République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et La Recherche Scientifique
Université De Ghardaïa

Faculté des Science et de Technologie
Département de Mathématique et Informatique
&
Laboratoire de Mathématiques et Sciences Appliquées

Mémoire réalisé dans le cadre d'obtention du diplôme *Master académique*, intitulé :

Classification des hypersurfaces affines tridimensionnelles homogènes localement fortement convexes

Présenté par :
Imane AMINI

Soutenu publiquement le : 15/ 09/ 2020, devant le jury composé de :

M. Brahim MERABET	MCB (Univ. Ghardaia)	Président
M. Abdelouahab CHIKH SALAH	MCB (Univ. Ghardaia)	Encadreur
M. Mohammed Amine BAHAYOU	MCB (Univ. Ouargla)	Examinateur

Année universitaire 2019/2020

Remerciement

Tout d'abord je tiens à remercier ***Dieu***, le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce travail.

Je remercie Monsieur ***Chikh Salah Abdelouahab***, mon directeur de mémoire pour sa disponibilité et ses nombreux encouragements. Son regard de formateur et ses connaissances furent très précieux. Il m'a guidé, toujours de façon très positive, avec un grand esprit de méthodique. Je le remercie également pour toutes les leçons que j'ai apprises durant ce travail non seulement en mathématiques mais aussi en discipline et le savoir faire dans la vie.

Je voudrais également remercier tous les membres de jurys ***Monsieur Merabet Brahim*** et ***Monsieur Mohammed Amine BAHAYOU*** pour l'honneur qu'ils m'ont fait en portant leurs attention sur ce travail.

Ce mémoire est le fruit d'un parcours accompli en 5 années que je n'aurais pas pu réaliser seule.

Je tiens donc à remercier tous le personnel de notre établissement ainsi que tous mes professeurs universitaires qui, dans leurs domaines respectifs, m'ont fait profiter de leurs compétences tant théoriques que pratiques.
Je remercie aussi mes enseignants à qui je leur dois ce que je suis aujourd'hui.

Durant tous mon parcours universitaire, l'établissement *Habl El Warid*, m'a permet de me former et de m'expérimenter, je remercie spécialement Monsieur ***Mrahrah Mohammed***, pour son soutien moral et pour son accompagnement durable.

Je lance d'ailleurs aussi un merci rempli d'affection pour tous les gens que j'ai croisé sur mon chemin, je cite mes collègues de section : Nanna, Bouchra, Ansar, Habiba et Amine.

Finalement, je tiens à remercier chaleureusement toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à l'accomplissement de ce cheminement.

Dédicace

A mon cher grand père défunt , l'homme qui a marqué son existence dans ma vie, le bonheur de mon enfance, un trésor du passé qui éclaire mon présent, la force qui m'a toujours poussé et motivé dans mes études. J'espère que, du monde qui est sien maintenant. Puisse Dieu, le tout puissant, l'avoir en sa sainte miséricorde.

A ma très chère mère, Leila, le soleil de ma vie qui a guetté mes pas, celle qui m'a couvé de tendresse, la personne qui a sacrifié sans compter, votre prière et votre bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études. Je vous dois la personne que je suis aujourd'hui.

A mon très cher père, Mokhtar, vous avez toujours été pour moi un exemple du père respectueux, honnête. Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien être. Je vous remercie pour tout le soutien que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.

A vous deux espère que vous y trouverez fruits de votre semence et le témoignage de ma grande fierté de vous avoir comme parents.

A mes grands parents, que ce modeste travail soit l'exaucement de vos voeux tant formulés. Puisse Dieu, le Très Haut, vous accorder santé, bonheur et longue vie et faire en sorte que jamais je ne vous déçoive.

A mes soeurs, Rayene mon bras droit, Safa mon ange , mon frère adoré Mohammed, source de réconfort, vous vous êtes toujours préoccupée de moi en m'octroyant un soutien morale inestimable et apaisé.

A ma grande famille et mes amis, je vous dédie ce travail avec tous mes voeux de bonheur, de santé et de réussite

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudierons la classification d' hypersurfaces affines tridimensionnelles homogènes localement fortement convexes de $\mathbb{R}^4$ établie par Dillen et Vranken. L'opérateur de forme S est toujours diagonalisable, et les valeurs propres de S sont constantes. Selon le nombre de différentes valeurs propres, nous allons démontrer les deux résultats suivants :

Théorème 1 : Il n'existe pas des hypersurfaces de dimension 3 localement fortement convexe, localement homogène dans $\mathbb{R}^4$ dont l'opérateur de forme S a trois valeurs propres distinctes.

Théorème 2 : Soit M^3 une hypersurface localement fortement convexe et localement homogène dans $\mathbb{R}^4$, dont l'opérateur de forme a deux valeurs propres distinctes. Alors M est affinement équivalente à la partie convexe de l'une des hypersurfaces suivantes :

$$(y - \frac{1}{2}(x^2 + z^2))^4 w^2 = 1$$
$$(y - \frac{1}{2}x^2)^3(z - \frac{1}{2}w^2)^3 = 1$$
$$(y - \frac{1}{2}x^2)^3 v^2 w^2 = 1$$
$$(y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\frac{w^2}{z})^4 z^3 = 1$$

Abstract

In this thesis, we study the classification of homogeneous locally strongly convex three-dimensional hypersurfaces of $\mathbb{R}^4$ proved by Dillen and Vranken. The shape operator S is always diagonalizable, and the eigenvalues of S are constant.According to the number of different eigenvalues, we will demonstrate the following two results :

Theorem 1 : There are no 3-dimensional locally strongly convex, locally homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$ whose affine shape operator S has three distinct eigenvalues.

Theorem 2 : Let M^3 be a locally strongly convex, locally homogeneous hypersurface in $\mathbb{R}^4$, whose shape operator has two distinct eigenvalues. Then M is affinely equivalent to the convex part of one of the following hypersurfaces :

$$(y - \frac{1}{2}(x^2 + z^2))^4 w^2 = 1$$
$$(y - \frac{1}{2}x^2)^3 (z - \frac{1}{2}w^2)^3 = 1$$
$$(y - \frac{1}{2}x^2)^3 v^2 w^2 = 1$$
$$(y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\frac{w^2}{z})^4 z^3 = 1$$

ملخص

تتناول هذه المذكرة تصنيف كلي لهيبار-أسطح تآلفية ذات ثلاثة أبعاد، متجانسة ومحدبة محليا بقوة، في الحالة أين مشغل الشكل دائمًا S قابل للتقطير، وقيمه الذاتية ثابتة على طول الاسطح المدروسة. من خلال فصل حالات تعداد القيم الذاتية نتج نظريتان سيتم برهنتهما.

TABLE DES MATIÈRES

Tableau de notation **III**

1 Préliminaires **1**
1.1 Espace affine . . . 1
1.2 Notions de géométrie différentielle . . . 3
1.3 Espace tangent et cotangent . . . 4
1.3.1 Vecteur tangent . . . 4
1.4 Champs de vecteur . . . 5
1.5 Géométrie différentielle affine . . . 6
1.5.1 Connexion affine . . . 7
1.5.2 Champs tensoriels . . . 7
1.6 Métriques non dégénérées . . . 9
1.7 Immersions affines . . . 11
1.7.1 Hypersurfaces affines . . . 12
1.7.2 Équations fondamentales . . . 13
1.8 Immersions de Blaschke . . . 14
1.9 Forme cubique . . . 16

2 Résultat de non existence **19**
2.1 Première étape : Equations de Codazzi et Apolarité . . . 20
2.1.1 Codazzi pour S . . . 20
2.1.2 Codazzi pour h . . . 20
2.1.3 Condition d'apolarité . . . 21
2.2 Seconde étape : Equations de Gauss . . . 21
2.2.1 Type I . . . 23
2.2.2 Type II . . . 26

3 Résultat d'existence **32**
3.1 Première étape : Equations de Codazzi et apolarité . . . 33
3.1.1 Codazzi pour S . . . 33
3.1.2 Codazzi pour h . . . 33
3.1.3 Condition d'apolarité . . . 34
3.2 Seconde étape : Equations de Gauss . . . 34

4 Hypersurfaces de type 1 **37**
4.1 Cas b.1 39
4.1.1 Démonstration 39
4.2 Cas b.2 44
4.3 Cas b.3 44
4.3.1 Démonstration 45
4.4 Cas b.4 48

5 Hypersurfaces de type 2 **49**
5.1 Cas 1 50
5.1.1 Démonstration 50
5.2 Cas 2 54

6 Hypersurfaces de Type 3 **55**
6.1 Type 3.1 55
6.2 Type 3.2 56
6.2.1 Cas a 57
6.2.2 Démonstration 57
6.2.3 Cas b 60

TABLEAU DE NOTATION

$\mathbb{R}^n$	Espace vectoriel à n dimensions sur le corps des nombres réels.
M^n or M	variété différentiable de dim n.
T_xM or T_pM	Espace tangent de M en p
$C^k(M)$	Ensemble de toutes les fonctions de la classe C^k sur M.
C^∞	Ensemble de toutes les fonctions de la classe C^∞ sur M.
D^n ou D	Ensemble de fonctions différentiables sur M.
$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}.....\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$	Base orthonormée de T_pM.
$X, Y, Z, X_i, ...$	Champs de vecteur sur M.
$[X, Y]$	Crochet de Lie de X et Y.
T_p^*M	Espace co-tangent de M à p.
TM	Espace fibré tangent sur M.
$\{\partial x_1, ..., \partial x_n\}$	Base orthonormée de TM.
ω	Forme différentielle.
$\partial f, \partial w$	Différentiel de la fonction f et différentiel de la k-forme ω.
$\mathfrak{X}(\mathrm{M})$	Ensemble de tous les champs de vecteurs sur M.
∇	Une connexion affine
$\hat{\nabla}$	Connexion de Levi-Civita.
D_XY	Connexion canonique sur $\mathbb{R}^n$.
$T(X, Y)$	Torsion de la connexion ∇.
Γ_{ij}^k	Symboles de Christoffel de la connexion.
g ou $<.,.>$	Métrique Riemannienne.
$h(X, Y)$	La deuxième forme fondamentale.
Trh	Trace de h.
γ	Courbe différentiable sur M.
$R(X, Y)Z$ ou R	Tenseur de courbure de la variété M.
$Ric(Y, Z)$	Tenseur de Ricci sur M.
ξ	Champs de vecteur transversal.
$\hookrightarrow$	Immersion.

C	La forme cubique.
h	La forme fondamental affine.
S	Opérateur de forme.
τ	Forme de connexion transversale.
θ	Élément de volume induit sur M.
ω_h	Élément de volume de la métrique non dégénérée h.
λ, λ_i	Valeurs propres de l'opérateur de forme S.
A	Transformation equiaffine.
$K(X,Y), K_X Y$	Tenseur de différence.
G_{ijkl}	La composante de l'équation de Gauss.
$\{E_1....E_N\}$	Une base de champs de vecteurs orthonormés locaux.

INTRODUCTION

La géométrie différentielle est une continuité du calcul infinitésimal, elle permet d'étudier grâce aux techniques du calcul différentiel une famille d'espaces topologiques appelés "variétés différentiables", permettant la rénovation de géométrie des courbes et des surfaces des espaces réels, et en la plaçant selon un contexte contemporain.
Dans cette thèse, nous étudions des hypersurfaces localement fortement convexes, localement homogènes dans l'espace affine, $\mathbb{R}^4$.

Les études antérieur de la dimension 2 ont d'abord été étudiés dans le livre de Guggenheimer [Gug77]. Leur résultat a été complété dans le papier de Nomizu et Sasaki [NS91] donnant ainsi une classification dans la dimension 2. À partir de la dimension 2, seuls des résultats partiels existent jusqu'à présent, la plupart de ces résultats concernent le cas où l'hypersurface affine est localement fortement convexe, c'est-à-dire que la métrique affine induite est une métrique définie positive. Dans ce cas, ces hypersurfaces ont été étudiées dans le papier de Sasaki [Sas80] dans le cas où l'hypersurface est une sphère affine et dans une série d'articles de Dillen et Vrancken [DVL93] donnant une classification complète en dimension 3.

Durant ce mémoire, l'étude est basée sur la démonstration des 2 théorèmes principaux de l'article [DVL93]. Afin de bien déterminer l'environnement d'étude, le premier chapitre est consacré aux définitions et notions qui caractérisent notre espace affine ainsi que la théorie des variétés différentielles. En ce qui concerne les chapitres restants, on va proposer les démonstrations détaillées des 2 théorèmes cités précédemment.
Il résultera à la fin de ce travail une classification complète des hypersurfaces étudiées.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Ce chapitre rappelle quelques définitions et propriétés fondamentales d'une géométrie affine, et une hypersurface affine. Nous pouvons renvoyer le lecteur au livre Nomizu-Sasaki [NKS94], ou à d'autres références standard sur la géométrie différentielle.

Les références de ce chapitre sont [DV93], [Nom68], [NKS94], [Laf12],[DVL93],[Li+15] et [CHI17]

1.1 Espace affine

Définition 1.1.1

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n. Ω un ensemble non vide est dit espace affine associé à V si il existe une application

$$\Omega \times \Omega \to V$$

$$(p, q) \mapsto \overrightarrow{pq}$$

qui satisfait les axiomes suivant

- $\forall \quad p, q, r \in \Omega, \qquad \overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}$
- $\forall \quad p \in \Omega$ et $\forall x \in V$ il existe un seul $q \in \Omega$ tel que $x = \overrightarrow{pq}$.

V est l'espace vectoriel associé à l'espace affine Ω tel que $dim\Omega = \ dimV$.

Définition 1.1.2

Un système de coordonnées affines d'origine $o \in \Omega$ peut être défini comme suit :
Soit $\{\ e_1, ..., e_n\}$ une base de V
Pour chaque point $p \in \Omega$, on écrit

$$\overrightarrow{op} = \sum_{i=1}^{n} x^i(p)e_i \tag{1.1}$$

où $(x^1(p), ..., x^n(p))$ est un n-uplé de nombres réels déterminé de façon unique, appelé les coordonnées de p. L'ensemble des fonctions $\{\ x^1, ..., x^n\}$ est appelé système affine de coordonnées.

Si on a deux systèmes de coordonnées affines $\{ x^1, ..., x^n\}$ et $\{ y^1, ..., y^n\}$, alors ils sont liés par

$$y^i = \sum a^i_j x^j + c^i$$

où $A = [a^i_j]$ est une matrice $n \times n$ et $c = (c^i)$ est un vecteur.
Cette relation peut être exprimée par l'équation $y = Ax + c$, ou sous sa forme matricielle élargie

$$\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

cette forme nous aide à avoir un système linéaire

Transformation affine

Les transformations affines sont les transformations géométriques les plus utilisées en géométrie car elle préservent quelques propriétés géométriques.
Soit $f : \Omega \to \Omega$ une application un à un de Ω sur lui-même.
Pour chaque $p \in \Omega$ on définit une application $F_p : V \to V$ comme suit : pour chaque $x \in V$, soit $r \in \Omega$ un point uniquement déterminé tel que $\overrightarrow{pr} = x$.
Notons

$$F_p(x) = \overrightarrow{f(p)f(r)}$$

Définition 1.1.3
On dit que f est ***une transformation affine*** *si, $\forall\ p \in \Omega$, l'application F_p est une transformation linéaire de V sur lui-même (et elle est non singulière, car elle est un à un avec f). Dans ce cas, il suit que $\forall\ q \in \Omega$ l'application F_q coïncide avec F_p.*
On peut donc appeler cette application ***la transformation linéaire associée*** *et notée F.*

Exemple :

— Toute translation est une application affine d'application linéaire associée l'identité

— Une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est affine si et seulement si elle est de la forme $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux réels ; l'application linéaire associée F est alors donnée par $F = ax$

— Toute composition de rotations, translations, changement d'échelle, est une transformation affine.

- Soit $\{x^1, ..., x^n\}$ un système de coordonnées affines d'origine o est basé sur une base $\{e_1, ..., e_n\}$ et $\{y^1, ..., y^n\}$ le système de coordonnées affines d'origine $f(o)$ est basé sur la base $\{F(e_1), ..., F(e_n)\}$, on a

$$y_i(f(p)) = x_i(p) \quad \text{pour} \quad p \in \Omega$$

Nous pouvons écrire la relation entre le système de coordonnées $\{x^1, ..., x^n\}$ et $\{y^1, ..., y^n\}$ sous la forme

$$x^i = \sum_{j=1}^{n} b^i_j y^j + d^i \qquad 1 \leq i \leq n$$

Définition 1.1.4
Un sous-ensemble non vide Ω' de Ω est appelé un sous-espace affine si, pour un certain point $p \in \Omega'$, l'ensemble de vecteur $\{\overrightarrow{pq}, q \in \Omega'\}$ de Ω forme un sous-espace vectoriel W de V. Dans ce cas, p dans la condition peut être remplacé par n'importe quel point avec même sous-espace vectoriel W résultant.
La dimension d'un sous-espace affine est, par définition, la dimension de l'espace vectoriel associé.

1.2 Notions de géométrie différentielle

Dans cette section on rappelle quelques propriétés et définitions concernant les variétés.

Définition 1.2.1 *(Variété topologique)*
Une variété topologique de dimension n est un espace topologique séparé dont tout point admet un voisinage U homéomorphe par une application qu'on note ϕ à un ouvert V de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.2.2 *(Carte locale)*
Une carte d'une variété topologique est le couple (U, ϕ) formé de l'ouvert U (le domaine de la carte) et de l'homeomorphisme ϕ de U sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.2.3 *Deux cartes(U, X) et (V, Y) sont C^∞-compatibles si le changement de cartes est un C^r-diffeomorphisme.*

Définition 1.2.4 *(Coordonnées locales)*
Soit (U, ϕ) une carte locale de M, et soient $(x_1(p), ..., x_n(p))$ les coordonnées du point $\phi(p)$ de $\mathbb{R}^n$.
Le système $\{x_1, ..., x^n\}$ de n fonctions définies et continues dans U est appelé un système de coordonnées locales de la variété.

Définition 1.2.5 *(Atlas)*
Soient M une variété topologique et $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ une famille de cartes locales de M, on dit que $\mathcal{A}$ est un atlas de M si $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

Définition 1.2.6
Un atlas de classe C^k d'une variété topologique M est un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ de M dont deux cartes quelconques sont toujours compatibles.

Exemple : Le cercle peut en effet être muni d'un atlas dont les fonctions de transition sont des translations,p artant de la paramétrisation locale $(\cos t, \sin t)$

Définition 1.2.7 *Un atlas de classe C^k d'une variété topologique M est dit maximal si toute carte compatible avec les cartes de l'atlas appartient elle-même a l'atlas (on trouvera aussi dans la littérature les adjectifs "complet" et "saturé"). Un tel atlas est aussi appelé structure différentielle de classe C^k.*

Définition 1.2.8 *(Changement de carte)*
Soit $\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \to V_i\}$un atlas d'une variété topologique. Les changements de cartes de $\mathcal{A}$ sont les homéomorphismes $\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$, Ce sont des homéomorphismes entre ouverts de $\mathbb{R}^n$.

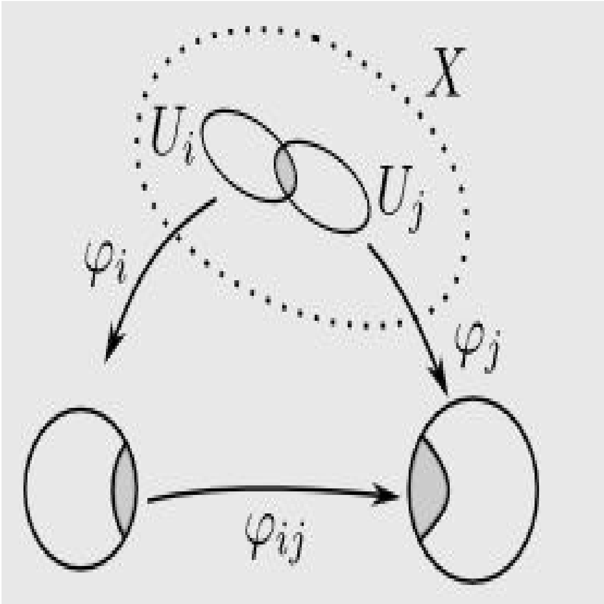

FIGURE 1.1 – changement carte

Définition 1.2.9
Soient M une variété topologique et $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ *un atlas de M. On dit que* $\mathcal{A}$ *est de classe* C^k $(1 \leq k \leq \infty)$, *si pour tous i dans I, les applications de changement de cartes* ϕ_{ij} *sont des difféomorphismes de classe* C^k.

Définition 1.2.10 *(Variété diférentielle)*
Une variété différentielle de classe C^k *est une variété topologique munie d'une structure différentielle de classe* C^k.

Exemple :
1. Pour l'espace $\mathbb{R}^n$, l'ensemble à un élément $\{(\mathbb{R}^n, Id)\}$ est un atlas de classe C^1
2. La sphére unité $\mathbb{S}$ définie par :

$$\mathbb{S} = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \diagup \|x\| = 1\right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

est une variété différentiable de dimension n.

1.3 Espace tangent et cotangent

1.3.1 Vecteur tangent

Définition 1.3.1
Soit M une variété différentiable et $x \in M$. *Une application* $A_x : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ *est appelée une dérivation en x, si elle satisfait les propriétés suivantes : pour tous* $f, g \in C^\infty(M)$.
1. $A_x(f + g) = A_x(f) + A_x(g)$.
2. $A_x(f.g) = A_x(f).g(x) + f(x).A_x(g)$.

Définition 1.3.2 *(Espace Tangent)*
L'ensemble de toutes les dérivations en x , s'appelle l'espace tangent de M en x , il est noté T_xM. *Par définition un vecteur tangent de M en x est un élément de* T_xM.

Remarque 1.3.1

— *T_xM est un espace vectoriel de dimension n.*
— *Soit $\{(U,\phi)\}$ une carte locale au point $x \in M$ et $\phi = (x^1, x^2, ..., x^n)$ les coordonnées locales au voisinage de x. Les n dérivations $\frac{\partial}{\partial x^i}_{|x}$ forme une base de T_xM.*

Définition 1.3.3 *(Espace Cotangent)*
1. On note T_x^*M l'espace dual T_xM nommé espace cotangent à M en x. On sait que localement $\frac{\partial}{\partial x^i}_{|x}$ est une base de T_xM. On note par $(dx^i|x)$ sa base dual, nous avons $\left\langle dx^i_{|x}, \frac{\partial}{\partial x^i}|x \right\rangle$ est le symbole de Kröneker défini par δ_i^j

$$\delta_i^j = 1 \quad si \quad i = j$$
$$\delta_i^j = 0 \quad si \quad i \neq j$$

2. $T^*M = \bigcup_{x \in M} T^*M$ est appelé le fibré cotangent de M.

1.4 Champs de vecteur

Définition 1.4.1
Un champ de vecteur X sur une variété différentiable M est une correspondance qui associe à chaque point $p \in M$ un vecteur $X(p) \in T_pM$. En terme d'application, X est une application de M en fibré tangent TM. Le champ est différentiable si $X : M \to TM$ est différentiable. On note par $\mathfrak{X}(M)$ l'ensemble de tous les champs de vecteur de classe C^∞.

Considérant $X : U \subset M \to TM$ on peut écrire :

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où chaque a_i est une fonction sur U et $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ est la base associée à x.

Lemme 1.4.1
Soient X et Y des champs de vecteurs différentiables sur une variété M. Il existe alors un champ de vecteurs unique Z tel que, pour tout $f \in \mathcal{D}(M)$,

$$Zf = (XY - YX)f$$

où $\mathcal{D}(M)$ est l'ensemble de toutes les fonctions différentiables sur M.
Le champ de vecteurs Z donné par ce lemme est appelé **le crochet de Lie** de X et Y *noté*

$$[X, Y] = XY - YX \tag{1.2}$$

Proposition 1.4.1
Si X, Y et Z sont des champs de vecteur différentiables sur M, a, b sont des nombres réels et f, g des fonctions différentiables, alors :
1. $[X, Y] = -[Y, X]$ *(anti-commutativité),*
2. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ *(linéarité),*
3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ *(Identité de Jacobi),*
4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

1.5 Géométrie différentielle affine

Nous considérons maintenant l'espace réel affine standard $\Omega = \mathbb{R}^n$ comme une variété différentiable de dimension n.

De la construction d'un système de coordonnées affines $\{ x^1, ..., x^n\}$,cela implique que $\dfrac{d}{dx^i}$ comme champ de vecteurs correspond à e^i, où $\{ e^1, ..., e^n\}$ est une base de V sur laquelle le système de coordonnées affines est basé. Considérons un champs de vecteur Y arbitraire sur $\mathbb{R}^n$ et soit x_t, $a < t < b$, une courbe lisse arbitraire sur $\mathbb{R}^n$.
Si nous prenons un système de coordonnées affines $\{ x^1, ..., x^n\}$, on peut écrire

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{d}{dx^i} \quad \text{et} \quad x_t = \{ x^1(t), ..., x^n(t)\}$$

On peut définir la dérivée covariante D_tY de Y le long de la courbe x_t par

$$D_tY = \sum_{i=1}^{n} \frac{dY^i(x_t)}{dt} \frac{d}{dx^i} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{dY^i}{dx^j} \frac{dx^j}{dt} \frac{d}{dx^i}$$

Donc D_tY est une généralisation de la dérivée directionnelle des fonctions aux champs de vecteur.

Propriétés 1
Si X est un vecteur tangent en un point x_0, alors D_XY est définie par $D_XY = (D_tY)_t$, où x_t est une courbe avec un point initial x_0 et vecteur tangent initial X.
D la différentielle covariante a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
&(1) \quad D_{X_1+X_2}Y = D_{X_1}Y + D_{X_2}Y \\
&(2) \quad D_{\phi X}Y = \phi D_XY \\
&(3) \quad D_X(Y_1 + Y_2) = D_XY_1 + D_XY_2 \\
&(4) \quad D_X(\phi Y) = (X\phi)Y + \phi D_XY
\end{aligned}$$

où ϕ est une fonction lisse et X, Y, X_1, X_2, Y_1 et Y_2 sont des champs de vecteur sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.5.1
Une forme volume (ou élément volume) sur une variété M de dimension n est une forme n alternée ω telle que $\omega_p \neq 0 \quad \forall p \in M$.
-Une transformation affine f est dite équiaffine si elle préserve la forme volume.

1.5.1 Connexion affine

Soit M une variété différentiable de classe C^∞ de dimension n. La façon la plus pratique de définir la notion d'une connexion affine (ou linéaire) se fait par différentielle covariante d'un champ vectoriel par rapport à un autre.
On notera $\mathfrak{F}(M)$ l'ensemble de tous fonctions différentiables et par $\mathfrak{X}(M)$ l'ensemble de tous les champs de vecteur lisses sur M.

Par une règle de différentiation covariante sur M, nous définissons une application

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

satisfaisant les conditions suivantes :

- $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$
- $\nabla_{\phi X} Y = \phi \nabla_X Y$
- $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$
- $\nabla_X (\phi Y) = (X\phi) Y + \phi \nabla_X Y$

tel que $X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ et $\phi \in \mathfrak{F}(M)$.

Une connexion affine sur M n'est rien d'autre qu'une règle de différentiation covariante sur M notée par ∇.
Une connexion affine sur M induit une connexion affine sur toute sous-variété U de M. Localement, si U est un voisinage avec des coordonnées $\{ x^1, ..., x^n\}$, alors on peut écrire

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

où les fonctions $\Gamma_{ij}^k (i, j, k = 1, ..., n)$ sont appelées les symboles de Christoffel pour la connexion affine.

1.5.2 Champs tensoriels

Dans cette sous-section, nous donnerons une brève introduction aux champs tensoriels pour cela commençons par définir un tenseur

Définition 1.5.2 *(Tenseur)*

- *Pour tout $x \in M$ nous définissons l'espace vectoriel*

$$T_x^{(r,s)} M = \underbrace{T_x M \otimes T_x M ... \otimes T_x M}_{r fois} \otimes \underbrace{T_x^* M \otimes T_x^* M \otimes ... T_x^* M}_{s fois}$$

- *Un élément $T \in T_x^{(r,s)} M$ est un tenseur de type (r,s) au-dessus de x.*
- *On note $T^{(r,s)} M = \bigcup_{x \in M} T_x^{(r,s)} M$*

Définition 1.5.3 *(Champs de tenseur)*
Un champ de tenseur de type (r,s) *sur* M *est une partie de* $T_x^{(r,s)}M$*. L'ensemble des champs de tenseur de type (r,s) est noté par* $\mathfrak{T}^{(r,s)}M$

Une connexion affine ∇ conduit à une différenciation covariante des champs tensoriels par rapport à un champ vectoriel

Plus précisément, soit K un champ tensoriel de type (r,s), c'est-à-dire avec un degré contravariant r et un degré covariant s, est défini comme une carte multilinéaire

$$T : \mathfrak{X}(M) \times ... \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{F}(M) \times ... \times \mathfrak{F}(M)$$

et soit X un champs de vecteur, alors $\nabla_X K$ est un champ tensoriel du même type (r,s).

$$X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \nabla_X K$$

Définition 1.5.4
Le tenseur de torsion T *est définit par*

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

c'est un tenseur de type $(1,2)$ *qui associe à une paire de champs de vecteur* (X,Y) *le champs de vecteur* T
Les composantes du tenseur de torsion T *en coordonnées locales sont*

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$$

La connexion est dite symétrique si $T = 0$.

Définition 1.5.5
Le tenseur de courbure R, qui est de type $(1,3)$*, est défini par*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

tel que $R(X,Y)$ *est une transformation linéaire de* $T_x(M)$*. Les composantes en coordonnées locales :*

$$R(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l})\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_i R_{jkl}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

données par

$$R_{jkl}^i = (\frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l}) - \sum_m \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^i - \Gamma_{kj}^m \Gamma_{lm}^i$$

Remarque 1.5.1
Désormais, nous supposerons que le tenseur de torsion d'une connexion donnée ∇ *est nul. Nous disons également que* ∇ *a une torsion nulle ou que* ∇ *est sans torsion.*

Corollaire 1.5.1 *La première et la deuxième identités Bianchi sont données par :*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

$$(\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y) = 0.$$

Remarque 1.5.2

- *Si R est identique à 0 sur M, on dit que ∇ est une connexion affine plate.*
- *Ainsi, une connexion affine est plate si $T = 0$ et $R = 0$.*
- *∇ est plate si et seulement si autour de chaque point, il existe un système de coordonnées local tel que $\Gamma_{ij}^k = 0 \ \forall \ i, j, k$*
- *Si $T = 0$ et $\nabla R = 0$,alors on dit que ∇ est une connexion affine symétrique.*

Définition 1.5.6
-Une connexion équiaffine ∇ sur M est une connexion sans torsion qui admet un élément de volume parallèle ω on M. Si ω est un élément volume sur M tel que $\nabla\omega = 0$, alors on dit que (∇, ω)est un structure équiaffine sur M.

1.6 Métriques non dégénérées

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n. Pour une forme bilinéaire donnée $f : (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$, il existe une base en V

$$\{e_1, ..., e_p, ..., e_{p+q}, e_{p+q+1}, ..., e_n\}$$

tel que

$$\begin{array}{ll} f(e_i, e_j) = 0 & \forall \quad i \neq j \\ f(e_i, e_i) = 1 & \forall i, 1 \leq i \leq p \\ f(e_j, e_j) = -1 & \forall j, p+1 \leq j \leq p+q \\ f(e_k, e_k) = 0 & \forall k, p+q+1 \leq k \leq n \end{array} .$$

De plus, les entiers p et q sont déterminés de manière unique, ce que l'on appelle souvent la loi d'inertie de Sylvester.

Pour f donnée , le sous-espace $V_0 = \{x \in V : f(x, y) = 0 \quad \forall y \in V\}$ est appelé noyau. Sa dimension est égale à $n - (p + q)$.

On dit que f est non dégénéré si l'espace nul est $\{0\}$ donc f est non dégénéré si et seulement si $p + q = n$.

Une fonction bilinéaire symétrique non dégénérée est appelé un produit intérieur sur V. La paire (p, q) est appelée sa signature.

- Si $p = n$,alors $f(x, x) > 0 \quad \forall x$, et l'égalité est vraie si et seulement si $x = 0$. dans ce cas, f est dit définie positive.
- Si $q = n$, alors f est dit définie négative.
- Si f est définie positive ou définie négative, on dit que f est définie.
- Sinon, f est indéfini.

M une variété différentiable de dimension n, g métrique non dégénérée sur M, un champ tensoriel symétrique de type $(0, 2)$ qui est non dégénéré est défini comme suit :

— Si $g(X,Y) = 0 \quad \forall Y \in T_x(M)$, alors $X = 0$. Ceci est nommé aussi une métrique pseudo-Riemannianne (ou semi-Riemannianne).
— Si g est définie positive, on dit que g est une métrique riemannienne.
— Si $f : M \to E$ est une immersion de M dans un espace euclidien E, alors f induit une métrique riemannienne g :

$$g(X,Y) =< f_*(X), f_*(Y) > \quad \forall X,Y \in T_x(M)$$

où $<,>$ désigne le produit intérieur euclidien.

Supposons que M soit munie d'une métrique non dégénérée g. Nous disons qu'une connexion affine ∇ sur M est métrique si $\nabla g = 0$.
Géométriquement, cette propriété implique que le déplacement parallèle préserve le produit scalaire donné par g.

Theorème 1.6.1
Étant donnée une métrique non dégénérée g sur M, il existe une connexion affine avec une torsion nulle qui est métrique : $\nabla g = 0$. Celle ci est unique et appelée la connexion de Levi-Civita pour g.

Supposons qu'une variété M de dimension n soit munie d'une métrique non dégénérée h, et une connexion affine ∇.

Nous définissons une nouvelle connexion affine $\bar{\nabla}$ tel que : Pour chaque $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$Xh(Y,Z) = h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \bar{\nabla}_X Z)$$

Cette équation détermine une connexion affine unique $\bar{\nabla}$, nommée la connexion conjuguée de ∇ relative à h. Si ∇ est une connexion relative à h, alors ∇ coïncide avec $\bar{\nabla}$. Nous nous intéressons donc au cas où ∇ n'est pas nécessairement relative à h. Si l'on considère la connexion conjuguée à $\bar{\nabla}$ relative à h, alors on revient à ∇.

Corollaire 1.6.1
Les tenseurs de torsion T et $\bar{T}$ de ∇ et $\bar{\nabla}$, respectivement, satisfont

$$(\nabla_X h)(Y,Z) + h(Y, T(X,Z)) = (\nabla_Y h)(X,Z) + h(Y, \bar{T}(X,Z))$$

$\forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Corollaire 1.6.2
Suppose que ∇ est de torsion nulle. Alors $\bar{\nabla}$ est de torsion nulle si et seulement si (∇, h) satisfait l'équation de CodazziS

$$(\nabla_X h)(Y,Z) = (\nabla_Z h)(Y,X) \quad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Si (∇, h) satisfait l'équation de CodazziS, alors $(X,Y,Z) \mapsto C(X,Y,Z) = (\nabla_X h)(Y,Z)$ est une fonction symétrique 3-linéaire. Nous l'appelons la forme cubique pour (∇, h). Dans ce cas, nous dirons également que (∇, h) est compatible.

Corollaire 1.6.3
Si ∇ est sans torsion et (∇, h) est compatible, alors
(1) $(\bar{\nabla}, h)$ satisfait l'équation de Codazzi's
(2) $\hat{\nabla} = \frac{1}{2}(\nabla + \bar{\nabla})$ est la connexion Levi-Civita pour h.

Proposition 1.6.1
Les tenseurs de courbure R et $\bar{R}$ de ∇ et $\bar{\nabla}$ sont liés par

$$h(R(X,Y)Z,U) = -h(Z, \bar{R}(X,Y)U).$$

Corollaire 1.6.4
$R = 0$ si et seulement si $\bar{R} = 0$.

1.7 Immersions affines

Nous introduisons la notion générale d'immersion affine. Nous supposerons toujours que les connexions affines données ont une torsion nulle.
Considérons deux variétés différentiables avec des connexions affines $(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ et (M, ∇) de dimensions m et n, respectivement. Soit $k = m - n$.

Définition 1.7.1 *Une immersion différentiable $f : M \to \tilde{M}$ est dite* immersion affine *si la condition suivante est satisfaite ; il existe une distribution différentiable k - dimensionnelle N le long de $f : x \in M \mapsto N_x$, un sous-espace de $T_{f(x)}(M)$, tel que*

$$T_{f(x)}(\tilde{M}) = f_*(T_x(M)) + N_x \qquad \textit{(somme directe)} \tag{1.3}$$

et tel que pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ on a

$$(\tilde{\nabla}_X f_*(Y))_x = (f_*(\nabla_X Y))_x + (\alpha(X,Y))_x \qquad \textit{où} \quad \alpha(X,Y)_x \in N_x \tag{1.4}$$

Dans le cas où $f : M \longrightarrow \tilde{M}$ est une immersion d'une variété M dans une variété Riemannianne $\tilde{M}$ avec g métrique Riemannian definit positive, on peut certainement choisir l'espace normal en chaque point, à savoir que

$$N_x = \xi \in T_{f(x)}(\tilde{M}) : g(\xi, X) = 0 \qquad \forall \quad X \in T_x(M) \tag{1.5}$$

Dans cette situation, il est facile de montrer que la carte $(X,Y) \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \alpha(X,Y)$ définit réellement pour chaque point $x \in M$ une carte bilinéaire symétrique

$$T_x(M) \times T_x(M) \longrightarrow N_x$$

Définition 1.7.2
*Dans le cas où f est une immersion d'une variété M dans une variété riemannienne $\tilde{M}$, cette applicationα est appelée **la deuxième forme fondamentale**.*
*Considérant que **la première forme fondamentale** fait référence à la métrique riemannienne induite sur M.*
*Dans la géométrie des immersions affines, nous appellerons α simplement **la forme fondamentale affine**.*

1.7.1 Hypersurfaces affines

Définition 1.7.3
Nous considérons une variété différentiable M de dimension n avec une immersion

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

Nous appelons M une hypersurface et f une immersion hypersurface. On peut aussi appeler M une hypersurface immergée.

Pour chaque point $p \in M$, nous choisissons un champ local de vecteurs transversaux $\xi : x \in U \mapsto \xi_x$, où U est un voisinage de p. La transversalité signifie dans ce cas :

$$T_{f(x)}(\mathbb{R}^{n+1}) = f*(T_x(M)) + Span\{\xi_x\} \tag{1.6}$$

où $Span\{\xi_x\}$ signifie le sous-espace unidimensionnel engendré par ξ_x.

Proposition 1.7.1
Pour une immersion hypersurface $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, supposons que nous ayons un champ vectoriel transversal ξ sur M. alors nous avons une connexion induite sans torsion ∇ satisfaisant :

$$D_X f_*(Y) = f*(\nabla_X Y) + h(X,Y)\xi \qquad \text{la formule de Gauss} \tag{1.7}$$

où h est une fonction bilinéaire symétrique sur l'espace tangent T_xM.
La fonction bilinéaire symétrique h est appelée ***la forme fondamentale affine*** *(par rapport au vecteur transversal ξ)*

Définition 1.7.4
Soit (M,∇)une variété de dimension n muni d'une connexion affine ∇.Une immersion $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est appelée immersion affine s'il y a un champ vectoriel ξ sur M tel que la formule de Gauss est vérifiée.

Donc pour une immersion hypersurface $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ un choix du champ vectoriel transversal ξ fournit une connexion induite ∇ de telle sorte que f devienne une immersion affine.

Proposition 1.7.2
Pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$, on a

$$D_X\xi = -f*(SX) + \tau(X)\xi \qquad \text{(formule de Weingarten)} \tag{1.8}$$

où S est un tenseur de type (1,1), appelé ***l'opérateur de forme affine****, et τ est une 1-forme, appelée* ***la forme de connexion transversale****.*

Proposition 1.7.3
Soit (M,∇) une variété de dimension n munie d' une connexion affine ∇ et soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ et $\bar{f} : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ immersions affines par rapport aux champs de vecteur transversaux ξ et $\bar{\xi}$, respectivement. Les objets h, S et τ pour $\bar{\xi}$ sont notés $\bar{h}, \bar{S}$,et $\bar{\tau}$ Suppose que

$$h = \bar{h}, \qquad S = \bar{S}, \qquad \tau = \bar{\tau}$$

Alors, il y a une transformation affine A tel que $\bar{f} = Af$.

On fixe donc une forme volume parallèle fixe $\tilde{\omega}$ dans $\mathbb{R}$. Pour une immersion hypersurface $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, Soit ξ un champ vectoriel transversal. En plus de la connexion induite ∇ et de la forme fondamentale affine h, nous considérons l'élément de volume suivant θ sur M :

$$\theta(X_1, ..., X_n) = \tilde{\omega}(X_1, ..., X_n, \xi) \tag{1.9}$$

Il est clair que θ est une forme volume sur M, appelé forme volume induite.
Nous nous intéressons à la question de savoir si (∇, θ) définit une structure équiaffine, c'est-à-dire si $\nabla\theta = 0$ est valide. (pour la preuve voir [NKS94])

Proposition 1.7.4
On a

$$\nabla_X \theta = \tau(X)\theta \qquad \forall X \in T_x(M) \tag{1.10}$$

Par conséquent, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- $\nabla\theta = 0$
- $\tau = 0$, *c'est pourquoi,* $D_X\xi$ *est tangentielle pour chaque* $X \in \mathfrak{X}(M)$

Définition 1.7.5

- *Pour l'immersion hypersurface* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *un champ vectoriel transversal* ξ *est dit* ***équiaffine*** *si* $D_X\xi$ *est tangentielle à M pour tous* $X \in T_x(M), x \in M$.
- *Avec un champ vectoriel transversal équiaffine* ξ, *on a* ***une structure équiaffine*** (∇, θ) *sur M.*
- *Ainsi, nous pouvons appeler* $f : (M, \nabla, \theta) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ***une immersion équiaffine.***

1.7.2 Équations fondamentales

On peut imposer maintenant des équations fondamentales pour l'immersion hypersurface $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

Tout d'abord, nous considérons le cas où le champ vectoriel transversal donné ξ est arbitraire.

Theorème 1.7.1
Pour un champ vectoriel transversal arbitraire ξ *la connexion induite* ∇, *la forme fondamentale affine* h, *l'opérateur de forme* S *et la forme de connexion transversale* τ *satisfont les équations suivantes :*

$$\text{Gauss} : R(X,Y)Z = h(Y,Z)SX - h(X,Z)SY \tag{1.11}$$

$$\text{Codazzi pour } h : (\nabla_X h)(X,Y,Z) + \tau(X)h(Y,Z) = (\nabla_Y h)(X,Z) + \tau(Y)h(X,Z) \tag{1.12}$$

$$\text{Codazzi pour } S : (\nabla_X S)(Y) - \tau(X)SY = (\nabla_Y S)X - \tau(Y)SX \tag{1.13}$$

$$\text{Ricci} : h(X,SY) - h(SX,Y) = d\tau(X,Y) \tag{1.14}$$

Corollaire 1.7.1
Le tenseur de Ricci de la connexion induite est donné par

$$\mathrm{Ric}(Y,Z) = h(Y,Z)\mathrm{tr}S - h(SY,Z) \tag{1.15}$$

Remarque 1.7.1
1. D'après (1.15) *et* (1.14) *il s'ensuit que Ric est symétrique si et seulement si* $d\tau = 0$.
2. Dans l'équation de Codazzi (1.12) *on voit que le côté gauche est symétrique en X et Y ainsi qu'en Y et Z. Par conséquent, si nous définissons*

$$C(X,Y,Z) = (\nabla_X h)(Y,Z) + \tau(X)h(Y,Z) \tag{1.16}$$

On appelle C la forme cubique pour l'immersion affine.

L'équation dans le théorème 1.7.1 ne sont pas toute indépendantes.

Proposition 1.7.5 *Soit M une variété différentiable avec une connexion affine sans torsion* ∇*,h un champ de tenseur covariant symétrique de degré 2, un (1,1) -tenseur S, et un* τ *de forme 1 qui satisfont ensemble l'équation de Gauss* (1.11) *et l'équation de Codazzi pour h* (1.12)*. Si le rang* $h \geq 3$*, alors l'équation de Codazzi pour S* (1.13) *est satisfaite.*

Définition 1.7.6
Le rang de la forme fondamentale affine est indépendant du choix du champ vectoriel transversal. Nous le définissons comme le rang de l'hypersurface ou de l'immersion hypersurface. En particulier, si le rang est n, c'est-à-dire si h est non dégénéré, alors on dit que l'hypersurface ou l'immersion hypersurface est non dégénérée.

1.8 Immersions de Blaschke

Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ une immersion hypersurface non dégénérée. Quel que soit le champ transversal ξ que nous puissions choisir, la forme fondamentale affine h peut être traitée comme une métrique non dégénérée sur M. C'est l'hypothèse de base sur laquelle Blaschke a développé la géométrie différentielle affine des hypersurfaces.
Dans cette section, nous donnerons une base structurelle. Nous fixons un élément de volume fixe sur $\mathbb{R}^{n+1}$ (donné par le déterminant par exemple).
Le choix d'un champ vectoriel transversal arbitraire ξ,génère sur M la forme fondamentale affine h, la connexion induite ∇ et l'élément de volume induit θ.
Nous voulons atteindre, par un choix approprié de ξ, les deux buts suivants :
I. (∇, ξ) est une structure équiaffine, c'est-à-dire $\nabla\theta = 0$
II. θ coïncide avec la forme volume ω_h

Theorème 1.8.1
Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *une immersion hypersurface non dégénérée. Pour chaque point* $x_0 \in M$*,il existe un champ vectoriel transversal défini dans un voisinage de* x_0 *satisfaisant aux conditions I et II ci-dessus. Un tel champ vectoriel transversal est unique.*

Définition 1.8.1
Un champ vectoriel transversal satisfaisant I et II est appelé champ normal affine ou champ normal de Blaschke. Pour chaque point $x \in M$*, nous prenons la ligne passant par* x *dans la direction du vecteur normal affine* ξ_x*.Celle ci est appelée la normale affine par* x*.*

Définition 1.8.2
En fixant un champ normal affine ξ*, nous avons la connexion induite* ∇*, la forme fondamentale affine h, qui est appelée métrique affine, et l'opérateur de forme affine S déterminé*

par les formules de Gauss et Weingarten.
Nous appellerons (∇, h, S) *la structure Blaschke sur l'hypersurface M. L'immersion affine* $f : (M, \nabla) \longrightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, D)$ *avec le champ normal affine* ξ *est appelée une immersion Blaschke. Nous parlerons également de M comme d'une hypersurface Blaschke.*
La connexion induite ∇ *est indépendante du choix du signe pour* ξ *et est appelée la connexion Blaschke.*

Remarque 1.8.1
De l'unicité du théorème 1.8.1, il s'ensuit que la structure de Blaschke est invariante sous chaque transformation équiaffine de l'espace ambiant $\mathbb{R}^{n+1}$*. Si une hypersurface M non dégénérée est orientable, alors il existe un champ normal affine globalement défini, qui est unique à signer. En fait, nous pouvons orienter* ξ *en utilisant une orientation de M.*

Comme cas particulier du théorème 1.7.1, nous avons

Theorème 1.8.2
Pour une hypersurface Blaschke M, nous avons les équations fondamentales suivantes :

$$\textit{Equation de Gauss} : R(X,Y)Z = h(Y,Z)SX - h(X,Z)SY \tag{1.17}$$
$$\textit{Equation de Codazzi pour } h : (\nabla h)(X,Y,Z) = (\nabla h)(Y,X,Z) \tag{1.18}$$
$$\textit{Equation de Codazzi pour } S : (\nabla_X S)Y = (\nabla_Y S)X \tag{1.19}$$
$$\textit{Equation de Ricci} : h(X,SY) = h(SX,Y) \tag{1.20}$$
$$\textit{Condition équiaffine} : \nabla\theta = 0 \tag{1.21}$$
$$\textit{Equation de volume} : \theta = \omega_h \tag{1.22}$$
$$\textit{Condition d'Apolarity} : \nabla\omega_h = 0 \tag{1.23}$$

Proposition 1.8.1
Pour une hypersurface non dégénérée $(n \geq 2)$ *avec la structure Blaschke, nous avons*
1. $S = 0$ *si et seulement si* $R = 0$*.*
2. Le tenseur de Ricci est donné par $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}Sh(Y,Z) - h(SY,Z)$ *comme précédemment, et Ric vaut 0 si et seulement si* $S = 0$*. 3. Si* $S = \lambda I$ *où* λ *est une fonction scalaire, alors* λ *est constant.*

Définition 1.8.3
-Une hypersurface Blaschke M est appelée ***une hypersphère impropre*** *si S est identique à 0.*
-Si $S = \lambda I$ *où* λ *est une constante non nulle, alors M est appelée* ***une hypersphère affine propre****.*

Nous donnons maintenant une définition des hypersurfaces localement homogènes, et hypersurfaces fortement convexes localement [**dillen1993homogeneous**].

Définition 1.8.4
Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *une hypersurface non dégénérée munie de la structure Blaschke. On appelle M* ***localement homogène*** *si pour tout point s, p et q dans M, il existe un voisinage* U_p *de p dans M, et une transformation équiaffine A de* $\mathbb{R}^{n+1}$*, i.e* $A \in SL(n+1, R) \ltimes \mathbb{R}^{n+1}$*, tel que* $A(p) = q$*, et* $A(U_p) \subset M$*. Si* $U_p = M$ *pour tous* $p \in M$*, alors M est appelé* ***homogène****.*

Proposition 1.8.2

- *Chaque transformation équiaffine laissant M localement invariante, préserve la métrique affine h et la connexion induite ∇.*
- *Si pour tous les points p et q de M, il existe des voisinages U_p de p et U_q de q sur M, et un diffeomorphisme $f : U_p \longrightarrow U_q$, avec $f(p) = f(q)$ tel que f préserve h et r, alors M est* ***localement homogène****.*

Définition 1.8.5 *Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ une hypersurface non dégénérée munie de la structure Blaschke. Si h est définie positive, alors nous appelons M une hypersurface fortement localement convexe.*

Procédure pour trouver le champ normal :

1. Choisissez un champ vectoriel transversal provisoire ξ.Calculer τ.
2. Déterminer la forme fondamentale affine h d'après ξ en utilisant la formule de Gauss
$$D_x f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi \tag{1.24}$$
Vérifiez que h n'est pas dégénéré.
3. Déterminer la forme volume induite θ à partir de ξ
$$\theta(X_1, ..., X_n) = \det f_*X_1, ..., f_*X_n, \xi$$
4. Choisir une base unimodulaire $\{X_1, ..., X_n\}$ avec
$$\theta(X_1, ..., X_n) = 1$$
Définir $h_{ij}h(X_i, Y_j)$ et calculer $det_\theta h = det[h_{ij}]$.
5. Prendre $\phi = |det_\theta h|^{1/(n+2)}$ et poser $\bar{\xi} = \phi\xi + Z$,où Z doit être déterminé par
$$\tau + \frac{1}{\phi}h(Z, .) + dlog\phi = 0$$
Si $\tau = 0$ cette équation est simplifié $h(Z, X) = -X\phi$ pour tous X.
6. Une fois que nous obtenons le champ normal affine, il est facile de calculer la métrique affine $\bar{h} = h/\phi$, l'opérateur de forme affine S, et la connexion induite ∇.

Le lecteur peut trouver de nombreux exemples dans le livre de Nomizu-Sasaki [NKS94].

1.9 Forme cubique

Nous continuons avec une hypersurface non dégénérée avec sa Blaschk structure. De l'équation de Codazzi pour h, nous voyons que la forme cubique

$$C(X, Y, Z) = (\nabla_X h)(Y, Z) \tag{1.25}$$

est symétrique en X,Y et Z.

Définition 1.9.1
Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ une hypersurface non dégénérée munie de la structure Blaschke,avec sa forme cubique C, en plus de la connexion induite ∇ sur M, nous considérons la connexion Levi-civita $\hat{\nabla}$ pour l'affine métrique h. nous considérons le tenseur de différence de type (1,2) :

$$K(X,Y) = \nabla_X Y - \hat{\nabla}_X Y \tag{1.26}$$

Puisque ∇ et $\hat{\nabla}$ sont sans torsion, nous avons $K(X,Y) = K(Y,X)$. Nous allons également écrire

$$K_X Y = K(X,Y) \qquad \text{et} \qquad K_X = \nabla_X - \hat{\nabla}_X$$

ainsi pour chaque $X \in \mathfrak{X}(M)$, K_X est un tenseur de type $(1, 1)$. Nous pouvons maintenant relier la forme cubique au tenseur de différence.

Proposition 1.9.1
On a

$$C(X,Y,Z) = -2h(K_X Y, Z) \tag{1.27}$$

Corollaire 1.9.1
La connexion induite ∇ et la connexion Levi-Civita $\hat{\nabla}$ coïncident si et seulement si $K = 0$, c'est-à-dire si et seulement si la forme cubique C disparaît à l'identique.

Theorème 1.9.1
Nous avons la condition d'apolarité :

$$trK_X = \quad \textit{pour tout} \quad X \in T_pM \tag{1.28}$$

en notation d'index

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij}^{j} = 0 \quad \textit{pour chaque i fixé}$$

Theorème 1.9.2
La condition d'apolarité 1.28 est équivalente à chacune des conditions suivantes :

$$tr_h \{(Y,Z) \mapsto C(X,Y,Z)\} = 0 \quad \textit{pour tout} \quad X \in T_pM. \tag{1.29}$$

en notation d'index :

$$\sum_{j,k=1}^{n} h^{jk} C_{ijk} = 0 \quad \textit{pour tous } i$$

$$tr_h(\nabla_X h) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad X \in T_pM \tag{1.30}$$

$$tr_h K = 0 \tag{1.31}$$

en notation d'index

$$\sum_{j,k=1}^{n} h^{jk} K_{jk}^{i} = 0 \quad \forall i$$

Theorème 1.9.3
Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n > 2$ une hypersurface non dégénérée munie de la structure de Blashcke, Si la forme cubique C disparaît à l'identique, alors $f(M)$ est un hyperquadrique en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Lemme 1.9.1
Si la forme cubique d'une hypersurface Blaschke M est identique à 0,alors M est une hypersphère affine

Remarque 1.9.1 *Les équations de base peuvent également être exprimées en termes de Connexion Levi-Civita du tenseur de différence. En particulier, nous avons l'équation de Codazzi pour K qui implique que*

$$\begin{aligned}\hat{\nabla} K(X, Y, Z) - \hat{\nabla} K(Y, X, Z) \\ = \frac{1}{2}h(Y, Z)SX - \frac{1}{2}h(X, Z)SY + \frac{1}{2}h(SX, Z)Y - \frac{1}{2}h(SY, Z)X. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Pour la preuve de ce lemme, et deux preuves équivalentes du théorème 1.9.3, le le lecteur peut les trouver dans [NKS94].

Proposition 1.9.2 *Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n > 2$ une hypersurface localement fortement convexe non dégénérée munie de la structure de Blashcke,Alors*

1. *Il résulte de l'équation de Ricci que l'opérateur de forme affine est diagonalisable.*
2. *Donc M est homogène, les valeurs propres de l'opérateur de forme sont constantes d'aprés [Nom68]*

CHAPITRE 2

RÉSULTAT DE NON EXISTENCE

Dans ce chapitre on va démontrer le premier résultat fondamental de l'article de classification [DVL93] :

Theorème 2.0.1
Il n'existe pas d'hypersurfaces de dimension 3 localement fortement convexes, localement homogènes dans $\mathbb{R}^4$ dont l'opérateur de forme S a trois valeurs propres distinctes.

Pour cela on va essayer d'implanter une méthode qui diffère de celle proposée dans l'article [DVL93].

Démonstration

Soit l'immersion $F : M \to \mathbb{R}^4$ et M est la sous variété différentielle de dimension 3. Pour le reste, M désignera toujours une hypersurface de Blaschke de $\mathbb{R}^4$ localement fortement convexe, localement homogène. Et nous omettons d'écrire l'immersion F dans les équations.

Puisque M est localement fortement convexe, en utilisant la proposition 1.9.2, il résulte de l' Équation de Ricci que l'opérateur de forme affine est diagonalisable.

Au vu des hypothèses du théorème, on admet que S a trois valeurs propres distinctes de multiplicité 1 chacune.
Soit un point $p \in M$. On construit une base tangente $\{e_1, e_2, e_3\}$ au point p et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ par les valeurs propres de l'opérateur de forme S, telles que

$$Se_1 = \lambda_1 e_1 \qquad Se_2 = \lambda_2 e_2 \qquad Se_3 = \lambda_3 e_3 \tag{2.1}$$

Puisque M est localement fortement convexe et S a 3 valeurs propres différentes, nous pouvons considérer des champs vectoriels tangents h-orthonormaux E_1, E_2, E_3 sur un voisinage de p tel que

$$SE_1 = \lambda_1 E_1 \qquad SE_2 = \lambda_2 E_2 \qquad SE_3 = \lambda_3 E_3 \tag{2.2}$$

Nous introduisons les fonctions nommées les symboles de ChristoffelΓ_{ij}^k pour $i = 1, .., 3$, $j = 1, .., 3$ et $k = 1, .., 3$ par

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^{3} \Gamma_{ij}^k E_k$$

Étant donné qu'à chaque point les champs vectoriels E_1, E_2, E_3 sont déterminés de manière unique, les fonctions Γ_{ij}^k sont constantes selon 1.9.2.
Notre travail consiste à trouver toutes ces fonctions, dans ce cas, le nombre à trouver est $3 * 3 * 3 = 27$

2.1 Première étape : Equations de Codazzi et Apolarité

Dans cette section, nous donnons les valeurs de 18 $\Gamma_i j^k$, en utilisant les équations Codazzi, pour h et S et la condition d'apolarité.

2.1.1 Codazzi pour S

Dans le Théorème 1.8.2, l'équation de Codazzi S 1.19 est donnée comme suit :
pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ on a

$$(\nabla_X S)Y = (\nabla_Y S)X$$

Donc dans la base $\{E_1, E_2, E_3\}$ et le fait que $SE_i = \lambda E_i$ (équations 3.1), il s'ensuit que

$$(\nabla_{E_i} S)(E_j) = \nabla_{E_i} SE_j - S(\nabla_{E_i} E_j) \qquad \textit{pour} \qquad i = 1, .., 3 \quad j = 1, .., 3 \quad k = 1, .., 3$$

On obtient donc la formule de Codazzi S

$$[\nabla_{E_i} SE_j - S(\nabla_{E_i} E_j)] - [\nabla_{E_j} SE_i - S(\nabla_{E_j} E_i)] = 0$$

on obtient les résultats suivants :

$$\begin{array}{ll}
\Gamma_{12}^1 = 0 & \Gamma_{21}^2 = 0 \\
\Gamma_{31}^3 = 0 & \Gamma_{23}^2 = 0 \\
\Gamma_{32}^3 = 0 & \Gamma_{13}^1 = 0 \\
\multicolumn{2}{l}{\Gamma_{23}^1 = -(\dfrac{-\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3})\Gamma_{32}^1} \\
\multicolumn{2}{l}{\Gamma_{12}^3 = -(\dfrac{-\lambda_1 + \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3})\Gamma_{21}^3} \\
\multicolumn{2}{l}{\Gamma_{31}^2 = -(\dfrac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_2})\Gamma_{13}^2}
\end{array}$$

2.1.2 Codazzi pour h

Dans le Théorème 1.8.2, l'équation de Codazzi h 1.18 est donnée comme suit :
pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ on a

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z)$$

Donc dans la base $\{E_1, E_2, E_3\}$ et le fait que $SE_i = \lambda E_i$ (équations 3.1), on a que

$$\begin{aligned}
(\nabla_{E_i} h)(E_j, E_k) &= -h(\nabla_{E_i} E_j, E_k) - h(E_j, \nabla_{E_i} E_k) \\
&= -\sum_{l=1}^{3} \Gamma_{ij}^l h(E_k, E_l) - \sum_{l=1}^{3} \Gamma_{ik}^l h(E_j, E_l)
\end{aligned}$$

Donc l'équation de Codazzi pour h 1.18 devient ainsi :

$$\sum_{l=1}^{3}((\Gamma^l_{ij} - \Gamma^l_{ji})h(E_k, E_l) + \Gamma^l_{ik}h(E_j, E_l) - \Gamma^l_{jk}h(E_i, E_l)) = 0$$

Pour $i = 1, .., 3$, $j = 1, .., 3$ et $k = 1, .., 3$
Depuis la formule précédente pour S on obtient donc :

$$\Gamma^2_{11} = 2\Gamma^1_{21} \qquad \Gamma^1_{22} = 2\Gamma^2_{12} \qquad \Gamma^3_{11} = 2\Gamma^1_{31} \qquad \Gamma^1_{33} = 2\Gamma^3_{13} \qquad \Gamma^3_{22} = 2\Gamma^2_{32} \qquad \Gamma^2_{33} = 2\Gamma^3_{23}$$

2.1.3 Condition d'apolarité

En utilisant la condition d'apolarité 1.23

$$\nabla\omega_h = 0$$

Cette condition dans la base $\{E_1, E_2, E_3\}$ donne pour tout $i = 1, .., 3$ on a :

$$\nabla_{E_i}\omega_h = 2\sum_{j=1}^{3} h(\nabla_{E_i}E_j, E_j) = 0$$

On obtient donc

$$\Gamma^1_{11} = -\Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{13} \qquad \Gamma^2_{22} = -\Gamma^1_{21} - \Gamma^3_{23} \qquad \Gamma^3_{33} = -\Gamma^1_{31} - \Gamma^2_{32}$$

2.2 Seconde étape : Equations de Gauss

Les seules équations restantes sont donc celles obtenues à partir de l'équation de Gauss. Ici, dans le cas où la base est complètement définie d'une manière invariante équiaffine, nous pouvons utiliser le fait que M est affine homogène implique que tous les coefficients de connexion sont constants.
Les coefficients de connexion restants sont :

$$\Gamma^2_{12}, \Gamma^3_{13}, \Gamma^1_{21}, \Gamma^3_{21}, \Gamma^2_{13}, \Gamma^3_{23}, \Gamma^1_{32}, \Gamma^1_{31}, \Gamma^2_{32}$$

Ces derniers doivent satisfaire toutes les équations de Gauss simultanément. Par conséquent, avant d'exploiter les équations de Gauss, nous examinons d'abord nos conditions de départ qui s'englobent principalement sur les valeurs propres de notre opérateur de forme $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ qui devront être distinctes.
Les coefficients de connexion trouvés précédemment sont affectés et pris en considération.

On rappelle que l'équation de gauss 1.17 dans le théorème 1.8.2 est donnée par

$$R(X, Y)Z = h(Y, Z)SX - h(X, Z)SY$$

Ensuite, en évaluant l'équation de Gauss dans notre cadre, nous obtenons par calcul cela

Lemme 2.2.1 *Soit M une hypersurface homogène affine localement fortement convexe. On assume que S a trois valeurs propres distinctes de multiplicité 1. Supposons que le cadre est choisi d'une manière invariante affine unique de telle sorte que toutes les formules précédentes restent valides. Ensuite, tous les coefficients de connexion sont constants et donc les équations de Gauss sont données par*

$$
\begin{array}{ll}
G1221 & -\lambda_1 - 2\Gamma_{12}^2(3\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \dfrac{2(\lambda_2-\lambda_1)\Gamma_{21}^3\Gamma_{32}^1}{\lambda_2-\lambda_3} = 0 \\
G1331 & -\lambda_1 - 2(\Gamma_{13}^3(\Gamma_{12}^2 + 3\Gamma_{13}^3) + \Gamma_{13}^2\Gamma_{32}^1) = 0 \\
G1212 & \lambda_2 + 2\Gamma_{13}^2\Gamma_{21}^3 + 2\Gamma_{21}^1(3\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{23}^3) \\
G2332 & -\lambda_2 - 2\Gamma_{23}^3(\Gamma_{21}^1 + 3\Gamma_{23}^3) + \dfrac{2(\lambda_2-\lambda_3)\Gamma_{13}^2\Gamma_{32}^1}{\lambda_1-\lambda_3} = 0 \\
G1313 & 6{\Gamma_{31}^1}^2 + 2\Gamma_{32}^2\Gamma_{31}^1 + \lambda_3 + \dfrac{2(\lambda_3-\lambda_1)\Gamma_{13}^2\Gamma_{21}^3}{\lambda_1-\lambda_2} = 0 \\
G2323 & \lambda_3 + 2\Gamma_{21}^3\Gamma_{32}^1 + 2\Gamma_{32}^2(\Gamma_{31}^1 + 3\Gamma_{32}^2) = 0 \\
G1231 & -2\Gamma_{12}^2\Gamma_{13}^2 + \dfrac{2(\lambda_2-\lambda_1)\Gamma_{13}^3\Gamma_{21}^3}{\lambda_2-\lambda_3} - \dfrac{2(\lambda_1-\lambda_2)(\Gamma_{12}^2+\Gamma_{13}^3)\Gamma_{32}^1}{\lambda_1-\lambda_3} = 0 \\
G1321 & \Gamma_{12}^2\left(\dfrac{2(\lambda_3-\lambda_1)\Gamma_{13}^2}{\lambda_1-\lambda_2} - 2\Gamma_{32}^1\right) + \Gamma_{13}^3\left(\dfrac{2(\lambda_3-\lambda_1)\Gamma_{21}^3}{\lambda_2-\lambda_3} - 2\Gamma_{32}^1\right) = 0 \\
G1232 & 2\left(\Gamma_{13}^2(\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{23}^3) + (\lambda_1-\lambda_2)\left(\dfrac{\Gamma_{21}^1\Gamma_{32}^1}{\lambda_1-\lambda_3} - \dfrac{\Gamma_{21}^3\Gamma_{23}^3}{\lambda_2-\lambda_3}\right)\right) = 0 \\
G2312 & \dfrac{2(\lambda_2-\lambda_3)\Gamma_{13}^2\Gamma_{23}^3}{\lambda_1-\lambda_2} - 2\Gamma_{21}^3\Gamma_{23}^3 + 2(\lambda_2-\lambda_3)\Gamma_{21}^1\left(\dfrac{\Gamma_{13}^2}{\lambda_1-\lambda_2} + \dfrac{\Gamma_{32}^1}{\lambda_1-\lambda_3}\right) = 0 \\
G1323 & 2\left(\Gamma_{31}^1\Gamma_{32}^1 + \dfrac{(\lambda_3-\lambda_1)\Gamma_{13}^2\Gamma_{32}^2}{\lambda_1-\lambda_2} + \dfrac{(\lambda_1-\lambda_3)\Gamma_{21}^3(\Gamma_{31}^1+\Gamma_{32}^2)}{\lambda_2-\lambda_3}\right) = 0 \\
G2313 & 2\left(\dfrac{(\lambda_2-\lambda_3)\Gamma_{31}^1\Gamma_{32}^1}{\lambda_1-\lambda_3} + \dfrac{(\lambda_3-\lambda_2)\Gamma_{13}^2\Gamma_{32}^2}{\lambda_1-\lambda_2} + \Gamma_{21}^3(\Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2)\right) = 0 \\
G1211 & -6\Gamma_{12}^2\Gamma_{21}^1 - \Gamma_{13}^3\Gamma_{21}^1 + \dfrac{(\lambda_2-\lambda_1)\Gamma_{21}^3\Gamma_{31}^1}{\lambda_2-\lambda_3} + \dfrac{2(\lambda_2-\lambda_1)\Gamma_{31}^1\Gamma_{32}^1}{\lambda_1-\lambda_3} = 0 \\
G1311 & -\Gamma_{12}^2\Gamma_{31}^1 - 6\Gamma_{13}^3\Gamma_{31}^1 + \Gamma_{21}^1\left(\dfrac{(\lambda_3-\lambda_1)\Gamma_{13}^2}{\lambda_1-\lambda_2} - 2\Gamma_{32}^1\right) = 0 \\
G1222 & \Gamma_{12}^2(6\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{23}^3) + \left(2\Gamma_{13}^2 + \dfrac{(\lambda_2-\lambda_1)\Gamma_{21}^3}{\lambda_2-\lambda_3}\right)\Gamma_{32}^2 = 0 \\
G2322 & (\lambda_2-\lambda_3)\Gamma_{12}^2\left(\dfrac{2\Gamma_{13}^2}{\lambda_1-\lambda_2} + \dfrac{\Gamma_{32}^1}{\lambda_1-\lambda_3}\right) - (\Gamma_{21}^1 + 6\Gamma_{23}^3)\Gamma_{32}^2 = 0 \\
G1333 & \dfrac{(\lambda_3-\lambda_1)\Gamma_{13}^2\Gamma_{23}^3}{\lambda_1-\lambda_2} + \dfrac{2(\lambda_1-\lambda_3)\Gamma_{21}^3\Gamma_{23}^3}{\lambda_2-\lambda_3} + \Gamma_{13}^3(6\Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2) = 0 \\
G2333 & \Gamma_{13}^3\left(2\Gamma_{21}^3 + \dfrac{(\lambda_2-\lambda_3)\Gamma_{32}^1}{\lambda_1-\lambda_3}\right) + \Gamma_{23}^3(\Gamma_{31}^1 + 6\Gamma_{32}^2) = 0 \\
G2321 & -2\Gamma_{12}^2\Gamma_{31}^1 + 2\Gamma_{21}^1\Gamma_{32}^1 + 4(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{13}^3)\Gamma_{32}^2 = 0 \\
G2331 & 2\Gamma_{13}^3(\Gamma_{21}^1 - 2\Gamma_{23}^3) + 4\Gamma_{12}^2\Gamma_{23}^3 + \dfrac{2(\lambda_2-\lambda_1)\Gamma_{31}^1\Gamma_{32}^1}{\lambda_1-\lambda_3} = 0 \\
G1312 & \dfrac{2(\lambda_3-\lambda_2)\Gamma_{12}^2\Gamma_{13}^2}{\lambda_1-\lambda_2} + 4(\Gamma_{21}^1 - \Gamma_{23}^3)\Gamma_{31}^1 - 2\Gamma_{21}^1\Gamma_{32}^2 = 0 \\
G1332 & 4\Gamma_{13}^3(\Gamma_{21}^1 - \Gamma_{23}^3) + 2\Gamma_{12}^2\Gamma_{23}^3 - 2\Gamma_{13}^2\Gamma_{32}^2 = 0 \\
G1213 & 2\Gamma_{13}^3\Gamma_{21}^3 - 2\Gamma_{23}^3\Gamma_{31}^1 + 4\Gamma_{21}^1(\Gamma_{31}^1 - \Gamma_{32}^2) = 0 \\
G1223 & \dfrac{2(\lambda_3-\lambda_1)\Gamma_{21}^3\Gamma_{23}^3}{\lambda_2-\lambda_3} + 4\Gamma_{12}^2(\Gamma_{31}^1 - \Gamma_{32}^2) + 2\Gamma_{13}^3\Gamma_{32}^2 = 0 \\
G2311 & -2\Gamma_{13}^3\Gamma_{21}^3 - \Gamma_{23}^3\Gamma_{31}^1 + (\lambda_3-\lambda_2)\left(\dfrac{2\Gamma_{12}^2\Gamma_{13}^2}{\lambda_1-\lambda_2} + \dfrac{(\Gamma_{12}^2+\Gamma_{13}^3)\Gamma_{32}^1}{\lambda_1-\lambda_3}\right) + \Gamma_{21}^1\Gamma_{32}^2 = 0 \\
G1322 & \dfrac{(\lambda_3-\lambda_1)((\lambda_3-\lambda_2)\Gamma_{13}^2\Gamma_{21}^1 + ((\lambda_3-\lambda_2)\Gamma_{13}^2 + 2(\lambda_1-\lambda_2)\Gamma_{21}^3)\Gamma_{23}^3)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)} + \Gamma_{12}^2\Gamma_{31}^1 + 2\Gamma_{21}^1\Gamma_{32}^1 - \Gamma_{13}^3\Gamma_{32}^2 = 0 \\
G1233 & \Gamma_{13}^3\Gamma_{21}^1 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{23}^3 + \dfrac{2(\lambda_1-\lambda_2)\Gamma_{31}^1\Gamma_{32}^1}{\lambda_1-\lambda_3} - 2\Gamma_{13}^2\Gamma_{32}^2 + \dfrac{(\lambda_1-\lambda_2)\Gamma_{21}^3(\Gamma_{31}^1+\Gamma_{32}^2)}{\lambda_2-\lambda_3} = 0
\end{array}
$$

Notez que dans le système précédent $Gijkl$ signifie la composante de l'équation de Gauss pour $X = E_i$, $Y = E_j$, $Z = E_k$ dans la direction de E_l.
La résolution de ce système nous mène à plusieurs cas avec différents degrés.
Nous montrerons que tous les cas possibles conduisent à une contradiction

Remarque 2.2.1
- Chaque cas est nommé selon ces conditions sous lesquelles il est étudié.
-Les coefficients de connexion doit être réels.
-Les valeurs propres sont distinctes.
- Les cas et sous cas sont étudiée indépendamment.
-Aprés chaque opération,les équations de Gauss sont recalculées.

Commençons par l'équation $G1321$

$$\Gamma^2_{12}\left(\frac{2\Gamma^2_{13}(\lambda_3-\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}-2\Gamma^1_{32}\right)+\Gamma^3_{13}\left(\frac{2\Gamma^3_{21}(\lambda_3-\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_3}-2\Gamma^1_{32}\right)=0 \tag{2.3}$$

On précise deux Types possibles principaux :

$$\begin{cases} Type \quad I: & (\Gamma^2_{12},\Gamma^3_{13})=(0,0) \\ Type \quad II: & (\Gamma^2_{12},\Gamma^3_{13})\neq(0,0) \end{cases}$$

2.2.1 Type I

Ce type est caractérisé par

$$(\Gamma^2_{1,2},\Gamma^3_{1,3})=(0,0)$$

on obtient la $G2321$

$$2\Gamma^1_{21}\Gamma^1_{32}=0 \tag{2.4}$$

Deux cas sont envisagés tel que :

$$\begin{cases} CasA: \Gamma^1_{21}\neq 0 \\ CasB: \Gamma^1_{21}=0 \end{cases}$$

•Cas I.A :

Ce cas est basé sur la condition suivante

$$\Gamma^1_{21}\neq 0$$

Donc selon (2.4), il résulte que $\Gamma^1_{32}=0$.
Cela génère les équations $G1221$ et $G1311$ données respectivement

$$-\lambda_1=0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\Gamma^2_{13}\Gamma^1_{21}(\lambda_3-\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}=0$$

De $G1221$, on obtient λ_1=0 ce qui nous mène a poser la condition

$$\lambda_2\neq 0 \qquad et \qquad \lambda_3\neq 0 \tag{2.5}$$

D'après $G1311$, on obtient $\Gamma^2_{13}=0$ car le reste des facteurs sont non nulles.

Considérons l'équation $G1211$:

$$\frac{\lambda_2 \Gamma^3_{21} \Gamma^1_{31}}{\lambda_2 - \lambda_3} = 0 \tag{2.6}$$

Cela mène à distinguer 2 sous cas :

$$\begin{cases} Cas \quad 1 : \Gamma^3_{21} \neq 0 \\ Cas \quad 2 : \Gamma^3_{21} = 0 \end{cases}$$

$*$**Cas I.A.1 :** $\Gamma^3_{21} \neq 0$
D'après 2.6 :

$$\Gamma^1_{31} = 0$$

on obtient donc les équations $G2313$ et $G2312$ données respectivement

$$2\Gamma^3_{21}\Gamma^2_{32} = 0 \qquad \text{et} \qquad -2\Gamma^3_{21}\Gamma^3_{23} = 0$$

D'une part, $G2313$ implique que $\Gamma^2_{32} = 0$ et d'autre part $G2312$ implique que $\Gamma^3_{23} = 0$
En substituant ces valeurs l'équation $G2332$ est donnée ainsi

$$\lambda_2 = 0$$

Ce qui est contradictoire avec la condition posée précédemment 2.5

$*$**Cas I.A.2 :** $\Gamma^3_{21} = 0$
Après l'affectation, la $G2332$ et $G2323$ sont données respectivement

$$-\lambda_2 - 2\Gamma^3_{23}(\Gamma^1_{21} + 3\Gamma^3_{23}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_3 + 2\Gamma^2_{32}(\Gamma^1_{31} + 3\Gamma^2_{32}) = 0$$

d'après 2.5 on doit avoir nécessairement les conditions suivantes

$$\Gamma^3_{23} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \Gamma^2_{32} \neq 0 \tag{2.7}$$

En utilisant la $G2322$ donné ainsi :

$$-(\Gamma^1_{21} + 6\Gamma^3_{23})\Gamma^2_{32} = 0$$

d'aprés la condition 2.7,il s'ensuit que $\Gamma^1_{21} + 6\Gamma^3_{23} = 0$
ce qui est équivaut à $\Gamma^1_{21} = -6\Gamma^3_{23}$
en substituant, les équations $G1212$ et $G2332$ sont données respectivement

$$\lambda_2 + 204(\Gamma^3_{23})^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad -\lambda_2 + 6(\Gamma^3_{23})^2 = 0$$

par comparaison et en tenant compte que $\Gamma^3_{23} \neq 0$ on remarque que λ_2 possède 2 valeurs différentes non nulles, ce qui implique une contradiction.

•Cas I.B :

Ce cas est basé sur le fait que $\Gamma^1_{21} = 0$ On obtient l'équation $G2311$ donné ainsi :

$$-\Gamma^3_{23}\Gamma^1_{31} = 0$$

celle-ci mène a diviser 2 sous cas :

$$\begin{cases} Cas \quad 1 : \Gamma^3_{23} \neq 0 \\ \\ Cas \quad 2 : \Gamma^3_{23} = 0 \end{cases}$$

$*$**Cas I.B.1 :** $\quad \Gamma^3_{23} \neq 0$
La $G2311$ implique donc $\Gamma^1_{31} = 0$
Cela génère l'équation $G2322$ donnée par

$$-6\Gamma^3_{23}\Gamma^2_{32} = 0$$

selon la condition du sous cas étudié on a nécessairement $\Gamma^2_{32} = 0$.
On obtient l'équation $G1223$:

$$\frac{2\Gamma^3_{21}\Gamma^3_{23}(\lambda_3 - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_3} = 0$$

Il se résulte que $\Gamma^3_{21} = 0$ car les autres facteurs de l'équations sont non nulles.
On obtient donc les équations $G1221$ et $G1212$ données respectivement

$$\lambda_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = 0$$

Ce qui est une contradiction car nos valeurs propres sont distinctes.

$*$**Cas I.B.2 :** $\quad \Gamma^3_{23} = 0$
L'équation $G1332$ est donnée par

$$-2\Gamma^2_{13}\Gamma^2_{32} = 0 \tag{2.8}$$

En utilisant cette dernière, deux cas auxiliaires s'imposent :

$$\begin{cases} Cas \quad i : \quad \Gamma^2_{32} \neq 0 \\ \\ Cas \quad ii : \quad \Gamma^2_{32} = 0 \end{cases}$$

Cas B.2.i : $\quad \Gamma^2_{32} \neq 0$
L'équation 2.8 implique que $\Gamma^2_{13} = 0$.
Après affectation, on obtient les deux équations citées respectivement, $G1331$ et $\ddot{}G1212$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = 0$$

Ce qui est une contradiction car les valeurs propres sont distinctes.

Cas B.2.ii : $\Gamma_{32}^{2}=0$
On rappelle les conditions présentes

$$\Gamma_{32}^{1}\neq 0 \qquad \Gamma_{21}^{3}\neq 0 \qquad \Gamma_{13}^{2}\neq 0 \tag{2.9}$$

On obtient l'équation $G2331$

$$\frac{2\Gamma_{31}^{1}\Gamma_{32}^{1}(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_3}=0$$

Donc d'après 2.9, il s'ensuit que $\Gamma_{31}^{1}=0$
En substituant, l'équation $G1312$ est donnée par :

$$\frac{2\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{13}^{2}(\lambda_3-\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}=0$$

D'après 2.9, il se résulte que $\Gamma_{12}^{2}=0$.

Maintenant, soit le système

$$\begin{cases} G1331: & -\lambda_1-2\Gamma_{13}^{2}\Gamma_{32}^{1}=0 \\ G1212: & \lambda_2+2\Gamma_{13}^{2}\Gamma_{21}^{3}=0 \\ G2332: & \dfrac{2\Gamma_{13}^{2}\Gamma_{32}^{1}(\lambda_2-\lambda_3)}{\lambda_1-\lambda_3}-\lambda_2=0 \\ G1313: & \dfrac{2\Gamma_{13}^{2}\Gamma_{21}^{3}(\lambda_3-\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}+\lambda_3=0 \end{cases}$$

La résolution de ce système oblige une condition $\lambda_3=\lambda_2=0$ ce qui est contradictoire.
Finalement, il n'existe pas de solution d'existence pour le type I.

2.2.2 Type II

Ce type est caractérisé par

$$(\Gamma_{12}^{2},\Gamma_{13}^{3})\neq(0,0)$$

Notre équation principale $G1321$

$$\Gamma_{12}^{2}\left(\frac{2\Gamma_{13}^{2}(\lambda_3-\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}-2\Gamma_{32}^{1}\right)+\Gamma_{13}^{3}\left(\frac{2\Gamma_{21}^{3}(\lambda_3-\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_3}-2\Gamma_{32}^{1}\right)=0 \tag{2.10}$$

Selon la condition caractéristique, il existe α_1 telle que (La notion des vecteurs colinéaires)

$$\Gamma_{21}^{3}=\frac{(\lambda_2-\lambda_3)(\alpha_1\Gamma_{12}^{2}+2\Gamma_{32}^{1})}{2(\lambda_3-\lambda_1)} \qquad \text{et} \qquad \Gamma_{13}^{2}=\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(2\Gamma_{32}^{1}-\alpha_1\Gamma_{13}^{3})}{2(\lambda_3-\lambda_1)}$$

On a l'équation de Gauss $G1232$

$$\frac{\alpha_1(\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{23}^{3}+\Gamma_{13}^{3}(\Gamma_{21}^{1}+\Gamma_{23}^{3}))(\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_3}=0$$

Deux sous cas sont discutés selon α_1

$$\begin{cases} Cas \quad A: & \alpha_1\neq 0 \\ Cas \quad B: & \alpha_1=0 \end{cases}$$

•Cas II.A :

Ce cas est basé sur le fait que

$$\alpha_1 \neq 0$$

Depuis la $G1232$, il existe α_2 telle que

$$\Gamma^1_{21} = \alpha_2\Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{23} \qquad \text{et} \qquad \Gamma^3_{23} = -\alpha_2\Gamma^3_{13}$$

Cela génère la $G1323$ donnée par :

$$-\alpha_1(\Gamma^3_{13}\Gamma^2_{32} + \Gamma^2_{12}(\Gamma^1_{31} + \Gamma^2_{32})) = 0$$

Pour la même raison ($\alpha_1 \neq 0$), on peut écrire :

$$\Gamma^1_{31} = \alpha_3\Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{32} \qquad \text{et} \qquad \Gamma^2_{32} = -\alpha_3\Gamma^2_{12}$$

Maintenant ,en additionnant $G2322$ et $G2332$ on obtient :

$$\frac{(\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13})(\alpha_2\alpha_3(\lambda_1 - \lambda_3)(\Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{13}) + (-\lambda_2 + \lambda_3)\Gamma^1_{32})}{\lambda_1 - \lambda_3} = 0$$

On remarque qu'on peut souligner 2 sous cas auxiliaires :

$$\begin{cases} Cas \quad 1: \ \Gamma^2_{12} = 0 \\ Cas \quad 2: \ \Gamma^2_{12} \neq 0 \end{cases}$$

*** Cas II.A.1 :**$\Gamma^2_{12} = 0$
Comme $\Gamma^2_{12} = 0$, on doit avoir nécessairement $\Gamma^3_{13} \neq 0$ selon la condition du cas principal II.
L'équation $G1332$ citée sous la forme :

$$8\alpha_2(\Gamma^3_{13})^2 = 0$$

selon la condition précedente,il s'impose que $\alpha_2 = 0$.
On obtient la $G1311$

$$-6\alpha_3(\Gamma^3_{13})^2 = 0$$

de la même façon, on a $\alpha_3 = 0$
On obtient l'équation $G2311$

$$\frac{\Gamma^3_{13}\Gamma^1_{32}(\lambda_3 - \lambda_2)}{\lambda_3 - \lambda_1} = 0$$

toujours pour la même condition ($\Gamma^3_{13} \neq 0$), il résulte que $\Gamma^1_{32} = 0$ Ceci implique les deux équations $G1221$ et $G1212$ données respectivement

$$\lambda_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = 0$$

ce qui est une contradiction car les valeurs propres sont distinctes.

*** Cas II.A.2 :** $\Gamma_{12}^2 \neq 0$
L'équation $G1311$ est donnée par

$$-\frac{1}{2}(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3)(2\alpha_3(\Gamma_{12}^2 + 6\Gamma_{13}^3) + \alpha_2(\alpha_1\Gamma_{13}^3 + 2\Gamma_{32}^1)) = 0$$

On envisage trois cas secondaire au cas 2

$$\begin{cases} Cas \quad i: & \Gamma_{13}^3 = -\Gamma_{12}^2 \\ \\ Cas \quad ii: & \alpha_2 \neq 0 \\ \\ Cas \quad iii: & \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Cas A.2.i : $\Gamma_{13}^3 = -\Gamma_{12}^2$
On obtient les deux équations $G2321$ et $G2332$ données respectivement :

$$-8\alpha_3(\Gamma_{12}^2)^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad 8\alpha_2(\Gamma_{12}^2)^2 = 0$$

la condition principale ($\Gamma_{12}^2 \neq 0$) implique que

$$\alpha_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 = 0$$

On obtient l'équation $G2333$:

$$\frac{\Gamma_{12}^2(\lambda_2 - \lambda_3)(\alpha_1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{32}^1)}{\lambda_1 - \lambda_3} = 0$$

toujours pour la même condition,il se résulte que

$$\alpha_1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{32}^1 = 0$$

ce qui est équivaut à

$$\Gamma_{32}^1 = -\alpha_1\Gamma_{12}^2$$

en substituant, l'équation $G1312$ résulte

$$\frac{\alpha_1(\Gamma_{12}^2)^2(\lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_3 - \lambda_1} = 0$$

Les conditions nous mènent a imposer que $\lambda_2 - \lambda_3 = 0$ ce qui est contradictoire.

Cas A.2.ii : $\alpha_2 \neq 0$
Depuis l'équation $G1311$ on a

$$\Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2}\left(-\alpha_1\Gamma_{13}^3 - \frac{2\alpha_3(\Gamma_{12}^2 + 6\Gamma_{13}^3)}{\alpha_2}\right)$$

L'affectation génère l'équation $G1322$

$$-(\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_3)\Gamma_{12}^2\Gamma_{13}^3 = 0$$

on divise la discussion de cette dernière en deux partie :
-*Partie 1 :* $\Gamma_{13}^3 = 0$
On a l'équation $G2321$

$$-8\alpha_3(\Gamma_{12}^2)^2 = 0$$

selon les conditions, il s'impose que $\alpha_3 = 0$.
En substituant ce résultat, on obtient les équations $G1331$ et $G2332$ données respectivement

$$-\lambda_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad -\lambda_2 = 0$$

ce qui est une contradiction.

-*Partie 2 :* $\Gamma_{13}^3 \neq 0$
On doit donc admettre que $\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0$, ce qui est équivaut à $\alpha_3 = -\frac{1}{4}(\alpha_1\alpha_2)$ par substitution, l'équation $G2321$ est donnée par

$$2\alpha_1\alpha_2((\Gamma_{12}^2)^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{13}^3 + (\Gamma_{13}^3)^2) = 0$$

La résolution de cette dernière par rapport Γ_{13}^3 implique une solution unique qui est nulle ce qui est contradictoire aux conditions.

Cas A.2.iii : $\alpha_2 = 0$
L'équation $G2322$ s'ensuit :

$$\frac{\Gamma_{12}^2(\lambda_2 - \lambda_3)(\alpha_1\Gamma_{13}^3 - \Gamma_{32}^1)}{\lambda_1 - \lambda_3} = 0$$

selon les conditions précédente principales on a nécessairement $\alpha_1\Gamma_{13}^3 - \Gamma_{32}^1 = 0$ ce qui est équivaut à $\Gamma_{32}^1 = \alpha_1\Gamma_{13}^3$
La substitution génère l'équation

$$\frac{\alpha_1\Gamma_{12}^2\Gamma_{13}^3(\lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_1 - \lambda_3} = 0$$

le seul facteur qui peut être nul est Γ_{13}^3 donc l'équation implique $\Gamma_{13}^3 = 0$
on obtient donc les équations $G1331$ et $G1212$ données respectivement

$$-\lambda_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = 0$$

ce qui est une contradiction.

•Cas B :

Ce cas est basé sur le fait que

$$\alpha_1 = 0$$

Les équations $G1221$ et $G1331$ s'en suivent respectivement

$$\frac{2(\Gamma_{32}^1)^2(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_3} - 2\Gamma_{12}^2(3\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) - \lambda_1 = 0$$

$$\frac{2(\Gamma_{32}^1)^2(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_3} - 2\Gamma_{13}^3(\Gamma_{12}^2 + 3\Gamma_{13}^3) - \lambda_1 = 0$$

L'opération $\frac{G1221-G1331}{6}$ donne l'expression suivante :

$$-(\Gamma_{12}^{2})^{2}+(\Gamma_{13}^{3})^{2}=0$$

Celle-ci nous permet d'envisager deux cas auxiliaires :

$$\begin{cases} Cas \quad 1: \ \Gamma_{13}^{3}=\Gamma_{12}^{2} \\ \\ Cas \quad 2: \ \Gamma_{13}^{3}=-\Gamma_{12}^{2} \end{cases}$$

***Cas II.B.1 :** $\Gamma_{13}^{3}=\Gamma_{12}^{2}$
Après affectation on obtient la $G2321$:

$$-2\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{31}^{1}+2\Gamma_{21}^{1}\Gamma_{32}^{1}=0$$

on rappelle la condition principale $(\Gamma_{12}^{2},\Gamma_{13}^{3}\neq 0)$, cela génère deux cas secondaire au cas 1 :

$$\begin{cases} Cas \quad i: \quad \Gamma_{32}^{1}\neq 0 \\ \\ Cas \quad ii: \ \Gamma_{32}^{1}=0 \end{cases}$$

Cas B.1.i : $\Gamma_{32}^{1}\neq 0$
On a l'équation $G2321$:

$$-2\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{31}^{1}+2\Gamma_{21}^{1}\Gamma_{32}^{1}=0$$

cela démontre l'existence de α_4 tel que
$\Gamma_{21}^{1}=\alpha_4\Gamma_{12}^{2}$
$\Gamma_{31}^{1}=\alpha_4\Gamma_{32}^{1}$
en substituant, l'équation $G1311$:

$$-8\alpha_4\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{32}^{1}=0$$

d'après les conditions, il se résulte que $\alpha_4=0$.
On obtient l'équation $G1312$:

$$\frac{2\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{32}^{1}(\lambda_3-\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_1}=0$$

depuis les condition cette équation nous impose que $\lambda_3-\lambda_1=0$ ce qui est une contradiction.

Cas B.1.ii : $\Gamma_{32}^{1}=0$
Après affectation on obtient les équations $G1211$ et 1311 respectivement :

$$-7\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{21}^{1}=0 \qquad \text{et} \qquad -7\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{31}^{1}=0$$

les conditions impliquent que

$$\Gamma_{31}^{1}=0 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_{21}^{1}=0$$

Cela génère les deux équations $G1212$ et $G1313$ respectivement

$$\lambda_2=0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_3=0$$

donc une contradiction.

***Cas II.B.2 :** $\Gamma^3_{13} = -\Gamma^2_{12}$
Soulignons l'équation $G1311$

$$5\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{31} - \Gamma^1_{21}\Gamma^1_{32} = 0$$

comme Γ^2_{12} est non nul,on discute selon Γ^1_{32} en deux cas

$$\begin{cases} Cas \quad i : \quad \Gamma^1_{32} \neq 0 \\ \\ Cas \quad ii : \quad \Gamma^1_{32} = 0 \end{cases}$$

Cas B.2.i : $\Gamma^1_{32} \neq 0$
De la même façon du cas précédent B.1.i et après affectation, on obtient l'équation $G2321$

$$8\Gamma^2_{12}(\alpha_4\Gamma^1_{32} + \Gamma^2_{32}) = 0$$

comme $\Gamma^2_{12} \neq 0$ alors $\alpha_4\Gamma^1_{32} + \Gamma^2_{32} = 0$ ce qui est équivaut à $\Gamma^2_{32} = -\alpha_4\Gamma^1_{32}$
par substituant,on obtient l'équation $G1322$

$$(5\alpha_4\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{23})\Gamma^1_{32} = 0$$

ce qui est équivaut à $5\alpha_4\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{23} = 0$,donc on pourra remplacer tel que $\Gamma^3_{23} = -5\alpha_4\Gamma^2_{12}$.
Pour étudier les équations restantes, on va essayer de résoudre le système suivant

$$\begin{cases} G1313 : & \dfrac{2(\Gamma^1_{32})^2\left(2\alpha_4^2(\lambda_1-\lambda_3)-\lambda_2+\lambda_3\right)}{\lambda_1-\lambda_3} + \lambda_3 = 0 \\ \\ G1211 : & \dfrac{\alpha_4(\Gamma^1_{32})^2(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_3} - 25\alpha_4(\Gamma^2_{12})^2 = 0 \\ \\ G1221 : & \dfrac{2(\Gamma^1_{32})^2(\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_3} - 4(\Gamma^2_{12})^2 - \lambda_1 = 0 \\ \\ G2331 : & \dfrac{2\alpha_4(\Gamma^1_{32})^2(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_3} - 50\alpha_4(\Gamma^2_{12})^2 = 0 \\ \\ G1212 : & 100\alpha_4^2(\Gamma^2_{12})^2 + \dfrac{2(\Gamma^1_{32})^2(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_3)^2} + \lambda_2 = 0 \\ \\ G1312 : & 2\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{32}\left(25\alpha_4^2 + \dfrac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_3}\right) = 0 \\ \\ G2333 : & \dfrac{\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{32}\left(25\alpha 4^2(\lambda_1-\lambda_3)+\lambda_2-\lambda_3\right)}{\lambda_1-\lambda_3} = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système nous mène a plusieurs contradictions car elle impose

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

.

Cas B.2.ii :$\Gamma^1_{32} = 0$
Ce cas génère une contradiction qui est démontré de la même façon du cas B.1.ii

Finallement, tous les cas possibles ont aboutit à des contradictions pour les deux types étudiés ce qui démontre le théorème de non existence.

CHAPITRE 3
RÉSULTAT D'EXISTENCE

Dans ce chapitre on va démontrer le deuxième résultat fondamental de l'article de classification [DVL93] :

Theorème 3.0.1
Soit M^3 une hypersurface localement fortement convexe et localement homogène dans $\mathbb{R}^4$, dont l'opérateur de forme a deux valeurs propres distinctes. Alors M est affine équivalent à la partie convexe de l'une des hypersurfaces suivantes :

$$(y - \frac{1}{2}(x^2 + z^2))^4 w^2 = 1$$
$$(y - \frac{1}{2}x^2)^3(z - \frac{1}{2}w^2)^3 = 1$$
$$(y - \frac{1}{2}x^2)^3 v^2 w^2 = 1$$
$$(y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\frac{w^2}{z})^4 z^3 = 1$$

Pour cela on va essayer d'implanter une méthode qui diffère de celle proposée dans l'article [DVL93].

Soit l'immersion $F : M \to \mathbb{R}^4$ et M est la sous variété différentielle de dimension 3. Pour le reste, M désignera toujours une hypersurface de Blaschke de $\mathbb{R}^4$ localement fortement convexe, localement homogène.Et nous omettons d'écrire l'immersion f dans les équations.

Puisque M est localement fortement convexe, en utilisant la proposition 1.9.2, il résulte de l' Équation de Ricci que l'opérateur de forme affine est diagonalisable.

Au vu des hypothèses du théorème, on admet que S a deux valeurs propres distinctes. Soit un point $p \in M$. On construit une base tangente $\{e_1, e_2, e_3\}$ au point p et λ_1, λ_2 par les valeurs propres de l'opérateur de forme S, telles que

$$Se_1 = \lambda_1 e_1 \qquad Se_2 = \lambda_2 e_2 \qquad Se_3 = \lambda_2 e_3 \tag{3.1}$$

Puisque M est localement fortement convexe et S a 2 valeurs propres différentes, nous pouvons considérer des champs vectoriels tangents h-orthonormaux E_1, E_2, E_3 sur un voisinage de p tel que

$$SE_1 = \lambda_1 E_1 \qquad SE_2 = \lambda_2 E_2 \qquad SE_3 = \lambda_2 E_3 \tag{3.2}$$

Nous introduisons les fonctions Γ_{ij}^k nommées symboles de Christoffel pour $i = 1, .., 3$, $j = 1, .., 3$ et $k = 1, .., 3$ par

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^{3} \Gamma_{ij}^k E_k$$

Dans le cas ou à chaque point les champs vectoriels E_1, E_2, E_3 sont déterminés de manière unique, les fonctions Γ_{ij}^k sont constantes selon 1.9.2.
Notre travail consiste à trouver toutes ces fonctions dont le nombre est $3 * 3 * 3 = 27$

3.1 Première étape : Equations de Codazzi et apolarité

Dans cette section, nous donnons les valeurs de Gammas, en utilisant les équations Codazzi, pour h et S et la condition d'apolarité.

3.1.1 Codazzi pour S

Dans le Théorème 1.8.2, l'équation de Codazzi S 1.19 est donnée comme suit :
pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ on a

$$(\nabla_X S)Y = (\nabla_Y S)X$$

Donc dans la base $\{E_1, E_2, E_3\}$ et le fait que $SE_i = \lambda E_i$ (équations 3.1), on a que

$$(\nabla_{E_i} S)(E_j) = \nabla_{E_i} SE_j - S(\nabla_{E_i} E_j) \qquad \textit{pour} \qquad i = 1..3 \quad j = 1..3$$

On obtient donc la formule de Codazzi S

$$[\nabla_{E_i} SE_j - S(\nabla_{E_i} E_j)] - [\nabla_{E_j} SE_i - S(\nabla_{E_j} E_i)] = 0$$

En remplaçant i, j, k on obtient les résultats suivant :

$$\Gamma_{12}^1 = 0 \qquad \Gamma_{21}^2 = 0 \qquad \Gamma_{21}^3 = 0 \qquad \Gamma_{13}^1 = 0 \qquad \Gamma_{31}^2 = 0 \qquad \Gamma_{31}^3 = 0 \qquad \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{23}^1$$

3.1.2 Codazzi pour h

Dans le Théorème 1.8.2, l'équation de Codazzi h 1.18 est donnée comme suit :
pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ on a

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z)$$

Donc dans la base $\{E_1, E_2, E_3\}$ et le fait que $SE_i = \lambda E_i$ (équations 3.1), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}(\nabla_{E_i} h)(E_j, E_k) &= -h(\nabla_{E_i} E_j, E_k) - h(E_j, \nabla_{E_i} E_k) \\ &= -\sum_{l=1}^{3} \Gamma_{ij}^l h(E_k, E_l) - \sum_{l=1}^{3} \Gamma_{ik}^l h(E_j, E_l)\end{aligned}$$

Donc l'équation de Codazzi pour h 1.18 devient ainsi :

$$\sum_{l=1}^{3}((\Gamma_{ij}^{l}-\Gamma_{ji}^{l})h(E_k,E_l)+\Gamma_{ik}^{l}h(E_j,E_l)-\Gamma_{jk}^{l}h(E_i,E_l))=0$$

Pour $i=1,..,3$, $j=1,..,3$ et $k=1,..,3$
Depuis la formule précédente pour S on obtient donc :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{21}^{1}&=\frac{1}{2}\Gamma_{11}^{2} & \Gamma_{22}^{1}&=2\Gamma_{12}^{2}\\
\Gamma_{23}^{1}&=\Gamma_{12}^{3}+\Gamma_{13}^{2} & \Gamma_{31}^{1}&=\frac{1}{2}\Gamma_{11}^{3}\\
\Gamma_{33}^{1}&=2\Gamma_{13}^{3} & \Gamma_{33}^{2}&=2\Gamma_{23}^{3}-\Gamma_{32}^{3}\\
\Gamma_{32}^{2}&=\frac{1}{2}\Gamma_{22}^{3}+\frac{1}{2}\Gamma_{23}^{2}
\end{aligned}$$

3.1.3 Condition d'apolarité

En utilisant la condition d'apolarité 1.23

$$\nabla\omega_h=0$$

Cette condition dans la base $\{E_1,E_2,E_3\}$ donne pour tout $i=1,..,3$ on a :

$$\nabla_{E_i}\omega_h=2\sum_{j=1}^{3}h(\nabla_{E_i}E_j,E_j)=0$$

On obtient donc

$$\Gamma_{11}^{1}=-\Gamma_{12}^{2}-\Gamma_{13}^{3}\qquad \Gamma_{22}^{2}=\frac{1}{2}(-\Gamma_{11}^{2}-2\Gamma_{23}^{3})\qquad \Gamma_{33}^{3}=\frac{1}{2}(-\Gamma_{11}^{3}-\Gamma_{22}^{3}-\Gamma_{23}^{2})$$

3.2 Seconde étape : Equations de Gauss

Par conséquent, les seules équations restantes sont celles obtenues à partir de l'équation de Gauss. Ici, dans le cas où la base est complètement définie de manière invariante, le fait que M est un affine homogène implique que tous les coefficients de connexion sont constants. Ce n'est bien entendu pas le cas lorsque la base n'est pas définie de manière unique. Par conséquent, avant d'exploiter les équations de Gauss, nous examinons d'abord les degrés de liberté. Le fait que nous ayons,une valeur propre de multiplicité deux, signifie qu'il y a une rotation possible dans la direction de $\mathcal{E}=span\{E_2,E_3\}$ qui est l'espace propre relative à λ_2.Cette rotation est donné par

$$\tilde{E}_2=cos\,sE_2+sin\,sE_3 \tag{3.3}$$

$$\tilde{E}_3=-sin\,sE_2+cos\,sE_3 \tag{3.4}$$

Cependant, on voit que le vecteur T défini par :

$$T=K(\tilde{E}_2,\tilde{E}_2)+K(\tilde{E}_3,\tilde{E}_3)$$

est indépendant de n'importe rotation, de plus si on écrit $T=V+W$ tq $V\in\tilde{E}_2$ et $W\in\tilde{E}_3$, les deux composantes sont définies d'une façon affine et invariante.

Pour étudier tous les inter-changements des espaces propres ainsi, on doit distinguer ces cas possibles muni des conditions de fixation de repère :

$$\text{Type 1}:\begin{cases} V & \neq 0 \\ W & = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Pour le cas $T = 0$, on a que

$$\Gamma_{11}^3 = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_{11}^2 = 0 \tag{3.6}$$

On remarque donc l'opérateur $K(E_1, E_2), K(E_1, E_3)$

$$\begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{12}^2 & \frac{1}{2}(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{13}^2) \\ 0 & \frac{1}{2}(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{13}^2) & \Gamma_{13}^3 \end{pmatrix}$$

l'opérateur symétrique a deux valeurs propres distinctes. Dans ce cas, nous pouvons choisir diagonaliser dans le sens de l'espace propre correspondant ce qui veut dire que $\Gamma_{13}^2 = -\Gamma_{12}^3$ il s'ensuit que

$$\begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{13}^3 \end{pmatrix}$$

On peut fixé le repère on prenant E_2 dans la direction de la grande valeur propre et E_3 dans l'autre, cela nous mène à diviser deux types selon les valeurs des deux valeurs propres.

$$\text{Type 2}:\begin{cases} T & = 0 \\ \Gamma_{12}^2 & \neq \Gamma_{13}^3 \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\text{Type 3}:\begin{cases} T & = 0 \\ \Gamma_{12}^2 & = \Gamma_{13}^3 \end{cases} \tag{3.8}$$

Nous étudierons tous les types, l'un après l'autre, dans différents chapitres. Notez que dans la base est déterminée de manière fixe dans la direction de E_1.Les conditions précédentes permet d' introduire une base unique, dans l'ordre pour chaque type l'application du lemme suivant sera possible.

En évaluant l'équation de Gauss dans notre base, nous obtenons le lemme suivant

Lemme 3.2.1
Soit M une hypersurface affine homogène fortement et localement convexe. Supposons que M a deux valeurs propres distinctes, l'une d'elles de multiplicité 1 et l'autre de multiplicité 2. Supposons que la base est choisie d'une manière invariante affine unique de telle sorte que tous les précédents formules restent valables. Alors tous les coefficients de connexion sont constants et donc les équations de Gauss sont données par

$$
\begin{array}{ll}
G1221 & -\lambda_1 - 2(\Gamma_{12}^3(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{13}^2) + \Gamma_{12}^2(3\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3)) = 0 \\
G1231 & -2(\Gamma_{12}^2(\Gamma_{12}^3 + 2\Gamma_{13}^2) + (2\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{13}^2)\Gamma_{13}^3) = 0 \\
G1321 & -2(\Gamma_{12}^2(\Gamma_{12}^3 + 2\Gamma_{13}^2) + (2\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{13}^2)\Gamma_{13}^3) = 0 \\
G1331 & -\lambda_1 - 2(\Gamma_{13}^2(\Gamma_{12}^3 + \Gamma_{13}^2) + \Gamma_{13}^3(\Gamma_{12}^2 + 3\Gamma_{13}^3)) = 0 \\
G1212 & \frac{3}{2}{\Gamma_{11}^2}^2 + \Gamma_{23}^3\Gamma_{11}^2 + \lambda_2 - \Gamma_{11}^3\Gamma_{23}^2 = 0 \\
G1213 & \Gamma_{11}^2(\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) - \Gamma_{11}^3\Gamma_{23}^3 = 0 \\
G2322 & \frac{1}{4}(\Gamma_{11}^2(\Gamma_{23}^2 - \Gamma_{22}^3) - 12\Gamma_{22}^3\Gamma_{23}^3 + 6(\Gamma_{22}^3 + \Gamma_{23}^2)\Gamma_{32}^3) = 0 \\
G1313 & \lambda_2 + \frac{1}{2}\Gamma_{11}^3(3\Gamma_{11}^3 + \Gamma_{22}^3 + \Gamma_{23}^2) - \Gamma_{11}^2\Gamma_{32}^3 = 0 \\
G2333 & \frac{1}{2}((\Gamma_{11}^3 + 6\Gamma_{22}^3)\Gamma_{23}^3 - (\Gamma_{11}^3 + 3(\Gamma_{22}^3 + \Gamma_{23}^2))\Gamma_{32}^3) = 0 \\
G1211 & \frac{1}{2}(-\Gamma_{11}^3(3\Gamma_{12}^3 + 2\Gamma_{13}^2) - \Gamma_{11}^2(6\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3)) = 0 \\
G1311 & \frac{1}{2}(-\Gamma_{11}^2(2\Gamma_{12}^3 + 3\Gamma_{13}^2) - \Gamma_{11}^3(\Gamma_{12}^2 + 6\Gamma_{13}^3)) = 0 \\
G2311 & \frac{1}{4}(\Gamma_{11}^2(\Gamma_{22}^3 - \Gamma_{23}^2) + 2\Gamma_{11}^3(\Gamma_{32}^3 - \Gamma_{23}^3)) = 0 \\
G1312 & \Gamma_{11}^2\left(\Gamma_{11}^3 - \frac{1}{2}\Gamma_{22}^3 - \frac{1}{2}\Gamma_{23}^2\right) + \Gamma_{11}^3(\Gamma_{32}^3 - 2\Gamma_{23}^3) = 0 \\
G2332 & \frac{1}{2}(-2\lambda_2 - \Gamma_{23}^2(\Gamma_{11}^3 + \Gamma_{22}^3 + 3\Gamma_{23}^2) - (\Gamma_{11}^2 + 6\Gamma_{23}^3 - 2\Gamma_{32}^3)(2\Gamma_{23}^3 - \Gamma_{32}^3)) = 0 \\
G2323 & \frac{1}{2}(2\lambda_2 + \Gamma_{22}^3(\Gamma_{11}^3 + 3\Gamma_{22}^3 + \Gamma_{23}^2) + \Gamma_{32}^3(\Gamma_{11}^2 + 2(\Gamma_{23}^3 + \Gamma_{32}^3))) = 0 \\
G1222 & \Gamma_{13}^2\Gamma_{22}^3 - \frac{1}{2}\Gamma_{12}^3(\Gamma_{22}^3 + 3\Gamma_{23}^2) + \Gamma_{12}^2(3\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{23}^3) = 0 \\
G1232 & \Gamma_{11}^2(\Gamma_{12}^3 + 2\Gamma_{13}^2) - \Gamma_{13}^3\Gamma_{23}^2 + 2(\Gamma_{13}^2 - \Gamma_{12}^3)\Gamma_{23}^3 + \Gamma_{12}^3\Gamma_{32}^3 = 0/
\end{array}
$$

Notez que dans le lemme précédent, $Gijkl$ signifie la composante de l'équation de Gauss pour $X = E_i, Y = E_j, Z = E_k$ en direction de E_l.

CHAPITRE 4

HYPERSURFACES DE TYPE 1

Ce chapitre est consacré aux études de type 1 données par le système 3.5.

$$\text{Type 1 :} \begin{cases} V \neq 0 \\ W = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Comme mentionné précédemment, la base est complètement déterminé en fixant l'angle s de la rotation pour avoir E_2 en direction de V ce qui fixe E_3 orthogonal à E_2, ainsi nous pouvons donc appliquer le lemme précédent.

Comme M est de type 1, nous avons que

$$\Gamma_{11}^3 = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma_{11}^2 \neq 0 \tag{4.2}$$

D'après $G1213$: $-\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^3 = 0$ on en déduit que $\Gamma_{22}^3 = 0$ car $\Gamma_{11}^2 \neq 0$
Pour la même cause on a :
d'après $G2311, G1211, G1311$, on a respectivement

$$\begin{aligned} \Gamma_{23}^2 &= 0 \\ \Gamma_{13}^3 &= -6\Gamma_{12}^2 \\ \Gamma_{12}^3 &= -\frac{3}{2}\Gamma_{13}^2 \end{aligned}$$

En utilisant $G1323$

$$-\Gamma_{12}^2\Gamma_{32}^3 = 0 \tag{4.3}$$

on divise deux sous cas :

$$\begin{cases} \text{Cas a :} & \Gamma_{12}^2 \neq 0 \\ \text{Cas b :} & \Gamma_{12}^2 = 0 \end{cases}$$

- **Cas a** $\Gamma_{12}^2 \neq 0$

D'après (4.3) on a $\Gamma_{32}^3 = 0$,
en utilisant $G1313$, on en déduit que $\lambda_2 = 0$.
D'après $G1231$: $-25\Gamma_{12}^2\Gamma_{13}^2 = 0$ on a que

$$\Gamma_{13}^2 = 0$$

L'addition de $G1221$ et $G1331$ résulte que

$$210(\Gamma_{12}^2)^2 = 0$$

ce qui est une contradiction car

$$\Gamma_{12}^2 \neq 0$$

- **Cas b** $\Gamma_{12}^2 = 0$

La soustraction de $G1221$ et $G1331$ donne que

$$\frac{-5}{2}(\Gamma_{13}^2)^2 = 0$$

ce qui est équivaut à

$$\Gamma_{13}^2 = 0$$

D'après $G1221$ on en déduit que

$$\lambda_1 = 0$$

Il est nécessaire de noter ici une nouvelle condition sur la deuxième valeur propre tq

$$\lambda_2 \neq 0$$

Pour le reste, on étudie la résolution du système suivant par rapport aux variables $\Gamma_{11}^2, \Gamma_{23}^3, \Gamma_{32}^3$

$$\begin{cases} G1212: & \frac{3}{2}(\Gamma_{11}^2)^2 + \Gamma_{23}^3\Gamma_{11}^2 + \lambda_2 = 0 \\ G1313: & \lambda_2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{32}^3 = 0 \\ G2332: & -\lambda_2 - \frac{1}{2}(\Gamma_{11}^2 + 6\Gamma_{23}^3 - 2\Gamma_{32}^3)(2\Gamma_{23}^3 - \Gamma_{32}^3) = 0 \\ G2323: & \lambda_2 + \frac{1}{2}\Gamma_{32}^3(\Gamma_{11}^2 + 2(\Gamma_{23}^3 + \Gamma_{32}^3)) = 0 \end{cases}$$

La résolution a aboutie à quatre cas possible

$$\begin{cases} \text{Cas 1}: & \Gamma_{11}^2 = -\frac{2\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{3}}, \quad \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2}, \quad \Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2} \\ \text{Cas 2}: & \Gamma_{12}^2 = \frac{2\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{3}}, \quad \Gamma_{32}^3 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2}, \quad \Gamma_{23}^3 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2} \\ \text{Cas 3}: & \Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2}, \quad \Gamma_{32}^3 = \frac{2\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{3}}, \quad \Gamma_{23}^3 = \frac{\sqrt{-\lambda_2}}{4\sqrt{3}} \\ \text{Cas 4}: & \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2}, \quad \Gamma_{32}^3 = -\frac{2\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{3}}, \quad \Gamma_{23}^3 = -\frac{\sqrt{-\lambda_2}}{4\sqrt{3}} \end{cases}$$

et tous les autres gammas sont nuls pour chaque cas.
Après avoir déterminer tous les gammas du **type 1**, le travail consiste maintenant à quantifier ces coefficients pour atteindre une des équations du théorème 3.0.1.

Remarque 4.0.1
Dans la suite du travail on notes les dérivées partielles d'une quelconque fonction f

$$f_x = \frac{df}{dx}, \quad f_y = \frac{df}{dy}, \quad f_z = \frac{df}{dz}, \quad f_{xx} = \frac{df_x}{dx}$$

4.1 Cas b.1

On rapelle les valeurs de nos coefficients et des valeurs propres.

$$\text{Les connexions} : \begin{cases} \nabla_{e_1} e_2 = \{0,0,0\} \\ \nabla_{e_1} e_3 = \{0,0,0\} \\ \nabla_{e_3} e_1 = \{0,0,0\} \\ \nabla_{e_1} e_1 = \left\{0, -\frac{2\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{3}}, 0\right\} \\ \nabla_{e_2} e_1 = \left\{-\frac{\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{3}}, 0, 0\right\} \\ \nabla_{e_2} e_2 = \left\{0, -\frac{\sqrt{-\lambda_2}}{2\sqrt{3}}, 0\right\} \\ \nabla_{e_2} e_3 = \left\{0, 0, \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2}\right\} \\ \nabla_{e_3} e_2 = \left\{0, 0, \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2}\right\} \\ \nabla_{e_3} e_3 = \left\{0, \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2}, 0\right\} \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\text{Valeurs propres} \begin{cases} \lambda_2 \neq 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

À partir de là, nous pouvons montrer ce qui suit

Theorème 4.1.1 *[DVL93]*
Soit M^3 une hypersurface localement fortement convexe et localement homogène dans $\mathbb{R}^4$, dont l'opérateur de forme a deux valeurs propres distinctes. Alors M est affine équivalent à la partie convexe de l' hypersurface suivante :

$$(y - \frac{1}{2}x^2)^3 v^2 w^2 = 1$$

4.1.1 Démonstration

Calcul des crochets de lie

On rapelle la formule du crochet de Lie 1.2 dans notre base

$$[E_i, E_j] = \nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i$$

$$[E_1, E_2] = \left\{\frac{\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{3}}, 0, 0\right\} \qquad [E_1, E_3] = \{0,0,0\} \qquad [E_2, E_3] = \{0,0,0\} \tag{4.6}$$

Puisque les crochet de Lie dans $\mathbb{R}^4$ sont nulles, on va annuler tous les crochet de lie pour cela considérons une nouvelle base tel que

$$E_1^* = \rho E_1, \quad E_2^* = E_2 \quad , E_3^* = E_3 \tag{4.7}$$

où ρ est une fonction dans M.

Une nouvelle computation donne que

$$[E_1^*, E_2^*] = (\rho \frac{\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{3}} - E_2(\rho))E_1$$
$$[E_1^*, E_3^*] = \{0,0,0\}$$
$$[E_2^*, E_3^*] = \{0,0,0\}$$

Pour avoir

$$\begin{aligned}
[E_1^*, E_2] &= 0 & (4.8)\\
\nabla_{\rho E_1} E_2 - \nabla_{E_2} \rho E_1 &= 0 & (4.9)\\
\rho \nabla_{E_1} E_2 - E_2(\rho) E_1 - \rho \nabla_{E_1} E_2 &= 0 & (4.10)
\end{aligned}$$

$$\text{équivaut à} \quad E_2(\rho) = \rho \frac{\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{3}} \tag{4.11}$$

$$\text{d'ou} \quad E_2(ln(\rho)) = \frac{\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{3}} \tag{4.12}$$

Maintenant, on a la 1-forme fermée défini par

$$\omega(E_1) = \frac{\sqrt{-\lambda 2}}{\sqrt{3}}$$

Il existe donc une fonction locale telles que $\omega = dln\rho$.

Passage aux cordonnées

En utilisant la fonction ω, nous voyons maintenant que par rapport à la nouvelle base tous les coefficients de connexion disparaissent. Il existe donc des coordonnées locales (x, y, z) tel que

$$\frac{\partial}{\partial x} = E_1^* = \rho E_1, \quad \frac{\partial}{\partial y} = E_2^* = E_2, \quad \frac{\partial}{\partial z} = E_3^* = E_3 \tag{4.13}$$

Une intégration entre 4.12 et 4.13 nous donne que

$$\rho = \alpha e^{\frac{\sqrt{-\lambda 2}}{\sqrt{3}} y}$$

où α est une constante positive. Par une transformation affine on peut poser que $\alpha = 1$

$$\rho = e^{\frac{\sqrt{-\lambda 2}}{\sqrt{3}} y} \tag{4.14}$$

Calcul de l'immersion

On note l'immersion $F : M \hookrightarrow \mathbb{R}^4$
D'après la définition de l'opérateur de forme affine S et la formule 1.8 : $D_{E_i}\xi = -SE_i$, on obtient

$$\begin{aligned}
\xi_x &= D_{\rho E_1}\xi = -\lambda_1 E_1 = 0 & (4.15)\\
\xi_y &= D_{E_2}\xi = -\lambda_2 E_2 = F_y & (4.16)\\
\xi_z &= D_{E_3}\xi = -\lambda_2 E_3 = F_z & (4.17)
\end{aligned}$$

Ainsi, on calcule les dérivées partielles de F, commençons par le calcul de F_{xx}. D'une part, d'après la formule 1.24, on a

$$D_X Y(F) = \nabla_X Y + h(X, Y)\xi$$

d'autre part on a le système de cordonnées 4.13.On obtient donc

$$\begin{aligned} F_{xx} = D_{\rho E_1}\rho E_1 &= \nabla_{\rho E_1}\rho E_1 + h(\rho E_1, \rho E_1)\xi \\ &= \rho(\nabla_{E_1}\rho E_1) + \rho^2 h(E_1, E_1)\xi \\ &= \rho(E_1(\rho) + \rho\nabla_{E_1}E_1) + \rho^2\xi \end{aligned}$$

En remplaçant depuis 4.4 et 4.14, on obtient donc

$$F_{xx} = \rho^2\left(\xi - \frac{2\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{3}}F_y\right)$$

Dans ce qui suit, tout dérivée partielle est calculée de la même manière :

$$\begin{aligned} F_{xx} &= \rho^2\left(\xi - \frac{2\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{3}}F_y\right) \\ F_{xy} &= 0 \\ F_{xz} &= 0 \\ F_{yy} &= \xi - \frac{\sqrt{-\lambda_2}}{2\sqrt{3}}F_y \\ F_{yz} &= \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2}F_z \\ F_{zz} &= \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2}F_y + \xi \end{aligned} \tag{4.18}$$

En prenant la dérivée de F_{yy}, nous obtenons

$$F_{yyy} + \frac{\sqrt{-\lambda_2}}{2\sqrt{3}}F_{yy} + \lambda_2 F_y = 0$$

Le résultat est une EDO en direction de y, la résolution suit la démarche suivante :
Posons $F_y = g$ on a donc

$$g_{yy} + \frac{\sqrt{-\lambda_2}}{2\sqrt{3}}g_y + \lambda_2 g = 0$$

Ceci est une EDO de deuxième degré, calculons donc le discriminant $\delta = -\frac{49\lambda}{12}$ étant positive, il se résulte les deux solutions ainsi que la solution triviale $g = 0$

$$\begin{cases} g_1 = \dfrac{-2\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{3}} \\ g_2 = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2}}{2} \end{cases} \tag{4.19}$$

On pose

$$\eta_1 = \frac{-2\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{3}}, \qquad \eta_2 = \frac{\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2}}{2} = 0$$

La solution de l'équation transitive est donc donnée

$$g(x, y, z) = \beta_1(x, z)e^{\eta_1 y} + \beta_2(x, z)e^{\eta_2 y} \tag{4.20}$$

avec β_1, β_2 des fonctions sur M.
On rappelle que $g = F_y$, donc par intégration on obtient

$$F(x,y,z) = A_1(x,z) + \frac{\beta_1(x,z)}{\eta_1}e^{\eta_1 y} + \frac{\beta_2(x,z)}{\eta_2}e^{\eta_2 y}$$

Posons $A_2 = \frac{\beta_1(x,z)}{\eta_1}$ et $A_3 = \frac{\beta_2(x,z)}{\eta_2}$ La solution finale de notre EDO est donc donné par

$$F(x,y,z) = A_1(x,z) + A_2(x,z)e^{\eta_1 y} + A_3(x,z)e^{\eta_2 y} \tag{4.21}$$

telle que et A_1, A_2, A_3 des fonctions sur M.

Définir les fonctions A_i

Le travail consiste maintenant à déterminer les fonctions A_i afin de trouver l'immersion F.
On calcule F_{yz} de deux manières tel que d'après 4.21, on a que

$$F_{yz} = A_{2z}\eta_1 e^{\eta_1 y} + A_{3z}\eta_2 e^{\eta_2 y}$$

et d'après 4.18, on a que

$$F_{yz} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2}F_z$$

en remplaçant F_z d'après 4.21

$$F_{yz} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2}(A_{1z} + A_{2z}e^{\eta_1 y} + A_{3z}e^{\eta_2 y})$$

En comparant les deux formules de F_{yz}, on a que

$$A_{1z} = 0$$
$$A_{2z}\eta_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2}A_{2z} \text{ équivaut à } A_{2z} = 0 \text{ car } \eta_1 = \frac{-2\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{3}}$$

Il découle donc de F_{yz} que A_2 et A_1 ne dépendent pas de z, Par conséquent

$$F(x,y,z) = A_1(x) + A_2(x)e^{\eta_1 y} + A_3(x,z)e^{\eta_2 y}$$

D'après F_{yy} on a que

$$\xi = F_{yy} + \frac{F_y\sqrt{-\lambda_2}}{2\sqrt{3}}$$

Donc

$$F_{zz} = F_{yy} + \frac{2\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{3}}F_y = A_{3zz}(x,z)e^{\eta_2 y}$$

d'autre part on a :

$$F_y = \eta_1 A_2(x)e^{\eta_1 y} + \eta_2 A_3(x,z)e^{\eta_2 y}$$
$$F_{yy} = \eta_1^2 A_2(x)e^{\eta_1 y} + \eta_2^2 A_3(x,z)e^{\eta_2 y}$$

cela implique que

$$A_{3zz}(x,z) = -\frac{7}{4}A_3(x,z)$$

La solution de cette EDO est donnée par

$$A_3(x,z) = c_1(x)e^{\mu_1 z} + c_2(x)e^{\mu_2 z}$$

tel que $\mu_1 = -\frac{\sqrt{7}\sqrt{-\lambda_2}}{2}$, $\quad \mu_2 = \frac{\sqrt{7}\sqrt{-\lambda_2}}{2}$ et c_1, c_2 des fonctions de x sur M

Il découle de F_{xy} que A_2, c_1, c_2 sont des constantes indépendantes.
Il s'ensuit que

$$F(x,y,z) = A_1(x) + A_2 e^{\eta_1 y} + (c_1 e^{\mu_1 z} + c_2 e^{\mu_2 z})e^{\eta_2 y}$$

On a

$$F_{xx} = A_{1xx} = \rho^2\left(\xi - \frac{2F_y\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{3}}\right)$$

la simplification implique que

$$A_{1xx} = -\frac{7}{3}\lambda_2 A_2$$

Par une intégration directe tel que la solution est

$$A_1(x) = -\frac{7}{6}\lambda_2 A_2 x^2 + d_1 x + d_2$$

tel que d_1 est une constante et par translation on peut prendre $d_2 = 0$

Notre immersion est ainsi définie

$$F(x,y,z) = -\frac{7}{6}\lambda_2 A_2 x^2 + d_1 x + A_2 e^{\eta_1 y} + (c_1 e^{\mu_1 z} + c_2 e^{\mu_2 z})e^{\eta_2 y}$$

Formulation de l'équation correspondante

$$F(x,y,z) = -\frac{7}{6}\lambda_2 A_2 x^2 + d_1 x + A_2 e^{\eta_1 y} + (c_1 e^{\mu_1 z} + c_2 e^{-\mu_1 z})e^{\eta_2 y}$$

On peut réécrire F tel que

$$F(x,y,z) = \quad \begin{cases} \quad d_1 x \\ +A_2(-\frac{7}{6}\lambda_2 x^2 + e^{\eta_1 y}) \\ +c_1(e^{\mu_1 z}e^{\eta_2 y}) \\ +c_2(e^{-\mu_1 z}e^{\eta_2 y}) \end{cases}$$

passons par un changement de variables tel que

$$x_1 = x \tag{4.22}$$

$$x_2 = -\frac{7}{6}\lambda_2 x^2 + e^{\eta_1 y} \tag{4.23}$$

$$x_3 = e^{\mu_1 z}e^{\eta_2 y} \tag{4.24}$$

$$x_4 = e^{-\mu_1 z}e^{\eta_2 y} \tag{4.25}$$

Depuis 4.22 et 4.23 on a

$$e^{\eta_1 y} = x_2 + \frac{7}{6}\lambda_2 x_1^2$$

d'autre par on sait que $\eta_1 = -\frac{4}{3}\eta_2$ donc

$$e^{\eta_2 y} = (x_2 + \frac{7}{6}\lambda_2 x_1^2)^{-\frac{3}{4}}$$

D'après 4.24 et 4.25 on obtient que

$$e^{-\mu_1 z} = (\frac{x_3}{x_4})^{\frac{1}{2}}$$

En remplaçant le tous dans 4.25 cela donne que

$$x_3^2 x_4^2 (x_2 - (\sqrt{\frac{7}{6}}\sqrt{-\lambda_2}x_1)^2)^3 = 1$$

Par une homothétie sur x_1,l'équation finale est donné ainsi

$$x_3^2 x_4^2 (x_2 - \frac{1}{2}x_1^2)^3 = 1$$

celle ci correspond exactement à l équation du théorème 4.1.1

$$(y - \frac{1}{2}x^2)^3 v^2 w^2 = 1 \tag{4.26}$$

4.2 Cas b.2

L'étude de ce cas est ramenée au **Cas b.1** par une transformation affine invariante définie par

$$E_1^* \longrightarrow -E_1$$
$$E_2^* \longrightarrow -E_2$$

Donc le résultat aboutit à 4.1.1

4.3 Cas b.3

On rapelle les valeurs de nos coefficients et des valeurs propres.

$$\text{Les connexions :} \begin{cases} \nabla_{e_1} e_2 = \{0,0,0\} \\ \nabla_{e_1} e_3 = \{0,0,0\} \\ \nabla_{e_3} e_1 = \{0,0,0\} \\ \nabla_{e_1} e_1 = \left\{0, \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\right)\sqrt{-\lambda_2}, 0\right\} \\ \nabla_{e_2} e_1 = \left\{\frac{1}{4}\left(-\sqrt{3}\right)\sqrt{-\lambda_2}, 0, 0\right\} \\ \nabla_{e_2} e_2 = \left\{0, \frac{\sqrt{-\lambda_2}}{2\sqrt{3}}, 0\right\} \\ \nabla_{e_2} e_3 = \left\{0, 0, \frac{\sqrt{-\lambda_2}}{4\sqrt{3}}\right\} \\ \nabla_{e_3} e_2 = \left\{0, 0, \frac{2\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{3}}\right\} \\ \nabla_{e_3} e_3 = \left\{0, \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\right)\sqrt{-\lambda_2}, 0\right\} \end{cases} \tag{4.27}$$

$$\text{valeurs propres} \begin{cases} \lambda_2 \neq 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

À partir de là, nous pouvons montrer ce qui suit

Theorème 4.3.1 *[DVL93]*
Soit M^3 une hypersurface localement fortement convexe et localement homogène dans $\mathbb{R}^4$, dont l'opérateur de forme a deux valeurs propres distinctes. Alors M est affine équivalent à la partie convexe de l' hypersurface suivante :

$$(y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\frac{w^2}{z})^4 z^3 = 1$$

4.3.1 Démonstration

Calcul des crochets de lie

On rapelle la formule du crochet de Lie dans notre base

$$[E_i, E_j] = \nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i$$

$$[E_1, E_2] = \left\{\frac{1}{4}\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2}, 0, 0\right\} \qquad [E_1, E_3] = \{0, 0, 0\} \qquad [E_2, E_3] = \left\{0, 0, -\frac{7\sqrt{-\lambda_2}}{4\sqrt{3}}\right\}$$

Puisque les crochet de Lie dans $\mathbb{R}^4$ sont nulles, on va annuler tous les crochet de lie pour cela considérons une nouvelle base tel que

$$E_1^* = \rho_1 E_1, \quad E_2^* = E_2 \quad , E_3^* = \rho_3 E_3 \tag{4.28}$$

où ρ_i est une fonction dans M.

Une nouvelle computation donne que

$$\begin{aligned}
[E_1^*, E_2^*] &= (\rho_1 \frac{\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2}}{4} - E_2(\rho_1))E_1 \\
[E_1^*, E_3^*] &= \{0, 0, 0\} \\
[E_2^*, E_3^*] &= (\rho_3 \frac{-7\sqrt{-\lambda_2}}{4\sqrt{3}} + E_2(\rho_3))E_3
\end{aligned}$$

∗ $[E_1^*, E_2^*] = 0$ équivaut à

$$E_2(ln(\rho_1)) = \frac{\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2}}{4} \tag{4.29}$$

∗ $[E_2^*, E_3^*] = 0$ équivaut à

$$E_2(ln(\rho_3)) = \frac{7\sqrt{-\lambda_2}}{4\sqrt{3}} \tag{4.30}$$

Maintenant, des calculs montrent que les 1-formes définies par

$$\omega_1(E_1) = \frac{\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2}}{4}$$

$$\omega_2(E_3) = \frac{7\sqrt{-\lambda_2}}{4\sqrt{3}}$$

sont fermées. Il existe donc une fonction locale telles que $\omega_i = dln\rho_i$.

Passage aux cordonnées

En utilisant la fonction ω, nous voyons maintenant que par rapport à la nouvelle base tous les coefficients de connexion disparaissent. Il existe donc des coordonnées locales (x, y, z) tel que

$$\frac{\partial}{\partial x} = E_1^* = \rho E_1, \quad \frac{\partial}{\partial y} = E_2^* = E_2, \quad \frac{\partial}{\partial z} = E_3^* = \rho_3 E_3 \tag{4.31}$$

Une intégration entre 4.31, 4.29 et 4.30 nous impose que

$$\rho_1 = e^{\frac{\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2}}{4}y}, \qquad \rho_3 = e^{\frac{7\sqrt{-\lambda_2}}{4\sqrt{3}}y} \tag{4.32}$$

Calcul de l'immersion

On note une immersion $F : M \hookrightarrow \mathbb{R}^4$
D'après la définition de l'opérateur de forme affine S et la formule $D_{E_i}\xi = -SE_i$ 1.8, on définit

$$\xi_x = D_{\rho_1 E_1}\xi = -\lambda_1 E_1 = 0 \tag{4.33}$$
$$\xi_y = D_{E_2}\xi = -\lambda_2 E_2 = F_y \tag{4.34}$$
$$\xi_z = D_{\rho_3 E_3}\xi = -\lambda_2 \rho_3 E_3 = -\lambda_2 F_z \tag{4.35}$$

Ainsi, on calcule les dérivées partielles de F :

$$\begin{aligned}
F_{xx} &= \rho_1^2 \left(\xi - \frac{1}{2}\sqrt{3}F_y\sqrt{-\lambda_2}\right)\\
F_{xy} &= 0\\
F_{xz} &= 0\\
F_{yy} &= \frac{F_y\sqrt{-\lambda_2}}{2\sqrt{3}} + \xi\\
F_{yz} &= \frac{F_z\left(2\sqrt{-\lambda_2}\right)}{\sqrt{3}}\\
F_{zz} &= \rho_3^2 \left(\xi - \frac{1}{2}\sqrt{3}F_y\sqrt{-\lambda_2}\right)
\end{aligned}$$

En prenant la dérivée de F_{yy}, nous obtenons

$$F_{yyy} + \frac{-F_{yy}\sqrt{-\lambda_2}}{2\sqrt{3}} + \lambda_2 F_y = 0$$

La solution de cette EDO est donnée par :

$$F(x, y, z) = A_1(x, z) + A_2(x, z)e^{\eta_1 y} + A_3(x, z)e^{\eta_2 y} \tag{4.36}$$

telle que $\eta_1 = \dfrac{-\sqrt{3}\sqrt{-\lambda_2}}{2}, \qquad \eta_2 = \dfrac{2\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{3}}$ et A_1, A_2, A_3 des fonctions sur M.

Définir les fonctions A_i

Le travail consiste maintenant à déterminer les fonctions A_i afin de finaliser l'immersion F.

Il découle de F_{yz} que A_2 et A_1 ne dépendent pas de z, par conséquent

$$F(x,y,z) = A_1(x) + A_2(x)e^{\eta_1 y} + A_3(x,z)e^{\eta_2 y}$$

D'après F_{yy} on a que

$$\xi = F_{yy} - \frac{F_y\sqrt{-\lambda_2}}{2\sqrt{3}}$$

Donc

$$F_{zz} = \rho_3^2(F_{yy-\eta_2 F_y})$$

d'autre part on a :

$$F_y = \eta_1 A_2(x)e^{\eta_1 y} + \eta_2 A_3(x,z)e^{\eta_2 y}$$
$$F_{yy} = \eta_1^2 A_2(x)e^{\eta_1 y} + \eta_2^2 A_3(x,z)e^{\eta_2 y}$$

cela implique que

$$A_{3zz}(x,z) = -\frac{7}{4}\lambda_2 A_2(x)$$

Par intégration directe on obtient

$$A_3(x,z) = -\frac{7}{8}\lambda_2 A_2(x)z^2 + d_1(x)z + d_2(x)$$

tq d_1, d_2 des fonctions de x sur M
Il découle de F_{xz} que A_2 et d_1 sont des constantes indépendantes.
Ainsi que d_2 est constante d'après F_{xy}.
Il s'ensuit que

$$F(x,y,z) = A_1(x) + A_2 e^{\eta_1 y} + (-\frac{7}{8}\lambda_2 A_2 z^2 + d_1 z + d_2)e^{\eta_2 y}$$

On a

$$F_{xx} = A_{1xx} = \rho_1^2\left(\xi - \frac{F_y\sqrt{-\lambda_2}\sqrt{3}}{2}\right)$$

la simplification implique que

$$A_{1xx} = -\frac{7}{4}\lambda_2 A_2$$

cela nécessite une intégration directe tel que la solution est

$$A_1(x) = -\frac{7}{8}\lambda_2 A_2 x^2 + \alpha x + c$$

telle que α, c des constantes, par translation on peut prendre $c = 0$

Notre immersion est ainsi définie

$$F(x,y,z) = -\frac{7}{8}\lambda_2 A_2 x^2 + \alpha x + A_2 e^{\eta_1 y} + (-\frac{7}{8}\lambda_2 A_2 z^2 + d_1 z + d_2)e^{\eta_2 y}$$

Formulation de l'équation correspondante

$$F(x,y,z) = -\frac{7}{8}\lambda_2 A_2 x^2 + \alpha x + A_2 e^{\eta_1 y} + (-\frac{7}{8}\lambda_2 A_2 z^2 + d_1 z + d_2)e^{\eta_2 y}$$

On peut réécrire F tel que

$$F(x,y,z) = \begin{cases} \alpha x \\ +A_2(-\frac{7}{8}\lambda_2 x^2 + e^{\eta_1 y} - \frac{7}{8}\lambda_2 z^2 e^{\eta_2 y}) \\ +d_1(z e^{\eta_2 y}) \\ +d_2(e^{\eta_2 y}) \end{cases}$$

passons par un changement de variables tel que

$$x_1 = x \tag{4.37}$$

$$x_2 = z e^{\eta_2 y} \tag{4.38}$$

$$x_3 = e^{\eta_2 y} \tag{4.39}$$

$$x_4 = -\frac{7}{8}\lambda_2 x^2 + e^{\eta_1 y} - \frac{7}{8}\lambda_2 z^2 e^{\eta_2 y} \tag{4.40}$$

Depuis 4.38 et 4.39 on a que

$$z = \frac{x_2}{x_3}$$

on a que $\eta_1 = -\frac{3}{4}\eta_2$ donc d'aprés 4.39

$$e^{\eta_1 y} = x_3^{-\frac{3}{4}}$$

On remplace le tous dans 4.40,il s'ensuit alors

$$(x_4 + \frac{7}{8}\lambda_2 x_1^2 + \frac{7}{8}\lambda_2 \frac{x_2^2}{x_3})^4 x_3^3 = 1$$

Par homothétie sur x_1, on obtient l'équation finale

$$(x_4 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}\frac{x_2^2}{x_3})^4 x_3^3 = 1$$

Celle ci correspond à l' équation du théorème 4.3.1

$$(y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\frac{w^2}{z})^4 z^3 = 1 \tag{4.41}$$

4.4 Cas b.4

L'étude de ce cas est ramenée au **Cas 3** par une transformation affine invariante définie par

$$E_1^* \longrightarrow -E_1$$

$$E_2^* \longrightarrow -E_2$$

Donc le résultat aboutit à 4.3.1

CHAPITRE 5

HYPERSURFACES DE TYPE 2

Ce chapitre est consacré aux études de type 2 données par le système 3.7.

$$\text{Type 2 :} \begin{cases} T = 0 \\ \Gamma_{12}^{2} \neq \Gamma_{13}^{3} \end{cases} \tag{5.1}$$

Comme mentionné précédemment, la base est complètement déterminé et nous pouvons donc appliquer le lemme précédent en présence de la condition principale du type

$$\Gamma_{12}^{2} \neq \Gamma_{13}^{3} \tag{5.2}$$

Il en résulte l'équation $G1212$: $\lambda_2 = 0$
L'équation $G1231$:

$$2\Gamma_{12}^{3}(\Gamma_{12}^{2} - \Gamma_{13}^{3}) = 0$$

implique que $\Gamma_{12}^{3} = 0$ d'après 5.2.
De même les équations $G2321$ et $G2331$ entraîne respectivement que

$$\Gamma_{22}^{3}{=}0 \quad \text{et} \quad \Gamma_{32}^{3} = 2\Gamma_{23}^{3}$$

Il s'ensuit respectivement de $G2323$ et $G2332$ que

$$(\Gamma_{23}^{3}{=}0)(\Gamma_{23}^{2}{=}0)$$

La soustraction $G1221$ et $G1331$ donne

$$6(\Gamma_{13}^{3})^2 - 6(\Gamma_{12}^{2})^2 = 0$$

D'après 5.2, il est nécessaire que $\Gamma_{12}^{2}{=} - \Gamma_{13}^{3}$
La résolution de l'équation restante $G1331$

$$-4(\Gamma_{13}^{3})^2 - \lambda_1 = 0$$

génère deux cas possible selon Γ_{13}^{3}

$$\begin{cases} \text{Cas 1 :} \quad \Gamma_{13}^{3}{=} - \frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2}, & \Gamma_{12}^{2} = \frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2} \\ \text{Cas 2 :} \quad \Gamma_{13}^{3}{=}\frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2}, & \Gamma_{12}^{2} = -\frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2} \end{cases}$$

et tous les autres gammas sont nuls pour chaque cas.

Après avoir déterminer tous les gammas du **type 2**, le travail consiste maintenant à quantifier ces coefficients pour atteindre une des équations du théorème 3.0.1 de la même façon appliquer au **type 1**

5.1 Cas 1

On rappelle les coefficient de connexion ainsi que les valeurs propres

$$\text{Les connexions :}\begin{cases} \nabla_{e_1}e_1 = \{0,0,0\} \\ \nabla_{e_2}e_1 = \{0,0,0\} \\ \nabla_{e_2}e_3 = \{0,0,0\} \\ \nabla_{e_3}e_1 = \{0,0,0\} \\ \nabla_{e_3}e_2 = \{0,0,0\} \\ \nabla_{e_1}e_2 = \left\{0,\frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2},0\right\} \\ \nabla_{e_1}e_3 = \left\{0,0,-\frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2}\right\} \\ \nabla_{e_2}e_2 = \left\{\sqrt{-\lambda_1},0,0\right\} \\ \nabla_{e_3}e_3 = \left\{-\sqrt{-\lambda_1},0,0\right\} \end{cases} \tag{5.3}$$

$$\text{valeurs propres}\begin{cases} \lambda_1 \neq 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

À partir de là, nous pouvons montrer ce qui suit

Theorème 5.1.1 *[DVL93]*
Soit M^3 une hypersurface localement fortement convexe et localement homogène dans $\mathbb{R}^4$, dont l'opérateur de forme a deux valeurs propres distinctes. Alors M est affine équivalent à la partie convexe de l' hypersurface suivante :

$$(y-\frac{1}{2}x^2)^3(z-\frac{1}{2}w^2)^3 = 1$$

5.1.1 Démonstration

Calcul des crochets de lie

On rapelle la formule du crochet de Lie dans notre base

$$[E_i,E_j] = \nabla_{E_i}E_j - \nabla_{E_j}E_i$$

$$[E_1,E_2] = \left\{0,\frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2},0\right\} \quad [E_1,E_3] = \left\{0,0,-\frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2}\right\} \quad [E_2,E_3] = \{0,0,0\} \tag{5.4}$$

Puisque les crochet de Lie dans $\mathbb{R}^4$ sont nulles, on va annuler tous les crochet de lie pour cela considérons une nouvelle base tel que

$$E_1^* = E_1, \quad E_2^* = \rho_2 E_2 \quad , E_3^* = \rho_3 E_3 \tag{5.5}$$

où ρ_i est une fonction dans M.

Une nouvelle computation donne que

$$[E_1^*,E_2^*] = (\rho_2\frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2} + E_1(\rho_2))E_2$$
$$[E_1^*,E_3^*] = (-\rho_3\frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2} + E_1(\rho_3))E_3$$
$$[E_2^*,E_3^*] = \{0,0,0\}$$

* $[E_1^*, E_2^*] = 0$ équivaut à

$$E_1(ln(\rho_2)) = -\frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2} \tag{5.6}$$

* $[E_1^*, E_3^*] = 0$ équivaut à

$$E_1(ln(\rho_3)) = \frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2} \tag{5.7}$$

Maintenant, des calculs montrent que les 1-formes définies par

$$\omega_2(E_2) = -\frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2}$$

$$\omega_3(E_3) = \frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2}$$

sont fermées. Il existe donc une fonction locale telles que $\omega_i = dln\rho_i$.

Passage aux cordonnées

En utilisant la fonction ω, nous voyons maintenant que par rapport à la nouvelle base tous les coefficients de connexion disparaissent. Il existe donc des coordonnées locales (x, y, z) tel que

$$\frac{\partial}{\partial x} = E_1^* = E_1, \quad \frac{\partial}{\partial y} = E_2^* = \rho_2 E_2, \quad \frac{\partial}{\partial z} = E_3^* = \rho_3 E_3 \tag{5.8}$$

Une intégration entre 5.6,5.7 et 5.8 entraîne que

$$\rho_2 = e^{-\frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2}x} \qquad \rho_3 = e^{\frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2}x} \tag{5.9}$$

Calcul de l'immersion

On note une immersion $F : M \hookrightarrow \mathbb{R}^4$
D'après la définition de l'opérateur de forme affine S et la formule 1.8, $D_{E_i}\xi = -SE_i$, on définit

$$\xi_x = D_{E_1}\xi = -\lambda_1 E_1 = -\lambda_1 F_x \tag{5.10}$$
$$\xi_y = D_{\rho_2 E_2}\xi = -\lambda_2 E_2 = 0 \tag{5.11}$$
$$\xi_z = D_{\rho_3 E_3}\xi = -\lambda_2 \rho_3 E_3 = 0 \tag{5.12}$$

Ainsi, on calcule les dérivées partielles de F :

$$\begin{aligned}
F_{xx} &= \xi \\
F_{xy} &= 0 \\
F_{xz} &= 0 \\
F_{yy} &= \rho_2^2 \left(F_x\sqrt{-\lambda_1} + \xi\right) \\
F_{yz} &= 0 \\
F_{zz} &= \rho_3^2 \left(\xi - F_x\sqrt{-\lambda_1}\right)
\end{aligned}$$

En prenant la dérivée de F_{xx}, nous obtenons

$$F_{xxx} + \lambda_1 F_x = 0$$

La solution de cette EDO est donnée par :

$$F(x, y, z) = A_1(y, z) + A_2(y, z)e^{\eta_1 x} + A_3(y, z)e^{\eta_2 x} \tag{5.13}$$

telle que $\eta_1 = -\sqrt{-\lambda_1}$, $\qquad \eta_2 = \sqrt{-\lambda_1}$ et A_1, A_2, A_3 des fonctions sur M.

Définir les fonctions A_i

Le travail consiste maintenant à déterminer les fonctions A_i afin de finaliser l'immersion F.

Il découle de F_{xy} que A_2 et A_3 ne dépendent pas de y.
Puis, il s'ensuit de F_{xz} que A_2 et A_3 sont des constantes.
Par conséquent

$$F(x, y, z) = A_1(y, z) + A_2 e^{\eta_1 x} + A_3 e^{\eta_2 x} \tag{5.14}$$

On a

$$F_{yy} = \rho_2^2 \left(F_x \sqrt{-\lambda_1} + \xi \right)$$

équivaut à

$$F_{yy} = \rho_2^2 \left(F_x \sqrt{-\lambda_1} + F_{xx} \right)$$

donc selon 5.14 d'une part

$$F_{yy} = -2\lambda_1 A_3$$

et d'autre part

$$F_{yy} = A_{1yy}$$

Par intégration directe, on obtient

$$A_1(y, z) = -\lambda_1 A_3 y^2 + d_1(z)y + d_2(z)$$

tq $d_1(z), d_2(z)$ des fonctions de z sur M.

On a $F_{yz} = 0$ ce qui est équivaut à $A_{1yz} = 0$
d'autre part

$$A_{1yz} = d_1^{'} = 0$$

il en découle donc que d_1 est une constante.
Par conséquent

$$F(x, y, z) = -\lambda_1 A_3 y^2 + d_1 y + d_2(z) + A_2 e^{\eta_1 x} + A_3 e^{\eta_2 x}$$

De la même démarche, il se résulte d'après F_{zz} que

$$A_{1zz} = -2\lambda_1 A_2$$

d'autre part

$$A_{1zz} = d_2^{''}$$

Par intégration,il se découle que

$$d_2(z) = -\lambda_1 A_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2$$

tq α_1, α_2 constantes ($\alpha_2 = 0$ par translation)
Notre immersion est ainsi définie

$$F(x, y, z) = -\lambda_1 A_3 y^2 + d_1 y + (-\lambda_1 A_2 z^2 + \alpha_1 z) + A_2 e^{\eta_1 x} + A_3 e^{\eta_2 x}$$

Formulation de l'équation correspondante

$$F(x, y, z) = -\lambda_1 A_3 y^2 + d_1 y + (-\lambda_1 A_2 z^2 + \alpha_1 z) + A_2 e^{\eta_1 x} + A_3 e^{\eta_2 x}$$

On peut réécrire F tel que

$$F(x,y,z) = \begin{cases} \ \ d_1 y \\ +\alpha_1 z \\ +A_2(e^{\eta_1 x} - \lambda_1 z^2) \\ +A_3(e^{\eta_2 x} - \lambda_1 y^2) \end{cases}$$

passons par un changement de variables tel que

$$x_1 = y \tag{5.15}$$
$$x_2 = z \tag{5.16}$$
$$x_3 = e^{\eta_1 x} - \lambda_1 z^2 \tag{5.17}$$
$$x_4 = e^{\eta_2 x} - \lambda_1 y^2 \tag{5.18}$$

On retient que $e^{\eta_2 x} = e^{-\eta_1 x}$
D'après 5.15 et 5.16, les équations 5.17 et 5.18 sont reformulées ainsi

$$x_3 = e^{\eta_1 x} - \lambda_1 x_2^2, \qquad x_4 = e^{\eta_2 x} - \lambda_1 x_1^2$$

Il s'ensuit que

$$e^{\eta_1 x} = x_3 + \lambda_1 x_2^2$$

ce qui équivaut à

$$e^{\eta_2 x} = (x_3 + \lambda_1 x_2^2)^{-1}$$

Le remplacement dans 5.18 entraîne que

$$(x_4 + \lambda_1 x_1^2)^3 (x_3 + \lambda_1 x_2^2)^3 = 1$$

Par homothétie sur x_1,l'équation finale est donnée ainsi

$$(x_4 - \frac{1}{2}x_1^2)^3 (x_3 - \frac{1}{2}x_2^2)^3 = 1$$

Celle ci correspond à l' équation du théorème 5.1.1

$$(y - \frac{1}{2}x^2)^3 (z - \frac{1}{2}w^2)^3 = 1 \tag{5.19}$$

5.2 Cas 2

L'étude de ce cas est ramenée au **Cas 1** par une transformation affine invariante définie par

$$E_1^* \longrightarrow -E_1$$

$$E_2^* \longrightarrow -E_2$$

Donc le résultat aboutit à 5.19

CHAPITRE 6

HYPERSURFACES DE TYPE 3

Ce chapitre est consacré aux études de type données par le système 3.8.

$$\text{Type 3 : } \begin{cases} T = 0 \\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 \end{cases} \tag{6.1}$$

Comme mentionné précédemment, la base est complètement déterminé et nous pouvons donc appliquer le lemme précédent.

Comme M est de type 3, nous avons que $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3$, le repère dans ce cas est libre,donc une séparation de cas est nécessaire pour traiter toutes possibilités. La matrice $K(E_i, E_i)$ pour $i = 2$ et $i = 3$ donné ainsi

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{13}^3 & -\Gamma_{23}^3 & \frac{1}{2}\Gamma_{22}^3 + \frac{1}{2}\Gamma_{23}^2 \\ \Gamma_{13}^3 & \Gamma_{23}^3 & \frac{1}{2}(-\Gamma_{22}^3 - \Gamma_{23}^2) \end{pmatrix}$$

On sépare les cas comme suit :

$$\begin{cases} \text{Cas 1 :} & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 & \text{et} & h(K(e_i, e_i), e_i) \text{ admet un max} \\ \text{Cas 2 :} & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 & \text{et} & h(K(e_i, e_i), e_i) \text{ n'admet pas de max} \end{cases}$$

6.1 Type 3.1

En suppose que $h(K(e_i, e_i), e_i)$ admet un maximum en $\{e_2, e_3\}$, alors on le prend dans la direction de e_2, le repère est donc fixé en générant la condition

$$-\Gamma_{23}^3 \neq 0 \tag{6.2}$$

Il se découle de $G1212$ que $\lambda_2 = 0$.
On a la $G2333$

$$3\Gamma_{22}^3\Gamma_{23}^3 - \frac{3}{2}(\Gamma_{22}^3 + \Gamma_{23}^2)\Gamma_{32}^3 = 0$$

d'après 6.2, il est donné que

$$\{\Gamma_{23}^3, \Gamma_{32}^3\} \neq \{0, 0\}$$

Il existe donc α tq

$$\Gamma_{22}^{3} = \frac{1}{3}\alpha\Gamma_{32}^{3}$$
$$\Gamma_{23}^{2} = \frac{1}{3}2\alpha\Gamma_{23}^{3} - \Gamma_{22}^{3}$$

On a la $G1222$

$$\Gamma_{23}^{3}(\Gamma_{13}^{3} - \alpha\Gamma_{12}^{3})$$

D'après 6.2, il s'ensuit que $\Gamma_{13}^{3} = \alpha\Gamma_{12}^{3}$
On a donc la $G1322$

$$-\frac{1}{3}\left(\alpha^2 + 9\right)\Gamma_{12}^{3}\Gamma_{23}^{3} = 0$$

Il s'entraine que $\Gamma_{12}^{3} = 0$ car les autres facteurs sont non nuls.
Cela génère d'après $G1221$ que $\lambda_1 = 0$, ce qui est contradictoire car $\lambda_2 = 0$
Il n'existe donc pas d'hypersurfaces de types 3.1

6.2 Type 3.2

On rapelle la forme de notre opérateur

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{13}^{3} & -\Gamma_{23}^{3} & \frac{1}{2}\Gamma_{22}^{3} + \frac{1}{2}\Gamma_{23}^{2} \\ \Gamma_{13}^{3} & \Gamma_{23}^{3} & \frac{1}{2}(-\Gamma_{22}^{3} - \Gamma_{23}^{2}) \end{pmatrix}$$

Comme $h(K(e_i, e_i), e_i)$ n'admet pas de maximum, alors le repère est libre en $\{E_2, E_3\}$, ce fait impose que

$$\Gamma_{23}^{3} = 0 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_{23}^{2} = -\Gamma_{22}^{3}$$

Ainsi les coefficients de connexion restants sont :

$$\Gamma_{13}^{3} \qquad \Gamma_{12}^{3} \qquad \Gamma_{22}^{3} \qquad \Gamma_{32}^{3}$$

Les valeurs des tenseurs sont données ainsi

$$\begin{pmatrix} -2\Gamma_{13}^{3} & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{13}^{3} & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{13}^{3} \\ \Gamma_{13}^{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{13}^{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'une part on a que Γ_{13}^{3} est dans la droite fixe E_1 alors celui ci est une constante.D'autre part les coefficients restants sont les droites libres, ils sont donc admis comme fonctions.

Pour pouvoir continuer les calculs, la formule de connexion est reformulée pour prendre en considération la nouvelles natures des gammas.

$$\bar{\nabla}_{E_i}\left(\bar{\nabla}_{E_j}E_k\right) = \sum\left(\bar{\nabla}_{E_i}\Gamma_{jk}^{l}.E_l + \Gamma_{jk}^{l}\bar{\nabla}_{E_i}E_l\right)'$$

Le reste des calculs est réalisé en ce terme pour pouvoir déterminer la valeur de Γ_{13}^{3}
Il se découle de $G1212$ que $\lambda_2 = 0$.
La résolution de l'équation $G1221$:

$$-8(\Gamma_{13}^{3})^2 - \lambda_1$$

génère deux cas :

$$\begin{cases} \text{Cas a :} & \Gamma_{13}^3 = -\frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2\sqrt{2}} \\ \text{Cas b :} & \Gamma_{13}^3 = -\frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Pour les deux cas, les crochets de Lie sont sous forme d'équations différentielles ainsi que les équations de Gauss, la résolution implique que les fonctions gammas restantes ($\Gamma_{12}^3 \quad \Gamma_{22}^3 \quad \Gamma_{32}^3$) sont identiquement nulles, ainsi que les autres coefficients. Après avoir déterminer tous les gammas du **type 3**, le travail consiste maintenant à quantifier ces coefficients pour atteindre une des équations du théorème 3.0.1 de la même façon appliquer au **type 1**

6.2.1 Cas a

On rappelle les coefficient de connexion ainsi que les valeurs propres

$$\text{Les connexions :} \begin{cases} \nabla_{e_2} e_1 = \{0,0,0\} \\ \nabla_{e_2} e_3 = \{0,0,0\} \\ \nabla_{e_3} e_1 = \{0,0,0\} \\ \nabla_{e_3} e_2 = \{0,0,0\} \\ \nabla_{e_1} e_1 = \left\{-\frac{\sqrt{-\lambda_1}}{\sqrt{2}}, 0, 0\right\} \\ \nabla_{e_1} e_2 = \left\{0, \frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2\sqrt{2}}, 0\right\} \\ \nabla_{e_1} e_3 = \left\{0, 0, \frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2\sqrt{2}}\right\} \\ \nabla_{e_2} e_2 = \left\{\frac{\sqrt{-\lambda_1}}{\sqrt{2}}, 0, 0\right\} \\ \nabla_{e_3} e_3 = \left\{\frac{\sqrt{-\lambda_1}}{\sqrt{2}}, 0, 0\right\} \end{cases} \tag{6.3}$$

$$\text{valeurs propres} \begin{cases} \lambda_1 \neq 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

À partir de là, nous pouvons montrer ce qui suit

Theorème 6.2.1 *[DVL93]*
Soit M^3 une hypersurface localement fortement convexe et localement homogène dans $\mathbb{R}^4$, dont l'opérateur de forme a deux valeurs propres distinctes. Alors M est affine équivalent à la partie convexe de l' hypersurface suivante :

$$(y - \frac{1}{2}(x^2 + z^2))^4 w^2 = 1$$

6.2.2 Démonstration

Calcul des crochets de lie

On rapelle la formule du crochet de Lie dans notre base

$$[E_i, E_j] = \nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i$$

$$[E_1, E_2] = \left\{0, \frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2\sqrt{2}}, 0\right\} \quad [E_1, E_3] = \left\{0, 0, \frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2\sqrt{2}}\right\} \qquad [E_2, E_3] = \{0,0,0\} \tag{6.4}$$

Puisque les crochet de Lie dans $\mathbb{R}^4$ sont nulles, on va annuler tous les crochet de lie pour cela considérons une nouvelle base tel que

$$E_1^* = E_1, \quad E_2^* = \rho_2 E_2 \quad , E_3^* = \rho_3 E_3 \tag{6.5}$$

où ρ_i est une fonction dans M.

Une nouvelle computation donne que

$$\begin{aligned}
[E_1^*, E_2^*] &= (\rho_2 \frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2} + E_1(\rho_2))E_2 \\
[E_1^*, E_3^*] &= (-\rho_3 \frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2} + E_1(\rho_3))E_3 \\
[E_2^*, E_3^*] &= \{0, 0, 0\}
\end{aligned}$$

* $[E_1^*, E_2^*] = 0$ équivaut à

$$E_1(ln(\rho_2)) = -\frac{\sqrt{-\lambda_1}x}{2\sqrt{2}} \tag{6.6}$$

* $[E_1^*, E_3^*] = 0$ équivaut à

$$E_1(ln(\rho_3)) = -\frac{\sqrt{-\lambda_1}x}{2\sqrt{2}} \tag{6.7}$$

Maintenant, des calculs montrent que les 1-formes définies par

$$\omega_2(E_2) = -\frac{\sqrt{-\lambda_1}x}{2\sqrt{2}}$$

$$\omega_3(E_3) = -\frac{\sqrt{-\lambda_1}x}{2\sqrt{2}}$$

sont fermées. Il existe donc une fonction locale telles que $\omega_i = dln\rho_i$.

Passage aux cordonnées

En utilisant la fonction ω, nous voyons maintenant que par rapport à la nouvelle base tous les coefficients de connexion disparaissent. Il existe donc des coordonnées locales (x, y, z) tel que

$$\frac{\partial}{\partial x} = E_1^* = E_1, \quad \frac{\partial}{\partial y} = E_2^* = \rho_2 E_2, \quad \frac{\partial}{\partial z} = E_3^* = \rho_3 E_3 \tag{6.8}$$

Une intégration entre 6.6,6.7 et 6.8 entraîne que

$$\rho_2 = e^{-\frac{\sqrt{-\lambda_1}x}{2\sqrt{2}}} \qquad \rho_3 = e^{-\frac{\sqrt{-\lambda_1}x}{2\sqrt{2}}} \tag{6.9}$$

Calcul de l'immersion

On note une immersion $F : M \hookrightarrow \mathbb{R}^4$

D'après la définition de l'opérateur de forme affine S et la formule $D_{E_i}\xi = -SE_i$, on définit

$$\xi_x = D_{E_1}\xi = -\lambda_1 E_1 = -\lambda_1 F_x \tag{6.10}$$

$$\xi_y = D_{\rho_2 E_2}\xi = -\lambda_2 E_2 = 0 \tag{6.11}$$

$$\xi_z = D_{\rho_3 E_3}\xi = -\lambda_2 \rho_3 E_3 = 0 \tag{6.12}$$

Ainsi, on calcule les dérivées partielles de F :

$$
\begin{aligned}
F_{xx} &= \xi - \frac{F_X\sqrt{-\lambda_1}}{\sqrt{2}} \\
F_{xy} &= 0 \\
F_{xz} &= 0 \\
F_{yy} &= \rho_2^2\left(\frac{F_x\sqrt{-\lambda_1}}{\sqrt{2}} + \xi\right) \\
F_{yz} &= 0 \\
F_{zz} &= \rho_3^2\left(\frac{F_x\sqrt{-\lambda_1}}{\sqrt{2}} + \xi\right)
\end{aligned}
$$

En prenant la dérivée de F_{xx}, nous obtenons

$$F_{xxx} + \frac{F_x\sqrt{-\lambda_1}}{\sqrt{2}}F_{xx} + \lambda_1 F_x = 0$$

La solution de cette EDO est donnée par :

$$F(x,y,z) = A_1(y,z) + A_2(y,z)e^{\eta_1 x} + A_3(y,z)e^{\eta_2 x} \tag{6.13}$$

telle que $\eta_1 = -\sqrt{-2\lambda_1}$, $\quad \eta_2 = \frac{\sqrt{-\lambda_1}}{\sqrt{2}}$ et A_1, A_2, A_3 des fonctions sur M.

Définir les fonctions A_i

Le travail consiste maintenant à déterminer les fonctions A_i afin de finaliser l'immersion F.

Il découle de $F_{xz} = 0$ que A_2 et A_3 ne dépendent pas de z.
De même, il découle de $F_{xy} = 0$ que A_2 et A_3 ne dépendent pas de y, donc ce sont des constantes.
On a donc

$$F(x,y,z) = A_1(y,z) + A_2 e^{\eta_1 x} + A_3 e^{\eta_2 x} \tag{6.14}$$

On a

$$F_{yy} = \rho_2^2\left(\frac{F_x\sqrt{-\lambda_1}}{\sqrt{2}} + \xi\right)$$

Après remplacement et simplification on a

$$F_{yy} = -\frac{3}{2}\lambda_1 A_3$$

d'autre part,d'après 6.14

$$F_{yy} = A_{1yy}$$

Par intégration on obtient

$$A_1(y,z) = -\frac{3}{4}\lambda_1 A_3 y^2 + d_1(z)y + d_2(z)$$

tq $d_1(z), d_2(z)$ fonctions sur M.
Il se découle de $F_{yz} = 0$ que $d_1(z)$ est une constante.
On a

$$F_{zz} = \rho_3^2 \left(\frac{F_x\sqrt{-\lambda_1}}{\sqrt{2}} + \xi \right)$$

Après remplacement et simplification on a

$$F_{zz} = -\frac{3}{2}\lambda_1 A_3$$

d'autre part,$F_{zz} = d_2''(z)$ donc il s'ensuit que

$$d_2 = -\frac{3}{2}\lambda_1 A_3 z^2 + \alpha z$$

tq α constante.
Notre immersion est ainsi donnée

$$F(x, y, z) = -\frac{3}{4}\lambda_1 A_3 y^2 + d_1 y - \frac{3}{2}\lambda_1 A_3 z^2 + \alpha z + A_2 e^{\eta_1 x} + A_3 e^{\eta_2 x} \tag{6.15}$$

Après les démarche de re-formulation, l'équation de l'immersion exprime exactement l' équation du théorème 6.2.1

$$(y - \frac{1}{2}(x^2 + z^2))^4 w^2 = 1$$

6.2.3 Cas b

L'étude de ce cas est ramenée au **Cas a** par transformation affine.

CONCLUSION

Finalement, nous avons démontrer la classification réaliser par Dillem-Vrancken des hypersurfaces affines tridimensionnelles homogènes localement fortement convexes dont S l'opérateur de forme possède deux valeurs propres de multiplicité 1 et 2, ainsi prouver son théorème d'inexistence d'hypersurfaces dont S possède 3 valeurs propres distinctes.
Ce travail à été réaliser en associant le programme de calcul formel Mathematica qui a rendu les calculs plus fluides et pratiques.
Le domaine de classification d'hypersurfaces affines a passer plusieurs niveaux importants en ce temps ; les derniers travaux enregistrées concernent la dimension 4 réalisée par A.C.Salah et L.Vrancken voir [CV17], ainsi pour la dimension 5, il existe une classification quasi-ombilical établie par Dillen et Vranken voir [DV94].
Ce genre de résultats contemporain est d'une utilité importante pour les travaux d'optique moderne. Beaucoup de terrains de recherches restent ouvert à l'heure actuel dans ce domaine, offrant par cela de nouvelles perspectives plus profondes. mybibliography

BIBLIOGRAPHIE

[CHI17] Abdelouahab CHIKH SALAH. “Geometry of Nearly Sasakian Manifolds and their Submanifolds.” Thèse de doct. 07-01-2018, 2017.

[CV17] Abdelouahab Chikh Salah et Luc Vrancken. “Four-dimensional locally strongly convex homogeneous affine hypersurfaces”. In : *Journal of geometry* 108.1 (2017), p. 119-147.

[DV91] Franki Dillen et Luc Vrancken. “3-dimensional affine hypersurfaces in 4 with parallel cubic form”. In : *Nagoya mathematical journal* 124 (1991), p. 41-53.

[DV93] Franki Dillen et Luc Vrancken. “Homogeneous affine hypersurfaces with rank one shape operators”. In : *Mathematische Zeitschrift* 212.1 (1993), p. 61-72.

[DV94] Franki Dillen et Luc Vrancken. “Quasi-umbilical, locally strongly convex homogeneous affine hypersurfaces”. In : *Journal of the Mathematical Society of Japan* 46.3 (1994), p. 477-502.

[DVL93] Franki Dillen, Luc Vrancken et KU Leuven. “The classification of 3-dimensional locally strongly convex homogeneous affine hypersurfaces”. In : *manuscripta mathematica* 80.1 (1993), p. 165-180.

[Gug77] Heinrich Walter Guggenheimer. *Differential geometry, Corrected reprint of the 1963 edition*. 1977.

[Laf12] Jacques Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. EDP sciences, 2012.

[Lee97] John M Lee. *Riemannian manifolds, volume 176 of Graduate Texts in Mathematics*. 1997.

[Li+15] An-Min Li et al. *Global Affine Differential Geometry of Hypersurfaces*. Berlin, Boston : De Gruyter, 2015. isbn : 978-3-11-026889-8. doi : `https://doi.org/10.1515/9783110268898`. url : `https://www.degruyter.com/view/title/122536`.

[NKS94] Katsumi Nomizu, Nomizu Katsumi et Takeshi Sasaki. *Affine differential geometry : geometry of affine immersions*. Cambridge university press, 1994.

[Nom68] Katsumi NOMIZU. “On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor”. In : *Tohoku Mathematical Journal, Second Series* 20.1 (1968), p. 46-59.

[NS91] Katsumi NOMIZU et Takeshi SASAKI. “A new model of unimodular-affinely homogeneous surfaces”. In : *manuscripta mathematica* 73.1 (1991), p. 39-44.

[Sas80] Takeshi SASAKI. “Hyperbolic affine hyperspheres”. In : *Nagoya Mathematical Journal* 77 (1980), p. 107-123.