République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
Université de Ghardaia

Faculté des Science et de Technologie
Département de Mathématique et Informatique
&
Laboratoire de Mathématiques et Sciences Appliquées

Projet de fin d'étude présenter en vue de l'obtention de diplôme de

MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatiques
Spécialité : Analyse Fonctionnelle et applications

THÈME

Problème de Goursat non-linéaire dans un espace de Carleman

Présenté par :

Abdelhakim DAHMANI

Soutenu publiquement le : 25/ 06/ 2018

Devant le jury :

Abdenour Lani :	(Univ. Ghardaia)	Présidente
Kaddour Guerbati :	(Univ. Ghardaia)	Examinateur
Smail Latreche :	(Univ. Ghardaia)	Raporteur

Année universitaire 2017/2018

Dedicace

Je dédie ce travail
à mes parents.
à mes soeurs, et à mon frère.
à la mémoire de mes grand-pères, et de ma grande-mère.

Abdelhakim Dahmani
Ghardaia 2018

Remerciement

Je remercie mon encadreur Monsieur ***Smail Latreche*** pour le sujet qu'il m'a proposé et pour l'attention et la disponibilité dont il a su faire preuve au long de la préparation de ce mémoire et pendant mon parcours de master.

Je voudrais également remercier Monsieur ***Kaddour Guerbati*** et Monsieur ***Abdenour Lani*** pour l'honneur qu'ils m'ont fait en portant leurs attention sur ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur ***Abdelouahab Chikh Salah*** pour l'intérêt qu'il m'a porté et pour sa disponibilité et ses encouragements.

Merci à tous ceux qui m'ont enseigné en primaire, collège, lycée, université et ailleurs, et tous les personnels de ces établissements, sans eux je suis rien. Merci à tous les mathématiciens...

Merci mes amis, merci à tout ceux qui ont contribué de près ou de loin dans ce travail.

Et enfin dois-je dire à quel point mes parents sont aujourd'hui dans mes pensées ! mes parents qui m'ont toujours soutenu dans mes épreuves aussi bien au niveau moral, que matériel. Je leur adresse aujourd'hui un témoignage d'amour filial, et de reconnaissance.

Abdelhakim Dahmani
Ghardaia 2018

Résumé, Abstract, ملخص

ملخص

في هذه المذكرة نهتم ببرهنة وجود و وحدانية الحل لمسألة غورسا الغير الخطية في فضاء كارلمان، حيث نقوم بتحويل المعادلة التكاملية-التفاضلية إلى مسألة نقطة صامدة في جبر بناخ معرف بإستعمال سلاسل لا منتهية كوِنت بإستعمال متتالية محدبة لوغاريتميا ذات تزايد قابل للمراقبة

الكلمات المفتاحية : مشكل غورسا، النقطة الصامدة، جبر بناخ، سلسلة غير منتهية، فضاء كارلمان.

Résumé

Dans ce mémoire on s'intéresse à un résultat d'éxistence et d'unicité pour le problème de Goursat non-linéaire dans un espace de Carleman, on transforme le problème integro-différentiel à un problème de point fixe dans une algèbre de Banach définie par le formalisme de certaine série formelle construite à partir d'une suite logarithmiquement convexe à croissance contrôlée.

Mots clés : Problème de Goursat, Point fixe, Algèbre de Banach, série formelle, espace de Carleman.

Abstract

In this dissertation, we are interested in an existence and uniqueness result of the non-linear Goursat problem in a Carleman space, whereby we have transformed the integrodifferential equation into a fixed point problem in a Banach Algebra defined by using the formalism of some formal power serie constructed by a logarithmically convex sequence with a controllable increase.

Keywords : Goursat problem, fixed point, Banach algebra, formal power serie, Carleman space.

Table des matières

Notation

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$, $x, y \in \mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{C}\{x\}$:l'algèbre des séries convergentes.
- $\mathbb{C}[[x]]$:l'algèbre des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- $\|\cdot\|$: norme
- $D_x^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$
- $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ tel que $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, pour tout $i = 0 \ldots n$
- $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$
- $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$
- $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \cdots, \alpha_n \pm \beta_n)$ tel que $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$ pour tout $i = 0 \ldots n$
- $\alpha \neq \beta$ signifie $(\exists i, 0 \leq i \leq n : \alpha_i \neq \beta_i\ )$
- $\alpha \leq \beta$ signifie $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $i = 0 \ldots n$
- $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$
- $(x.y)^k = \displaystyle\sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha \in \mathbb{N}^n}} \frac{|\alpha|! x^\alpha y^\alpha}{\alpha!}$

Introduction

Les équations aux dérivées partielles intéressent les mathématiciens dès l'invention du calcul différentiel pendant XVII-ième siècle, surtout pour leurs utilitées dans les autres disciplines notamment la physique classique comme l'équation d'Euler-Lagrange, la physique quantique comme l'équation de Schrödinger, la thermodynamiques commes les équations de Maxwell ...etc. On trouve pas mal d'idées et techniques pour étudier l'existence, l'unicité, la stabilité et la contrôlabilité de différents types des EDPs, dans ce mémoire on s'intéresse à l'existence et l'unicité d'une solution de classe Carleman pour un problème de Goursat non-linéaire en utilisant une technique développée à partir des travaux de Cauchy(1789-1857) sur les solutions analytiques des EDPs non linéaires qui consiste à injecter une série formelle dans l'équation et tirer des formules récursives sur les coefficients du développement pour qu'elle soit une solution, ainsi faire les estimations nécessaires sur ces coefficients pour que la série converge, une estimation qui se base sur le premièr mémoire de Cauchy (Mémoire sur le calcul intégral). ce dernier a traité le cas d'une equation quasi-linéaire, un système d'équations quasi-linéaires, une equation semi-linéaire de premier ordre, un système d'équations semi-linéaires puis une equation semi-linéaire d'ordre quelconque de la forme

$$\begin{cases} D_t^m u = f(x_1, \cdots, x_n, t, (D_x^\alpha D_y^\beta u)_{(\alpha,\beta)\in A}) \\ D^k u_{|t=0} = u_{0,k}(x_1, \cdots, x_n) \text{ pour } 0 \leq k \leq m-1 \end{cases}$$

Où $f, u_{0,k}$ sont des fonctions analytiques et A est une partie finie de l'ensemble

$$\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}; |\alpha| + \beta \leq m, (\alpha, \beta) \neq (0, m)\}$$

Par suite cette idée a attiré l'attention de beaucoup de mathématiciens notamment Sofia Kowalewsky(1850-1891) qui a généralisé les anciens résultats à un système d'équations analytique semi-linéaires, ce résultat est connu sous le nom "Théorème de Cauchy-Kowalewsky" un théorème qui fut simplifié et étendu par Goursat au problème de Cauchy généralisé où les conditions initiales sont prises dans une surface caractéristique, appellé par suite problème de Goursat ou problème de Cauchy généralisé ayant la forme suivante

$$\begin{cases} D_x D_t u = f(t, x, u, D_x u, D_t u, D_x^2 u, D_t^2 u) \\ u(0, x) = \phi(x), u(t, 0) = \psi, \phi(0) = \psi(0) \end{cases}$$

où f, ϕ, ψ sont des fonctions holomorphes.
Notons que le problème de Goursat porte des restrictions sur l'ordre de dérivation ce qui a été amélioré par Lednev dans un système d'équations, qui généralise bien le théorème de Kowalewsky, connu sous le nom "Théorème de Cauchy-Kowalewsky-Lednev" qui a été démontré d'une manière plus élégante par Gärding, avant d'être généralisé par Persson dans l'espace des fonctions partiellement analytiques, c'est-à-dire analytiques en certaines variables et de classe de Gevrey-d par rapport à d'autres variables,une dizaine d'années après Claude Wagschal avec une nouvelle méthode a simplifié la démonstration des résultats analogues à ceux de Gàrding et de Persson pour une seule equation (problème de Goursat holomorphe,partiellement holomorphes, Gevrey-continue et Gevrey-holomorphes), une méthode constitue des idées fabuleuses, et qui sera traitée au cas holomorphe dans le premier chapitre de ce mémoire ; en ce dernier cas elle consiste à transformer le problème différentiel à un problème de point fixe dans un espace de Banach qui sera défini par le formalisme des fonctions majorantes φ de Cauchy telle que $\varphi^2 \ll \varphi$, les espaces de Banach associés à de telles fonctions majorantes sont des algèbre de Banach où il est facile de majorer la multiplication de deux fonctions ; suivant la même technique mais cette fois-ci en utilisant le formalisme des série formelle, Wagschal démontre les autres cas. Dans le deuxième chapitre nous allons au delà de ces résultats et montrons un théorème d'existence et d'unicité pour le problème de Goursat dans un espace de Carleman associé à une suite arbitraire $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant certaines hypothèses, un tel espace contient les espaces des fonctions holomorphes et Gevrey pour des cas particuliers de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, un théorème qui généralise les anciens résultats, en se basant sur la technique de Wagschal et sur les propriétés des suites logarithmiquement convexe inspiré de la théorie des fonctions quasi-analytique notamment les travaux de Carleman, Denjoy, S.Mandelbrojt..., où on choisit la série formelle convenable ainsi que les hypothèses nécessaires.

0 Préliminaires

"Je ne comprends pas qu'on ne comprenne pas les mathématiques."

– Jules Henri Poincaré

***Définition* 0.1.** [11]

On appelle Algèbre tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel A muni d'une multiplication vérifiant :

1. $x(yz) = (xy)z$
2. $(x+y)z = xz + yz$, $x(y+z) = xy + xz$
3. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

pour tout x, y et z dans l'espace vectoriel A et tout scalaire α

Si de plus A est un espace de Banach pour une norme vérifiant

4. $\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \quad (\forall x, y \in A)$

on dit que A est une Algèbre de Banach

***Définition* 0.2.** [2](Fonction homogène)

Soit $f : (\mathbb{R}^*)^n \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$

On dit que f est positivement homogène de degré k si :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(tx) = t^k f(x) \text{ pour tout } x \in (\mathbb{R}^*)^n$$

Si f est différentiable en tout point, elle est positivement homogène de degré k si et seulement si elle satisfait l'identité d'Euler :

$$f(x) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

***Théorème* 0.3.** *[1](Théorème de Point fixe de Banach)*
Soit (E, d) un espace métrique complet, A une sous ensemble fermé de E, $f : A \to E$ une application telle que $f(A) \subset A$ et

$$d(f(u), f(v)) \leq \tau d(u, v) \quad \forall u, v \in A$$

avec $0 \leq \tau < 1$
alors, f admet un point fixe unique.

***Lemme* 0.1.** *[9] (Taylor)*
Soit f une fonction de (x, y) holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+m}$ vérifiant $f(0,0) = 0$, il existe une fonction $G : (x, y, z) \to G(x, y, z)$ holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+2m}$ vérifiant $G(0,0,0) = 0$, telle que pour (x, y, z) assez petit dans $\mathbb{C}^{n+2m}$:

$$f(x, y) = f(x, z) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(0,0)}{\partial y_j}(y_j - z_j) + \sum_{j=1}^{m} G(x, y, z)(y_j - z_j)$$

par suite, il existe une fonction $F : (x, y) \to F(x, y)$ holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+m}$ vérifiant $F(0,0) = 0$, telle que pour (x, y) assez petit dans $\mathbb{C}^{n+m}$:

$$f(x, y) = f(x, 0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(0,0)}{\partial y_j} y_j + \sum_{j=1}^{m} F(x, y) y_j$$

Démonstration. Posons $f(x, y) = f(x, y - z + z) = f(x, h + z) = H(x, h, z)$
Soit H_n la partie homogène de degré n de H par rapport à h. Ona donc $H(x, h, z) = \sum_{n \geq 0} H_n(x, h, z)$
D'après la formule d'Euler pour les fonctions homogènes, on a

$$H_n(x, h, z) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H_n(x, h, z)}{\partial h_j} h_j \quad \forall n \geq 1$$

$$H(x, h, z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H_n(x, h, z)}{\partial h_j} h_j + H_0(x, h, z)$$

comme $H_0(x, h, z) = H(x, 0, z) = f(x, z)$. alors

$$H(x, h, z) = +H(x, 0, z) \sum_{j=1}^{m} (\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \frac{\partial H_n(x, h, z)}{\partial h_j}) h_j$$

Notons $g(x,h,z)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{\partial H_n(x,h,z)}{\partial h_j}=g(0,0,0)+G(x,h,z)$
avec $G(x,h,z)=g(x,h,z)-g(0,0,0)$, donc

$$g(0,0,0)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{\partial H_n(0,0,0)}{\partial h_j}=\frac{\partial H_1(0,0,0)}{\partial h_j}$$

On a alors

$$H(x,h,z)=H(x,0,z)+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial H_1(0,0,0)}{\partial h_j}h_j+\sum_{j=1}^{m}(\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n}\frac{\partial H_n(x,h,z)}{\partial h_j})h_j \quad (1)$$

en outre

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y_j}=\frac{\partial H(x,h,z)}{\partial h_j}=\sum_{n\geq 1}\frac{\partial H_n(x,h,z)}{\partial h_j}=\frac{\partial H_1(x,h,z)}{\partial h_j}+\sum_{n\geq 2}\frac{\partial H_n(x,h,z)}{\partial h_j}$$

par conséquent

$$\frac{\partial H_1(x,h,z)}{\partial h_j}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y_j}-\sum_{n\geq 2}\frac{\partial H_n(x,h,z)}{\partial h_j}$$

On a alors $\frac{\partial H_1(0,0,0)}{\partial h_j}=\frac{\partial f(0,0)}{\partial y_j}$. d'après (1) on a

$$f(x,y)=f(x,z)+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(0,0)}{\partial y_j}(y_j-z_j)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n}\frac{\partial H_n(x,h,z)}{\partial h_j}(y_j-z_j)$$

Posons $G(x,y,z)=\sum_{n\geq 2}\frac{\partial H_n(x,h,z)}{\partial h_j}$

G est holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+2m}$, et vérifie $G(0,0,0)=0$.
Par suite, en prenant $z=0$ dans l'équation (1), on a

$$f(x,y)=f(x,0)+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(0,0)}{\partial y_j}y_j+\sum_{j=1}^{m}\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n}\frac{\partial H_n(x,h,z)}{\partial h_j}y_j$$

Posons $F(x,y)=\sum_{n\geq 2}\frac{\partial H_n(x,h,0)}{\partial h_j}$.
F est holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+m}$ et vérifie $F(0,0)=0$
$\square$

***Théorème* 0.4.** *[4](Pringsheim)*
Une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty$ est analytique dans un ouvert Ω si et seulement si pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\sup_K |f^{(n)}(x)| \leq c^{n+1} n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

***Théorème* 0.5.** *[6](Inégalité de Cauchy)*
Soit $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ un polydisque de centre a et de rayon r, f une fonction analytique sur Δ, alors pour toute $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a

$$|D^\alpha f(a)| \leq \sup_\Delta |f(x)| \frac{\alpha!}{r^\alpha}$$

***Théorème* 0.6.** *[6](principe de prolongement analytique)*
Soient f et g deux fonctions holomorphes dans un ouvert connexe Ω, $U \subset \Omega$ un ouvert non vide, alors

$$f = g \text{ sur } U \Rightarrow f = g \text{ sur } \Omega$$

***Définition* 0.7.** [16]
Soient $u = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} u_\alpha x^\alpha$, $\Phi = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \Phi_\alpha x^\alpha$ deux séries formelles à n variables $(x_1, \cdots, x_n)$ telles que $u_\alpha \in \mathbb{C}$, $\Phi_\alpha \in \mathbb{R}_+$. on note $u \ll \Phi$ la relation $(\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |u_\alpha| \leq \Phi_\alpha)$.
Si Φ est une série convergente, auquel cas on dit que Φ est une fonction majorante.

***Proposition* 0.1.** *[14]*
Soit $u, v, U, V \in \mathbb{C}[[x]]$. Alors

$$u \ll U \wedge v \ll V \Rightarrow \quad u + v \ll U + V \tag{2}$$
$$u \ll U \wedge v \ll V \Rightarrow \quad u.v \ll U.V \tag{3}$$

1 Problème de Goursat holomorphe

"Il n'existe pas d'idée franchement mauvaise, ce qui est franchement mauvais, c'est de ne pas avoir d'idée du tout."
– George Polya

1.1 Hypothèses et Résultats

L'espace des fonctions analytiques est un espace riche de propriétés qui viennent de la nature exceptionnelle de ces fonctions, dans ce chapitre on va exploiter certains de ces propriétés comme la différentiabilité et la convergence des séries de Taylor pour bénéficier du théorème de point fixe de Banach. Telles propriétés nous permettre d'introduire une nouvelle algèbre de Banach à partir le premier espace (l'espace des fonctions analytiques), qui n'est qu'un espace de Fréchet, afin d'établir un résultat d'éxistence et d'unicité qui peut être généralisé dans d'autres espaces notament partiellement-holomorphes, Gevery-continue,Gevrey-holomorphe et Garleman-continue.

On s'intéresse au problème de Goursat non linéaire suivant au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$ suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha u(x) = f(x, D^B u(x)) \\ u = O(x^\alpha) \end{cases} \tag{1.1}$$

où

B désigne une partie finie de l'ensemble

$$\{\beta \in \mathbb{Z}^n ; |\beta| \leq |\alpha| \text{ et } \beta \neq \alpha\}$$

où $|\beta| = \sum_{j=1}^{n} \beta_j$ quand $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$.

$D^B u = (D^\beta u)_{\beta\in B}$, où $D_j^{-1}u$ désigne la primitive de u par rapport à x_j qui s'annule avec x_j ; la fonction f est une fonctions de x et de $n' = CardB$ variables complexes notées $(y_\beta)_{\beta\in B}$.

La condition $u = O(x^\alpha)$ signifie que $u(x) = x^\alpha g(x)$, où g est holomorphe à l'origine, ce qui implique que $D^\beta u(0) = 0$ pour tout $\beta \in B$; on supposera donc f holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+n'}$.

On pose

$$A_\beta = D_{y_\beta} f(0,0),\ \ \beta \in B$$

et pour tout $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$\rho(\xi) = \sum_{\substack{\beta\in B\\|\beta|=|\alpha|}} |A_\beta|\xi^{\beta-\alpha}; \tag{1.2}$$

Cette fonction introduite par Lednev, appelée fonction spectrale du problème de Goursat, et elle est positivement homogène de degré nul.

en effet $\forall t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}\rho(t\xi) = \sum_{\substack{\beta\in B\\|\beta|=|\alpha|}} |A_\beta|(t\xi)^{\beta-\alpha} &= \sum_{\substack{\beta\in B\\|\beta|=|\alpha|}} |A_\beta| t^{\beta_1-\alpha_1}\cdots t^{\beta_n-\alpha_n}\xi^{\beta-\alpha}\\ &= \sum_{\substack{\beta\in B\\|\beta|=|\alpha|}} |A_\beta| t^{|\beta|-|\alpha|}\xi^{\beta-\alpha}\\ &= \rho(\xi)\end{aligned}$$

***Théorème* 1.1.** *[8](Lednev)*
S'il existe $\xi \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $\rho(\xi) < 1$. le problème de Goursat (1.1) admet une unique solution holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$.

Pour simplifier le travail on peut supposer $\alpha = 0$ et $f(0,0) = 0$
en effet, posons $f(0,0) = c$ et $v(x) = u(x) - c$ on a alors

$$v = f(x, D^B v + D^B c) - c = g(x, D^B v) \tag{1.3}$$

où $g(x,y) = f(x, y + D^B c) - c$. d'où $g(0,0) = f(0,0) - c = 0$ vu que $D^\beta c(0) = 0$, pour tout $\beta \in B$, ce qui vient de la définition des composantes de l'opérateur D^α pour tout $\alpha \in B$.
en fin

$$\sum_{\substack{\beta\in B\\|\beta|=0}} |D_{y_\beta} g(0,0)|\xi^\beta = \sum_{\substack{\beta\in B\\|\beta|=0}} |D_{y_\beta}(f(0,0) - c(0))|\xi^\beta = \sum_{\substack{\beta\in B\\|\beta|=0}} |D_{y_\beta} f(0,0)|\xi^\beta$$

D'où la fonction spectrale du problème de Goursat (1.3) coïncide avec celle du problème initial.
En résumé, il s'agit de prouver le théorème de Lednev pour le problème

$$u(x) = f(x, D^B u(x))$$

où (B fini)

$$B \subset \{\beta \in \mathbb{Z}^n ; |\beta| \leq 0 \text{ et } \beta \neq 0\}, \text{et} f(0,0) = 0$$

A cet effet, on va montrer que l'application

$$T : u \to f(x, D^B u(x))$$

est une contraction stricte dans un espace métrique complet ; cet espace métrique complet va être tout simplement une boule fermée dans une algèbre de Banach qui sera définie par l'intermédiaire de certains fonctions majorantes.

1.2 Fonction Majorante

On note B_Φ l'espace de Banach des fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^n$ suivant [15] :

$$B_\Phi = \{u \in \mathbb{C}\{x\}; \exists c \geq 0 : u \ll c\Phi\}$$

pour la norme

$$\|u\|_\Phi = \min\{c \geq 0; u \ll c\Phi\}.$$

On utilisera la fonction majorante de Lax [7] :

$$\theta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)^2}, \quad t \in]-1, 1[$$

dont voici une propriété essentielle

***Proposition* 1.1.** *[16](Lax)*
Il existe une constante K telle que

$$\theta^2(t) \ll K\theta(t)$$

Démonstration. On a d'après le produit de Cauchy

$$\theta^2(t) = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)^2})^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(j+1)^2} \frac{1}{(n-j+1)^2}) t^n$$

On majore les coefficients de t^n dans $\theta^2(t)$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(j+1)^2} \frac{1}{(n-j+1)^2} &\leq 2 \sum_{0\leq j\leq n/2} \frac{1}{(j+1)^2} \frac{1}{(n-j+1)^2} \\ &\leq 2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2} \right) \frac{1}{((n/2)+1)^2} \\ &\leq 2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2} \right) \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} \frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

comme $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2} = \frac{\pi}{6}$ donc il nous suffit de prendre K tel que :

$$K \geq \frac{4\pi}{3} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}$$

On prend par exemple $K = \frac{4\pi}{3}$ $\square$

On utilise alors la fonction majorante suivante

$$\varphi_R(t) = K^{-1}\theta(\frac{t}{R}), \quad R > 0 \tag{1.4}$$

***Proposition* 1.2.** *[16]*
$\forall k \geq 1, \forall R > 0$ on a :

$$\varphi_R^k(t) \ll \varphi_R(t) \tag{1.5}$$

Démonstration. On a pour $k = 2$

$$\varphi_R^2(t) = K^{-2}\theta^2(\frac{t}{R}) \ll K^{-2} \times K\theta(\frac{t}{R}) = K^{-1}\theta(\frac{t}{R})$$

on itère les processus pour les autre ordres.

$$\varphi_R^k(t) \ll \varphi_R^{k-1}(t) \ll \cdots \ll \varphi_R(t)$$

$\square$

Étant donné un paramètre $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. On note $B_R(\xi)$ l'espace vectoriel associé à la fonction majorante φ_R et définie comme suit :

$$B_R(\xi) = \{u \in \mathbb{C}\{x\} : \exists c \geq 0, u \ll c\varphi_R(\xi.x)\}$$

avec

$$\xi.x = \sum_{i=0}^{n} \xi_i.x_i$$

***Proposition* 1.3.** *[16]*
Les espaces $B_R(\xi)$ muni de la norme

$$\|u\| = min\{c \geq 0 : u \ll c\varphi_R(\xi.x)\}$$

sont des Algèbres de Banach

Démonstration. Montrons d'abord que $B_R(\xi)$ est complet.
Soient $(u^n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_R(\xi)$ une suite de Cauchy, alors

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \in \mathbb{N} \text{ avec } p, q \leq n \text{ on a : } \|u^p - u^q\| \leq \varepsilon$$

ce qu'est équivalent à

$$\forall\alpha \in \mathbb{N}^n, |u^p_\alpha - u^q_\alpha| \leq \varepsilon\varphi_{R,\alpha}$$

d'après la complétude de $\mathbb{C}$

$$\forall\alpha \in \mathbb{N}^n, |u^p_\alpha - u_\alpha| \leq \varepsilon\varphi_{R,\alpha}$$

d'où

$$\forall\alpha \in \mathbb{N}^n, |u_\alpha| \leq |u^p_\alpha - u_\alpha| + |u^p_\alpha| \leq (\varepsilon + c)\varphi_{R,\alpha}$$

Ce qui prouve que u^n converge vers u dans $B_R(\xi)$
Pour montrer que $B_R(\xi)$ est une algèbre, soit $u, v \in B_R(\xi)$ d'où

$$u(x) \ll \|u\|\varphi_R(\xi.x) \text{ et } v(x) \ll \|v\|\varphi_R(\xi.x)$$

D'après (3) et la proposition 1.2 on a

$$u(x).v(x) \ll \|u\|\|v\|\varphi_R(\xi.x)$$

□

***Proposition* 1.4.** *[16]*
Soient $u \in B_R(\xi)$ et $R' > 0$ tels que $\|u\| < R'$, alors la fonction $\dfrac{R'}{R' - u}$ appartient à l'espace $B_R(\xi)$ et

$$\frac{R'}{R' - u} \ll \left(K + \frac{\|u\|}{R' - \|u\|}\right)\varphi_R(\xi.x)$$

Démonstration. Si $\|u\| < R'$, on a $u(0) \leq \|u\|\varphi_R(0) < R'$, car $\varphi_R(0) = K^{-1} < 1$ ça signifie avec la holomorphie de u que $\dfrac{R'}{R' - u}$ est bien définie et dérivable au voisinage de l'origine. En outre d'après la proposition 1.2 et le fait que $1 = K\varphi_R(0) \ll K\varphi_R(\xi.x)$

$$\begin{aligned}\frac{R'}{R'-u} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{u}{R'}\right)^n \qquad &\ll \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\|u\|}{R'}\right)^n \varphi_R^n(\xi.x)\\ &\ll 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\|u\|}{R'}\right)^n \varphi_R(\xi.x)\\ &\ll \left(K+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\|u\|}{R'}\right)^n\right)\varphi_R(\xi.x)\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{R'}{R'-u} \ll \left(K+\frac{\|u\|}{R'-\|u\|}\right)\varphi_R(\xi.x)$$

et

$$\frac{R'}{R'-u} \in B_R(\xi)$$

□

Évidemment, tout les fonctions de $B_R(\xi)$ sont holomorphes au voisinage de l'origine, pour montrer l'inclusion inverse sachant que ξ étant fixé et R suffisamment petit, on utilisera :

***Lemme* 1.1.** *[16]*
Pour tout $\eta > 1$, il existe une constante $c(\eta) > 0$ telle que

$$\frac{\eta R}{\eta R - t} \ll c(\eta)\varphi_R(t) \text{ pour tout } R>0 \text{ et } |t|<\eta R \tag{1.6}$$

Démonstration. L'inégalité 1.6 équivalente à

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\eta R}\right)^n \ll c(\eta)K^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{R^n(n+1)^2}$$

ce qui signifié

$$\frac{1}{(\eta R)^n} \leq c(\eta)K^{-1}\frac{1}{R^n(n+1)^2}$$

qui est vérifié pour

$$c(\eta) = \sup_{n\in\mathbb{N}} K\frac{(n+1)^2}{\eta^n}$$

□

***Proposition* 1.5.** *[16]*
Si u est une fonction holomorphe et bornée dans le polydisque

$$\Delta = \{x \in \mathbb{C}^n, \xi_i|x_i| < \eta R\}$$

alors

$$u \ll c(\eta) M \varphi_R(\xi.x) \text{ où } M = \sup_{x \in \Delta} |u(x)|$$

Démonstration. u étant holomorphe et bornée dans un voisinage de l'origine, donc on a d'après les inégalités de Cauchy 0.5

$$|D^\alpha u(0)| \leq M \frac{\xi^\alpha}{(\eta R)^{|\alpha|}} \alpha!, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad M = \sup_{x \in \Delta} |u(x)|$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{|D^\alpha u(0)|}{\alpha!} &\leq M \frac{\xi^\alpha}{(\eta R)^{|\alpha|}} \\
\Rightarrow \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{|D^\alpha u(0)|}{\alpha!} x^\alpha &\ll \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} M \frac{\xi^\alpha}{(\eta R)^{|\alpha|}} x^\alpha \\
&\ll M \sum_{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n} \frac{\xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}}{(\eta R)^{\alpha_1} \cdots (\eta R)^{\alpha_n}} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \\
&\ll M \left(\sum_{\alpha_1 \in \mathbb{N}^n} \frac{(x_1 \xi_1)^{\alpha_1}}{(\eta R)^{\alpha_1}} \right) \cdots \left(\sum_{\alpha_n \in \mathbb{N}^n} \frac{(x_n \xi_n)^{\alpha_n}}{(\eta R)^{\alpha_n}} \right) \\
&\ll M \prod_{i=1}^n \frac{\eta R}{\eta R - \xi_i x_i}
\end{aligned}$$

Considérons maintenant la fonction $\dfrac{\eta R}{\eta R - \xi.x}$ dont sa série de Taylor $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\xi.x}{\eta R} \right)^k$ converge dans le polydisque Δ. On a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\xi.x}{\eta R} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha \in \mathbb{N}^n}} \frac{|\alpha|! \xi^\alpha x^\alpha}{\alpha! (\eta R)^{|\alpha|}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{|\alpha|! \xi^\alpha x^\alpha}{\alpha! (\eta R)^{|\alpha|}}$$

Or pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a $\dfrac{|\alpha|!}{\alpha!} \geq 1$.Ce que signifie

$$\prod_{i=1}^n \frac{\eta R}{\eta R - \xi_i x_i} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\xi^\alpha x^\alpha}{(\eta R)^{|\alpha|}} \ll \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\xi.x}{\eta R} \right)^k = \frac{\eta R}{\eta R - \xi.x}$$

d'où

$$u \ll M \frac{\eta R}{\eta R - \xi.x} \ll c(\eta) M \varphi_R(\xi.x) \text{ d'apres le lemme 1.1}$$

□

On conclu que toute fonction u holomorphe et bornée dans le polydisque Δ appartient à l'espace $B_R(\xi)$ et par suite

$$\mathbb{C}\{x\} = \bigcup_{R>0} B_R(\xi)$$

***Lemme* 1.2.** *[16]*
Il existe une constante $c_{1,2} > 0$ telle que

$$D^{-k}\varphi_R(t) \ll c_{1,2}R^k\varphi_R(t) \text{ pour tout } R > 0 \text{ et tout } k \in \mathbb{N}$$

Démonstration. $D^{-k}\varphi_R(t)$ étant la primitive de $\varphi_R(t)$ qui s'annule avec t, donc

$$D^{-k}\varphi_R(t) = K^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}\frac{1}{R^n}\frac{n!}{(n+k)!}t^{n+k}$$

l'inégalité cherchée s'écrit :

$$\frac{1}{(n+1)^2}\frac{1}{R^n}\frac{n!}{(n+k)!} \leq c_{1,2}R^k\frac{1}{R^{n+k}(n+k+1)^2}$$

qui est équivalente à

$$\frac{(n+k+1)^2}{(n+1)^2}\frac{n!}{(n+k)!} \leq c_{1,2}$$

cette dernière fonction étant décroissante par rapport à n, il suffit de choisit

$$c_{1,2} = \sup_k \frac{(k+1)^2}{k!}$$

□

1.3 Démonstration du théorème 1.1

Par hypothèse il existe $\xi \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que

$$\rho(\xi) = \sum_{\substack{\beta\in B \\ |\beta|=0}} |A_\beta|\xi^\beta < 1;$$

où le paramètre ξ est ainsi fixé.
Dans la suite l'algèbre $B_R(\xi)$ sera notée simplement B_R.

***Proposition* 1.6.** *[16]*
Il existe des nombres $R_0 > 0$ et $a > 0$ tels que, pour tout $R \in]0, R_0]$, l'application

$$T : u \to f(x, D^B u(x)) \tag{1.7}$$

soit une contraction stricte dans la boule fermée $B'(0, a) = \{u \in B_R; \|u\| \le a\}$ de l'algèbre de Banach B_R.

Démonstration. D'après le lemme 0.1 on peut écrire

$$f(x, y) = f(x, 0) + \sum_{\beta \in B} A_\beta y_\beta + \sum_{\beta \in B} F_\beta(x, y) y_\beta \tag{1.8}$$

$$f(x, y) - f(x, z) = \sum_{\beta \in B} A_\beta (y_\beta - z_\beta) + \sum_{\beta \in B} G_\beta(x, y, z)(y_\beta - z_\beta) \tag{1.9}$$

les fonctions $f(x, 0), F_\beta(x, y)$ et $G_\beta(x, y, z)$ sont holomorphes au voisinages de l'origine de $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n+n'}$ et $\mathbb{C}^{n+2n'}$ respectivement et on a

$$f(0, 0) = F_\beta(0, 0) = G_\beta(0, 0, 0) = 0 \tag{1.10}$$

d'autre part étant donné $\eta > 1$, il existe $R_1 > 0$ et $R_1' > 0$ tels que ces fonctions soient holomorphes et bornées dans le polydisque

$$\Delta(R_1, R_1') = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^{n+2n'}; \xi_i |x_i| < \eta R_1, |y_\beta| < R_1', |z_\beta| < R_1'\}$$

pour tout $0 < R < R_1, 0 < R' < R_1'$, posons

$$\varepsilon_0(R) = \sup_{\Delta(R)} |f(x, 0)|, \text{ où } \Delta(R) = \{x \in \mathbb{C}^n, \xi_i |x_i| < \eta R\}$$

et

$$\varepsilon_0'(R, R') = \sup_\beta \sup_{\Delta(R, R')} (|F_\beta|, |G_\beta|)$$

On remarque d'après (1.10) que ces fonctions $\varepsilon_0(R)$ et $\varepsilon_0'(R, R')$ tendent vers zéro quand R et R' tendent zéro, et ainsi les fonctions $\varepsilon_1(R)$, $\varepsilon_2(R)$, $\varepsilon_3(R)$, $\varepsilon_1'(R, R')$, $\varepsilon'(R, R')$ et $\varepsilon''(R, R')$ qui apparaissent par la suite conservent la même propriété

D'après la proposition 1.5 on a

$$f(x, 0) \ll \varepsilon_1(R) \varphi_R(\xi.x) \qquad \text{tel que } \varepsilon_1(R) = c(\eta)) \varepsilon_0(R)$$

Comme $F_\beta(x, y)$ est holomorphe et bornée dans le polydisque $\Delta(R_1, R_1')$ donc d'après l'inégalité de Cauchy

$$|D_x^\alpha D_y^\delta F_\beta(0, 0)| \le M_\beta \frac{\xi^\alpha \alpha!}{(\eta R)^{|\alpha|}} \frac{\delta!}{R'^{|\delta|}} \text{ avec } M_\beta = \sup_{\Delta(R, R')} F_\beta(x, y)$$

ce que signifie que

$$\frac{|D_x^\alpha D_y^\delta F_\beta(0,0)|}{\alpha!\delta!}x^\alpha y^\delta \leq M_\beta \frac{\xi^\alpha x^\alpha}{(\eta R)^{|\alpha|}}\frac{y^\delta}{R'^{|\delta|}}$$

d'où

$$\begin{aligned} F_\beta(x,y) &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\sum_{\delta\in\mathbb{N}^{n'}}\frac{|D_x^\alpha D_y^\delta F_\beta(0,0)|}{\alpha!\delta!}x^\alpha y^\delta \\ &\ll \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\sum_{\delta\in\mathbb{N}^{n'}} M_\beta \frac{\xi^\alpha x^\alpha}{(\eta R)^{|\alpha|}}\frac{y^\delta}{R'^{|\delta|}} \\ &\ll M_\beta \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{\xi^\alpha x^\alpha}{(\eta R)^{|\alpha|}}\sum_{\delta\in\mathbb{N}^{n'}}\frac{y^\delta}{R'^{|\delta|}} \\ &\ll \varepsilon_1'(R,R')\varphi_R(\xi.x)\prod_{i=1}^{n'}\frac{R'}{R'-y_i} \end{aligned}$$

quand $c(\eta)M_\beta \leq c(\eta)\varepsilon_0'(R,R') = \varepsilon_1'(R,R')$ qui tend vers zéro quand R, R' tendent vers zéro

avec la même raisonnement on majore $G_\beta(x,y,z)$. finalement on a

$$\left\{\begin{array}{c} f(x,0) \ll \varepsilon_1(R)\varphi_R(\xi.x) \\ F_\beta(x,y) \ll \varepsilon_1'(R,R')\varphi_R(\xi.x)\prod_{\gamma\in B}\frac{R'}{R'-y_\gamma} \\ G_\beta(x,y,z) \ll \varepsilon_1'(R,R')\varphi_R(\xi.x)\prod_{\gamma\in B}\frac{R'}{R'-y_\gamma}\frac{R'}{R'-z_\gamma} \end{array}\right. \tag{1.11}$$

Cherchons tout d'abord des conditions suffisantes sur a et $R \in]0, R_1]$ pour lesquelles la boule $B'(0,a)$ sera invariante par l'opérateur T définie par (1.7) ceci équivalent à :

$$T(B'(0,a)) \subset B'(0,a)$$

Soit $u \in B'(0,a)$; d'après le lemme 1.2 on a pour tout $\beta \in B$

$$\begin{aligned} y_\beta = D^\beta u \ll aD^\beta(\varphi_R(\xi.x)) &\ll a\xi^\beta D^{|\beta|}\varphi_R(\xi.x) \\ &\ll \left\{\begin{array}{ll} a\xi^\beta\varphi_R(\xi.x) & si \quad |\beta| = 0 \\ a\varepsilon_2(R)\varphi_R(\xi.x) & si \quad |\beta| < 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_2(R) = c_{1,2}R^{-|\beta|}$
Si $a\xi^\beta \leq R'/2$ et $a\varepsilon_2(R) \leq R'/2$, c'est à dire si tout simplement $\|D^\beta u\| < R'/2$, alors la proposition 1.4 montre que

$$\frac{R'}{R'-D^\beta u} \ll c_1\varphi_R(\xi.x) \quad \text{tel que } c_1 = \left(K + \frac{\|D^\beta u\|}{R' - \|D^\beta u\|}\right) \leq (K+1)$$
$$\Rightarrow \prod_{\beta\in B} \frac{R'}{R'-D^\beta u} \ll c_1^{n'}\varphi_R(\xi.x) \quad (n' = CardB)$$

D'après (1.8) , (1.11) et la proposition 1.2 , on a donc

$$\begin{aligned} Tu = f(x, D^B u(x)) &= f(x,0) + \sum_{\beta\in B} A_\beta D^\beta u + \sum_{\beta\in B} F_\beta(x,y) D^\beta u \\ &= f(x,0) + \sum_{\substack{\beta\in B\\|\beta|=0}} A_\beta D^\beta u + \sum_{\substack{\beta\in B\\|\beta|<0}} A_\beta D^\beta u + \sum_{\beta\in B} F_\beta(x,y)D^\beta u \\ &\ll [\varepsilon_1(R) + a(\rho(\xi) + \varepsilon'(R,R'))]\varphi_R(\xi.x) \end{aligned}$$

Tels que

$$\sum_{\substack{\beta\in B\\|\beta|=0}} A_\beta D^\beta u \ll a\rho(\xi)\varphi_R(\xi.x)$$
$$\sum_{\substack{\beta\in B\\|\beta|<0}} A_\beta D^\beta u \ll (\sum_{\substack{\beta\in B\\|\beta|<0}} A_\beta \varepsilon_2(R)) a\varphi_R(\xi.x)$$

et

$$\varepsilon'(R,R') = c_1^{n'} n' \varepsilon_1'(R,R') \max(\xi^\beta, c_{1,2}R^{-|\beta|}) + \sum_{\substack{\beta\in B\\|\beta|<0}} A_\beta\varepsilon_2(R)$$

finalement l'inclusion $T(B'(0,a)) \subset B'(0,a)$ est satisfaite pour

$$\left\{ \begin{array}{c} a \leq cR', \qquad a\varepsilon_3(R) \leq R' \\ \varepsilon_1(R) + a(\rho(\xi) + \varepsilon'(R,R')) \leq a \end{array} \right. \tag{1.12}$$

Quand $c = (2\xi^\beta)^{-1}$ et $\varepsilon_3(R) = 2\varepsilon_2(R) = 2c_{1,2}R^{-|\beta|}$
Écrivons ensuite les conditions pour que T soit une contraction stricte.
Soient $u, u' \in B'(0,a)$; les conditions (1.12) étant supposées réalisées, on a

$$\frac{R'}{R'-y_\gamma} \ll c_1\varphi_R(\xi.x) \quad \text{et} \quad \frac{R'}{R'-z_\gamma} \ll c_1\varphi_R(\xi.x)$$

avec

$$y_\gamma = D^\gamma u, \quad z_\gamma = D^\gamma u', \quad \gamma \in B$$

et

$$y_\beta - z_\beta = D^\beta(u-u') \ll \begin{cases} \|u-u'\|\xi^\beta\varphi_R(\xi.x) & si|\beta| = 0 \\ \|u-u'\|\varepsilon_2(R)\varphi_R(\xi.x) & si|\beta| < 0 \end{cases}$$

D'après (1.9) , (1.11) et la proposition 1.2 , on a donc

$$\begin{aligned} Tu - Tu' = f(x, D^\beta u) - f(x, D^\beta u') &= \sum_{\beta\in B} A_\beta(D^\beta u - D^\beta u') + \sum_{\beta\in B} G_\beta(x,y,z)(D^\beta u - D^\beta u') \\ &= \sum_{\substack{\beta\in B \\ |\beta|=0}} A_\beta(D^\beta(u-u')) + \sum_{\beta\in B} G_\beta(x,y,z)(D^\beta(u-u')) \\ &\ll \|u-u'\|[\rho(\xi) + \varepsilon''(R,R')]\varphi_R(\xi.x) \end{aligned}$$

tel que $\varepsilon''(R,R') = c_1^{2n'} n'\varepsilon_1'(R,R')\max(\xi^\beta, c_{1,2}R^{-|\beta|}) + \sum_{\substack{\beta\in B \\ |\beta|<0}} A_\beta\varepsilon_2(R)$

Soient $\rho(\xi) < \rho < 1$, $\varepsilon(R,R') = \max(\varepsilon'(R,R'), \varepsilon''(R,R'))$ pour que T soit une contraction stricte, il suffit que

$$\rho(\xi) + \varepsilon(R,R') \leq \rho$$

En résumé, il suffit d'avoir les inégalités

$$\begin{cases} a \leq cR', \qquad a\varepsilon_3(R) \leq R'. \\ \rho(\xi) + \varepsilon(R,R') \leq \rho. \\ \varepsilon_1(R) \leq (1-\rho)a. \end{cases}$$

On procède comme suit :
comme $\rho - \rho(\xi) > 0$ et $\varepsilon(R,R') = \max(\varepsilon'(R,R'), \varepsilon''(R,R'))$ tels que

$$\varepsilon'(R,R') = c_1^{n'} n' c(\eta)\max(\xi^\beta, c_{1,2}R^{-|\beta|})\left(\sup_\beta \sup_{\Delta(R,R')}(|F_\beta|, |G_\beta|)\right) + \sum_{\substack{\beta\in B \\ |\beta|<0}} A_\beta c_{1,2}R^{-|\beta|}$$

$$\varepsilon''(R,R') = c_1^{2n'} n' c(\eta)\max(\xi^\beta, c_{1,2}R^{-|\beta|})\left(\sup_\beta \sup_{\Delta(R,R')}(|F_\beta|, |G_\beta|)\right) + \sum_{\substack{\beta\in B \\ |\beta|<0}} A_\beta c_{1,2}R^{-|\beta|}$$

Alors il existe $R_2 \in]0, R_1]$ et $R' \in]0, R_1']$ tel que

$$\rho(\xi) + \varepsilon(R,R') \leq \rho \text{ pour tout } R \in]0, R_2]$$

R' étant ainsi fixé, on choisit a tel que $0 < a \leq cR'$ ($c = (2\xi^\beta)^{-1}$), puis $R_0 \in]0, R_2]$ assez petit pour que

$$a\varepsilon_3(R) \leq R', \quad \varepsilon_1(R) \leq (1-\rho)a \text{ pour tout } R \in]0, R_0]$$

□

La proposition précédente prouve le théorème d'existence ; elle prouve également l'unicité.

En effet, si u et u' sont deux fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^n$ telles que $u = f(x, D^B u)$, $u' = f(x, D^B u')$, on a $u(0) = u'(0) = f(0,0) = 0$ donc d'après la proposition 1.5 on tire $u \ll \varepsilon_1(R)\varphi_R(\xi.x)$, et de même $u' \ll \varepsilon_1(R)\varphi_R(\xi.x)$, pour tout $R > 0$ suffisamment petit. En particulier on peut choisir $R \in]0, R_0]$ tel que $\varepsilon_1(R) \leq a$ et ceci prouve que u et u' sont deux point fixes de la contraction stricte T, on conclu l'égalité partout de u et u' d'après le principe de prolongement analytique 0.6.

2 Problème de Goursat Carleman

"C'est une erreur de croire que la rigueur dans une démonstration est l'ennemie de la simplicité... L'effort même de la rigueur nous force à découvrir les méthodes de démonstration les plus simples."

– David Hilbert

2.1 L'espaces de Carleman

***Définition* 2.1.** Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante positive et $\alpha \in \mathbb{N}^p$, on note $C^{\alpha,M}(\Omega)$ l'espace des fonctions $u : \Omega \to \mathbb{R}$, admettant $\forall\gamma \in \mathbb{N}^p$ $\gamma \leq \alpha$ et $\forall\delta \in \mathbb{N}^q$ des dérivées partielles continues

$$D_x^\gamma D_y^\delta u : \Omega \to \mathbb{R}$$

telles que $\exists c > 0$:

$$\sup_\Omega |D_x^\gamma D_y^\delta u(x,y)| \leq c^{|\delta|+1}\delta! M_{|\delta|}, \quad \forall\gamma \leq \alpha \text{ et } \forall\delta \in \mathbb{N}^q$$

La suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ considérée doit satisfaire les hypothèses suivantes :

1. $M = (M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ logarithmiquement convexe, c'est à dire $k \to \log(M_k)$ convexe

$$i.e.\ M_k^2 \leq M_{k-1}M_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

et $M_0 = 1$

2.

$$\sup_k \left(\frac{M_{k+1}}{M_k}\right)^{\frac{1}{k}} < \infty, \quad k \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

Remarque 2.1. Les hypothèses (2.1) et (2.2) sont vérifiées pour $M_k = k!^d, \forall d \geq 1$.
En effet :

- ▶ grâce aux propriétés du factorielle on a $k!^2 = (k-1)!kk! \leq (k-1)!(k+1)!$
- ▶ $\left(\dfrac{(k+1)!^d}{k!^d}\right)^{\frac{1}{k}} = (k+1)^{\frac{d}{k}} = e^{\frac{d}{k}\log(k+1)}$ qui tend vers 1 quand k tend vers l'infini

Ils existent aussi d'autres exemples ; Comme :

- $(M_k)_{k\in N}$ tel que $M_k = a^k$ pour $a \neq 0$
- $(M_k)_{k\in N}$ tel que $M_k = k^k$
- $(M_k)_{k\in N}$ tel que $M_k = e^{k\ln\ln(k+e)}$
- $(M_k)_{k\in N}$ tel que $M_k = e^{k\overbrace{\ln\cdots\ln}^{m\text{fois}}(k+e)} \quad \forall m \in \mathbb{N}$
- $(M_k)_{k\in N}$ tel que $M_k = \dfrac{(k\ln(k+e))^k}{k!}$

On remarque aussi que toute combinaison de suites de ce type possède les propriétées (2.1) et (2.2).
En effet, soient $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suite croissantes positives vérifient (2.1) et (2.2) alors

- ▶ $(M_kN_k)^2 = M_k^2N_k^2 \leq M_{k-1}M_{k+1}N_{k-1}N_{k+1} \leq M_{k-1}N_{k-1}M_{k+1}N_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ et $M_0N_0 = 1$
- ▶ $\sup\limits_k(\dfrac{M_{k+1}N_{k+1}}{M_kN_k})^{\frac{1}{k}} < \sup\limits_k(\dfrac{M_{k+1}}{M_k})^{\frac{1}{k}} \sup\limits_k(\dfrac{N_{k+1}}{N_k})^{\frac{1}{k}} < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Lemme 2.1. *Si $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ logarithmiquement convexe et $M_0 = 1$,alors*

$$M_jM_k \leq M_{j+k}\ \forall j, k \in \mathbb{N}$$

Démonstration. Par récurrence sur k :
Pour $k = 0$, on a $M_jM_0 = M_j \leq M_{j+0}$
Supposons maintenant qu'elle est vraie pour k.
d'apres (2.1) la suite $\left(\dfrac{M_{n+1}}{M_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. D'où

$$\begin{aligned}
M_jM_{k+1} &= M_jM_k\frac{M_{k+1}}{M_k} \\
&\leq M_{j+k}\frac{M_{k+1}}{M_k} \\
&\leq M_{j+k}\frac{M_{k+2}}{M_{k+1}} \\
&\vdots \\
&\leq M_{j+k}\frac{M_{k+j+1}}{M_{k+j}} = M_{k+j+1}
\end{aligned}$$

$\square$

Lemme 2.2. *[5] Si $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ logarithmiquement convexe et $M_0 = 1$, alors*

$$M_n M_{\alpha_1} \cdots M_{\alpha_n} \leq M_1^n M_k \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{N}^*, \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$$

Démonstration. Par récurrence sur k :

- Si $n = k$, l'inégalité est évidente.
- Si $n < k$, alors $\exists i$ tel que $\alpha_i \geq 2$, on pose $\alpha_i' = \alpha_i - 1$; l'hypothèse de récurrence sera :

$$M_n M_{\alpha_1} \cdots M_{\alpha_i'} \cdots M_{\alpha_n} \leq M_1^{k-1} M_{k-1}$$

d'après (2.1) on a :

$$\begin{aligned} M_n M_{\alpha_1} \cdots M_{\alpha_n} &= M_n M_{\alpha_1} \cdots M_{\alpha_i'} \cdots M_{\alpha_n} \frac{M_{\alpha_i}}{M_{\alpha_i'}} \\ &\leq M_1^{k-1} M_{k-1} \frac{M_k}{M_{k-1}} \\ &\leq M_1^k M_k \end{aligned}$$

$\square$

Dans tout ce qui suit la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ considérée vérifie les hypothèses (2.1) et (2.2).

2.2 Hypothèses et Résultats

On s'intéresse au problème de Goursat non linéaire au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, On cherche à prouver l'existence et l'unicité d'une solution de type Carleman associé à la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On considère alors le problème de Goursat non linéaire au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $x = (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $y = (y_1, \cdots, y_q) \in \mathbb{R}^q$

$$\begin{cases} D_x^\alpha u(x,y) = f(x, y, D^B u(x,y)), \\ u = O(x^\alpha) \end{cases} \tag{2.3}$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^p$, et B est une partie finie de

$$\{(\gamma, \delta) \in \mathbb{Z}^p \times \mathbb{N}^q ; |\gamma| + |\delta| < |\alpha|\}$$

$D^B u = (D_x^\gamma D_y^\delta u)_{(\gamma,\delta)\in B}$

f est une fonction de $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, $z \in \mathbb{R}^r$ où $r = Card(B)$, qu'on suppose de classe $C^{0,M}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q+r}$; f est donc continue en x et de classe Carleman C^M en (y, z)

***Théorème* 2.2.** *Si de plus des hypothèses (2.1) et (2.2) il existe une constante* $c_{\gamma,\delta} \geq 0$ *tel que :*

$$\frac{M_{k+|\delta|}}{M_k} \frac{(k+|\delta|)!}{(k-|\gamma|+|\alpha|)!} \leq c_{\gamma,\delta} \quad \forall k \geq 0 \tag{2.4}$$

Alors le problème de Goursat (2.3) admet une solution unique au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$

Remarque 2.2. Lorsque $M_n = n!^{d-1}$ ce théorème coïncide avec le théorème 5.1 dans [16] ; dans ce même cas si $d = 1$ le théorème 2.2 est contenu dans le théorème 4.1 du même référence

en effet $M_n = n!^{d-1}$ on a $\forall k \geq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{(k+|\delta|)!^{d-1}}{k!^{d-1}} \frac{(k+|\delta|)!}{(k-|\gamma|+|\alpha|)!} &= \frac{(k+|\delta|)^{d-1}\cdots(k+1)^{d-1}}{(k-|\gamma|+|\alpha|)\cdots(k+|\delta|+1)} \\
&\leq \frac{(k+|\delta|)^{(d-1)|\delta|}}{(k+|\delta|)^{-|\gamma|-|\delta|+|\alpha|}} \\
&\leq 1 \quad (\text{ si } |\gamma| + d|\delta| \leq |\alpha|)
\end{aligned}$$

Remarque 2.3. On peut ajouter avec les cas holomorphes et Gevrey cités dans la remarque précédente d'autres exemples comme :

- $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $M_n = a^n$, $\forall a > 1$
- $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $M_n = \ln(n+e)$

qui satisfont la condition (2.4) du théorème 2.2

- $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $M_n = a^n \ln(n+e) n!^{d-1}$, $\forall a > 1$

qui satisfait la condition (2.4) du théorème 2.2 si $|\gamma| + d|\delta| \leq |\alpha|$

Remarque 2.4. si la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou la suite $(\frac{M_{n+1}}{M_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée on retrouve le cas holomorphe par rapport à y.
En effet, si $u \in C^{\alpha,M}(\Omega)$ alors

$\forall \gamma \leq \alpha$ et $\forall \delta \in \mathbb{N}^q, \exists c > 0, \exists c_4 > 1$ tel que

- Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$est bornée :

$$\sup_{\Omega} |D_x^\gamma D_y^\delta u(x,y)| \leq c^{|\delta|+1} \delta! M_{|\delta|} \leq (cc_4)^{|\delta|+1} \delta!$$

d'autre part

- Si $(\frac{M_{n+1}}{M_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée :

$$\begin{aligned}\sup_{\Omega}|D_x^\gamma D_y^\delta u(x,y)| &\leq c^{|\delta|+1}\delta! M_{|\delta|}\\ &\leq c^{|\delta|+1}\delta!\frac{M_{|\delta|}}{M_{|\delta|-1}}\cdots\frac{M_2}{M_1}\frac{M_1}{M_0}M_0\\ &\leq c^{|\delta|+1}\delta! c_4^{|\delta|+1}\\ &\leq (cc_4)^{|\delta|+1}\delta!\end{aligned}$$

Pour prouver le théorème 2.2 on peut supposer $\alpha = 0$ et $f(0,0) = 0$; il s'agit donc d'étudier le problème

$$u(x,y) = f(x,y,D^B u(x,y)) \tag{2.5}$$

et B est un sous ensemble finie de

$$\{(\gamma,\delta)\in\mathbb{Z}^p\times\mathbb{N}^q; |\gamma|+|\delta|<0\}$$

et la condition (2.4) devient

$$\frac{M_{k+|\delta|}}{M_k}\frac{(k+|\delta|)!}{(k-|\gamma|)!}\leq c_{\gamma,\delta}\quad \forall k\geq 0 \tag{2.6}$$

Nous allons vérifier que l'application

$$T : u \to f(x,y,D^B u(x,y))$$

est une contraction stricte dans une boule fermée d'une algèbre de Banach, qui sera définie dans le paragraphe suivant en utilisant des séries formelles de type Carleman

2.3 Séries Formelles

Considérons d'abord une série formelle à q indéterminées $y = (y_1, \cdots, y_q)$:

$$\Phi = \sum_{\delta\in\mathbb{N}^q}\frac{y^\delta}{\delta!}\Phi_\delta$$

Étant donné un ouvert Ω de $\mathbb{R}^q$ et une fonction $u\in\mathcal{C}^\infty(\Omega,\mathbb{R})$. on note $u \ll \Phi$ la relation

$$\forall\delta\in\mathbb{N}^q,\quad \sup_{\Omega}|D_y^\delta u|\leq\Phi_\delta$$

On a bien

$$u \ll \Phi \Rightarrow D_y^\delta u \ll D_y^\delta \Phi \text{ pour tout } \delta \in \mathbb{N}^q$$

De plus, ce formalisme sera bien adapté pour majorer une fonction composée, Soient Ω' un ouvert de $\mathbb{R}^r$, $u = (u_i)_{1\leq i\leq r} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^r)$ tels que $u(\Omega) \subset \Omega'$; Si

$$u_i \ll \Phi_i \text{ pour} 1 \leq i \leq r \quad \text{ et } \quad v \ll \Psi$$

donc on a

$$v \circ u \ll \Psi([\Phi_1], \cdots, [\Phi_r]).$$

Étant donné un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$.
Notons $\mathcal{C}^{0,\infty}(\mathcal{U} \times \Omega)$ l'algèbre des fonctions $u : \mathcal{U} \times \Omega \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles continues par rapport à y

$$D_y^\delta u : \mathcal{U} \times \Omega \to \mathbb{R}, \quad \forall \delta \in \mathbb{N}^p$$

Pour assurer que les coefficients de y dans Φ ne prennent que des valeurs positives. Posons $t = |x| = (|x_1|, \cdots, |x_p|)$; notons $|\mathcal{U}|$ l'image de $\mathcal{U}$ par l'application $x \to |x|$ considérons la séries formelle en y :

$$\Phi \equiv \Phi(t, y) = \sum_{\delta\in\mathbb{N}^q} \frac{y^\delta}{\delta!} \Phi_\delta(t)$$

où les fonctions $\Phi_\delta : |\mathcal{U}| \to \mathbb{R}_+$ sont continues.

On considère alors le sous espace

$$\mathcal{C}_\Phi^{0,\infty}(\mathcal{U} \times \Omega) = \{u \in \mathcal{C}^{0,\infty}(\mathcal{U} \times \Omega); \exists c \geq 0 : u \ll c\Phi\}$$

et on le munit de la norme

$$\|u\| = \|u\|_\Phi = \min\{c \geq 0; u \ll c\Phi\}$$

Remarque 2.5. Dire que $u \in \mathcal{C}_\Phi^{0,\infty}$ signifie donc

$$\forall \delta \in \mathbb{N}^q, \forall x \in \mathcal{U}, \sup_\Omega |D_y^\delta u(x, y)| \leq \|u\|\Phi_\delta(t) \quad (\text{où } t = |x|) \tag{2.7}$$

***Proposition* 2.1.** *[16]*
L'espace $\mathcal{C}_\Phi^{0,\infty}$ *est un espace de Banach*

Démonstration. On a bien l'espace $\mathcal{C}^{0,\infty}(\mathcal{U} \times \Omega)$ muni de la topologie de la convergence compacte de toutes les dérivées D_y^δ ($\delta \in \mathbb{N}^q$) est complet, en outre c'est un espace de Fréchet,et l'inégalité suivante :

$$\sup_K \sup_\Omega |D_y^\delta u(x,y)| \leq \|u\|_\Phi \sup_{|K|} \Phi_\delta(t)$$

pour tout compacte $K \subset \mathcal{U}$, signifie que l'injection canonique de $\mathcal{C}_\Phi^{0,\infty}$ dans $\mathcal{C}^{0,\infty}$ est continue.

soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}_\Phi^{0,\infty}$, d'après l'injection précédente elle converge donc dans $\mathcal{C}^{0,\infty}$ vers $u \in \mathcal{C}^{0,\infty}$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|u_p - u_q\|_\Phi \leq \varepsilon \text{ pour tout } p, q \geq n$$

c'est à dire

$$\sup_\Omega |D_y^\delta u_p - D_y^\delta u_q| \leq \varepsilon \Phi_\delta \text{pour tout } \delta \in \mathbb{N}^q$$

en faisant tendre p vers l'infini, on a

$$\sup_\Omega |D_y^\delta u| \leq \sup_\Omega |D_y^\delta u - D_y^\delta u_q| + \sup_\Omega |D_y^\delta u_q| \leq \varepsilon \Phi_\delta + \|u_q\|_\Phi \Phi_\delta$$

donc $u \in \mathcal{C}_\Phi^{0,\infty}$ et la suite (u_n) converge vers u dans $\mathcal{C}_\Phi^{0,\infty}$

□

Dans ce qui suit, on va prendre des primitives par rapport à x_i, et pour faciliter le travail on ajoute l'hypothèse

$$x \in \mathcal{U} \Rightarrow \lambda x \in \mathcal{U} \text{ pour tout } \lambda \in [0,1]^p \tag{2.8}$$

où $\lambda x = (\lambda_1 x_1, \cdots, \lambda_p)$, et évidemment $|\mathcal{U}|$ conserve la même propriété

Pour $(\gamma, \delta) \in (-\mathbb{N})^p \times (\mathbb{N})^q$, on définit la série formelle

$$D_t^\gamma D_y^\delta \Phi(t,y) = \sum_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{N}^q \\ \varepsilon \geq \delta}} \frac{y^{\varepsilon - \delta}}{(\varepsilon - \delta)!} D_t^\gamma \Phi_\varepsilon(t), \qquad t \in |\mathcal{U}|$$

tel que $D_{t_i}^{-1}$ désigne la primitive par rapport à t_i qui s'annule avec t_i

On a alors : pour tout $u \in \mathcal{C}_\Phi^{0,\infty}(\mathcal{U} \times \Omega)$ et pour tout $(\gamma, \delta) \in (-\mathbb{N})^p \times (\mathbb{N})^q$ on a

$$D_t^\gamma D_y^\delta u \leq \|u\|_\Phi D_t^\gamma D_y^\delta \Phi \tag{2.9}$$

Considérons la série formelle dépendant de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et des paramètres

$$\xi = (\xi_i)_{1\leq i\leq p} \in (\mathbb{R}_+^*)^p, \qquad \zeta = (\zeta_i)_{1\leq i\leq q} \in (\mathbb{R}_+^*)^q \text{ et } R > 0$$

suivante

$$\Phi_R^M(t,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta.y)^k}{k!} M_k D^k \phi_R(\xi.t) \tag{2.10}$$

où $\xi.t = \sum_{i=1}^{p} \xi_i t_i$, $\zeta.y = \sum_{i=1}^{q} \zeta_i y_i$; cette série formelle est bien définie pour

$$t \in |\mathcal{U}_R| \quad \text{où} \quad |\mathcal{U}_R| = \{x \in \mathbb{R}^p ; \xi|x| < R\}$$

L'espace de Banach associé à la série formelle Φ_R^M sera noté $C_R^M(\Omega_R)$ avec $\Omega_R = \mathcal{U}_R \times \Omega$

$$i.e.\ C_R^M(\Omega_R) = \{u \in \mathcal{C}^{0,\infty}(\Omega_R); \exists c \geq 0 : u \ll c\Phi_R^M\}$$

Notons que

$$\frac{(\zeta.y)^k}{k!} = \sum_{\substack{\delta\in\mathbb{N}^q \\ |\delta|=k}} \frac{\zeta^\delta y^\delta}{\delta!} \text{binôme de Newton généralisé} \tag{2.11}$$

D'après 2.7 et (2.11) on peut redéfinir les éléments de $C_R^M(\Omega_R)$ comme suit

$$u \in C_R^M(\Omega_R) \Leftrightarrow \forall\delta \in \mathbb{N}^q, \forall x \in \mathcal{U}, \sup_{\Omega} |D_y^\delta(x,y)| \leq \|u\| \zeta^\delta M_{|\delta|} D^{|\delta|} \phi_R(\xi.t) \tag{2.12}$$

Remarque 2.6. On obtient Φ_R^M en faisant un développement de Taylor de la fonction $y \to \phi_R(\xi.t + \zeta.y)$ ensuite en lui appliquant l'opérateur C suivant

$$C\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k M_k X^k$$

Indiquons maintenant les relations entre $C^{0,M}$ et C_R^M

Lemme 2.3. *Pour* $0 < R' < R$ *on a*

$$C_R^M(\Omega_R) \subset C^{0,M}(\Omega_{R'})$$

Démonstration. Soit $u \in C_R^M(\Omega_R)$ d'après (2.12), on a

$$\begin{aligned}\sup_{\Omega} |D_y^{\delta}(x,y)| &\leq \|u\|\zeta^{\delta} M_{|\delta|} D^{|\delta|}\phi_R(\xi.t)\\ &\leq c^{|\delta|+1} M_{|\delta|} D^{|\delta|}\phi_R(\xi.t)\end{aligned}$$

où $c = \max(\|u\|, \max_{1\leq i\leq q}\{\xi_i\})$.
d'après l'analycité de la fonctions ϕ_R sur $]-R,R[$, si $0 < R' < R$ il existe une constante $c_1 \geq$ telle que

$$|D^k\phi_R(s)| \leq c_1^{k+1}k! \quad \text{pour } |s| \leq R'$$

on substitue ceci dans l'inégalité précédente on obtient

$$\sup_{\Omega} |D_y^{\delta}(x,y)| \leq (cc_1)^{|\delta|+1}|\delta|!M_{|\delta|} \quad \text{pour } x \in \mathcal{U}_{R'}$$

c'est-à-dire $u \in C^{0,M}(\Omega_{R'})$ □

Pour établir l'inclusion inverse, on utilise la version Carleman du lemme 1.1 et une série formelle Θ_R^M définie par :

$$\Theta_R^M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{R^k} M_k \tag{2.13}$$

Lemme 2.4. *Pour tout $\eta > 1$, il existe une constante $c = c(\eta) > 0$ telle que*

$$\Theta_{\eta R}^M(\zeta.y) \ll c\Phi_R^M(t,y)$$

Démonstration. On commence par établir l'inégalité suivante

$$\Theta_{\eta R}^M(\zeta.y) \ll c\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta.y)^k}{k!} M_k D^k\phi_R(0)$$

Notons que

$$D^k\phi_R(0) = K^{-1}\frac{k!}{R^k(k+1)^2}$$

donc l'inégalité devient chercher c telle que

$$c \geq \frac{K(k+1)^2}{\eta^k}$$

qui est vérifié pour

$$c(\eta) = \sup_{n\in\mathbb{N}} K\frac{(n+1)^2}{\eta^n}$$

d'où

$$\Theta^M_{\eta R}(\zeta.y) \ll c\Phi^M_R(0,y) \ll c\Phi^M_R(t,y)$$

ce qui achève la démonstration.

□

Lemme 2.5. *Si* $c\eta R \leq \min_{1\leq i\leq p} \zeta_i$ *; Alors*

$$C^{0,M}(\Omega_R) \subset C^M_R(\Omega_R)$$

où c est la constante du lemme 2.4

Démonstration. Soit $u \in C^{0,M}(\Omega_R)$, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathcal{U}_R$

$$\begin{aligned}\sup_{\Omega} |D^\delta_y(x,y)| &\leq c^{|\delta|+1}|\delta|!M_{|\delta|} \\ &\leq c\frac{\zeta^\delta}{(\eta R)^{|\delta|}}|\delta|!M_{|\delta|}\end{aligned}$$

ce qui signifie que $\forall x \in \mathcal{U}_R, u(x,y) \ll c\Theta^M_{\eta R}(\zeta.y)$

et d'après le lemme précédente on a pour tout $x \in \mathcal{U}_R$

$$u(x,y) \ll c\Theta^M_{\eta R} \ll c\Phi^M_R(t,y)$$

□

On aura besoin de quelques propriétés de l'espace C^M_R qu'on va étudier.

Pour toute série formelle

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$$

on pose

$$[\phi] = \phi - \phi(0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X^k \quad \text{et} \quad \phi^M = \sum_{k=0}^{\infty} a_k M_k X^k$$

On a alors

Lemme 2.6. *Soit* $\phi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ *une série formelle* $\gg 0$ *telle que* $\phi^2 \ll \phi$. *on a*

$$(\phi^M)^2 \ll \phi^M \tag{2.14}$$

$$[\phi^M]^n \ll \frac{M_1^n}{M_n}[\phi^M] \text{ pour tout } n \geq 1 \tag{2.15}$$

Démonstration. de (2.14)

d'après le produit de Cauchy il s'agit de vérifier que

$$\sum_{i=0}^{k} a_i a_{k-i} M_i M_{k-i} \leq a_k M_k$$

d'après 2.1 la suite (M_n) vérifie $M_i M_{k-i} \leq M_k$ donc ça revient à prouver

$$\sum_{i=0}^{k} a_i a_{k-i} \leq a_k$$

ce qui est vérifié d'après l'hypothèse ($\phi^2 \ll \phi$) □

Démonstration. de (2.15) On a

$$[\phi^M]^n = \sum_{k=n}^{\infty} X^k (\sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{N}^*)^n \\ |\alpha| = k}} a_\alpha \mathcal{M}_\alpha) \quad \text{où} \quad a_\alpha = \prod_{i=1}^{n} a_{\alpha_i}, \mathcal{M}_\alpha = \prod_{i=1}^{n} M_{\alpha_i}$$

d'après le lemme 2.2

$$\mathcal{M}_\alpha = \prod_{i=1}^{n} M_{\alpha_i} \leq \frac{M_1^n}{M_n} M_k \quad \text{telle que} \quad k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

reste à vérifier que

$$\sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{N}^*)^n \\ |\alpha| = k}} a_\alpha \leq a_k$$

ce qui est vraie, en effet $[\phi] \ll \phi$ d'où $[\phi]^2 \ll \phi^2$ ce qui prouve que $[\phi]^2 \ll [\phi]$ d'où $[\phi]^n \ll [\phi]$ ce qui prouve bien l'inégalité voulue

□

Comme étant donné pour tout $t \in |\mathcal{U}_R| \quad \phi_R^2(\xi.t + \zeta.y) \ll \phi_R(\xi.t + \zeta.y)$, on peut appliquer le lemme précédent à la série formelle Φ_R^M

Grâce à la propriété (2.15), qui peut majorer la composée de deux fonctions de classe de Carlaman. On a donc :

***Corollaire* 2.1.** *Les espaces $C_R^M(\Omega_R)$ sont des algèbres de Banach.*

Démonstration. La démonstration est un résultat direct des propositions 0.1, 2.1 et de l'inégalité (2.14) □

***Corollaire* 2.2.** *Pour $0 \leq cM_1 < R'$, on a*

$$\Theta_{R'}^M \circ [c\Phi_R^M] \ll \max(K, \frac{cM_1}{R' - cM_1})\Phi_R^M$$

Démonstration. D'après (2.15) du lemme 2.6 on a

$$\begin{aligned}\Theta_{R'}^M \circ [c\Phi_R^M] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{R'^n} M_n [\Phi_R^M]^n &\ll 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(cM_1)^n}{R'^n} [\Phi_R^M] \\ &\ll 1 + \frac{cM_1}{R' - cM_1} [\Phi_R^M] \\ &\ll \max(K, \frac{cM_1}{R' - cM_1})\Phi_R^M\end{aligned}$$

car

$$1 = K\phi_R(0) \ll K\phi_R(\xi.t) = K\Phi_R^M(t, 0)$$

ce qui termine la démonstration. □

***Théorème* 2.3.** *[13]*
Soit $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite logarithmiquement convexe, I un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, alors il existe une fonction $\nu(x) \in C^M(I)$ telle que $|\nu^{(k)}(0)| \geq k!M_k$ pour $k \in \mathbb{N}$

Démonstration. Voir le théorème 1 dans [13] ou bien la proposition 3.1.2 dans [12] □

***Corollaire* 2.3.** *Il exist une fonction $g \in C^{0,M}(\Omega_R)$ telle que $|D_y^\delta g(0, 0)| \geq \delta!M_{\delta_1} M_{\delta_2} \cdots M_{\delta_q}, \forall \delta \in \mathbb{N}^q$.*

Démonstration. Pour I convenablement choisit
Considérons $g(x, y) = \nu(y_1)\nu(y_2)\cdots\nu(y_q)$, on a bien $g \in C^{0,M}(\Omega_R)$ en effet $\forall x \in \mathcal{U}_\mathcal{R}$ on a

$$\begin{aligned}\sup_\Omega |D_y^\delta g(x, y)| &= \sup_\Omega |\nu^{(\delta_1)}(y_1)\nu^{(\delta_2)}(y_2)\cdots\nu^{(\delta_q)}(y_q)| \\ &\leq \left(c^{\delta_1+1}\delta_1!M_{\delta_1}\right)\left(c^{\delta_2+1}\delta_2!M_{\delta_2}\right)\cdots\left(c^{\delta_q+1}\delta_q!M_{\delta_q}\right) \\ &\leq c^{|\delta|+q}\delta!M_{|\delta|} \\ &\leq (\max(c^q, c))^{|\delta|+1}\delta!M_{|\delta|}\end{aligned}$$

et

$$|D_y^\delta g(0, 0)| = |\nu^{(\delta_1)}(0)\nu^{(\delta_2)}(0)\cdots\nu^{(\delta_q)}(0)| \geq \delta!M_{\delta_1} M_{\delta_2} \cdots M_{\delta_q}, \forall \delta \in Nq$$

□

Proposition 2.2. *[13]*
L'espace $C^{0,M}(\Omega_R)$ est stable par dérivation par rapport à la deuxième variable y si et seulement si l'hypothèse (2.2) est vérifiée

Démonstration. Supposons que $\sup_k \left(\frac{M_{k+1}}{M_k}\right)^{\frac{1}{k}}$ n'est pas borné.
On choisit une fonction g comme dans 2.3, alors la stabilité de l'espace $C^{0,M}(\Omega_R)$ par dérivation par rapport à la deuxième variable y implique qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\forall \delta, \delta' \in \mathbb{N}^q$ avec $\delta = (\delta'_1, \cdots, \delta'_i+1, \cdots, \delta'_q)$ où i arbitraire, on a

$$\frac{|D_y^\delta g(x,y)|}{\delta'! M_{|\delta'|}} \leq c^{|\delta'|+1} \tag{2.16}$$

d'autre part, d'après le corollaire 2.3 on a $|D_y^\delta g(0,0)| \geq \delta! M_{\delta_1} M_{\delta_2} \cdots M_{\delta_q}, \forall \delta \in \mathbb{N}^q$ d'où

$$\frac{|D_y^\delta g(0,0)|}{\delta'! M_{|\delta'|}} \geq \frac{\delta! M_{\delta_1} M_{\delta_2} \cdots M_{\delta_q}}{\delta'! M_{|\delta'|}} \tag{2.17}$$

En particulier pour $\delta' = (0, \cdots, \delta'_i, \cdots, 0)$ et $\delta = (0, \cdots, \delta'_i + 1, \cdots, 0)$ alors (2.16) devient

$$\frac{|D_{y_i}^{\delta'_i+1} g(x,y)|}{\delta'_i! M_{\delta'_i}} \leq c^{\delta'_i+1}$$

et (2.17) devient

$$\begin{aligned} \frac{|D_{y_i}^{\delta'_i+1} g(0,0)|}{\delta'_i! M_{\delta'_i}} &\geq \frac{\delta! M_0 \cdots M_{\delta_i} \cdots M_0}{\delta'_i! M_{\delta'_i}} \\ &\geq \frac{\delta_i! M_{\delta_i}}{\delta'_i! M_{\delta'_i}} = (\delta'_i + 1) \frac{M_{\delta'_i+1}}{M_{\delta'_i}} \end{aligned}$$

D'où

$$\sup_{\delta'_i} \left(\frac{|D_{y_i}^{\delta'_i+1} g(0,0)|}{\delta'_i! M_{\delta'_i}} \right)^{\frac{1}{\delta'_i}} \geq \sup_{\delta'_i} \left\{ (\delta'_i + 1)^{\frac{1}{\delta'_i}} \left(\frac{M_{\delta'_i+1}}{M_{\delta'_i}} \right)^{\frac{1}{\delta'_i}} \right\}$$

mais $\sup_{\delta'_i} \left(\frac{M_{\delta'_i+1}}{M_{\delta'_i}} \right)^{\frac{1}{\delta'_i}}$ est non borné par hypothèse et $\lim_{\delta'_i \to \infty} (\delta'_i + 1)^{\frac{1}{\delta'_i}} = 1$

d'où $\sup_{\delta'_i} \left(\frac{|D_{y_i}^{\delta'_i+1} g(0,0)|}{\delta'_i! M_{\delta'_i}} \right)^{\frac{1}{\delta'_i}}$ est non borné, contradiction avec (2.16)

Inversement ; On va établir la démonstration inverse pour une dérivation d'ordre un seulement par rapport à y_i où i arbitraire ; toute généralisation à d'autre ordres de dérivation est évidente

si (2.2) est satisfaite et $f \in C^{0,M}(\Omega)$ donc $\exists c > 0$ tel que $\forall \delta, \delta' \in \mathbb{N}^q$ tel que $\delta = (\delta'_1, \cdots, \delta'_i + 1, \cdots, \delta'_q)$ on a

$$\begin{aligned}
\sup_{\Omega} |D_y^{\delta} f(x,y)| &\leq c_1^{|\delta|+1} \delta! M_{|\delta|} \\
&\leq c_1^{|\delta|+1} c_2^{|\delta'|} \delta_i \delta'! M_{|\delta'|} \\
&\leq c_1^{|\delta'|+2} c_2^{|\delta'|} c_3^{|\delta'|+1} \delta'! M_{|\delta'|} \\
&\leq c^{|\delta'|+1} \delta'! M_{|\delta'|}
\end{aligned}$$

Notons que

$$\delta_i \leq |\delta| \leq e^{|\delta|} \leq c_3^{|\delta'|+1}$$

$$\frac{M_{|\delta|}}{M_{|\delta'|}} \leq c_2^{|\delta'|}$$

$$c_1^{|\delta'|+2} c_2^{|\delta'|} c_3^{|\delta'|+1} \leq c_1^{|\delta'|+1} c_1 c_2^{|\delta'|} c_3^{|\delta'|+1} \leq c_1^{|\delta'|+1} \left(\max(c_1; c_2)\right)^{|\delta'|+1} c_3^{|\delta'|+1}$$

donc on prend

$$c = c_1 c_3 \left(\max(c_1; c_2)\right)$$

□

Indiquons maintenant comment opèrent les dérivations dans les algèbres C_R^M

Proposition 2.3. *Pour tout $(\gamma, \delta) \in B$ tel que (2.4), il existe une constante $c'_{\gamma,\delta} \geq 0$ telle que $D_x^{\gamma} D_y^{\delta} : C_R^M \to C_R^M$ soit linéaire, continue de norme $\leq c'_{\gamma,\delta} \xi^{\gamma} \zeta^{\delta} R^{-|\gamma|-|\delta|}$*

Démonstration. Soit $u \in C_R^M$, on a d'après(2.9)

$$D_x^{\gamma} D_y^{\delta} u \ll \|u\| D_t^{\gamma} D_y^{\delta} \Phi_R^M(t,y)$$

D'où

$$D_x^{\gamma} D_y^{\delta} u \ll \|u\| \xi^{\gamma} \zeta^{\delta} \sum_{k=|\delta|} \frac{(\zeta.y)^{k-|\delta|}}{(k-|\delta|)!} M_k D^{|\gamma|} D^k \phi_R(\xi.t)$$

le développement de Taylor de $D^k \phi_R(\xi.t)$ au voisinage de zéro est

$$D^k \phi_R(\xi.t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\xi.t)^l}{l!} D^{k+l} \phi_R(0)$$

comme $|\gamma| < 0$ donc l'opérateur $D^{|\gamma|}$ devient une intégration et on a

$$D^{|\gamma|}D^k\phi_R(\xi.t) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\xi.t)^{l-|\gamma|}}{(l-|\gamma|)!}D^{k+l}\phi_R(0)$$

d'où

$$D_x^\gamma D_y^\delta u \ll \|u\|\xi^\gamma\zeta^\delta \sum_{k=|\delta|}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\zeta.y)^{k-|\delta|}}{(k-|\delta|)!}M_k\frac{(\xi.t)^{l-|\gamma|}}{(l-|\gamma|)!}D^{k+l}\phi_R(0)$$

en effectuant un changement d'indice tel que $k = j + |\delta|$ et $l - |\gamma| = m$

$$D_x^\gamma D_y^\delta u \ll \|u\|\xi^\gamma\zeta^\delta \sum_{j=o}^{\infty}\sum_{m=-|\gamma|}^{\infty}\frac{(\zeta.y)^{j}}{j!}M_{j+|\delta|}\frac{(\xi.t)^{m}}{m!}D^{j+m+|\gamma|+|\delta|}\phi_R(0)$$

et on revient à notre notation, d'où

$$\begin{aligned}D_x^\gamma D_y^\delta u &\ll \|u\|\xi^\gamma\zeta^\delta \sum_{k=o}^{\infty}\sum_{l=-|\gamma|}^{\infty}\frac{(\zeta.y)^{k}}{k!}M_{k+\delta}\frac{(\xi.t)^{l}}{l!}D^{k+l+|\gamma|+|\delta|}\phi_R(0)\\ &\ll \|u\|\xi^\gamma\zeta^\delta R^{-|\gamma|-|\delta|}\sum_{k=o}^{\infty}\sum_{l=-|\gamma|}^{\infty}\frac{(\zeta.y)^{k}}{k!}M_{k+\delta}\frac{(\xi.t)^{l}}{l!}\frac{K^{-1}(k+l+|\gamma|+|\delta|)!}{R^{k+l}(k+l+|\gamma|+|\delta|+1)^2}\end{aligned}$$

notons que

$$D^{k+l}\phi_R(0) = \frac{K^{-1}(k+l)!}{R^{k+l}(k+l+1)^2}$$

après un développement analogue de Φ_R^M on a

$$\Phi_R^M(t,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\zeta.y)^{k}}{k!}M_k\frac{(\xi.t)^{l}}{l!}\frac{K^{-1}(k+l)!}{R^{k+l}(k+l+1)^2}$$

et la démonstration revient à chercher l'existence d'une constante $c'_{\gamma,\delta}$ telle que

$$M_{k+|\delta|}\frac{(k+l+|\gamma|+|\delta|)!}{(k+l+|\gamma|+|\delta|+1)^2} \le c'_{\gamma,\delta}M_k\frac{(k+l)!}{(k+l+1)^2} \quad \forall k\ge 0, \forall l \ge -|\gamma|$$

si $|\gamma| + |\delta| \le 0$ alors la fonction

$$\frac{(k+l+|\gamma|+|\delta|)!}{(k+l)!}\frac{(k+l+1)^2}{(k+l+|\gamma|+|\delta|+1)^2}$$

est décroissante par rapport à l et atteint son maximum pour $l = -|\gamma|$;il suffit de vérifier

$$M_{k+|\delta|}\frac{(k+|\delta|)!}{(k+|\delta|+1)^2} \leq c'_{\gamma,\delta}M_k\frac{(k-|\gamma|)!}{(k-|\gamma|+1)^2} \quad \forall k \geq 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{M_{k+|\delta|}}{M_k}\frac{(k+|\delta|)!}{(k-|\gamma|)!}\frac{(k-|\gamma|+1)^2}{(k+|\delta|+1)^2} \leq c'_{\gamma,\delta} \quad \forall k \geq 0$$

D'après l'hypothèse (2.4) du théorème 2.2 alors $\exists c_{\gamma,\delta} \geq 0$ tel que $\forall k \geq 0$ on a

$$\frac{M_{k+|\delta|}}{M_k}\frac{(k+|\delta|)!}{(k-|\gamma|)!} \leq c_{\gamma,\delta}$$

d'autre part

$$\left(\frac{k-|\gamma|+1}{k+|\delta|+1}\right)^2 \leq c''_{\gamma,\delta} \quad \forall k \geq 0 \qquad \text{pour } c''_{\gamma,\delta} = \left(\frac{-|\gamma|+1}{|\delta|+1}\right)^2$$

et la démonstration sera terminé en prenant $c'_{\gamma,\delta} = c_{\gamma,\delta}c''_{\gamma,\delta}$

□

***Lemme* 2.7.** *Soit f une fonction : $(x,y,z) \to f(x,y,z)$ de classe $C^{0,M}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q+r}$ alors il existe des fonctions G_σ avec $\sigma \in B$ telles que : $(x,y,z,z') \to G_\sigma(x,y,z,z')$ est de classe $C^{0,M}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q+2r}$ et telle que pour (x,y,z,z') assez petit dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q+2r}$ on a*

$$f(x,y,z) = f(x,y,z') + \sum_{\sigma\in B} G_\sigma(x,y,z,z')(z_\sigma - z'_\sigma)$$

Démonstration. Pour simplifier l'écriture on introduit la nouvelle variable $z^i \in \mathbb{R}^r$ avec $0 \leq i \leq r$ tel que $z^0 = z$, $z^i = (z'_1, \cdots, z'_i, z_{i+1}, \cdots, z_r)$ et $z^r = z'$

Rappelons que $r = Card(B)$. D'après la formule de Taylor-Lagrange et pour un i arbitraire il existe ξ_{i+1} strictement compris entre z_{i+1} et z'_{i+1} où $z_\xi^{i+1} = (z'_1, \cdots, z'_i, \xi_{i+1}, z_{i+2}, \cdots, z_r)$ tel que

$$\begin{aligned} f(x,y,z^i) - f(x,y,z^{i+1}) &= \frac{\partial f(x,y,z^{i+1})}{\partial z_{i+1}}(z_{i+1} - z'_{i+1}) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(x,y,z_\xi^{i+1})}{\partial z_{i+1}^2}(z_{i+1} - z'_{i+1})^2 \\ &= \left(\frac{\partial f(x,y,z^{i+1})}{\partial z_{i+1}} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(x,y,z_\xi^{i+1})}{\partial z_{i+1}^2}(z_{i+1} - z'_{i+1})\right)(z_{i+1} - z'_{i+1}) \end{aligned}$$

alors

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z)-f(x,y,z') &= \sum_{i=0}^{r-1} f(x,y,z^i)-f(x,y,z^{i+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{r-1}\left(\frac{\partial f(x,y,z^{i+1})}{\partial z_{i+1}}+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(x,y,z_\xi^{i+1})}{\partial z_{i+1}^2}(z_{i+1}-z'_{i+1})\right)(z_{i+1}-z'_{i+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} G_i(x,y,z,z')(z_{i+1}-z'_{i+1})
\end{aligned}
$$

le fait que $G_i(x,y,z,z')$ est de classe $C^{0,M}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{q+2r}$ est une conséquence directe de la proposition 2.2

□

2.4 Démonstration du théoreme 2.2

On fixe les valeurs des paramètres $\xi\in(\mathbb{R}_+^*)^p$ et $\zeta\in(\mathbb{R}_+^*)^q$ selon les besoins rencontrés.
On écrit d'après le lemme 2.7

$$
f(x,y,z)-f(x,y,z')=\sum_{\sigma\in B} G_\sigma(x,y,z,z')(z_\sigma-z'_\sigma) \tag{2.18}
$$

les fonctions G_σ sont de classe $C^{0,M}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{q+2r}$

Il existe un voisinage ouvert Ω de l'origine de $\mathbb{R}^q$ et des nombres $h_0>0$, $h_1>0$ tels que les fonctions f et G_σ soient définies dans l'ouvert

$$
\mathcal{D}:=\{(x,y,z,z')\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{q+2r};\xi.|x|<h_0,\quad y\in\Omega,\quad |z_\sigma|<h_1,\quad |z'_\sigma|<h_1\}
$$

étant donné $\eta>1$ il existe des constantes $c>0, R>0, R'>0$ telles que pour tout $(x,y,z,z')\in\mathcal{D}$ et pour tout $\delta\in\mathbb{N}^q, \varepsilon,\varepsilon'\in\mathbb{N}^r$:

$$
|D_y^\delta D_z^\varepsilon f(x,y,z)|\le c\frac{\zeta^\delta\delta!M_\delta}{(\eta R)^{|\delta|}}\frac{\varepsilon!M_\varepsilon}{R'^{|\varepsilon|}}
$$

$$
|D_y^\delta D_z^\varepsilon D_{z'}^{\varepsilon'} G_\sigma(x,y,z,z')|\le c\frac{\zeta^\delta\delta!M_\delta}{(\eta R)^{|\delta|}}\frac{\varepsilon!M_\varepsilon}{R'^{|\varepsilon|}}\frac{\varepsilon'!M_{\varepsilon'}}{R'^{|\varepsilon'|}}
$$

ceci signifie que pour tout x vérifiant $\xi.|x|<h_0$:

$$
f(x,y,z)\ll c\Theta_{\eta R}^M(\zeta.y)\prod_{\sigma\in B}\Theta_{R'}^M(z_\sigma)
$$

$$G_\sigma(x,y,z,z') \ll c\Theta^M_{\eta R}(\zeta.y) \prod_{\nu\in B} \Theta^M_{R'}(z_\nu)\Theta^M_{R'}(z'_\nu)$$

D'après le lemme 2.4 on a :
Il existe un $R_0 > 0$ tel que pour tout $R \in]0, R_0]$ on ait

$$\begin{cases} f(x,y,z) \ll c\Phi^M_R(t,y) \prod_{\sigma\in B} \Theta^M_{R'}(z_\sigma) \\ G_\sigma(x,y,z,z') \ll c\Phi^M_R(t,y) \prod_{\nu\in B} \Theta^M_{R'}(z_\nu)\Theta^M_{R'}(z'_\nu) \end{cases} \tag{2.19}$$

On a alors :

***Proposition* 2.4.** *Il existe $a_0 > 0$ tel que, pour tout $a \geq a_0$ et tout $R \in]0, R_0]$ suffisamment petit, l'application*

$$T : u \to f(x,y,D^B u(x,y))$$

est une contraction stricte dans la boule fermée $B'(0;a)$ de l'algèbre de Banach $C^M_R(\Omega_R)$

Démonstration. Soit $u \in B'(0;a) \subset C^M_R(\Omega_R)$, $0 < R \leq R_0$, on $|\gamma| + |\delta| < 0$ pour tout $(\gamma, \delta) \in B$,

Alors la proposition 2.3 montre qu'il existe une fonction $\varepsilon :]0, R_0] \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\lim_{R\to 0} \varepsilon(R) = 0$$

et

$$z_\sigma = D^\gamma_x D^\delta_y u \ll a\varepsilon(R)\Phi^M_R(t,y), \forall\sigma = (\gamma,\delta) \in B$$

d'où

$$\sup_\Omega |D^\gamma_x D^\delta_y u(x,y)| \leq a\varepsilon(R)\phi_R(\xi.|x|) \text{ pour } \xi.|x| < R$$

comme $\phi_R(\xi.|x|) \leq \phi_R(R) = \phi_1(1)$ d'où l'existence d'une constante $c_1 > 0$ pour laquelle la condition

$$a\varepsilon(R) \leq c_1 \tag{2.20}$$

affirme que les fonctions $f(x,y,D^B u(x,y)), G_\sigma(x,y,D^B u(x,y), D^B u'(x,y))$ soient bien définies dans Ω_R lorsque $u, u' \in B'(0;a)$.

d'après (2.20), le corollaire 2.2 et en choisissant convenablement R, on a :

$$\Theta^M_{R'} \circ [a\varepsilon(R)\Phi^M_R] \ll K\Phi^M_R$$

finalement grâce à (2.19) on en déduit que

$$Tu = f(x, y, D^B u) \ll c_2 \Phi_R^M(t, y)$$

ce qui prouve que $T(B'(0; a)) \subset B'(0; a)$ si

$$c_2 \leq a \tag{2.21}$$

De plus, si $u, u' \in B'(0; a)$, on a

$$z_\nu - z'_\nu = D_x^\gamma D_y^\delta (u - u') \ll \|u - u'\| \varepsilon(R) \Phi_R^M(t, y), \quad \nu = (\gamma, \delta) \in B$$

d'où

$$Tu - Tu' \ll c_3 \varepsilon(R) \|u - u'\| \Phi_R^M(t, y)$$

donc T est une contraction stricte si $c_3 \varepsilon(R) < 1$.

pour que $T : B'(0; a) \to B'(0; a)$ soit une contraction stricte, il suffit que

$$a\varepsilon(R) \leq c_1, \quad c_2 \leq a, \quad c_3 \varepsilon(R) < 1$$

comme on peut prendre R suffisamment petit pour satisfaire la première et la troisième inégalité la démonstration sera terminée en prenant $a_0 = c_2$ □

La proposition 2.4, le corollaire 2.1 et le théorème de point fixe de Banach 0.3 prouve l'existence mais dans l'espace C_R^M ! pour le reste merci lemme 2.3. Pour l'unicité, on raisonne comme suit :

- Soit u, u' deux fonctions de classe $C^{0,M}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ telles que $u = f(x, y, D^B u), u' = f(x, y, D^B u')$, alors il existe un voisinage ouvert $O \subset \Omega$ de l'origine de $\mathbb{R}^q$ et un nombre $R_1 \in]0, R_0]$ tels que $u, u' \in C_{R_1}^M(O_{R_1})$.

- Donc pour tout $R \in]0, R_1]$ on a $u, u' \in C_R^M(O_R)$, et si on note $\| \cdot \|_R$ la norme de l'espace $C_R^M(O_R)$ alors :

$$\|u\|_R \leq \|u\|_{R_1}, \quad \|u'\|_R \leq \|u'\|_{R_1}$$

- On choisit alors $a \geq \max(a_0, \|u\|_{R_1}, \|u'\|_{R_1})$,et $R \in]0, R_1]$ suffisamment petit pour que T soit une contraction stricte dans la boule fermée $B'(0; a) \subset C_R^M(O_R)$
- Finalement T a deux point fixes u et u' ce qui prouve l'égalité dans $O_{R'}$ □

2.5 Conclusion

La proposition 2.2 nous montre que l'hypothèse (2.2) est une hypothèse naturelle et ne porte aucune restriction.
Dans ce travail on a généralisé les résultats obtenus dans [16] dans un espace de type Carleman associe a une suite numérique vérifiant certaines hypothèses, et on a donné une formule qui nous spécifie les ordres de dérivation qui peuvent être traité avec ce formalisme chaque fois quand on détermine la forme explicite de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bibliographie

[1] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles-4ème Ed.* EDP sciences, 2016.

[2] Moncef Elghribi, Hakeem A Othman, and Al-Hossain Ahmed Al-Nashri. Homogeneous functions : New characterization and applications. *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*, 171(2) :171–181, 2017.

[3] E. Goursat. Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 120 :712–714, 1894.

[4] S Iyanaga and Y Kawada. Encyclopedic dictionary of mathematics distribution of typical random variables, 1980.

[5] Andreas Kriegl, Peter W Michor, and Armin Rainer. The convenient setting for non-quasianalytic denjoy–carleman differentiable mappings. *Journal of Functional Analysis*, 256(11) :3510–3544, 2009.

[6] Christine Laurent-Thiébaut. *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables-Une introduction.* EDP Sciences, 2012.

[7] Peter D Lax. Nonlinear hyperbolic equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 6(2) :231–258, 1953.

[8] Nikolai Andreevich Lednev. A new method for the solution of partial differential equations. *Matematicheskii Sbornik*, 64(2) :205–266, 1948.

[9] Chantal Moussy. Théorème du point fixe et théorème de Cauchy-Kowalewsky-Lednev pour les systèmes semi-linéaires. *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. (6)*, 8(3) :491–535, 1999.

[10] Federica Pieroni. On the real algebra of denjoy–carleman classes. *Selecta Mathematica*, 13(2) :321, 2007.

[11] Walter Rudin. Functional analysis. international series in pure and applied mathematics, 1991.

[12] Gerhard Schindl. *Spaces of smooth functions of Denjoy-Carleman-type.* PhD thesis, uniwien, 2009.

[13] Vincent Thilliez. On quasianalytic local rings. *Expositiones Mathematicae*, 26(1) :1–23, 2008.

[14] J. van der Hoeven. Majorants for formal power series. Technical Report 2003-15, Université Paris-Sud, Orsay, France, 2003.

[15] Claude Wagschal. une généralisation du problème de Goursat pour des systèmes d'équations intégro-differentielles holomorphes ou partiellement holomorphes. *J. Math. Pures Appl. (4)*, 53 :147–164, 1974.

[16] Claude Wagschal. Le problème de Goursat non linéaire. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 58 :309–337, 1979.