_6 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+1} b_{2k+1} T_{2k+1}(\theta) \right) \left( \sum_{j=0}^{n_1} a_j r^j \cos^{j+1}(\theta) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{j=0}^{n_1} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+j+1} a_j b_{2k+1} \right) \left( \int_0^{2\pi} T_{2k+1}(\theta) \cos^{j+1}(\theta) d\theta \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \frac{\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+2}(k+s+2)!} a_{2s} b_{2k+1} r^{2s+2k+1}. \\
\Lambda_7 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+1} b_{2k+1} T_{2k+1}(\theta) \right) \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+2} b_{2k+1} R_{2k+2}(\theta) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+2s+2} b_{2s+1} b_{2k+1} \right) \left( \int_0^{2\pi} T_{2k+1}(\theta) R_{2s+2}(\theta) d\theta \right) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_8 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+1} b_{2k+1} T_{2k+1}(\theta) \right) \left( \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} T_{i+1}(\theta) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{2k+i+3} b_{2k+1} \right) \left( \int_0^{2\pi} T_{2k+1}(\theta) T_{i+1}(\theta) d\theta \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \frac{3\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+3}(k+s+3)!} c_{2s} b_{2k+1} r^{2s+2k+3}. \\
\Lambda_9 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+1} b_{2k+1} T_{2k+1}(\theta) \right) \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2k+1} r^{2k+4} S_{2k+2}(\theta) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+2s+4} d_{2s+1} b_{2k+1} \right) \left( \int_0^{2\pi} T_{2k+1}(\theta) S_{2s+2}(\theta) d\theta \right) = 0. \\
\Lambda_{10} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+1} b_{2k+1} T_{2k+1}(\theta) \right) \left( \sum_{k=0}^{\mu} d_{2k-2} r^{2k+1} (R_{2k-1}(\theta) - \frac{2k+2}{2k-1} R_{2k+1}(\theta)) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{s=0}^{\mu} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+1} d_{2s-2} r^{2s+1} b_{2k+1}(\theta) \right) \left( \int_0^{2\pi} T_{2k+1} (R_{2s-1}(\theta) - \frac{2s+2}{2s-1} R_{2s+1}(\theta)) d\theta \right) = 0. \\
\Lambda_{11} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+1} S_i(\theta) \right) \left( \sum_{j=0}^{n_1} a_j r^j \cos^{j+1}(\theta) \right) d\theta. \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{j=0}^{n_1} \sum_{i=0}^{n_3} a_j c_i r^{i+j+1} \right) \left( \int_0^{2\pi} S_i(\theta) \cos^{j+1}(\theta) d\theta \right) = 0 \\
\Lambda_{12} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+1} S_i(\theta) \right) \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+2} b_{2k+1} R_{2k+2}(\theta) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{i=0}^{n_3} c_i b_{2k+1} r^{i+2k+3} \right) \left( \int_0^{2\pi} S_i(\theta) R_{2k+2}(\theta) d\theta \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \frac{3\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+3}(k+s+3)!} c_{2s} b_{2k+1} r^{2s+2k+3}. \\
\Lambda_{13} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+1} S_i(\theta) \right) \left( \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} T_{i+1}(\theta) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{j=0}^{n_3} \sum_{i=0}^{n_3} c_j c_i r^{i+j+3} \right) \left( \int_0^{2\pi} S_i(\theta) T_{j+1}(\theta) d\theta \right) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{14} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+1} S_i(\theta) \right) \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2k+1} r^{2k+4} S_{2k+2}(\theta) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} c_i d_{2k+1} r^{i+2k+5} \right) \left( \int_0^{2\pi} S_i(\theta) S_{2k+2}(\theta) d\theta \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \frac{15\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+4}(k+s+4)!} c_{2s} d_{2k+1} r^{2s+2k+3}. \\
\Lambda_{15} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+1} S_i(\theta) \right) \left( \sum_{s=0}^{\mu} d_{2s-2} r^{2s+1} (R_{2s-1}(\theta) - \frac{2s+2}{2s-1} R_{2s+1}(\theta)) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\mu} c_{2k+1} d_{2s-2} r^{2s+2k+3} \frac{-3(3k-2s+4)\alpha_{s+k}}{2^{s+k+2}(2s-1)(s+k+3)!}. \\
\Lambda_{16} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2k+1} r^{2k+3} U_{2k+1}(\theta) \right) \left( \sum_{j=0}^{n_1} a_j r^j \cos^{j+1}(\theta) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{j=0}^{n_1} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2k+1} a_j r^{2k+j+3} \right) \left( \int_0^{2\pi} U_{2k+1}(\theta) \cos^{j+1}(\theta) d\theta \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} \frac{3\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+3}(k+s+3)!} a_{2s} d_{2k+1} r^{2s+2k+3}. \\
\Lambda_{17} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2k+1} r^{2k+3} U_{2k+1}(\theta) \right) \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} d_{2k+1} r^{2k+3} U_{2k+1}(\theta) \right) d\theta = 0. \\
\Lambda_{18} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2k+1} r^{2k+3} U_{2k+1}(\theta) \right) \left( \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} T_{i+1}(\theta) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2k+1} c_i r^{2k+i+5} \right) \left( \int_0^{2\pi} U_{2k+1}(\theta) T_{i+1}(\theta) d\theta \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} \frac{15\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+4}(k+s+4)!} c_{2s} d_{2k+1} r^{2s+2k+3}. \\
\Lambda_{19} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2k+1} r^{2k+3} U_{2k+1}(\theta) \right) \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2k+1} r^{2k+4} S_{2k+2}(\theta) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2k+1} d_{2s+1} r^{2s+2k+7} \right) \left( \int_0^{2\pi} U_{2k+1}(\theta) S_{2k+2}(\theta) d\theta \right) = 0. \\
\Lambda_{20} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2k+1} r^{2k+3} U_{2k+1}(\theta) \right) \\
&\quad \times \left( \sum_{k=0}^{\mu} d_{2k-2} r^{2k+1} (R_{2k-1}(\theta) - \frac{2k+2}{5k-1} R_{2k+1}(\theta)) \right) d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\mu} d_{2k-2} r d_{2s+1} r^{2s+2k+4} \right) \\
&\quad \times \left( \int_0^{2\pi} U_{2s+1}(\theta) (R_{2k-1}(\theta) - \frac{2k+2}{2k-1} R_{2k+1}(\theta)) d\theta \right) = 0. \\
\Lambda_{21} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{s=0}^{\mu} d_{2s-2} r^{2s} (T_{2s-2}(\theta) - \frac{2s+2}{2s-1} T_{2s}(\theta)) \right) \left( \sum_{j=0}^{n_1} a_j r^j \cos^{j+1}(\theta) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{s=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{n_1} a_j d_{2s-2} r^{2s+j} \right) \left( \int_0^{2\pi} \cos^{j+1}(\theta) (T_{2s-2}(\theta) - \frac{2s+2}{2s-1} T_{2s}(\theta)) d\theta \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\mu} a_{2k+1} d_{2s-2} r^{2s+2k+1} \frac{-3(k+1)\alpha_{s+k}}{2^{s+k+1}(2s-1)(s+k+2)!}. \\
\Lambda_{22} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\mu} d_{2k-2} r^{2k} (T_{2k-2}(\theta) - \frac{2k+2}{2k-1} T_{2k}(\theta)) \right) \\
&\quad \times \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} r^{2k+2} b_{2k+1} R_{2k+2}(\theta) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\mu} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2s+1} d_{2k-2} r^{2k+2s+2} \right) \\
&\quad \times \left( \int_0^{2\pi} R_{2s+2}(\theta) (T_{2k-2}(\theta) - \frac{2k+2}{2k-1} T_{2k}(\theta)) d\theta \right) = 0. \\
\Lambda_{23} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{s=0}^{\mu} d_{2s-2} r^{2s} (T_{2s-2}(\theta) - \frac{2s+2}{2s-1} T_{2s}(\theta)) \right) \left( \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2} T_{i+1}(\theta) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{s=0}^{\mu} \sum_{i=0}^{n_3} c_i d_{2s-2} r^{2s+i+2} \right) \left( \int_0^{2\pi} T_{i+1}(\theta) (T_{2s-2}(\theta) - \frac{2s+2}{2s-1} T_{2s}(\theta)) d\theta \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{n_3-1}{2}} \sum_{s=0}^{\mu} c_{2k+1} d_{2s-2} r^{2s+2k+3} \frac{-3(3-2s+4)\alpha_{s+k}}{2^{s+k+2}(2s-1)(s+k+3)!}. \\
\Lambda_{24} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\mu} d_{2k-2} r^{2k} (T_{2k-2}(\theta) - \frac{2k+2}{2k-1} T_{2k}(\theta)) \right) \\
&\quad \times \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2k+1} r^{2k+4} S_{2k+2}(\theta) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\mu} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2s+1} r d_{2k-2} r^{2k+2s+4} \right) \\
&\quad \times \left( \int_0^{2\pi} (T_{2k-2}(\theta) - \frac{2k+2}{2k-1} T_{2k}(\theta)) S_{2s+2}(\theta) d\theta \right) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{25} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\mu} d_{2k-2} r^{2k} (T_{2k-2}(\theta) - \frac{2k+2}{2k-1} T_{2k}(\theta)) \right) \\
&\quad \times \left( \sum_{s=0}^{\mu} d_{2s-2} r^{2k+1} (R_{2s-1}(\theta) \frac{2ks+2}{2s-1} R_{2s+1}(\theta)) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\mu} \sum_{s=0}^{\mu} d_{2s-2} d_{2k-2} r^{2k+2s+1} \right) \\
&\quad \times \left( \int_0^{2\pi} (T_{2k-2}(\theta) - \frac{2k+2}{2k-1} T_{2k}(\theta)) (R_{2s-1}(\theta) \frac{2s+2}{2s-1} R_{2s+1}(\theta)) d\theta \right) = 0.
\end{aligned}$$

Alors

$$F_{20}^2(r) = K + (\Lambda_2 + \Lambda_6) + (\Lambda_4 + \Lambda_{16}) + (\Lambda_5 + \Lambda_{21}) + (\Lambda_8 + \Lambda_{12}) + (\Lambda_{14} + \Lambda_{18}) + (\Lambda_{15} + \Lambda_{22})$$

la lemme3.0.5est donc prouvée

par lemme3.0.4 et lemme3.0.5 ,nous avons

$$\begin{aligned}
F_{20}(r) &= F_{20}^1(r) + F_{20}^2(r) \\
&= \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} a_{2s} b_{2k+1} r^{2s+2k+1} s \sum_{l=0}^{k+1} \tilde{\gamma}_{k,l} C_{s,l} - \frac{(k+1)\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+1}(2s+1)(k+s+2)!} \\
&+ \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_{2s} b_{2k+1} r^{2s+2k+3} (s+1) \sum_{l=0}^{k+1} \tilde{\gamma}_{k,l} K_{s,l} - \frac{(k+1)(4k+10s+15)\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+2}(2s+1)(2s+3)(k+s+3)!} \\
&+ \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\mu} a_{2s+1} d_{2k-2} r^{2s+2k+1} \frac{2s+1}{2} \sum_{l=0}^{k+1} \tilde{\beta}_{k,l} \tilde{C}_{s,l} - \frac{3(2k+1)\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+2}(2k-1)(k+s+2)!} \\
&+ \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\mu} c_{2s+1} d_{2k-2} r^{2s+2k+3} \frac{2s+3}{2} \sum_{l=0}^{k+1} \tilde{\beta}_{k,l} \tilde{C}_{s,l} - \frac{15(2k+1)\alpha_{k+s}}{2^{k+s+3}(2k-1)(k+s+3)!} \\
&+ \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} a_{2s} d_{2k+1} r^{2s+2k+3} s \sum_{l=0}^{k+1} \tilde{\gamma}_{k,l} C_{s,l} - \frac{3(k+2)\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+2}(2s+1)(k+s+3)!} \\
&+ \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} c_{2s} b_{2k+1} r^{2s+2k+5} (s+1) \sum_{l=0}^{k+1} \tilde{\gamma}_{k,l} K_{s,l} - \frac{3(k+2)(4k+14s+21)\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+3}(2s+1)(2s+3)(k+s+4)!} \\
&+ \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} r^{2s+1} \frac{\alpha_s}{2^{s+1}(s+1)!} q_{2s} - \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} r^{2s+3} \frac{3\alpha_s}{2^{s+2}(s+2)!} w_{2s} - \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} a_{2s} b_{2k+1} \\
&\times r^{2s+2k+1} \frac{\alpha_{s+k+1}}{2^{s+k+1}(s+k+2)!} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_{2s} b_{2k+1} r^{2s+2k+3} \frac{3\alpha_{s+k+1}}{2^{s+k+2}(s+k+3)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} a_{2k} d_{2s+1} r^{2s+2k+3} \frac{3\alpha_{s+k+1}}{2^{s+k+2}(s+k+3)!} - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\mu} a_{2k+1} d_{2s-2} \\
& \times r^{2s+2k+1} \frac{3(k+1)\alpha_{s+k}}{2^{s+k}(2s-1)(s+k+2)!} - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} c_{2k} d_{2s+1} r^{2s+2k+3} \frac{15}{2^{s+k+3}} \\
& \times \frac{\alpha_{s+k+1}}{(s+k+4)!} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\mu} c_{2k+1} d_{2s-2} r^{2s+2k+3} \frac{3(3k-2s+4)\alpha_{s+k}}{2^{s+k+1}(2s-1)(s+k+3)!}. \\
= & - \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} r^{2s+1} \frac{\alpha_s}{2^{s+1}(s+1)!} q_{2s} - \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} r^{2s+3} \frac{3\alpha_s}{2^{s+2}(s+2)!} w_{2s} + \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} a_{2s} b_{2k+1} \\
& \times A r^{2s+2k+1} + \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_{2s} b_{2k+1} B r^{2s+2k+3} + \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} a_{2s} d_{2k+1} C r^{2s+2k+3} \\
& + \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\mu} a_{2s+1} d_{2k-2} D r^{2s+2k+1} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} c_{2s} d_{2k+1} E r^{2s+2k+5} \\
& + \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\mu} c_{2s+1} d_{2k-2} F r^{2s+2k+3},
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Où

$$\begin{aligned}
A &= s \sum_{l=0}^{k+1} \tilde{\gamma}_{k,l} C_{s,l} - \frac{(2s+k+2)\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+1}(2s+1)(k+s+2)!}, \\
B &= (s+1) \sum_{l=0}^{k+1} \tilde{\gamma}_{k,l} K_{s,l} - \frac{(12s^2+4k^2+34s+10sk+19k+24)\alpha_{k+s+2}}{2^{k+s+1}(2s+1)(2s+3)(k+s+3)!}, \\
C &= s \sum_{l=0}^{k+2} \tilde{\gamma}_{k,l} C_{s,l} - \frac{3(2s+k+3)\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+1}(2s+1)(k+s+3)!}, \\
D &= \frac{2s+1}{2} \sum_{l=0}^{k+2} \tilde{\gamma}_{k,l} \tilde{C}_{s,l} + \frac{3(4s+2k+5)\alpha_{k+s}}{2^{k+s+2}(2k-1)(k+s+2)!}, \\
E &= (s+1) \sum_{l=0}^{k+2} \tilde{\gamma}_{k,l} K_{s,l} - \frac{(20s^2+68s+57+4k^2+14sk+29k)3\alpha_{k+s+1}}{2^{k+s+3}(2s+1)(2s+3)(k+s+4)!}, \\
F &= \frac{2s+3}{2} \sum_{l=0}^{k+2} \tilde{\gamma}_{k,l} \tilde{K}_{s,l} + \frac{3(4s+2k+5)\alpha_{k+s}}{2^{k+s+3}(2k-1)(k+s+3)!},
\end{aligned}$$

Nous avons concluons que  $F_{20}$  a au plus  $\max\{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor + \mu', \lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor + 2, \lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor + \mu' + 1\}$  racines positives . par conséquent le théorème 3.0.2 suit

### 3.1 Applications

On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x - \varepsilon(f_1(x) + g_1(x)y + h_1(x)y^2 + l_1(x)y^3), \end{cases} \quad (3.22)$$

où

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n_1} a_i x^i, g_1(x) = \sum_{i=1}^{n_2} b_i x^i, h_1(x) = \sum_{i=1}^{n_3} c_i x^i, \quad \text{et} \quad l_1(x) = \sum_{i=1}^{n_4} d_i x^i. \quad (3.23)$$

( $n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1, n_4 = 5$ ) si nous choisissons :

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, b_0 = -2, b_1 = 3, b_2 = -\frac{1}{3}, c_0 = 1, \\ c_1 &= -1, d_0 = 5, d_1 = 1, d_2 = -16, d_3 = 5, d_4 = \frac{64}{9}, d_5 = -1. \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x + 2x^2 + x^3, g_1(x) = -2 + 3x - 13x^2, h_1(x) = 1 - x, \\ l_1(x) &= 5 + x - 16x^2 + 5x^3 + \frac{64}{9}x^4 - x^5. \end{aligned}$$

Tout d'abord, nous allons étudier les cycles limites de l'équation différentielle (3.22) en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre. De (3.10), nous obtenons

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= -r \left( \sum_{i=0}^1 \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} b_{2i} r^{2i} + \sum_{i=0}^2 \frac{3\alpha_i}{2^{i+2}(i+2)!} d_{2i} r^{2i+2} \right) \\ &= -r \left( \frac{\alpha_0}{2} b_0 + \frac{\alpha_1}{8} b_2 r^2 + \frac{3\alpha_0}{8} d_0 r^2 + \frac{3\alpha_1}{48} d_2 r^4 + \frac{3\alpha_2}{384} d_4 r^6 \right) \\ &= -r \left( -\alpha_0 - \frac{\alpha_1}{24} r^2 + \frac{15\alpha_0}{8} r^2 - \alpha_1 r^4 + \frac{\alpha_2}{18} r^6 \right), \end{aligned}$$

où

$$\alpha_k = 3.5 \cdots (2k-1), \quad \alpha_{k+1} = (2k+1)\alpha_k,$$

Alors

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= -\frac{r}{6}(r^6 - 6r^4 + 11r^2 - 6) \\ &= -\frac{r}{6}(r^2 - 1)(r^2 - 2)(r^2 - 3), \end{aligned}$$

Pour déterminer les cycles limites, on résout l'équation

$$F_{10}(r) = -\frac{r}{6}(r^2 - 1)(r^2 - 2)(r^2 - 3) = 0,$$

qui a exactement trois racines positives.

alors le nombre maximum de cycles limites du système (3.22) est de trois en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre.

## 3.2 Application

$$(n_1 = 4, n_2 = 3, n_3 = 1, n_4 = 5)$$

On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x - \varepsilon(f_1(x) + g_1(x)y + h_1(x)y^2 + l_1(x)y^3) - \varepsilon^2(f_2(x) + g_2(x)y + h_2(x)y^2 + l_2(x)y^3), \end{cases} \quad (3.24)$$

où

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x + 2x^2 + 3x^3 - 2x^4, \quad g_1(x) = 3x - 3x^2 - 5x^3, \quad h_1(x) = 1 - x, \\ l_1(x) &= 1 - 3x + \frac{10160}{3969}x^3 + \frac{64}{189}x^5, \quad f_2(x) = x^4, \quad g_2(x) = 2 - \frac{454}{15}x^2 + 3x^3, \quad h_2(x) = x, \\ l_2(x) &= 2 + \frac{262}{3}x^2 - \frac{475448}{11907}x^4 - x^5, \end{aligned}$$

en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre. De (3.10), nous obtenons :

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= -r \left( \sum_{i=0}^1 \frac{\alpha_i}{2^{i+1}(i+1)!} b_{2i} r^{2i} + \sum_{i=0}^2 \frac{3\alpha_i}{2^{i+2}(i+2)!} d_{2i} r^{2i+2} \right) \\ &= -r \left( \frac{\alpha_0}{2} b_0 + \frac{\alpha_1}{8} b_2 r^2 + \frac{3\alpha_0}{8} d_0 r^2 + \frac{3\alpha_1}{48} d_2 r^4 + \frac{3\alpha_2}{384} d_4 r^6 \right) \\ &= -r \left( \frac{-\alpha_1}{8} 3r^2 + \frac{3\alpha_0}{8} r^2 \right), \end{aligned}$$

où

$$\alpha_k = 3.5 \cdots (2k - 1), \quad \alpha_{k+1} = (2k + 1)\alpha_k,$$

Alors

$$F_{10}(r) = 0.$$

en utilisant la théorie de moyennisation du deuxième ordre. De (3.21), nous obtenons

$$\begin{aligned} F_{20}(r) &= \frac{r}{120} (r^{10} - 15r^8 + 85r^6 - 225r^4 + 274r^2 - 120) \\ &= \frac{r}{120} (r - 2)(r - 1)(r + 1)(r + 2)(r^2 - 5)(r^2 - 3)(r^2 - 2). \end{aligned}$$

qui a exactement cinq racines positives.



## Bibliographie

- [1] R. Cheurfa A. Bendjeddou. Cubic and quartic planar differential systems with exact algebraic limit cycles. *Electronic Journal of Differential Equations*, pages 1–12., 2011.
- [2] R. Cheurfa A. Bendjeddou, A. Berbache. A class of kolmoogorov system with exact algebraic limit cycle. *International Journal of Differential Equations and Applications*, pages 159–165., 2015.
- [3] J. P. Francoise A. Buica and J. Llibre. Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter. *Commun. Pure Appl. Anal*, pages 103–111, 2007.
- [4] A.Makhlouf A.Boulfoul and N.Mellahi. Maximum number of limit cycles for generalized kukles polynomial differential systems. *Differential Equations and Dynamical Systems*, pages 1–22, 2016.
- [5] A.Makhlouf A.Boulfoul and N.Mellahi. On the limit cycles for a class of generalized kukles differential systems. *Journal of Applied Analysis and Computation*, pages 864–883, 2019.
- [6] A. Bendjeddou and R. Cheurfa. Coexistence of algebraic and nonalgebraic limit cycles for quintic polynomial differential systems. *Elect.J. of Diff. Equ*, pages 1–7, 2017.
- [7] N.N. Bogoliubov. *On some statistical methods in mathematical physics*. Izv.vo Akad. Nauk Ukr. SSR, Kiev, 1945.
- [8] N.N. Bogoliubov and N. Krylov. *The application of methods of nonlinear mechanics in the theory of stationary oscillations*. Publ. 8 of the Ukrainian Acad. Sci. Kiev, 1934.
- [9] N.N. Bogoliubov and N. Krylov. *Introduction à la mécanique nonlinéaire : Les méthodes approchées et asymptotiques*. Nauk Inst. Mec. Paris : Chaire de Phys. Math. Annales., 1937.
- [10] N.N. Bogoliubov and Yu. A. Mitropolsky. *Asymtotic methods in the theory of nonlinear oscillations*. Gordon and Breach, New York, 1961.
- [11] A. Boulfoul and A. Makhlouf. Limit cycles of the generalized polynomial liénard differential systems. *Annalys of Differential Equations*, pages 221–233, 2017.

- [12] A. Buica and J.Llibre. Averaging methods for finding periodic orbits via brouwer degree. *Bulletin Des Scense Mathematiques*, pages 7–22, 4 /9/ 2003.
- [13] J. Christopher and N. G. Lloyd. On the paper of x. jin and d. wang concerning the conditions for a centre in certain cubic systems. *Bull. Lond. Math.Soc*, pages 5–12., 1990.
- [14] T. Dudok de wit. *Physique non-linéaire*. Université dOrléans. 1/ 2012.
- [15] J.C. Artés F.Dumortier, J.Llibre. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Springer Berlin Heidelberg New York, 2006.
- [16] J. Giné. Conditions for the existence of a center for the kukles homogeneous systems. *Comput. Math Appl*, pages 1261–1269, 2002.
- [17] J. Giné and X. Santallusia. Implementation of a new algorithm of computation of the poincaré-liapunov constants. *J. Comput. Appl. Math*, pages 465–476, 2004.
- [18] A. A. Grin and K. R. Schneider. On the construction of a class of generalized kukles systems having at most one limit cycle. *J. Math. Anal. Appl.*, pages 484–497., 2013,.
- [19] Y. C. Tian H. Zang, T. Zhang and M. O. Tadó. Limit cycles for the kukles system. *J. Dyn. Control Syst*, pages 283–298, 2008.
- [20] M. Han. On the maximum number of periodic solution of piecewise smooth periodic equations by average method. *Journal of Applied Analysis and Computation*, pages 788–794, 2017.
- [21] D. Hilbert. Mathematische problems, lecture in : Second internat. Congr. math. paris 1900. *Nachr. Ges. Wiss. Gttingen Math.Phys. ki, 1900, 5, 253- 297; English transl. Bull. Amer. Math. Soc*, pages 437–479, 1902.
- [22] D. Hilbert. Mathematical problems. *n Proceeding of Symposia in Pure Mathematics*, pages 1–34., 1976.
- [23] F. Verhulst J. A. Sanders. *Averaging Method in Nonlinear Dynamical Systems*. Applied Mathematical Siences 59, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [24] E. Saez I. Szanto J. Chavarriga and M. Grau. Coexistence limit cycles and invariant algebraic curves for a kukles system. *Nonlinear Anal.*, pages 673–693, 2004.
- [25] D.D.Novaes J. Llibre and M.A Teixeira. Higher order averaging theory for finding periodic solutions via brouwer degree. *London Mathematical Society*, pages 563–583, 2014.
- [26] J.Llibre and C. Simó R.Moeckel. *Central Configurations, Periodic Orbits, and Hamiltonian Systems*. Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona, Springer Basel, 2015.
- [27] I. S. Kukles. Sur quelques cas de distinction entre un foyer et un centre. *Dokl.Akad. Nauk.SSSR*, pages 208–211, 1944.
- [28] J. Llibre and M.Grau J.Giné. Averaging theory at any order for computing periodic orbits. *Phys*, pages 58–65, 2013.
- [29] J. Llibre and A. C. Mereu. Limit cycles for generalized kukles polynomial differential systems. *Nonlinear Analysis*, pages 1261–1271, 2011.

- [30] G. Chen M. Han and C. Sun. On the number of limit cycles in nearhamiltonian polynomial systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, pages 2033–2047, 2007.
- [31] V. G. Romanovski M. Han and X. Zhang. Equivalence of the melnikov function method and the averaging method. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, pages 471–479, 2016.
- [32] I.G. Malkin. *Some problems of the theory of nonlinear oscillations. (Russian) Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit, Moscow, 1956.*
- [33] J. E. Marsden and M. McCracken. *The Hopf bifurcation and its applications, Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, New York, 1976.
- [34] J.D. Meiss. *Differential Dynamical Systems.* University of Colorado Boulder, Colorado, the Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- [35] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems.* Texts in Applied Mathematics 7, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [36] H. Poincaré. Memoire sur les courbes définies par une equation différentielle ,jacques gabay. *Paris, 1993. Edit. Reprinted from the original papers published in the Journal de Mathématiques., 1881, 7, 375-422, 1882, 8, 251-2-96, 1885, 1, 167-244, and 1886, 2, 151-217.*
- [37] M. Roseau. *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité.* (French) Springer Tracts in Natural Philosophy Vol.8 SpringerVerlag, Berlin New York, 1966.
- [38] C. Rousseau and B. Toni. Local bifurcations of critical periods in the reduced kukles system. *Canad. J. Math.*, pages 338–358., 1997.
- [39] A. P. Sadovskii. Cubic systems of nonlinear oscillations with seven limit cycles. *Diff. Uravn. SSSR*, pages 472–481, 2003.
- [40] E. Saez and I. Szanto. Coexistence of algebraic and nonalgebraic limit cycles in kukles systems. *Period. Math. Hungar.*, pages 137–142, 2008.
- [41] S.H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos.* with applications to physics, biology, chemistry, and engineering.
- [42] F. Verhulst. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems. Univer-sitest.* Springer. New York, 1996.
- [43] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.* Springer-Verlag New York, Inc, 1990.
- [44] G. Chen Y. Wu and X. Yang. Kukles system with two fine foci. *Ann. Appl.Math.*, pages 422–437., 1990.
- [45] Y. Gao Y. Wu and M. Han. On the number and distributions of limit cycles in a quintic planar vector field. *Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng*, pages 1939–1955., 2008.
- [46] Y. Yan-qian. *Theory of Limit Cycles.* American Mathematical Society, 1986.
- [47] E. Saez Z. E. Liu and I. Szanto. Limit cycles and invariant parabola in a kukles system of degree three. *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed*, pages 865–869, 2008.
- [48] W. Huang Z. Zhang, T. Ding and Z. Dong. *Qualitative Theory of Differential Equations.* American Mathematical Society ,Providence, (1992).