République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère d'enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
Université de Ghardaia

Faculté des Science et de Technologie
Département de Mathématique et Informatique
Laboratoire de Mathématiques et Sciences Appliquées

Projet de fin d'étude présenter en vue de l'obtention de diplôme de

MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatiques

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et applications

THÈME

problème de Goursat dans des espaces de Gevrey

Présenté par :

CHAMKHA Alia

Soutenu publiquement le : 25/ 06/ 2018

Devant le jury :

Dr. Hammouche Hadda :	(Univ. Ghardaia)	Présidente
Mr. Latreche Smail :	(Univ. Ghardaia)	Examinateur
Dr. Geurbati Kaddour :	(Univ. Ghardaia)	Raporteur

Année universitaire 2017/2018

Dédicaces

Ce travail est dédié à :

Tous mes chers proches, particulièrement

"Mes chers parents" : mon bonheur, mon exemple, ma fierté, à qui je dois tout.

Que dieu les préserve.

"Ma sœur" : ***Djihad***.

"Mes frères" : *Abdel-Kader, Ibrahim, et toute ma famille.*

"Mes amis proches" : *Imane, Safia,Fatiha,Bouchra,...*qui j'ai passé avec eux les meilleurs moments de ma vie .

Et pour tous les amis mes collègues que j'ai connu tout le long de ma vie et que je n'ai pas cité leurs noms.

A tous mes collègues de l'université de Ghardaïa en particulier les étudiants de promotion Mathématique.

Remerciements

Au nom d'ALLAH Clément et Miséricordieux !

Avant tout, je remercie DIEU le Tout Puissant de m'avoir donné le courage, la volonté, la patience et la santé durant toutes ces années de recherche.
J'adresse mes sincères remerciements à mon Directeur de thèse, Monsieur Guerbati Kaddour , Maître de Conférences à l'Université de Ghardaïa, pour m'avoir proposé le sujet, encouragé, orienté, aidé et guidé, pour son soutien et son encouragement, sa confiance en moi tout au long de ce travail.
Mes remerciements vont également à tous les membres du Jury, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'être dans le Jury de ma thèse, en l'occurrence :
Hammouche Hadda et Latreche Smail.
Je voudrais également remercier tous les membres du département de mathématique et surtout son directeur et mon professeur et tous ceux qui m'ont aidé de près et de loin pour achever ce travail.
Je tiens à remercier tous mes amis et mes collègues (Hayat,sara,chayma,....) et surtout ceux avec qui on a passé une période agréable à l'université de Ghardaia.
Je voudrais également remercier ma mère mon père, mes sœur et toute ma famille qui M'ont toujours soutenu et encouragé.

Table des matières

Introduction

Ce mémoire a pour objet détailler le travail de A. Nabadji [17] concernant la construction de solution ramifiée autour de deux hypersurfaces caractéristiques simples où on a supposé que les deux hypersurfaces sont caractéristiques et indépendantes de second membre.
Considérons dans $\mathbb{C}^{n+1}$ un opérateur différentiel quasi-linéaire d'ordre deux :

$$P(x,D)u = P_p(x,D)u + f(x, D^A u) \tag{1}$$

où $P_p = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x, D^A u) D^\alpha u$ est la partie principale de P et A représente les dérivées de u d'ordre un. On suppose que la partie principale moins la partie linéarisée, au voisinage de $u = 0$, de P est d'ordre q où $q \in \mathbb{N}^*$:

$$P_p(x,D)u - P_{\text{lin}}(x,D)u = o(u^q).$$

où $P_p(x,D)u - P_{\text{lin}}(x,D)u = u^q\ g(x)$, tel que g est une fonction holomorphe á l'origine.
Soient $K_i := \{x \in \mathbb{C}^{n+1},\ k_i(x) = 0\ (i = 1,2)\}$ deux hypersurfaces caractéristiques simples et transverses de $P_{\text{lin}}(x,D)u$, on considère alors le problème

$$P(x,D)u = v \tag{2}$$

où v est une fonction dont le support singulier est $K_1 \cup K_2$. on se propose de démontrer que le support singulier de u est $K_1 \cup K_2$. comme dans [10],[14]; des hypothèses de croissance sont nécessaires pour traiter ce problème.
On suppose que v a pour comportement au voisinage de $K_1 \cup K_2$:

$$| v(x) | \leq c\ | k_1(x) |^{a_1} | k_2(x) |^{a_2} \qquad a_1, a_2 \geq \frac{1}{q}$$

Et on montre alors que u est ramifiée et que :

$$| u(x) | \leq c\ | k_1(x) |^{a_1+1} | k_2(x) |^{a_2+1} \qquad \text{(théorème 3.2.1 et 3.2.2)}$$

pour des opérateurs semi-linéaires d'ordre deux, dont la partie non linéaire est polynomiale, **E.Leichtnam**[19] a étudié le problème de Cauchy avec des données singulières et a construit des solutions ramifiées. lorsque la partie non linéaire de l'opérateur semi-linéaire d'ordre deux est quelconque **A.Nabaji** et **C.Wagschal**[23] ont étudié le même problème et on construit des solutions singulières dont le comportement est

$$| u(x) |\leq c(max(| k_1(x) |,| k_2(x) |))^{a+2} \qquad a \geqslant 0$$

Lorsque $| v(x) |\leq c(max(| k_1(x) |,| k_2(x) |))^{a}$.
Rappelons que pour des équations linéaires d'ordre m, le problème de construction de solution ramifiées d'un type plus générale que celui de [19] et [14] a été étudié par **E.Leichtnam**[11] et récemment par **P.Pongérard** et **C.Wagschal**[19].
Enfin le problème de construction de solutions ramifiées autour d'une hypersurface caractéristique simple qui ne dépend pas du second membre, a été traitée, avec $q = 1$, dans [10], [14]et [16].
La méthode d'étude du problème (2) est celle qui a été développé dans [25],[14] et[16]; elle consiste essentiellement à réduire ce problème à un problème integro-différentiel et ceci en cherchant une solution de la forme $D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{-1} u(k_1, k_2, x)$ où $D_{t_1}^{-1}, D_{t_2}^{-1}$ sont deux intégrales qui définissent l'inverses à droite des opérateurs D_{t_1}, D_{t_2} . Il suffit alors de résoudre le problème

$$P(x, D)D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{-1} u = v \tag{3}$$

On montre ensuite que cette équation admet une unique solution (proposition 4.2), ceci s'obtient en montrant que l'équation (3) est équivalente à :

$$u = Au + F_1 u + F_2 u + v \tag{4}$$

où A, F_1 et F_2 résultent respectivement de P_{lin}, f et $P_p - p_{lin}$.
Pour résoudre ce problème on utilise la fonction majorante de **Lax**[9] et les conditions de croissance pour construire une algèbre de Banach où l'équation (2.4) admet un point fixe.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Notations générales

Nous présentons ici les notions et les notations utilisées dans ce mémoire. Pour avoir plus des détails nous renvoyons le lecteur aux passages correspondants dans le texte.

- $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.
- $\mathbb{N}$: ensemble des nombres naturels.
- $x = (x_1, ..., x_n)$ avec $x_i \in \mathbb{C} \quad \forall i = 1....n$.
- Ω un voisinage ouvert connexe de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$.
- D_j : L'opérateur de dérivation par rapport à la variable $x_j (0 \leqslant j \leqslant n)$. Soient $\alpha; \beta \in \mathbb{N}^{n+1}$ deux multi-indice ; $x \in \mathbb{R}^n$.
- $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ avec $\quad \alpha_j \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall j = 1....n$.
- $| \alpha |= \alpha_1 + ... + \alpha_n$.
- $\alpha! = \prod_{j=0}^{n} \alpha_j!$
- $\xi = (\xi_0, ..., \xi_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.
- $\xi^\alpha = \prod_{j=0}^{n} \xi_j^{\alpha_j}$.
- $D^\alpha u = D_0^{\alpha_0} ... D_n^{\alpha_n} u$.
- $A = \{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}; | \alpha | \leqslant 1\}$.
- $n' =$ card A.
- $D^A u = (D^\alpha u)_{\alpha \in A}$.
- $y = (y_\alpha)_{\alpha \in A} \in \mathbb{C}^{n'}$.

- Formule de Leibnitz : $D(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} u D^{\alpha} v.$
- $\mathbb{C}\{x\}$: l'algèbre des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$.
- $K_i := \{x \in \Omega\ ; k_i(x) = 0\}$ les hypersurfaces caractéristiques, tel que $k_i(x)$ la solution de problème de Cauchy du premier ordre

$$\begin{cases} g(x, \nabla k_i(x)) = 0 \\ k_i(x) = x_1 \text{pour } x_0 = 0 \\ \nabla k_i(0) = (\lambda_i, 1, 0, ..., 0) \end{cases}$$

- $\mathbf{B}_R(\xi)$: sont des Algèbres de Banach.
- $\Delta_{\eta R}$: le polydisque de centre 0 et de rayon ηR, défini par

$$\Delta_{\eta R} = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} ; \max_{0 \leqslant j \leqslant n} | x_j | < \eta R\} \subset \Omega.$$

1.2 Fonctions holomorphes

1.2.1 Série entière et fonction analytique

Définition 1.2.1 *(Série entière)*
On appelle série entière toute série de fonction $\sum_{n \geq 0} f_n$ *ou*

$$\begin{aligned} f_n : & \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & z \to a_n z^n \end{aligned}$$

où $a_n \in \mathbb{C}$ *appelé coefficient d'indice n, Pour une telle série, on définit son rayon de convergence par :*

$$R := \sup\{\rho\ ; \rho \geq 0 \textit{ et la suite } a_n \rho^n \textit{ est bornée}\}$$

Proposition 1.2.1 *[18]*
On considère la série entière

$$S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

de rayon de convergence $R > 0$. *Alors* $S(z)$ *est absolument convergente dans le disque ouvert* $D(0, R)$, *normalement convergente dans* $\overline{D}(0, r)$ *pour* $0 < r < R$ *et divergente pour* $|z| > R$

Le rayon de Convergence se calcule en utilisant le critère de Cauchy-Hadamard :

Lemme 1.2.1 *Le rayon de convergence [18]*

Le rayon de convergence de la série entière

$$S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

est donné par

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{n} \mid a_n \mid^{\frac{1}{n}}}.$$

Définition 1.2.2 *(fonction analytique)*

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction.et soit $z_0 \in U$, On dit que f est analytique en z_0 s'il existe :

1) *un nombre $r > 0$ tel que le disque $\mid z - z_0 \mid < r$ soit contenu dans U.*

2) *une série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $\rho \geq r$ tels que,*

pour $\mid z - z_0 \mid < r$, on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

On dit que f est analytique sur U si elle est analytique en tout point de U.

1.2.2 Fonction holomorphe

Définition 1.2.3 *(Fonction holomorphe)*

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction complexe. et $z_0 \in U$, On dit que f est holomorphe en z_0 si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ existe.}$$

La limite si elle existe, est notée $f'(z_0)$. et si f' est continue sur U.

L'ensemble des fonctions holomorphes sur U est noté $H(U)$.

1.2.3 La relation entre holomorphe et analytique

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U alors f est analytique sur $U, \forall a \in U$,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n. \ \forall z \in D(a, r)$$

de plus pour tout $n \geq 0$ et $r > 0$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{c(a,r)} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz$$

où les dérivées $f^{(n)}$ sont holomorphes sur U, et $c(a, r)$ est le cercle de centre a et de rayon $r > 0$.

1.2.4 Inégalités de Cauchy

Définition 1.2.4

Soient f une fonction holomorphe sur un disque $D(z_0, R)$, Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$,

$r \in]0, R[$

on a

$$\mid D^\alpha f(a) \mid \leqslant \alpha! \frac{M(r)}{r^\alpha}$$

$M(r) = \sup\{|f(z)|, |z - z_0| = r\}$ *avec*

$$D^\alpha f(z_0) = \frac{\alpha!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{\alpha+1}} dz_0 .... dz_n$$

1.2.5 Théorème des accroissements finis

Définition 1.2.5

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

ou il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(a + \alpha(b - a))(b - a).$$

1.2.6 Identité d'Euler

Définition 1.2.6 *(fonction homogène)*

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et soit $D^* \subset D_f$: soit $k \in \mathbb{R}$; on dit que f est homogène de degré k sur D^* si :

$$\forall t > 0 \text{ }, \forall x \in D^* \text{ }, \textit{on a } tx \in D_f \textit{ et } f(tx) = t^k f(x).$$

Définition 1.2.7

soit f une fonction de plusieurs variables, et k un réel $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en tout point est homogène de degré k, Alors l'égalité suivante, appelée identité d'Euler :

$$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = k f(x)$$

1.2.7 Séries formelles et fonctions majorantes

Définition 1.2.8 *(La série formelle)*

On dit que $\varphi : \Omega \subset \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ est une série formelle, si φ est de cette forme :

$$\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^n} a_n \frac{x^n}{n!} \quad \textit{telle que } a_n = D^n\varphi(0)$$

Si φ est holomorphe ou voisinage de l'origine Ω.

Définition 1.2.9 *[25]*

Si $u = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} u_\alpha x^\alpha$, $\Phi = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \Phi_\alpha x^\alpha$ sont deux séries formelles avec $u_\alpha \in \mathbb{C}, \Phi_\alpha \in \mathbb{R}_+$, on note $u \ll \Phi$, la relation

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \ \mid u_\alpha \mid \leqslant \Phi_\alpha$$

Si Φ est une série convergente, on dit que Φ est une fonction majorante.

On note B_Φ l'espace de Banach

$$B_\Phi = \{u \in \mathbb{C}^{n+1}\{x\}, \exists c \geqslant 0, u \ll c\Phi\}$$

Pour la norme

$$\|u\|_\Phi = Min\{c \geqslant 0, u \ll c\Phi\}.$$

Proposition 1.2.2 *[8]*

Si $f(x) \ll F(x)$ et $g(x) \ll G(x)$ alors on a :

1) $af(x) + bg(x) \ll |a|F(x) + |b|G(x)$

2) $f(x) \times g(x) \ll F(x) \times G(x)$

3) $\partial^\alpha f(x) \ll \partial^{|\alpha|} F(x)$

4) $(g \circ f)(x) \ll (G \circ F)(x)$ *tel que :*

$$(G \circ F)(x) = \sum_{q=0} \frac{G_q}{q!} [F(x) - F(0)]^q$$

1.3 Opérateurs et applications

1.3.1 Application linéaire

Définition 1.3.1 *(Endomorphisme)[4]*

Soient E et F deux $\mathbb{R}-$ espaces vectoriels et $u : E \to F$ une application. On dit que u est *linéaire ou que c'est un morphisme si et seulement si :*

$$\forall x, y \in E; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

Lorsque $E = F$, un morphisme de E dans lui même s'appelle un endomorphisme.

Définition 1.3.2 *(l'injection canonique)*
Soit E un ensemble et A une partie de E. L'injection canonique de A dans E est l'application qui à x associe x.
Par exemple, lorsque $A = E$, l'injection canonique n'est autre que l'application identité de E.

Définition 1.3.3
une relation d'équivalence *sur E est une relation binaire $\sim$ qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive, et est défini par un couple (x, y) d'éléments de E appartient au graphe de cette relation si et seulement si $x \sim y$.*
On définit la ***classe d'équivalence*** *$[x]$ d'un élément x de E comme l'ensemble des y de E tels que $x \sim y$:*

$$y \in [x] \Leftrightarrow x \sim y$$

l'ensemble quotient *de E par la relation $\sim$, noté $E/\sim$, est le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ des classes d'équivalence :*

$$E/\sim \; = \; \{[x] \in \mathcal{P}(E) \mid x \in E\}.$$

Définition 1.3.4 *(la surjection canonique)*
Soit E un ensemble , La surjection canonique est l'application canonique p ,de E dans l'ensemble quotient, qui à chaque élément de E associe sa classe d'équivalence :

$$p := E \to E/\sim$$

$$x \to [x]$$

est surjective par construction.

1.3.2 Opérateur quasi-linéaire

Définition 1.3.5
Une EDP est une relation entre les variables, la fonction et les dérivées (partielles) d'une

fonction $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et est sous la forme :*

$$F(x, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, u_{x_i x_j x_k}, ...) = 0 \tag{1.1}$$

Définition 1.3.6 *(Équation quasi-linéaire)[1]*
Une EDP est dite quasi-linéaire si elle est non linéaire, mais linéaire par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé. On dit aussi qu'une équation différentielle est quasi-linéaire si la partie principale est linéaire.

1.4 Hyperplan et Hypersurface

Définition 1.4.1
Pour un espace vectoriel E, Un ***hyperplan*** *H de E est un sous-espace vectoriel tel que E se décompose en une somme directe de H et d'une droite vectorielle(linéaire).*
Si E est de dimension finie $n, \forall x \in E, x = (x_1, ..., x_n)$. *H est un hyperplan s'il existe des réels* $a_1, ..., a_n$ *non nuls tels que x est élément de H si, et seulement si :*
$a_1 x_1 + ... + a_n x_n = 0$.
Cette dernière équation est appelée l'équation de l'hyperplan. Dans le cas où E est de dimension infinie, la condition précédente est remplacée par l'existence d'une forme linéaire non nulle φ *telle que x est élément de H si, et seulement si,* $\varphi(x) = 0$.

Définition 1.4.2
En géométrie différentielle, une ***hypersurface*** *d'une variété différentielle de dimension N, est une sous-variété de dimension* $N-1$. *et l'hypersurface projective d'équation homogène défini par*

$$F(x_0, ..., x_n) = 0$$

1.5 Le revêtement universel et le disque pointé

Définition 1.5.1 *(Le disque pointé)[17]*
On note $\dot{D}$ *le disque pointé de* $\mathbb{C}$ *de centre 0 et rayon* $\delta \geqslant 0$ *telle que*

$$\dot{D} = \{t \in \mathbb{C}; 0 < |t| < \delta\}$$

Définition 1.5.2 *[21](Le revêtement universel)*
Soit E, B *deux espaces topologiques,* $p : E \to B$ *une application continue. on dit que* (E, B, p)

(où simplement p) est un revêtement si tout point x de B possède un voisinage $V \in B$ tel qu'il existe un homéomorphisme $\varphi : p^{-1}(V) \to V \times F$ où F est un ensemble discret, et l'application commute avec la projections sur V . On appelle φ une carte (ou une trivialisation) au dessus de V . On appelle revêtement trivial le revêtement $(B \times F, B, p_1)$.

Cas particulier :
Le revêtement universel du disque pointé $\dot{D}$ est donne par :

$$R_\delta : \{t \in \mathbb{C}\ Re\ t \leqslant \log\delta\} \to \dot{D}$$

$$t \to e^t$$

Les fonctions holomorphes u ramifiées autour $k_1^{-1}(\{0\}) \cup k_2^{-1}(\{0\})$ admettant une représentation de la forme $u(\log k_1(x), \log k_2(x), x)$ telle que $u : (t_1, t_2, x) \to u(t_1, t_2, x)$ est holomorphe sur l'ouvert $R_\delta^2 \times \Omega$

1.6 Algèbre de Banach

Définition 1.6.1
*On appelle **espace de Banach** tout espace vectoriel normé et complet $(G, \|.\|_G)$.*

1.6.1 Algèbre de Banach

Définition 1.6.2 *(Algèbre)[8]*
un espace de Banach G est dit algèbre s'il est muni d'une troisième loi interne vérifie :
$\forall x, y, z \in G$

1) $(xy)z = x(yz)$

2) $x(y+z) = xy + xz$

3) $(y+z))x = yx + zx$

4) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \qquad \alpha \in (\mathbb{C}/\mathbb{R})$

Si de plus il existe un élément e de G tel que :$\forall x \in G : xe = ex = x$ on dit que l'algèbre est unitaire

Définition 1.6.3 *(algèbre de Banach)*
Un espace vectoriel normé G s'appelle algèbre normée s'il est algèbre unitaire et qui vérifie de plus $\|e\| = 1$ et $\forall (x,y) \in G^2 \qquad \|xy\| \leq \| x \| \|y\|$.
Une algèbre normée complète dite algèbre de Banach

1.6.2 Topologie de la convergence compact

Définition 1.6.4 *[8]*

Dans l'espace $H(\Omega)$ la topologie déterminée par la famille des semi-norme $(p_{k,K})_{K\subset\Omega}$ tel que :
$\forall n \geq 1$, pour tout K compact inclus dans Ω, On a

$$p_{n,K}(f) = \sup_{x\in K;|\alpha|\leq n} |\partial^{|\alpha|} f(x)|$$

s'appelle topologie de la convergence compacte.

Définition 1.6.5 *[8]*

Les boules ouvert de la topologie de la convergence compacte de centre g et de rayon $r \geq 0$ sont défini par :
$\forall g \in H$ et $r \geqslant 0$

$$V(g,r) = \{f \in H; max_{n\geqslant 1}(p_n(g-f)) < r\}.$$

1.7 Principe de contraction

Définition 1.7.1

Soit $(G, \|.\|)$ un espace normé complet et une application $f : G \to G$ est dite strictement contractante s'il existe $0 < c < 1$ telle que,
$\forall u, u' \in G; \quad \|f(u) - f(u')\| < c\|u - u'\|$

Définition 1.7.2 *(point fixe)*

On dit que u_0 est un point fixe pour l'application f si

$$f(u_0) = u_0$$

Théorème 1.7.1 *(Théorème de point fixe de Banach)*

Tout application contractante dans un espace métrique complet admet un unique point fixe.

Chapitre 2

Formulation du problème

On considère un opérateur différentiel quasi-linéaire du second ordre

$$P(x,D)u = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x, D^A u) D^\alpha u + f(x, D^A u) \tag{2.1}$$

où les fonctions $a_\alpha(x,y)$ et $f(x,y)$ sont holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n'}$.

Soit $q \in \mathbb{N}^*$, on suppose que

$$f(x,0) = 0 \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{C}^{n+1} \tag{2.2}$$

et

$$a_\alpha(x,y) - a_\alpha(x,0) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^{n'} \\ |\beta|=q}} a_{\alpha,\beta}(x,y) y^\beta \quad \forall x \in \mathbb{C}^{n+1}. \tag{2.3}$$

où les fonctions $a_{\alpha,\beta}$ sont holomorphes au voisinage de $(0,0)$.

Remarque 2.0.1

On utilise le théorème des accroissement finis pour $q = 1$, l'hypothèse (2.3) est vraie pour toutes les fonctions a_α holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n'}$.

Le résultat de [17] donc plus général est donne.

Proposition 2.0.1 *[17]*

Si on pose

$$a(x,D)u = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x,0) D^\alpha u \tag{2.4}$$

alors

$$p(x,D)u = a(x,D)u + \sum_{|\alpha|=2} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^{n'} \\ |\beta|=q}} a_{\alpha,\beta}(x, D^A u)(D^A u)^\beta D^\alpha u + f(x, D^A u).$$

Preuve. D'après (2.3) on a

$$a_\alpha(x,y)-a_\alpha(x,0)=\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^{n'}\\|\beta|=q}}a_{\alpha,\beta}(x,y)y^\beta$$

On multiplier par $D^\alpha u$

$$a_\alpha(x,y)D^\alpha u-a_\alpha(x,0)D^\alpha u=\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^{n'}\\|\beta|=q}}a_{\alpha,\beta}(x,y)y^\beta D^\alpha u$$

par suite $$\sum_{|\alpha|=2}\Big(a_\alpha(x,y)D^\alpha u-a_\alpha(x,0)D^\alpha u\Big)=\sum_{|\alpha|=2}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^{n'}\\|\beta|=q}}a_{\alpha,\beta}(x,y)y^\beta D^\alpha u$$

En utilisant (3.4) $$\sum_{|\alpha|=2}a_\alpha(x,y)D^\alpha u-a(x,D)u=\sum_{|\alpha|=2}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^{n'}\\|\beta|=q}}a_{\alpha,\beta}(x,y)y^\beta D^\alpha u$$

D'ou on a $$\sum_{|\alpha|=2}a_\alpha(x,y)D^\alpha u=\sum_{|\alpha|=2}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^{n'}\\|\beta|=q}}a_{\alpha,\beta}(x,y)y^\beta D^\alpha u+a(x,D)u$$

Finalement $$\sum_{|\alpha|=2}a_\alpha(x,y)D^\alpha u+f(x,y)=\sum_{|\alpha|=2}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^{n'}\\|\beta|=q}}a_{\alpha,\beta}(x,y)y^\beta D^\alpha u+a(x,D)u+f(x,y)$$

Si on prend $y=D^Au$, on trouve

$$P(x,D)u=\sum_{|\alpha|=2}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^{n'}\\|\beta|=q}}a_{\alpha,\beta}(x,D^Au)(D^Au)^\beta D^\alpha u+a(x,D)u+f(x,D^Au)$$

□

Définition 2.0.1 *[17]*
$g(x,\xi)$ le symbole principal de l'opérateur $p(x,D)$ est donné par :

$$g(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=2}a_\alpha(x,0)\xi^\alpha \tag{2.5}$$

On suppose que l'hyperplan $S:x_0=0$ est non caractéristique et que les caractéristiques issues de $T:x_0=x_1=0$ sont simples, c'est-à-dire que l'équation $g(0;\lambda,1,0,...,0)=0$ admet deux racines λ_1,λ_2 distinctes, permet alors de voir qu'il y a exactement deux hypersurface caractéristique pour $a(x,D)$.
On note $k_i(i=1,2)$ la solution du problème de Cauchy du premier ordre

$$\begin{cases}g(x,\nabla k_i(x))=0\\ k_i(x)=x_1\text{pour } x_0=0\\ \nabla k_i(0)=(\lambda_i,1,0,...,0)\end{cases}$$

Et K_i les hypersurfaces caractéristiques, c'est une des droites de $\mathbb{C}^2 = \{(x_0, x_1)\}$ issues de T d'après [8].

Soit v une fonction holomorphe ramifiée autour de $K_1 \cup K_2$.

Ceci signifie que v est de la forme $v(x) = \hat{v}(k_1(x), k_2(x), x)$ où $\hat{v} : R_\delta^2 \times \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe, Ω désignant un voisinage ouvert connexe de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Quitte à réduire Ω, on peut supposer les fonctions k_i holomorphes dans Ω et telle que $| k_i(x) | < \delta \quad \forall x \in \Omega$.

La fonction v est alors définie et holomorphe sur le revêtement universel de $\Omega - K_1 \cup K_2$.

On se propose de construire des solutions de l'équation

$$P(x, D)u = v \tag{2.6}$$

présentant des singularités sur $K_1 \cup K_2$pour obtenir un tel résultat, des hypothèses de croissance seront nécessaires.[17]

En plus la présence de dérivées d'ordre deux dans la partie non linéaire de l'opérateur $P(x, D)$ nécessite, comme dans [26] et [16], une estimation de toutes les dérivées de $u(t_1, t_2, x)$ par rapport aux variables t_1 et t_2 [17].

Soit $\pi : R_\delta \to \dot{D}_\delta$la surjection canonique. On notera $| \bullet | : R \to \mathbb{R}_+^*$ la fonction $| t | = | \pi(t) |$.

Chapitre 3

Algèbres de Banach associées à la fonction de Lax

3.1 Fonction de Lax et ses propriétés

Définition 3.1.1 *[23]*

On appelle fonction majorante de Lax :

$\theta(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{(n+1)^2}$ *et pour* $R > 0$, $\varphi_R(\xi) = \theta(\xi/R)$ *et que* $\xi = x_0 + x_1 + ... + x_n$

Proposition 3.1.1 *[8]*

Il existe une constante $c_0 \geq 0$ *telle que*

$$\theta^2(\xi) \ll c_0\theta(\xi) \tag{3.1}$$

Preuve. Majorons le coefficient de ξ^n dans $\theta^2(\xi)$ et d'après 3.1 :

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(j+1)^2} \times \frac{1}{(n-j+1)^2} \leq 2 \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{(j+1)^2} \times \frac{1}{(n-j+1)^2}$$

d'où $n - j + 1 \geq \frac{n+2}{2} \Rightarrow \frac{2}{2+n} \geq \frac{1}{n-j+1} \Rightarrow \frac{4}{(2+n)^2} \geq \frac{1}{(n-j+1)^2}$ alors :

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(j+1)^2} \frac{1}{(n-j+1)^2} \leq 2 \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{(j+1)^2} \frac{4}{(2+n)^2}$$

d'où $2(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2}) \times \frac{4}{(2+n)^2} \times (n+1)^2 \leq c_0 \leq 8(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2}) \times (\frac{n+1}{n+2})^2 \leq c_0$

Il suffit de prendre $n = 0$

$$c_0 = 2 \times (\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2}) > 0$$

□

Proposition 3.1.2 *[17]*

On a

$$\varphi_R^2(\xi) \ll c_0 \varphi_R(\xi) \tag{3.2}$$

Preuve. On a d'après (la définition 3.1), $\exists c_0 \geqslant 0$; $R > 0$ tel que R paramètre Réel
$\varphi_R^2(\xi) = \theta^2(\xi/R) \ll c_0\theta(\xi/R) \Rightarrow \varphi_R^2(\xi) \ll c_0\varphi_R(\xi)$ □

On notera $\mathbf{B}_R(\xi)$ l'espace de Banach associé à la fonction majorante $\varphi_R(\xi)$

corollaire 3.1.1 *[25],[8]*

Les espaces $\boldsymbol{B}_R(\xi)$ sont des Algèbres de Banach.

$$\boldsymbol{B}_R(\xi) = \{u \in \mathbb{C}\{x\} \text{ tel que} : \exists c \geqslant 0; u \ll c\varphi_R(\xi)\}$$

Munies de la norme définie par :

$$\|u\| = \min\{c \geqslant 0; u \ll c\varphi_R(\xi)\}$$

$\boldsymbol{B}_R(\xi)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}\{x\}$ et que $\mathbb{C}\{x\} = \cup_{R>0}\boldsymbol{B}_R(\xi)$

Lemme 3.1.1

Toute fonction de $\boldsymbol{B}_R(\xi)$ est holomorphe au voisinage de l'origine et inversement pour ξ fixé toute fonction holomorphe au voisinage de l'origine est un élément de $\boldsymbol{B}_R(\xi)$ pour R suffisamment petit.

Lemme 3.1.2 *[17],[25]*

Soit $\eta > 1$, il existe une constante $c = c(\eta) \geq 0$ telle que

$$\Phi_{\eta R}(\xi) \equiv \frac{\eta R}{\eta R - \xi} \ll c\varphi_R(\xi)$$

Si a est une fonction holomorphe et bornée dans le polydisque

$$\Delta_{\eta R} = \{x \in \mathbb{C}^{n+1}; \max_{0 \leqslant j \leqslant n} | x_j | < \eta R\}$$

On a d'après les inégalités de Cauchy

$$a \ll M\frac{\eta R}{\eta R - \xi} \ll Mc(\eta)\varphi_R(\xi) \tag{3.3}$$

Où $\xi = x_0 + x_1 + ... + x_n$ et $M = \sup_{x \in \Delta_{\eta R}} | a(x) |$.

Preuve. Soit $\eta > 1$, il existe une constante $c = c(\eta) \geq 0$ telle que

$$\Phi_{\eta R}(\xi) \equiv \frac{\eta R}{\eta R - \xi} \ll c\varphi_R(\xi)$$

cette majoration signifie que

$$\frac{1}{(\eta R)^n} \leq c(\eta)\frac{1}{R^n}\frac{1}{(n+1)^2}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

elle est donc vérifiée avec

$$c(\eta) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n+1)^2}{\eta^n}.$$

Si a est une fonction holomorphe et bornée dans le polydisque , d'après les inégalités de Cauchy :

$$|\, D^\alpha a(0)\, | \leq M\frac{\xi^\alpha}{(\eta R)^{|\alpha|}}\alpha! \qquad \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$$

$$\begin{aligned} a(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} \frac{|\, D^\alpha a(0)\, |}{\alpha!}x^\alpha &\ll \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n+1}} M\frac{\xi^\alpha}{(\eta R)^{|\alpha|}}x^\alpha \\ &\ll M\frac{\eta R}{\eta R - \xi} \ll Mc(\eta)\varphi_R(\xi) \end{aligned}$$

□

Lemme 3.1.3 *[17],[14]*

Soit $\eta > 1$, il existe une constante $c = c(\eta) \geq 0$ telle que

$$\frac{\eta R}{\eta R - \xi} \ll c\eta^p\frac{R^p}{p!}D^p\varphi_R(\xi) \quad \forall p \geqslant 0$$

Preuve. cette inégalité s'écrit

$$\frac{\xi^p}{(\eta R)^p} \leq c\frac{(n+p)!}{(\eta R)^p n!}\frac{\xi^p}{(n+p+1)^2}$$

et est vérifiée en prenant

$$c = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\eta^p}\frac{n!}{(n+p)!}(n+p+1)^2$$

$$\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{\xi^p}{(\eta R)^p} \leq c\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{(n+p)!}{(\eta R)^n n! p!}\frac{\xi^p}{(n+p+1)^2}$$

On a :

$$\frac{\eta R}{\eta R - \xi} = \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{\xi^p}{(\eta R)^p} \text{ et } D^p\varphi_R(\xi) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{(n+p)!}{(\eta R)^p n! p!}\frac{\xi^p}{(n+p+1)^2}.$$

ceci implique

$$\frac{\eta R}{\eta R-\xi} \leq cD^p\varphi_R(\xi) \leq c\frac{(\eta R)^p}{p!}D^p\varphi_R(\xi)$$

donc

$$\frac{\eta R}{\eta R-\xi} \ll c\frac{(\eta R)^p}{p!}D^p\varphi_R(\xi).$$

□

Lemme 3.1.4 *[17]*

Il existe une constante $c \geqslant 0$ telle que

$$D^p\varphi_R(\xi) \ll cRD^{p+1}\varphi_R(\xi) \quad \forall p \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
D^p\varphi_R(\xi) &= D^p(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n}{R^n(n+1)^2}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)....(n-p+1)\xi^{n-p}}{R^n(n+1)^2} \\
&= \sum_{n=p}^{\infty}\frac{n!}{(n-p)!}\frac{\xi^{n-p}}{R^n(n+1)^2}) \leq \int_0^{\xi} D^{p+1}\varphi_R(t)dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=p}^{\infty}\frac{n!}{(n-p)!}\frac{\xi^{n-p}}{R^n(n+1)^2}) &\ll \sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{n!}{(n-p-1)!}\frac{\xi^{n-p+1}}{(n-p+1)})\frac{1}{R^n(n+1)^2} \\
&\ll \sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{n!}{(n-p-1)!}\frac{\xi^{n-p+1}}{(n-p)!R^n(n+1)^2} \\
&\ll R\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{n!}{(n-p)!}\frac{n-p}{(n-p)!}\frac{\xi^{n-p}}{R^n(n+1)^2} \\
&\ll cR\sum_{n=p}^{\infty}\frac{n!}{(n-p)!}\frac{n-p}{n-p+1}\frac{\xi^{n-p}}{R^n(n+1)^2} = cR\sum_{n=p}^{\infty}\frac{n!}{(n-p+1)!}\frac{\xi^{n-p+1}}{(n-p+1)!R^n(n+1)^2} \\
&\ll cRD^{p+1}\varphi_R(\xi)
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.1.5 *[25]*

Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$D^{-k}\varphi_R(\xi) \ll cR^k\varphi_R(\xi) \textit{ pour tout } R > 0 \textit{ et tout } k \in \mathbb{N}.$$

Preuve. On a en effet

$$D^{-k}\varphi_R(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \frac{1}{R^n} \frac{n!}{(n+k)!} \xi^{n+k}$$

et l'inégalité cherchée s'écrit :

$$c \geq \left(\frac{n+k+1}{n+1} \right)^2 \frac{n!}{(n+1)!} \qquad (n, k \in \mathbb{N})$$

Cette dernière fonction étant décroissante par rapport à n, Il suffit de choisir

$$c = \sup_k \frac{(k+1)^2}{k!}$$

Donc

$$D^{-k}\varphi_R(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_R(\xi) \frac{n!}{(n+k)!} \xi^k \leq cR^k \varphi_R(\xi) \text{ car } \xi < R.$$

□

3.2 Classes de fonctions spéciales

Définition 3.2.1 *[17]*

Soient $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et Ω un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$. On note $G^{a_1,a_2}(R_\delta^2 \times \Omega)$ l'espace des fonctions $u : R_\delta^2 \times \Omega \to \mathbb{C}^{n+1}$ holomorphes, il existe une constante $c \geq 0$ tel que pour tout $(t_1, t_2, x) \in R_\delta^2 \times \Omega$ et $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$

$$\mid D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2} u(t_1, t_2, x) \mid \leqslant c^{p_1+p_2+1} p_1! p_2! \mid t_1 \mid^{a_1-p_1} \mid t_2 \mid^{a_2-p_2}. \tag{3.5}$$

Cas particulier si $(p_1, p_2) = (0, 0)$

Définition 3.2.2 *[17]*

Si $u \in G^{a_1,a_2}(R_\delta^2 \times \Omega)$, alors

$$\mid u(t_1, t_2, x) \mid \leqslant c \mid t_1 \mid^{a_1} \mid t_2 \mid^{a_2} \qquad \forall\ (t_1, t_2, x) \in R_\delta^2 \times \Omega.$$

On a alors le théorème

Théorème 3.2.1 *[17]*

Soient $a_1, a_2 \geqslant \frac{1}{q}$ et Ω un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, il existe un voisinage ouvert Ω' de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que, pour toute fonction $v \in G^{a_1,a_2}(R_\delta^2 \times \Omega)$, il existe $\delta_1 > 0$ et une solution $u \in G^{a_1+1,a_2+1}(R_{\delta_1}^2 \times \Omega')$ du problème (2.6).

Définition 3.2.3 *[19]*

$H^{a_1,a_2}(R^2_\delta \times \Omega)$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions $u : R^2_\delta \times \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphes telles qu'il existe une constante $c \geqslant 0$.

$$| u(t_1, t_2, x) | \leqslant c \mid t_1 \mid^{a_1} \mid t_2 \mid^{a_2} \quad \forall (t_1, t_2, x) \in R^2_\delta \times \Omega. \tag{3.6}$$

On a des résultats très important, La remarque 2.0.1 se traduit alors par
$G^{a_1,a_2}(R^2_\delta \times \Omega) \subset H^{a_1,a_2}(R^2_\delta \times \Omega)$.
Réciproquement, on a le lemme suivant

Lemme 3.2.1 *[19]*

L'espace $H^{a_1,a_2}(R^2_\delta \times \Omega)$ est inclus dans l'espace $G^{a_1,a_2}(R^2_{\delta'} \times \Omega)$ pour tout $0 < \delta' < \delta$.

Preuve. Soit $0 < \delta' < \delta$, il existe $0 < \lambda < 1$ tel que, pour $t \in R_{\delta'}$, le disque centré au point t et de rayon $\epsilon = \lambda|t|$ soit tracé dans R_δ.
Si γ_i désigne le bord du disque de centre t_i est de rayon $\epsilon_i = \lambda|t_i|$,pour $\gamma_i = t_i + \lambda|t_i|e^{i\varphi}$ on a

$$D^{p_1}_{t_1} D^{p_2}_{t_2} u(t_1, t_2, x) = \frac{-p_1!p_2!}{4\pi^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{u(\tau_1, \tau_2, x)}{(\tau_1 - t_1)^{p_1+1} (\tau_2 - t_2)^{p_2+1}} d\tau_1 d\tau_2$$

et, vu que $u \in H^{a_1,a_2}(R^2_\delta \times \Omega)$,on pose $c^* = \max(\frac{|u(t_1, t_2, x)|}{|t_1|^{a_1}|t_2|^{a_2}})$tel que

$$\begin{aligned}
|D^{p_1}_{t_1} D^{p_2}_{t_2} u(t_1, t_2, x)| &\leq \frac{-p_1!p_2!}{4\pi^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{|u(\tau_1, \tau_2, x)|}{|\tau_1 - t_1|^{p_1+1} |\tau_2 - t_2|^{p_2+1}} d\tau_1 d\tau_2 \\
&\leq \frac{-p_1!p_2!}{4\pi^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} c^* \frac{|\tau_1|^{a_1} |\tau_2|^{a_2}}{|\tau_1 - t_1|^{p_1+1} |\tau_2 - t_2|^{p_2+1}} d\tau_1 d\tau_2 \\
&\leq c^* \frac{-p_1!p_2!}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|t_1 + \lambda|t_1|e^{i\varphi}|^{a_1} |t_2 + \lambda|t_2|e^{i\varphi}|^{a_2}}{|t_1 + \lambda|t_1|e^{i\varphi} - t_1|^{p_1+1} |t_2 + \lambda|t_2|e^{i\varphi} - t_2|^{p_2+1}} \\
&(-\lambda^2 |t_1||t_2| e^{2i\varphi}) d\varphi d\varphi \\
&\leq c^* \frac{p_1!p_2!}{4\pi^2 \epsilon_1^{p_1} \epsilon_2^{p_2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |t_1 + \lambda|t_1|e^{i\varphi}|^{a_1} |t_2 + \lambda|t_2|e^{i\varphi}|^{a_2} d\varphi d\varphi
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy

$$|D^{p_1}_{t_1} D^{p_2}_{t_2} u(t_1, t_2, x)| \leq c^* \frac{p_1!p_2!}{\epsilon_1^{p_1} \epsilon_2^{p_2}} \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi} |t_1 + \epsilon_1 e^{i\varphi}|^{a_1} \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi} |t_2 + \epsilon_2 e^{i\varphi}|^{a_2}$$

il existe $c > 0$ tel que $c = \max(c^*(1+\lambda)^{a_1+a_2}, \frac{1}{\lambda}) \forall p_1, p_2 \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
|D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2} u(t_1,t_2,x)| &\leq c^* \frac{p_1!p_2!}{\epsilon_1^{p_1}\epsilon_2^{p_2}} \sup_{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi} |t_1+\epsilon_1 e^{i\varphi}|^{a_1} \sup_{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi} |t_2+\epsilon_2 e^{i\varphi}|^{a_2} \\
&\leq c^* \frac{p_1!p_2!}{\epsilon_1^{p_1}\epsilon_2^{p_2}} |t_1+\epsilon_1|^{a_1}|t_2+\epsilon_2|^{a_2} \\
&\leq c^* \frac{p_1!p_2!}{\epsilon_1^{p_1}\epsilon_2^{p_2}} |t_1|^{a_1}(1+\frac{\epsilon_1}{|t_1|})^{a_1}|t_2|^{a_2}(1+\frac{\epsilon_2}{|t_2|})^{a_2} \\
&\leq c^* \frac{p_1!p_2!}{\lambda^{p_1+p_2}} |t_1|^{a_1-p_1}(1+\lambda)^{a_1}|t_2|^{a_2-p_2}(1+\lambda)^{a_2} \\
&\leq c^*(1+\lambda)^{a_1+a_2} p_1!p_2! \frac{1}{\lambda}^{p_1}\frac{1}{\lambda}^{p_2} |t_1|^{a_1-p_1}|t_2|^{a_2-p_2} \\
&\leq c^{1+p_1+p_2} p_1!p_2! |t_1|^{a_1-p_1}|t_2|^{a_2-p_2}
\end{aligned}$$

Du théorème 3.2.1 on déduit alors le □

Théorème 3.2.2 *[17]*

Soient $a_1, a_2 \geqslant \frac{1}{q}$ et Ω en voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, il existe un voisinage ouvert Ω' de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que, pour tout fonction $v \in H^{a_1,a_2}(R_\delta^2 \times \Omega)$, il existe $\delta_1 > 0$ et une solution $u \in H^{a_1+1,a_2+1}(R_{\delta_1}^2 \times \Omega')$ du problème (2.6)

Remarque 3.2.1 *[17]*

Lorsque les coefficients a_α sont des fonctions holomorphes quelconques, c'est-à-dire $q = 1$, les hypothèses de régularité minimales du théorème 3.2.1 et 3.2.2 sont les mêmes que celle exprimées dans[10] et [16] (pour le cas d'une ramification autour d'une hypersurface caractéristique simple qui ne dépend pas du second membre).

3.3 Les Algèbres G^{a_1,a_2}

Définition 3.3.1 *[17]*

On définit des inverses à droite des opérateurs de dérivation D_{t_1} et D_{t_2}, $t_i \in R_\delta$.
Si $u \in H^{a_1,a_2}(R_\delta^2 \times \Omega)$ et $a_i > -1$, on pose

$$D_{t_1}^{-1} u(t_1,t_2,x) = \int_0^{t_1} u(\tau,t_2,x)d\tau = \int_0^1 u(st_1,t_2,x)t_1 ds \tag{3.7}$$

et

$$D_{t_2}^{-1} u(t_1,t_2,x) = \int_0^{t_2} u(t_1,\tau,x)d\tau = \int_0^1 u(t_1,st_2,x)t_2 ds \tag{3.8}$$

On Considère une fonction $u \in G^{a_1,a_2}(R_\delta^2 \times \Omega)$ et soit $\eta > 1, R > 0$ tel que Ω contienne le polydisque $\Delta_{\eta R}$. D'après les inégalités de Cauchy, si u vérifie (3.5) on a pour tout $t_1, t_2 \in R_\delta$ et $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$

$$D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2} u(t_1,t_2,x) \ll c^{p_1+p_2+1} p_1! p_2! |t_1|^{a_1-p_1} |t_2|^{a_2-p_2} \frac{\eta R}{\eta R - \xi}.$$

et d'après le lemme 3.1.3, il existe donc une constante $c \geq 0$ telle que

$$D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2} u(t_1,t_2,x) \ll c^{p_1+p_2+1} |t_1|^{a_1-p_1} |t_2|^{a_2-p_2} D^{p_1+p_2} \varphi_R(\xi) \tag{3.9}$$

donc $u \in G^{a_1,a_2}(R_\delta^2 \times \{0\})$.
Réciproquement, on a le lemme suivant.

Lemme 3.3.1 *[17][14]*
soit u une fonction holomorphe au voisinage de $R_\delta^2 \times \{0\}$ vérifiant (3.9); alors la fonction u est holomorphe dans $R_\delta^2 \times \Omega_R$
où $\Omega_R = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} |x_0| + |x_1| + ... + |x_n| < R\}$

Preuve. pour tout $(t_1,t_2,x) \in R_\delta^2 \times \Omega_r$, $0 < r < R$. on a

$$| D_{t_1}^{P_1} D_{t_2}^{p_2} u(t_1,t_2,x) | \leq c^{p_1+p_2+1} \mid t_1 \mid^{\alpha_1-p_1} \mid t_2 \mid^{\alpha_2-p_2} D^{p_1+p_2} \varphi_R(r)$$

où
$D^{p_1+p_2}\varphi_R(r) \leqslant c^{p_1+p_2+1}(p_1+p_2)! \leqslant (2c)^{p_1+p_2+1} p_1! p_2!$.
Donc

$$D_{t_1}^{P_1} D_{t_2}^{p_2} u(t_1,t_2,x) \ll c^{p_1+p_2+1} \mid t_1 \mid^{\alpha_1-p_1} \mid t_2 \mid^{\alpha_2-p_2} p_1! p_2!$$

ce qui prouve que u appartient l'espace $G^{a_1,a_2}(R_\delta^2 \times \Omega_r)$. □

Notation.- On note c; toute constante qui ne dépend pas des paramètres δ, ω et L.
Grâce à un raisonnement analogue à la démonstration de lemme 4.2 de [16], on vérifie que toute fonction de l'espace $G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$ est holomorphe sur l'ouvert

$$V = \{(t_1,t_2,x) \in R_\delta^2 \times \mathbb{C}^{n+1};\ w(|t_1|+|t_2|) + \mid x_0 \mid + \mid x_1 \mid + ... + \mid x_n \mid < R\}$$

Remarque 3.3.1
φ_R est une fonction majorante de rayon de convergence $R > 0$, la fonction $\xi \mapsto \varphi_R(w(|t_1| + |t_2|) + \xi)$ est bien définie et holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ et

$$\varphi_R(w(|t_1|+|t_2|)+\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(w(|t_1|+|t_2|))^p}{p!} D^p \varphi_R(\xi).$$

Il en résulte que $\varphi_R(\xi) \ll \varphi_R(w(|t_1|+|t_2|)+\xi)$

Ceci conduit à la définition suivante.

Définition 3.3.2 *[17]*
Soient $\delta > 0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et $R, L, w > 0$ tel que $2w\delta < R$. On note $G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$ l'ensemble des fonctions u holomorphes au voisinage de $R_\delta^2 \times \{0\}$ telles qu'il existe une constante $c \geq 0$ telle que, pour tout $t_1, t_2 \in R_\delta$ et $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$, on a

$$D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2} u(t_1, t_2, x) \ll cL^{p_1+p_2}|t_1|^{a_1-p_1}|t_2|^{a_2-p_2}D^{p_1+p_2}\varphi_R(w(|t_1|+|t_2|)+\xi) \tag{3.10}$$

Il est clair que $G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$ est un espace vectoriel et que la plus petite constante $c \geq 0$ pour laquelle (3.10) a lieu est une norme sur cet espace vectoriel, notée $\| \bullet \|_{G^{a_1,a_2}}$

Proposition 3.3.1 *[20]*
L'espace $G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$ est un espace de Banach.

Preuve. Soit (u_n) suite de Cauchy de l'espace $G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$, c-à-dire
$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N_0$ et tout $t_1, t_2 \in R_\delta^2$

$$D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2}(u_p - u_q) \ll \varepsilon L^{p_1+p_2}|t_1|^{a_1-p_1}|t_2|^{a_2-p_2}D^{p_1+p_2}\varphi_R(w(|t_1|+|t_2|)+\xi) \tag{3.11}$$

Si K est une partie compact de V, on en déduit que :

$$\sup_{(t_1,t_2,x)\in K} |(u_p - u_q)(t_1, t_2, x)| \leq \varepsilon c_K$$

Où $c_K = \sup_{(t_1,t_2,x)\in K} |t_1|^{a_1}|t_2|^{a_2}\varphi_R(w(|t_1|+|t_2|)+\xi)$ est $< +\infty$ car l'application

$$(t_1, t_2, x) \to |t_1|^{a_1}|t_2|^{a_2}\varphi_R(w(|t_1|+|t_2|)+\xi)$$

est continue sur V.
Ceci prouve que la suite u_n est une suite de Cauchy dans l'espace $H^{a_1,a_2}(V)$, muni de la topologie de la convergence compacte.
Cette suite converge uniformément sur $K \subset V$ vers une fonction holomorphe.
$u : V \mapsto \mathbb{C}^{n+1}$, $u \in H^{a_1,a_2}$ d'après l'inégalité (3.11)

$$\forall p_1, p_2 \in \mathbb{N}, \forall (t_1, t_2) \in R_\delta^2 \text{ et tout } p, q \geq N_0$$

$$|D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2}(u_p(t_1, t_2, 0) - u_q(t_1, t_2, 0))| \leq \varepsilon |t_1|^{a_1}|t_2|^{a_2}D^{p_1+p_2}\varphi_R(w(|\,t_1|+|t_2|))$$

Si q tende vers l'infinie, on déduit

$$|D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2} u_p(t_1, t_2, 0) - D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2} u(t_1, t_2, 0)\,| \leq \varepsilon |t_1|^{a_1}|t_2|^{a_2}D^{p_1+p_2}\varphi_R(w(|\,t_1|+|t_2|))$$

c'est-à-dire : $\forall (t_1, t_2) \in R^2_\delta$

$$u_p - u \ll \varepsilon |t_1|^{a_1} |t_2|^{a_2} \varphi_R(w(|t_1| + |t_2| + \xi))$$

et on en déduit que (u_n) converge vers u dans G^{a_1,a_2}. □

Lemme 3.3.2 *[20]*
L'application $D_{t_1} D_{t_2} : G^{a_1,a_2}_{\varphi_R} \to G^{a_1-1,a_2-1}_{D\varphi_R}$ *; est linéaire continue de norme* $\leq L$.

Preuve. Soient $u \in G^{a_1,a_2}$ et $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$, on a :

$$D^{p_1}_{t_1} D^{p_2}_{t_2} u(t_1, t_2, x) \ll c L^{p_1+p_2} |t_1|^{a_1-p_1} |t_2|^{a_2-p_2} D^{p_1+p_2} \varphi_R(w(|t_1| + |t_2|) + \xi)$$

Ceci implique

$$D^{p_1+1}_{t_1} D^{p_2+1}_{t_2} u(t_1, t_2, x) \ll \| u \|_{G^{a_1,a_2}} L^{p_1+p_2+2} |t_1|^{a_1-(p_1+1)} |t_2|^{a_2-(p_2+1)} D^{p_1+p_2+2} \varphi_R(w(|t_1|+|t_2|)+\xi)$$

C'est-à-dire le résultat voulu

$$D^{p_1}_{t_1} D^{p_2}_{t_2} D_{t_1} D_{t_2} u(t_1, t_2, x) \ll L^2 \| u \|_{G^{a_1,a_2}} L^{p_1+p_2} |t_1|^{a_1-1-p_1} |t_2|^{a_2-1-p_2} D^{p_1+p_2} D^2 \varphi_R(w(| t_1|+|t_2|)+\xi)$$

□

Lemme 3.3.3 *[20]*
L'application $D^{-1}_{t_1} D^{-1}_{t_2} : G^{a_1,a_2}_{D\varphi_R} \to G^{a_1,a_2}_{\varphi_R}$ *; est linéaire continue de norme* $\leq max(\delta^2 L^{-1}, w^{-1})$.

Preuve. Soient $u \in G^{a_1,a_2}_{D\varphi_R}$ et $(p_1, p_2) \in \mathbb{N}$. Si $(p_1, p_2) \geq 1$, on a
$D^{p_1-1}_{t_1} D^{p_2-1}_{t_2} u(t_1, t_2, x) = D^{p_1}_{t_1} D^{p_2}_{t_2} D^{-1}_{t_1} D^{-1}_{t_2} u(t_1, t_2, x)$

$$\begin{aligned} D^{p_1}_{t_1} D^{p_2}_{t_2} D^{-1}_{t_1} D^{-1}_{t_2} u(t_1, t_2, x) &\ll \| u \|_{G^{a_1,a_2}} L^{p_1+p_2-2} |t_1|^{a_1-p_1+1} |t_2|^{a_2-p_2+1} D^{p_1+p_2} \varphi_R(w(|t_1| + |t_2|) + \xi) \\ &\ll \delta^2 L^{-2} \| u \|_{G^{a_1,a_2}} L^{p_1+p_2} |t_1|^{a_1-p_1} |t_2|^{a_2-p_2} D^{p_1+p_2} \varphi_R(w(|t_1| + |t_2|) + \xi) \\ &\ll \delta^2 L^{-1} \| u \|_{G^{a_1,a_2}} L^{p_1+p_2} |t_1|^{a_1-p_1} |t_2|^{a_2-p_2} D^{p_1+p_2} \varphi_R(w(|t_1| + |t_2|) + \xi) \end{aligned}$$

On Suppose en suite $(p_1 + p_2) = 0$, pour tout $(t_1, t_2) \in R^2_\delta$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a :

$$|D^\alpha u(t_1, t_2, 0)| \leq \| u \|_{G^{a_1,a_2}} |t_1|^{a_1} |t_2|^{a_2} D^{|\alpha|+1} \varphi_R(w(|t_1| + |t_2|))$$

d'où :

$$\begin{aligned} |D^\alpha D^{-1}_{t_1} D^{-1}_{t_2} u(t_1, t_2, 0)| &\leq \| u \|_{G^{a_1,a_2}} |t_1|^{a_1} |t_2|^{a_2} \int_0^1 \int_0^1 D^{|\alpha|+1} \varphi_R(ws(|t_1| + |t_2|)) |t_1||t_2| ds ds \\ &\leq w^{-1} \| u \|_{G^{a_1,a_2}} |t_1|^{a_1} |t_2|^{a_2} D^{|\alpha|} \varphi_R(w(|t_1| + |t_2|)) \end{aligned}$$

Soit $D^{-1}_{t_1} D^{-1}_{t_2} u \ll w^{-1} \| u \|_{G^{a_1,a_2}} \varphi_R(w(|t_1| + |t_2|) + \xi)$.
Ce qui prouve le lemme. □

Remarque 3.3.2 *[17]*

Si $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ *et* $a_i \leqslant b_i$*, alors* $G^{b_1,b_2}(\delta, L, w) \subset G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$ *et l'injection canonique est linéaire continue de norme* $\leq \delta^{b_1+b_2-a_1-a_2}$.

Proposition 3.3.2 *[17]*

Soient $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ *et* $(u, v) \in (G^{a_1,a_2} \times G^{b_1,b_2})(\delta, L, w)$*, alors*
$uv \in G^{a_1+b_1,a_2+b_2}(\delta, L, w)$ *et*

$$\|uv\|_{G^{a_1+b_1,a_2+b_2}} \leqslant c_0 \|u\|_{G^{a_1,a_2}} \|v\|_{G^{b_1,b_2}} \tag{3.12}$$

Où c_0 *est la constante telle que* $\varphi_R^2 \ll c_0 \varphi_R$

Preuve. Pour tout $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$,d'après la formule de Leibnitz, on a

$$D_{t_1}^{P_1} D_{t_2}^{p_2}(uv) = \sum_{j=0}^{p_1} \sum_{j=0}^{p_2} \begin{pmatrix} p_1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ j \end{pmatrix} D_{t_1}^{p_1-i} D_{t_2}^{p_2-j} u D_{t_1}^{i} D_{t_2}^{j} v$$

d'où

$$\begin{aligned}
|D_{t_1}^{P_1} D_{t_2}^{p_2}(uv)| &\leq \sum_{j=0}^{p_1} \sum_{j=0}^{p_2} \begin{pmatrix} p_1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ j \end{pmatrix} | D_{t_1}^{p_1-i} D_{t_2}^{p_2-j} u || D_{t_1}^{i} D_{t_2}^{j} v| \\
&\leq \sum_{j=0}^{p_1} \sum_{j=0}^{p_2} \begin{pmatrix} p_1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ j \end{pmatrix} \| u \| L^{p_1-i+p_2-j} |t_1|^{a_1-p_1+i} |t_2|^{a_2-p_2+j} D^{p_1-i+p_2-j} \\
&\varphi_R(w(|t_1| + |t_2|) + \xi) \| v \| L^{i+j} |t_1|^{b_1-i} |t_2|^{b_2-j} D^{i+j} \varphi_R(w(|t_1| + |t_2|) + \xi) \\
&\leq \sum_{j=0}^{p_1} \sum_{j=0}^{p_2} \begin{pmatrix} p_1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ j \end{pmatrix} \| u \|\| v \| L^{p_1+p_2} |t_1|^{a_1+b_1-p_1} |t_2|^{a_2+b_2-p_2} (D^{p_1+p_2-i-j} \varphi_R D^{i+j} \varphi_R) \\
&(w(|t| + |t|) + \xi)
\end{aligned}$$

et, d'après(3.2), on a

$$\sum_{j=0}^{p_1} \sum_{j=0}^{p_2} \begin{pmatrix} p_1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ j \end{pmatrix} (D^{p_1+p_2-i-j} \varphi_R D^{i+j} \varphi_R)(w(|t_1| + |t_2|) + \xi) \ll c_0 D^{p_1+p_2} \varphi_R(w(|t_1| + |t_2|) + \xi)$$

et que

$$D_{t_1}^{P_1} D_{t_2}^{p_2}(uv) \ll c_0 \|u\| \|v\| L^{p_1+p_2} |t_1|^{a_1+b_1-p_1} |t_2|^{a_1+b_1-p_1} \varphi_R(w(|t_1| + |t_2|) + \xi)$$

□

ce qui permet de conclure.

Si $u, v \in G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$ alors $uv \in G^{2a_1,2a_2}(\delta, L, w) \subset G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$ lorsque $a_1, a_2 \geqslant 0$.On en déduit que $G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$ est une algèbre de Banach.

Chapitre 4

Construction de la solution ramifiée

Lemme 4.0.1 *[17]*
Les opérateurs D_{t_j} et $D_{t_i}^{-1}, i \neq j$ commutent, ainsi que $D_{t_1}^{-1}$ et $D_{t_2}^{-1}$.

Preuve. on trouve deux cas :

- $D_{t_1} D_{t_2}^{-1} = D_{t_2}^{-1} D_{t_1}$
  $D_{t_2}^{-1} u(t_1, t_2, x) = \int_0^1 u(t_1, st_2, x) t_2 ds$
  par suite, et d'après l'holomorphie de u on a

$$D_{t_1} \int_0^1 u(t_1, st_2, x) t_2 ds = \int_0^1 D_{t_1} u(t_1, st_2, x) t_2 ds \qquad ....(1)$$

  on a

$$D_{t_2}^{-1} D_{t_1} u(t_1, t_2, x) = \int_0^1 D_{t_1} u(t_1, st_2, x) t_2 ds \qquad ....(2)$$

  On remarque que (1)=(2)

- $D_{t_2} D_{t_1}^{-1} = D_{t_1}^{-1} D_{t_2}$
  $D_{t_1}^{-1} u(t_1, t_2, x) = \int_0^1 u(st_1, t_2, x) t_1 ds$
  par suit, et d'après l'holomorphie de u on a

$$D_{t_2} \int_0^1 u(st_1, t_2, x) t_1 ds = \int_0^1 D_{t_1} u(st_1, t_2, x) t_1 ds \qquad ....(1)$$

  on a

$$D_{t_1}^{-1} D_{t_2} u(t_1, t_2, x) = \int_0^1 D_{t_2} u(st_1, t_2, x) t_1 ds \qquad ....(2)$$

  On remarque que (1)=(2)

donc $D_{t_i}^{-1}D_{t_j} = D_{t_j}D_{t_i}^{-1},\ i \neq j$

□

Proposition 4.0.1 *[17]*
Si u vérifie (3.5), Alors $D_{t_2}^{-1}u$ appartient a $G^{a_1,a_2+1}(R_\delta^2 \times \Omega)$ et $D_{t_1}^{-1}u \in G^{a_1+1,a_2}(R_\delta^2 \times \Omega)$

Preuve. on a pour $p_2 = 0$

$$|D_{t_1}^{p_1}u(t_1,t_2,x)| \leqslant c^{p_1+1}p_1!p|t_1|^{a_1-p_1}|t_2|^{a_2}.$$

si en utilise l'opérateur de dérivation $D_{t_2}^{-1}$, on trouve

$$|D_{t_2}^{-1}D_{t_1}^{p_1}u(t_1,t_2,x)| \leqslant \frac{c^{p_1+1}}{a_2+1}p_1!|t_1|^{a_1-p_1}|t_2|^{a_2+1}.$$

et pour $p_2 \geq 1$, on a $p_2 - 1 \in \mathbb{N}$,

$$|D_{t_2}^{p_2-1}D_{t_1}^{p_1}u(t_1,t_2,x)| \leqslant c^{p_1+p_2}p_1!(p_2-1)!|t_1|^{a_1-p_1}|t_2|^{a_2+1-p_2}.$$

ce qui prouve que $D_{t_2}^{-1}u$ appartient a $G^{a_1,a_2+1}(R_\delta^2 \times \Omega)$ et de même on a
$D_{t_1}^{-1}u \in G^{a_1+1,a_2}(R_\delta^2 \times \Omega)$ □

On cherche une solution de (2.6) de la forme

$$U(k_1(x),k_2(x),x) = D_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{-1}u(k_1(x),k_2(x),x).$$

Pour toute fonction holomorphe $u : R_\delta^2 \times \Omega \to \mathbb{C}$, on a

$$\begin{cases} a(x,D)U(k_1,k_2,x) = [a_0(x) + P_1(x,D)D_{t_1}^{-1} + Q_1(x,D)D_{t_2}^{-1} + P_2(x,D)D_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{-1}]u(t_1,t_2,x) \\ \qquad\qquad \text{pour } t_i = k_i(x) \end{cases} \tag{4.1}$$

où Q_1 et P_l ,$(l = (1,2))$ sont des opérateurs différentiels linéaires d'ordre $\leqslant l$ et la fonction holomorphe a_0 est donnée par la formule

$$a_0(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial g}{\partial \xi_j}(x, Dk_1(x)) \times D_j k_2(x) \tag{4.2}$$

Cette fonction est non nulle au voisinage de l'origine, En effet

$$a_0(0) = \frac{\partial g}{\partial \xi_0}(0, Dk_1(0))\lambda_2 + \frac{\partial g}{\partial \xi_1}(0, Dk_1(0)) \qquad (1)$$

Et d'après l'identité d'Euler, On a

$$\lambda_2 \frac{\partial g}{\partial \xi_0}(0, Dk_1(0)) + \frac{\partial g}{\partial \xi_1}(0, Dk_1(0)) = g(0, Dk_1(0))$$

Et d'après le problème de Cauchy qui défini les hypersurfaces $K_i(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{C}^{n+1} \; g(x, Dk_1(x)) = 0 \text{ donc } g(0, Dk_1(0)) = 0 \text{ dans le voisinage de l'origine}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \xi_j}(0, Dk_1(0)) \times D_j k_1(x) = 0$$

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial g}{\partial \xi_j}(x, Dk_1(x)) \times D_j k_1(x) = 0 \text{ d'où } \frac{\partial g}{\partial \xi_0}(0, Dk_1(0))\lambda_1 + \frac{\partial g}{\partial \xi_1}(0, Dk_1(0)) = 0 \qquad (2)$$

d'après (1)-(2)

$$a_0 = \frac{\partial g}{\partial \xi_0}(0, Dk_1(0))(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

quantité non nulle vu les hypothèses, Donc a_0 partie non linéaire.

Quant au terme non-linéaire, on remarque que la fonction $U(k_1, k_2, x)$ et ses dérivées premières pour $t_i = k_i(x)$ s'expriment sous forme de la combinaison linéaire à coefficients fonctions holomorphes de x des fonctions suivantes

On note $z_1 = (z_{1,j}) = \{D_{t_i}^{-1} u(t_1, t_2, x), D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{-1} u(t_1, t_2, x), D_j D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{-1} u(t_1, t_2, x)\}$.

Les dérivées secondes de la fonction $U(k_1(x), k_2(x), x)$ s'expriment sous forme de combinaison linéaire à coefficients fonctions holomorphes de x des fonctions suivantes

On note $z_2 = (z_{2,k}) = \{D_j D_{t_i}^{-1} u, D_j D_i D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{-1} u, u, D_{t_1} D_{t_2}^{-1} u, D_{t_2} D_{t_1}^{-1} u\}$.

On a alors

$$\sum_{|\alpha|=2} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^{n'} \\ |\beta|=q}} a_{\alpha,\beta}(x, D^A U)(D^A U)^\beta D^\alpha U = \sum_{\substack{k \\ \beta \in N^{n+4}, |\beta|=q}} h_{k,\beta}(x, z_1) z_1^\beta z_{2,k}$$

Où les fonctions $h_{k,\beta}$ sont holomorphes au voisinage de $x = 0, z_1 = 0$. On note $F_i : u \mapsto F_i u$ les applications

$$(F_1 u)(t_1, t_2, x) = f(x, z_1) \qquad (4.3)$$

et

$$(F_2 u)(t_1, t_2, x) = \sum_{\substack{k \\ |\beta|=q}} h_{k,\beta}(x, z_1) z_1^\beta z_{2,k} \qquad (4.4)$$

Où A est l'application linéaire

$$(Au)(t_1, t_2, x) = (P_1(x, D) D_{t_1}^{-1} + Q_1(x, D) D_{t_2}^{-1} + P_2(x, D) D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{-1}) u(t_1, t_2, x).$$

Le problème (2.6)s'écrit (modulo un changement de notation)

$$u(t_1, t_2, x) = (Au)(t_1, t_2, x) + (F_1 u)(t_1, t_2, x) + (F_2 u)(t_1, t_2, x) + v(t_1, t_2, x) \qquad (4.5)$$

Et on a alors la

Proposition 4.0.2 *[17]*

*Soient $a_1, a_2 \geqslant l/q$ et Ω un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, il existe un voisinage ouvert Ω' de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que, pour toute fonction $v \in G^{a_1,a_2}(R^2_\delta \times \Omega)$ il existe $\delta_1 > 0$ et une **unique** solution $u \in G^{a_1,a_2}(R^2_{\delta_1} \times \Omega')$ du problème (4.5).*

4.1 La solution du problème dans l'algèbre G^{a_1,a_2}

Dans cette section on démontre que la solution du problème (2.6), appartient à $G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$.
On a lemme suivant.

Lemme 4.1.1 *[17]*

Soient $F(x,u)$ une fonction holomorphe et bornée par M sur un polydisque centré en $0 \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^q$ de rayon ηR, $R > 0$, $\eta > 1$ et $u = (u_1, u_2, ..., u_q) \in G^{0,0}(\delta, L, w)$ telles que $c_0 \|u_i\|_{G^{0,0}} < R$
alors $v = F(x, u_1, u_2, ... u_q) \in G^{0,0}(\delta, L, w)$ et

$$\|v\| \leqslant cM \prod_{i=1}^{q} \frac{R}{R - c_0 \|u_i\|}$$

où la constante c ne dépend que de η.

Preuve. Comme $u_i \in G^{0,0}(\delta, L, w)$, Pour tout $t_1, t_2 \in R_\delta$, on a

$$u_i \ll \|u_i\| \varphi_R(w(|t_1| + |t_2|) + \xi)$$

d'où

$$|u_i(t,0)| \leqslant \|u_i\| \varphi_R(w(|t_1| + |t_2|)) \leqslant \|u_i\| \varphi_R(R)$$

de la relation $\varphi_R^2 \ll c_0 \varphi_R$, On déduit $\varphi_R(R) \leqslant c_0$, d'où $|u_i(t,0)| \leqslant c_0 \|u_i\| < R$.
Ceci prouve que la fonction $v = F(x, u_1, u_2, ..., u_q)$ est bien définie et holomorphe au voisinage de $R^2_\delta \times \{0\}$ et on a

$$v = F(x, u_1, u_2, ..., u_q) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^q} F_\alpha(x) u_1^{\alpha_1} ... u_q^{\alpha_q}$$

on choisir $R > 0$ suffisamment petit. Où les fonctions F_α sont holomorphes, bornées par $MR^{-|\alpha|}$ sur le polydisque $\Delta_{\eta R}$ et donc appartiennent à l'espace $G^{0,0}(\delta, L, w)$ et de norme $\leq cMR^{-|\alpha|}$ où $c = c(\eta)$ d'après le lemme 3.1.2, on a

$$\begin{aligned} F_\alpha &\ll \sup_{x\in\Delta_{\eta R}} |F_\alpha(x)| \frac{\eta R}{\eta R - \xi} \\ &\ll \sup_{x\in\Delta_{\eta R}} |F_\alpha(x)| c\varphi_R \\ &\ll MR^{-|\alpha|} c\varphi_R. \end{aligned}$$

Lorsque $\alpha \neq 0$, on a d'après la proposition 3.3.2 $u^\alpha \in G^{0,0}(\delta, L, w)$ et $\|u^\alpha\| \leqslant c_0^{|\alpha|-1} \prod_{i=1}^{q} \|u_i\|^{\alpha_i}$,d'où $F_\alpha u^\alpha \in G^{0,0}(\delta, L, w)$ et

$$\|F_\alpha u^\alpha\| \leqslant cM \prod_{i=1}^{q} \left(\frac{c_0\|u_i\|}{R}\right)^{\alpha_i}$$

Cette inégalité vaut encore pour $\alpha = 0$.

Ceci montre que la famille $(F_\alpha u^\alpha)$ est absolument sommable dans l'espace $G^{0,0}(\delta, L, w)$ et par conséquent

$$\|v\| \leqslant cM \prod_{i=1}^{q} \frac{R}{R - c_0\|u_i\|}$$

□

On choisissant $R > 0$ de vérifier la propriété suivante :

Tous les coefficients des opérateurs apparaissant dans A sont holomorphes et bornés sur le polydisque $\Delta_{\eta R}$ où $\eta > 1$.

Proposition 4.1.1 *[17]*

Soient $a_1, a_2 > -1, w \geq 1, L \geq 1$ et $0 < \delta \leq 1$ alors l'application A induit un endomorphisme de l'espace $G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$ dont la norme est $\leq c \max(w^{-1}, l^{-1})$ et la constante c ne dépend que de η, R et la borne supérieure sur $\Delta_{\eta R}$ des coefficients des opérateurs P_1, Q_1 et P_2, figurant dans A.

Preuve. On a l'opérateur A est de forme

$$(Au)(t_1, t_2, x) = (P_1(x, D)D_{t_1}^{-1} + Q_1(x, D)D_{t_2}^{-1} + P_2(x, D)D_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{-1})u(t_1, t_2, x)$$

Il s'agit de vérifier la proposition pour des opérateurs de la forme $a(x)D^\alpha D_{t_i}^{-1}$ et $a(x)D^\beta D_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{-1}$ où $|\alpha| \leqslant 1$, $|\beta| \leqslant 2$ et $a(x)$ est une fonction holomorphe et bornée sur $\Delta_{\eta R}$.

Soit $u \in G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$, on a $D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2} D^\alpha D_{t_1}^{-1} u = D^\alpha D_{t_1}^{p_1-1} D_{t_2}^{p_2} u$.

Si $p_1 \geqslant 1$, on a

$$D_{t_1}^{p_1-1} D_{t_2}^{p_2} u \ll \|u\| L^{p_1+p_2-1} |t_1|^{a_1-p_1+1} |t_2|^{a_2-p_2} D^{p_1+p_2-1} \varphi_R(w(|t_1| + |t_2|) + \xi)$$

En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned} D^{\alpha} D_{t_1}^{p_1-1} D_{t_2}^{p_2} u &\ll \|u\| L^{p_1+p_2-1} |t_1|^{a_1-p_1+1} |t_2|^{a_2-p_2} D^{p_1+p_2-1+|\alpha|} \varphi_R(w(|t_1|+|t_2|)+\xi) \\ &\ll c\|u\| L^{p_1+p_2-1} |t_1|^{a_1-p_1+1} |t_2|^{a_2-p_2} D^{p_1+p_2+|\alpha|} \varphi_R(w(|t_1|+|t_2|)+\xi) \end{aligned}$$

en effet, si $|\alpha| = 1$ ceci est vrai avec $c = 1$ et si $|\alpha| = 0$ on a, d'après (3.4)
$D^{p_1+p_2-1}\varphi_R \ll cD^{p_1+p_2}\varphi_R$.
Or $|t_1| < \delta \leq 1$, d'où

$$D_{t_1}^{p_1} D_{t_2}^{p_2} D^{\alpha} D_{t_1}^{-1} u \ll cL^{-1} \|u\| L^{p_1+p_2} |t_1|^{a_1-p_1} |t_2|^{a_2-p_2} D^{p_1+p_2} \varphi_R(w(|t_1|+|t_2|)+\xi)$$

Si $p_1 = 0$, en utilise le développement de la série formelle de φ_R telle que
$\varphi_R(w(|t_1|+|t_2|)+\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(w|t_1|)^j}{j!} D^j \varphi_R(w|t_2|+\xi)$

$$D_{t_2}^{p_2} u \ll \|u\| L^{p_2} |t_2|^{a_2-p_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j |t_1|^{a_1+j}}{j!} D^{p_2+j} \varphi_R(w|t_2|+\xi)$$

d'où

$$D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{p_2} u \ll \|u\| L^{p_2} |t_2|^{a_2-p_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j+1}{a_1+j+1} \frac{w^j |t_1|^{a_1+j+1}}{(j+1)!} D^{p_2+j} \varphi_R(w|t_2|+\xi)$$

et $\sup_{j\leqslant 0} \frac{j+1}{a_1+j+1}$ étant fini, et on suppose $c = \sup_{j\leqslant 0} \frac{j+1}{a_1+j+1}$,et en déduit que

$$D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{p_2} u \ll c\|u\| L^{p_2} |t_1|^{a_1} |t_2|^{a_2-p_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j |t_1|^{j+1}}{(j+1)!} D^{p_2+j} \varphi_R(w|t_2|+\xi)$$

En dérivant, en obtient

$$D^{\alpha} D_{t_1}^{-1} D_{t_2}^{p_2} u \ll c\|u\| L^{p_2} |t_1|^{a_1} |t_2|^{a_2-p_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j |t_1|^{j+1}}{(j+1)!} D^{p_2+j+|\alpha|} \varphi_R(w|t_2|+\xi)$$

il existe, donc une constante $c \geqslant 0$, on utilise la composition de la série formelle φ_R telle que

$$\begin{aligned} D_{t_2}^{p_2} D^{\alpha} D_{t_1}^{-1} u &\ll \|u\| L^{p_2} |t_1|^{a_1} |t_2|^{a_2-p_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j |t_1|^{j+1}}{(j+1)!} D^{p_2+j+1} \varphi_R(w|t_2|+\xi) \\ &\ll \frac{c}{w} \|u\| L^{p_2} |t_1|^{a_1} |t_2|^{a_2-p_2} D^{p_2} \varphi_R(w(|t_1|+|t_2|)+\xi) \end{aligned}$$

Ceci prouve que $D^{\alpha} D_{t_1}^{-1} u$ appartient à l'espace $G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$ et que sa norme est $\leq$ $c \max(w^{-1}, L^{-1})\|u\|$. □

Quant à la fonction a, elle appartient à l'espace $G^{0,0}(\delta, L, w)$ et la proposition 3.3.2

permet de conclure.

On a évidemment le même résultat pour l'opérateur $a(x)D^{\alpha}D_{t_2}^{-1}$.

Soit $\beta \in \mathbb{N}$ tel que $|\beta| \leqslant 2$,on peut écrire $\beta = \alpha + \alpha'$ tel que $|\alpha|, |\alpha'| \leqslant 1$ et

$$D^{\beta}D_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{-1}u = D^{\alpha'}D_{t_2}^{-1}D^{\alpha}D_{t_1}^{-1}u$$

Donc $a(x)D^{\beta}D_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{-1}u \in G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$ et

$$\|a(x)D^{\beta}D_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{-1}u\| \leqslant c(\max(L^{-1}, w^{-1}))^2\|u\| \leqslant c\max(L^{-1}, w^{-1})\|u\|$$

vu que $L, w \geqslant 1$

Lemme 4.1.2 *[17]*
Soient $a_1, a_2 > -1, w \geq 1, L \geq 1$ et $0 < \delta \leq 1$ alors les opérateurs $D_{t_i}^{-1}, D_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{-1}, D_jD_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{-1}$ induisent des endomorphismes de l'espace $G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$ de norme plus petite que $c\delta$.

Preuve. Soit $u \in G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$, on a $D_{t_1}^{p_1}D_{t_2}^{p_2}D_{t_1}^{-1}u = D_{t_1}^{p_1-1}D_{t_2}^{p_2}u$.

D'après la définition de l'espace G^{a_1,a_2}, on a

$$D_{t_1}^{p_1}D_{t_2}^{p_2}u \ll \|u\|L^{p_1+p_2} | t_1 |^{a_1-p_1} | t_2 |^{a_2-p_2} D^{p_1+p_2}\varphi_R(w(| t_1 | + | t_2 |) + \xi)$$

Si $p_1 \geqslant 1$, on a

$$D_{t_1}^{p_1-1}D_{t_2}^{p_2}u \ll \|u\|L^{p_1+p_2-1} | t_1 |^{a_1-p_1+1} | t_2 |^{a_2-p_2} D^{p_1+p_2-1}\varphi_R(w(| t_1 | + | t_2 |) + \xi)$$

vu (3.4), il existe une constante $c \geqslant 0$ telle que

$$D_{t_1}^{p_1-1}D_{t_2}^{p_2}u \ll c | t_1 | \|u\|L^{p_1+p_2-1} | t_1 |^{a_1-p_1} | t_2 |^{a_2-p_2} D^{p_1+p_2}\varphi_R(w(| t_1 | + | t_2 |) + \xi)$$

On a $| t |< \delta$, d'où

$$D_{t_1}^{p_1}D_{t_2}^{p_2}D_{t_1}^{-1}u \ll c\delta\|u\|L^{p_1+p_2} | t_1 |^{a_1-p_1} | t_2 |^{a_2-p_2} D^{p_1+p_2}\varphi_R(w(| t_1 | + | t_2 |) + \xi)$$

Si $p_1 = 0$, on a

$$D_{t_2}^{p_2}u \ll \|u\|L^{p_2} | t_2 |^{a_2-p_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j | t_1 |^{a_1+j}}{j!} D^{p_2+j}\varphi_R(w | t_2 | + \xi)$$

En intègre, et $| t |< \delta$, en obtient

$$\begin{aligned} D_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{p_2}u &\ll \|u\|L^{p_2} | t_2 |^{a_2-p_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j | t_1 |^{a_1+j+1}}{j!(a_1+j+1)} D^{p_2+j}\varphi_R(w | t_2 | + \xi) \\ &\ll \|u\|L^{p_2} | t_1 |^{a_1+1} | t_2 |^{a_2-p_2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j | t_1 |^j}{j!} D^{p_2+j}\varphi_R(w | t_2 | + \xi) \\ &\ll \delta\|u\|L^{p_2} | t_1 |^{a_2+1} | t_2 |^{a_2-p_2} D^{p_2}\varphi_R(w(| t_1 | + | t_2 |) + \xi). \end{aligned}$$

Ceci prouve que $D_{t_1}^{-1}u$ appartient à l'espace $G^{a_1,a_2}(\delta,L,w)$ et que sa norme est $\leqslant c\delta\|u\|$. On a évidemment le même résultat pour l'opérateur $D_{t_2}^{-1}$. □

Il en résulte que $D_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{-1}$ induit un endomorphisme de $G^{a_1,a_2}(\delta,L,w)$ de norme $\leqslant c\delta^2 \leqslant c\delta$. De la proposition 4.1.1, on déduit que $D_{t_1}^{-1}D_j$ est un endomorphisme de $G^{a_1,a_2}(\delta,L,w)$ de norme $\leqslant c\max(w^{-1},L^{-1}) \leqslant c$, vu $w,L \geqslant 1$, donc $D_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{-1}D_j$ est un endomorphisme de $G^{a_1,a_2}(\delta,L,w)$ de norme $\leqslant c\delta$.

Lemme 4.1.3 *[17]*

Soient $a_1,a_2 > -1, w \geq 1, L \geq 1$ et $0 < \delta \leq 1$ alors les opérateurs $D_{t_1}D_{t_2}^{-1}$ et $D_{t_2}D_{t_1}^{-1}$ induisent des opérateurs linéaires et continus de l'espace $G^{a_1,a_2}(\delta,L,w)$ dans $G^{a_1-1,a_2-1}(\delta,L,w)$ dont la norme est $\leqslant cL$.

Preuve. Soit $u \in G^{a_1,a_2}(\delta,L,w)$, on a $D_{t_1}^{p_1}D_{t_2}^{p_2}D_{t_2}D_{t_1}^{-1}u = D_{t_1}^{p_1-1}D_{t_2}^{p_2+1}u$.

Si $p_1 \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
D_{t_1}^{p_1-1}D_{t_2}^{p_2+1}u &\ll \|u\|L^{p_1+p_2} \mid t_1 \mid^{a_1-p_1+1} \mid t_2 \mid^{a_2-p_2-1} D^{p_1+p_2}\varphi_R(w(\mid t_2 \mid + \mid t_2 \mid) + \xi) \\
&\ll \mid t_1 \mid^2 \|u\|L^{p_1+p_2} \mid t_1 \mid^{a_1-1-p_1} \mid t_2 \mid^{a_2-1-p_2} D^{p_1+p_2}\varphi_R(w(\mid t_1 \mid + \mid t_2 \mid) + \xi) \\
&\ll L\|u\|L^{p_1+p_2} \mid t_1 \mid^{a_1-1-p_1} \mid t_2 \mid^{a_2-1-p_2} D^{p_1+p_2}\varphi_R(w(\mid t_1 \mid + \mid t_2 \mid) + \xi).
\end{aligned}$$

vu que $L \geqslant 1$ et $\mid t_1 \mid < \delta \leqslant 1$.

Si $p_1 = 0$, on a

$$D_{t_2}^{p_2+1}u \ll \|u\|L^{p_2+1} \mid t_2 \mid^{a_2-p_2-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j \mid t_1 \mid^{a_1+j}}{j!} D^{p_2+1+j}\varphi_R(w \mid t_2 \mid + \xi)$$

En intègre, en obtient

$$D_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{p_2+1}u \ll \|u\|L^{p_2+1} \mid t_2 \mid^{a_2-p_2-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j+1}{a_1+j+1} \frac{w^j \mid t_1 \mid^{a_1+j+1}}{(j+1)!} D^{p_2+1+j}\varphi_R(w \mid t_2 \mid + \xi)$$

et $\sup\limits_{j\leqslant 0} \frac{j+1}{a_1+j+1}$ étant fini, On pose que $c = \sup\limits_{j\leqslant 0} \frac{j+1}{a_1+j+1}$; et on en déduit que

$$\begin{aligned}
D_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{p_2+1}u &\ll c\|u\|L^{p_2+1} \mid t_2 \mid^{a_2-1-p_2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w^j \mid t_1 \mid^{a_1+j+1}}{(j+1)!} D^{p_2+1+j}\varphi_R(w \mid t_2 \mid + \xi) \\
&\ll c\|u\|L^{p_2+1} \mid t_1 \mid^{a_1} \mid t_2 \mid^{a_2-1-p_2} D^{p_2}\varphi_R(w(\mid t_1 \mid + \mid t_2 \mid) + \xi) \\
&\ll cL\|u\|L^{p_2} \mid t_1 \mid^{a_1-1} \mid t_2 \mid^{a_2-1-p_2} D^{p_2}\varphi_R(w(\mid t_1 \mid + \mid t_2 \mid) + \xi).
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $D_{t_2}D_{t_1}^{-1}u$ appartient à l'espace $G^{a_1-1,a_2-1}(\delta,L,w)$ et que sa norme est $\leqslant cL\|u\|$. On a évidemment le même résultat pour l'opérateur $D_{t_1}D_{t_2}^{-1}$. □

4.2 Preuve de la proposition 4.0.2

On pose

$$f(x,z_1) = \sum_j h_{1,j}(x,z_1)z_{1,j}$$

Où

$$z_1 = D^A u \ , z_{2,k} = D^\alpha u$$

D'après (2.2) et (4.3),(4.4) on a

$$f(x,0) = 0 \text{ et } F_1(u)(t_1,t_2,x) = f(x,z_1), (F_2 u)(t_1,t_2,x) = \sum_{\substack{k \\ |\beta|=q}} h_{k,\beta}(x,z_1) z_1^\beta z_{2,k}$$

On peut écrire [23]

$$F_1(u) - F_1(u') = \sum_j h_{1,j}(x,z_1,z_1')(z_{1,j} - z_{1,j}')$$

Et

$$F_2(u) - F_2(u') = \sum_{\beta,k} h_{2,\beta,k}(x,z_1,z_1')(z_{2,k} - z_{2,k}')z_1^\beta + \sum_{\beta,k} k_{1,\beta,k}(x,z_1,z_1')(z_1^\beta - z_1'^\beta)z_{2,k}'$$
$$+ \sum_{\beta,k,j} k_{2,\beta,k,j}(x,z_1,z_1')(z_{1,j} - z_{1,j}')z_1'^\beta z_{2,k}'$$

où les fonctions $h_{1,j}, h_{2,\beta,k}, k_{1,\beta,k}, k_{2,\beta,k,j}$ sont holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+4} \times \mathbb{C}^{n+4}$. On peut supposer que ces fonctions sont holomorphes et bornées sur le polydisque de rayon ηR de l'espace $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+4} \times \mathbb{C}^{n+4}$.
On pose l'application ν.

$$\nu : u \longmapsto A(u) + F_1(u) + F_2(u) + v \tag{4.6}$$

Le problème 4.5 s'écrit alors

$$u = \nu(u) \tag{4.7}$$

et il s'agit donc de démontrer que l'application ν admet un point fixe de Banach.
On a alors la

Proposition 4.2.1 *[17]*
Soient $a_1, a_2 \geq \frac{1}{q}$ et $r > 0$, il existe $0 < \delta_0 \leq 1$ tel que, pour tout $0 < \delta \leq \delta_0$ et toutes fonctions $u, u' \in G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$. telles que $\|u\|_{G^{a_1,a_2}}, \|u'\|_{G^{a_1,a_2}} \leqslant r$, les fonctions $F_i(u)$ et $F_i(u')$; $i = 1,2$, sont bien définies, appartiennent à l'espace $G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$ et

$$\|F_i(u) - F_i(u')\|_{G^{a_1,a_2}} \leqslant cL\delta\|u - u'\|_{G^{a_1,a_2}} \qquad i = 1,2 \tag{4.8}$$

La proposition 4.0.2 s'en déduit aisément de la façon suivante :

On choisit $Lw \geqslant 1$ suffisamment grand pour que $v \in G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$ et la norme de l'endomorphisme A soit $\leqslant \frac{1}{6}$, puis on choisit $0 < \delta_1 \leqslant \delta_0$ tel que $2w\delta_1 < R$ et $cL\delta_1 \leqslant \frac{1}{6}$.

Soit $r \geqslant 2\|v\|_{G^{a_1,a_2}}$, alors si u appartient à la boule fermée $B'(0,r)$ de centre 0 et de rayon r de l'espace $G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$,$B'(0,r) = \{u \in G^{a_1,a_2}; \|u\|_{G^{a_1,a_2}} \leq r\}$ on a

$$\begin{aligned}
\|\nu(u)\|_{G^{a_1,a_2}} &\leqslant \|A(u)\|_{G^{a_1,a_2}} + \|F_1(u)\|_{G^{a_1,a_2}} + \|F_2(u)\|_{G^{a_1,a_2}} + \|v\|_{G^{a_1,a_2}} \\
&\leqslant \frac{3r}{6} + \frac{r}{2} \\
&\leqslant r
\end{aligned}$$

d'où $\|\nu(u)\|_{G^{a_1,a_2}} \leqslant r$.

ceci prouve que $\nu(B'(0;r)) \subset B'(0;r)$ et, d'après (4.8) et le lemme 4.1.1,

$\|\nu(u) - \nu(u')\|_{G^{a_1,a_2}} \leqslant \frac{1}{6}\|u-u'\|_{G^{a_1,a_2}} + \frac{1}{6}\|u-u'\|_{G^{a_1,a_2}} + \frac{1}{6}\|u-u'\|_{G^{a_1,a_2}}$

$\|\nu(u) - \nu(u')\|_{G^{a_1,a_2}} \leqslant \frac{1}{2}\|u-u'\|_{G^{a_1,a_2}}$

ceci prouve que $\nu : B'(0;r) \longrightarrow B'(0;r)$ est une contraction stricte, la proposition 4.0.2 résulte donc de théorème du point fixe.

preuve de la proposition 4.2.1

Soient $u, u' \in G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$ où $0 < \delta \leq \delta_0$ tels que $\|u\|_{G^{a_1,a_2}} \leqslant r$ et $\|u'\|_{G^{a_1,a_2}} \leqslant r$ le lemme 4.1.2 montre que $z_{1,j}, z'_{1,j} \in G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$ et

$$\|z_{1,j}\|_{G^{a_1,a_2}} \leqslant c\delta\|u\|_{G^{a_1,a_2}} \leqslant c\delta_0 r \text{ et } \|z'_{1,j}\|_{G^{a_1,a_2}} \leqslant c\delta\|u'\|_{G^{a_1,a_2}} \leqslant c\delta_0 r. \tag{4.9}$$

l'injection $G^{a_1,a_2} \to G^{0,0}$ est linéaire continue de norme $\leq \frac{c_0}{R}$, il en résulte que

Si on choisit δ_0 tel que $0 < \delta_0 \leqslant 1$ et $z_{1,j}, z'_{1,j} \in G^{0,0}$

$$\|z_{1,j}\|_{G^{0,0}}, \|z'_{1,j}\|_{G^{0,0}} \leqslant \frac{cc_0\delta_0 r}{R}.$$

et choisit

$$\frac{cc_0\delta_0 r}{R} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Si F est l'une des fonctions $h_{1,j}, h_{2,\beta,k}, k_{1,\beta,k}$ et $k_{2,\beta,k,j}$, le lemme 4.1.1 montre que $F(x, z_1, z'_1) \in G^{0,0}(\delta, L, w)$ et qu'il existe une constante $c \geqslant 0$ indépendante de δ_0 telle que

$$\|F(x, z_1, z'_1)\|_{G^{0,0}} \leqslant c \tag{4.10}$$

Ceci montre que les fonctions $F_i(u)$ et $F_i(u')$, i=(1,2) sont bien définies (holomorphes et bornes).

D'une part, le lemme 4.1.2 montre que

$$\|z_{1,j} - z'_{1,j}\|_{G^{a_1,a_2}} \leqslant c\delta\|u - u'\|_{G^{a_1,a_2}} \tag{4.11}$$

et la proposition 3.3.2 prouve, vu les inégalités (4.10) et (4.11), que
$h_{1,j}(x, z_1, z'_1)(z_{1,j} - z'_{1,j}) \in G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$ tel que

$$\|h_{1,j}(x, z_1, z'_1)(z_{1,j} - z'_{1,j})\|_{G^{a_1,a_2}} \leqslant c\delta\|u - u'\|_{G^{a_1,a_2}}$$

d'où $F_1(u) - F_1(u')$ appartient à l'espace $G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$ et

$$\|F_1(u) - F_1(u')\|_{G^{a_1,a_2}} \leqslant c\delta\|u - u'\|_{G^{a_1,a_2}}$$

Or d'après (2.2), on a $F_1(u) = 0$ si $u = 0$ et donc en prenant $u = 0$ ou $u' = 0$, ceci prouve que les fonctions $F_1(u), F_1(u')$ appartient à l'espace $G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$.
D'autre part, d'après la proposition 3.3.2 et l'inégalité (4.9) z_1^β et $z_1'^\beta$ appartient à l'espace $G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$, vu que $\mid \beta \mid = q$, et

$$\|z_1^\beta\|_{G^{qa_1,qa_2}} \leqslant c\delta^q\|u\|^q_{G^{a_1,a_2}} \leqslant c\delta \text{ et } \|z_1'^\beta\|_{G^{qa_1,qa_2}} \leqslant c\delta^q\|u'\|^q_{G^{a_1,a_2}} \leqslant c\delta. \tag{4.12}$$

On a la formule

$$z_1^\beta - z_1'^\beta = \sum_j (z_{1,j} - z'_{1,j})P_j(z_1, z'_1)$$

où P_j est un polynôme homogène de degré $q - 1$.
On obtient, vu la proposition 3.3.2 et (4.9), que

$$\|z_1^\beta - z_1'^\beta\|_{G^{qa_1,qa_2}} \leqslant c\delta\|u - u'\|_{G^{a_1,a_2}} \tag{4.13}$$

La remarque 3.3.2 montre que si $z_{2,k}$ est la fonction u alors $z_{2,k} \in G^{a_1-1,a_2-1}(\delta, L, w)$ et

$$\|z_{2,k}\|_{G^{a_1-1,a_2-1}} \leqslant c\|u\|_{G^{a_1-1,a_2-1}} \tag{4.14}$$

la proposition 4.1.1 montre que si $z_{2,k}$ est l'une des fonctions $D_jD_{t_i}^{-1}u, D_jD_iD_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{-1}u$ alors $z_{2,k}$ appartient à l'espace $G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$ et

$$\|z_{2,k}\|_{G^{a_1-1,a_2-1}} \leqslant c\|u\|_{G^{a_1,a_2}} \tag{4.15}$$

Le lemme 4.1.3 montre que si $z_{2,k}$ est l'une des fonctions $D_{t_1}^{-1}D_{t_2}^{-1}u, D_{t_2}D_{t_1}^{-1}u$ alors $z_{2,k}$ appartient à l'espace $G^{a_1-1,a_2-1}(\delta, L, w)$ et

$$\|z_{2,k}\|_{G^{a_1-1,a_2-1}} \leqslant cL\|u\|_{G^{a_1,a_2}} \tag{4.16}$$

De même, $z'_{2,k} \in G^{a_1-1,a_2-1}$ et

$$\|z'_{2,k}\|_{G^{a_1-1,a_2-1}} \leqslant cL\|u'\|_{G^{a_1,a_2}} \tag{4.17}$$

$$\|z_{2,k} - z'_{2,k}\|_{G^{a_1-1,a_2-1}} \leqslant cL\|u - u'\|_{G^{a_1,a_2}} \tag{4.18}$$

Les inégalités (4.12)-(4.18) prouvent, vu la proposition 3.3.2, que

$$h_{2,\beta,k}(x, z_1, z'_1)(z_{2,k} - z'_{2,k})z_1^{\beta} \text{ et } k_{1,\beta,k}(x, z_1, z'_1)(z_1^{\beta} - z_1'^{\beta})z'_{2,k}$$

appartient à $G^{(q+1)a_1-1,(q+1)a_2-1}(\delta, L, w)$, donc à l'espace $G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$ puisque $(q+1)a_i - 1 \geqslant a_i$ et que

$$\|h_{2,\beta,k}(x, z_{2,k}, z'_{2,k})(z_{2,k} - z'_{2,k})z_1^{\beta}\|_{G^{a_1,a_2}} \leqslant cL\delta\|u - u'\|_{G^{a_1,a_2}}$$

$$\|k_{1,\beta,k}(x, z_1, z'_1)(z_1^{\beta} - z_1'^{\beta})z'_{2,k}\|_{G^{a_1,a_2}} \leqslant cL\delta\|u - u'\|_{G^{a_1,a_2}}$$

De même

$$h_{2,\beta,k,j}(x, z_1, z'_1)(z_{1,k} - z'_1)z'_{2,k}z_1'^{\beta} \in G^{(q+2)a_1-1,(q+1)a_2-1}(\delta, L, w) \subset G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$$

puisque $(q+2)a_i - 1 \geqslant a_i$ et que

$$\|k_{2,\beta,k,j}(x, z_{1,j}, z'_{1,j})(z_{1,j} - z'_1)z'_{2,k}z_1'^{\beta}\|_{G^{a_1,a_2}} \leqslant cL\delta\|u - u'\|_{G^{a_1,a_2}}$$

D'où $F_2(u) - F_2(u')$ appartient à l'espace $G^{a_1,a_2}(\delta, L, w)$ et

$$\|F_2(u) - F_2(u')\|_{G^{a_1,a_2}} \leqslant cL\delta\|u - u'\|_{G^{a_1,a_2}}$$

En prenant $u = 0$ ou $u' = 0$, Ceci prouve que les fonctions $F_2(u), F_2(u')$ appartient à l'espace G^{a_1,a_2}.

Chapitre 5

Applications

On considère dans $\mathbb{C}^2$, $p(x,D)u = v$ un problème quasi linéaire de seconde ordre.
on pose $A = \{\alpha \in \mathbb{N}^2, \mid \alpha \mid \leqslant 1\} = \{(1,0),(0,1),(0,0)\}$, $n' = 3$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$.
$D^A u = (D^\alpha u)_{\alpha \in A} = \{D^{(1,0)}u, D^{(0,1)}u, D^{(0,0)}u\}$.
$D^{(1,0)}u = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial^0 u}{\partial^0 x_2} = u_{x_1}$, $D^{(0,1)}u = \dfrac{\partial^0 u}{\partial^0 x_1}\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = u_{x_2}$, $D^{(0,0)}u = \dfrac{\partial^0 u}{\partial^0 x_1}\dfrac{\partial^0 u}{\partial^0 x_2} = u$
Donc $D^A u = \{u_{x_1},\ u_{x_2},\ u\}$.
On a $\mid \alpha \mid = 2$, $D^\alpha u = D^2 u = \{D^{(2,0)}u, D^{(0,2)}u, D^{(1,1)}u\} = \{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\}$ On a

$$\begin{aligned}
P(x,D)u &= \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x, D^A u) D^\alpha u + f(x, D^A u) \\
&= a_{(2,0)}(x_1,x_2,u_{x_1},u_{x_2})D^{(2,0)} + a_{(0,2)}(x_1,x_2,u_{x_1},u_{x_2})D^{(0,2)} + a_{(1,1)}(x_1,x_2,u_{x_1},u_{x_2})D^{(1,1)} \\
&+ f(x_1,x_2,u_{x_1},u_{x_2}) \\
&= a_{(2,0)}(x_1,x_2,u_{x_1},u_{x_2})Du_{x_1x_1} + a_{(0,2)}(x_1,x_2,u_{x_1},u_{x_2})u_{x_2x_2} + a_{(1,1)}(x_1,x_2,u_{x_1},u_{x_2})u_{x_1x_2} \\
&+ f(x_1,x_2,u_{x_1},u_{x_2})
\end{aligned}$$

Donc

$$P(x,D)u = a_{(2,0)}(x_1,x_2,u_{x_1},u_{x_2})u_{x_1x_1} + a_{(0,2)}(x_1,x_2,u_{x_1},u_{x_2})u_{x_2x_2} + a_{(1,1)}(x_1,x_2,u_{x_1},u_{x_2})u_{x_1x_2} + f \tag{5.1}$$

Exemple 1

On considère l'opérateur quasi-linéaire suivent :

$-u\Delta u + c(x_1, x_2, u, \nabla u) = 0 \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

tel que on a

$-u\Delta u(x_1, x_2) + c(x_1, x_2, u, \nabla u) \Leftrightarrow (u_{x_1x_2} + u_{x_2x_2} + c(x_1, x_2, u, \nabla u) = 0$

D'après (5.1), on a

$$\begin{cases} a_{(2,0)}(x_1, x_2, u_{x_1,u_{x_2}}) & = -u \\ a_{(0,2)}(x_1, x_2, u_{x_1}, u_{x_2}) & = -u \\ a_{(1,1)}(x_1, x_2, u_{x_1}, u_{x_2}) & = 0 \\ f(x_1, x_2, u_{x_1}, u_{x_2}) & = c(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}) \text{ tel que } \quad c(x_1, x_2, 0, 0, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a(x_1, x_2; D)u &= \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x_1, x_2; 0) D^\alpha u \\ &= g(x_1, x_2; \xi) \\ &= -u(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) \end{aligned}$$

On définie l'hyperplan $S = \{x \in \mathbb{R}^2,\ x_0 = 0\}$ de dimension 1 est non caractéristique et que les caractéristique issues $T = \{(0,0)\}$ sont simples, c'est-à-dire que l'équation $g(0; \lambda, 1) = 0$ admet deux racines λ_1, λ_2 distinctes.

On note $k_i (i = 1, 2)$ la solution du problème de Cauchy du premier ordre

$$\begin{cases} g(x, \nabla k_i(x)) = 0 \Leftrightarrow g(x_1, x_2; u_{x_1}, u_{x_2}, 1) = 0 \\ k_i(x_1, x_2) = x_2 \text{ pour } \quad x_1 = 0 \\ \nabla k_i(0) = (\lambda_i, 1) \end{cases}$$

Donc $k_i(x_1, x_2) = \lambda_i x_1 + x_2$, par suit $k_i(x_1, x_2) = u_{x_i}(0, 0)x_1 + x_2$, Et $K_i : k_i(x) = 0 \subset \mathbb{R}^2$. on pose Ω ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$ et $\delta > 0$ tel que $\dot{D} = \{t \in \mathbb{R}; 0 < |t| < \delta\}$, et on peut supposer les fonctions k_i holomorphes dans Ω .

On a $v(x_1, x_2) = \hat{v}(x_1, x_2; t_1; t_2) = 0$ holomorphe et ramifiée autour $K_1 \cup K_2$, d'où $v(x)$: $\Omega \times R^2_\delta \to \mathbb{C}$.

Enfin on définit l'espace $G^{1,1}(R^2_\delta \times \Omega)$ comme l'espace de la fonction v , pour $(a_1, a_2) = (1, 1)$ et $(p_1, p_2) = (1, 1)$ tel que

$|D_{t_1} D_{t_2} v(x, t_1, t_2)| \leqslant c^3 \qquad c \geqslant 0$

D'après la proposition 4.2 , il existe Ω' un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{R}^2$ et $\delta_1 > 0$

Alors il existe une unique solution de ce problème $u \in G^{1,1}(R^2_{\delta_1} \times \Omega')$.

Exemple 2

On considère l'opérateur quasi-linéaire suivent :

$x_1^2 u_{x_1 x_1} + 2u(x_1, x_2)u_{x_1 x_2} + x_2^2 u_{x_2 x_2} = \sin x_1^2 \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

D'après (5.1), on a

$$\begin{cases} a_{(2,0)}(x_1, x_2, u_{x_1, u_{x_2}}) & = x_1^2 \\ a_{(0,2)}(x_1, x_2, u_{x_1}, u_{x_2}) & = x_2^2 \\ a_{(1,1)}(x_1, x_2, u_{x_1}, u_{x_2}) & = 2u(x_1, x_2) \\ f(x_1, x_2, u_{x_1}, u_{x_2}) & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a(x_1, x_2; D)u &= \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x_1, x_2; 0) D^\alpha u \\ &= g(x_1, x_2; \xi) \\ &= x_1^2 u_{x_1 x_1} + 2u(x_1, x_2)u_{x_1 x_2} + x_2^2 u_{x_2 x_2} \end{aligned}$$

On a même hyperplan K_i qui sont définie par $k_i(x_1, x_2) = \lambda_i x_1 + x_2$, par suit

$k_i(x_1, x_2) = u_{x_i}(0, 0)x_1 + x_2$.

on pose Ω_1 ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$ et $\delta > 0$ tel que $\dot{D} = \{t \in \mathbb{R}; 0 < |t| < \delta\}$, et on peut supposer les fonctions k_i holomorphes dans Ω_1 .

On a $v(x_1, x_2) = \hat{v}(x_1, x_2; t_1; t_2) = \sin x_1^2$ holomorphe et ramifiée autour $K_1 \cup K_2$, d'où $v(x) : \Omega_1 \times R^2_\delta \to \mathbb{C}$.

Enfin on définie l'espace $G^{\frac{1}{2},1}(R^2_\delta \times \Omega)$ comme l'espace de la fonction v , pour $(a_1, a_2) = (\frac{1}{2}, 1)$ et $(p_1, p_2) = (0, 0)$ tel que

$|v(x, t_1, t_2)| \leqslant c|t_1|^{\frac{1}{2}}|t_2| \leqslant \delta^{\frac{3}{2}} c \qquad c \geqslant 0$

D'après la proposition 4.2 , il existe Ω_1' un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{R}^2$ et $\delta_1 > 0$, alors il existe une unique solution de ce problème $u \in G^{\frac{1}{2},1}(R^2_{\delta_1} \times \Omega_1')$.

Conclusion

Dans ce travail, on a construit des fonctions holomorphes ramifiées, qui est sont solutions d'équation aux dérivées partielles quasi-linéaires du seconde ordre de la forme : $p(x,D)u = v$, on s'intéresse à des fonctions ramifiées autour de deux hypersurfaces caractéristique simple lorsque la fonctions v est ramifiée et $D_{t_1}v, D_{t_2}v$ sont bornées et les deux hypersurfaces sont indépendant de seconde membre.
Pour résoudre ce problème on réduit le problème à un problème intégro-différentiel et appliqué le théorème de point fixe de Banach qui assurée l'existence et l'unicité de la solution. En utilisant la fonction majorant de LAX et les conditions de croissance, pour construire des algèbres de Banach ou le problème admet un point fixe.

Bibliographie

[1] BABADJIA. J, Équations aux dérivées partielles elliptiques linéaires et non linéaires, Université Paris-Sud

[2] BJORK.J, Rings of Differential Operators, North-Holland Publishing company Amsterdam, 1979.

[3] DELIGNE.P, Equations Différentielles à point singuliers, Springer Lecteure Notes, vol.163, Berlin, 1970.

[4] HALLOUIN. E , Extraits de cours - Applications linéaires, univ-Toulouse, Année 2015-2016

[5] HAMADA.Y, LERAY.J et WAGSCHAL.C, Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié ; hyperbolicité partielle, J. Math. Pure et Appl. 55, 1976,p. 297-352.

[6] ISHII.T, On propagation of singularities for solutions of non linear partial differential equations, J.Fac. Sci. Univ. Tokyo, 37, 1990, p. 377-424

[7] KOBAYASHI.T, Propagation of singularities for a first order semi-linear system in $\mathbb{C}^{n+1}$,ann. sc norm. sup. pisa, 4 ;1985, p. 173-189

[8] LATRACHE .S, mémoire sur le problème de Goursat non linéaire, université kasdi merbah, 2008-2009, p.1-56

[9] LAX.P.D, Non lienar hyperboliques Équations, comm. pure appl. math. ; vol.6,1953, p.231-258

[10] LEICHTNAM.E Construction de solutions singulières pour des équations aux dérivées partielles non linéaires, ann. scein. Ec. norm.sup., 20,1987, p.137-170

[11] LEICHTNAM.E,Le problème de Cauchy ramifié, ann. scein. Ec. norm.sup., 23,1990, p.367-443

[12] LEICHTNAM.E,Le problème de Cauchy ramifié semi-linéaire d'ordre deux, ann. scein. Ec. norm.sup., 24,1991, p.189-214

[13] NABAJI.A et WAGSCHAL.C, Le problème de Cauchy ramifié pour des opérateurs semi-linéaire du second ordre à caractéristiques simple, C.R.Acad. sci. paris, t. 314, p.523-526,1992

[14] NABAJI.A et WAGSCHAL.C,Singularités à croissance lente, J.math. pures et appl. vol.72, 1993, p.335-375

[15] NABAJI.A, construction de solutions singulières pour un opérateurs quasi-linéaires, C.R. Acad. sci.paris, t. 317, Série I P.177-180, 1993

[16] NABAJI A, construction de solutions singulières pour un opérateurs quasi-linéaires, Bull. Sci. Math. 1995, 119 509-527.

[17] NABAJI. A, construction de solutions ramifiées auteur de deux hypersurfaces caractéristiques simples pour des opérateurs quasi-linéaires, annales de la faculté des sciences de Toulouse.vol $n^0$3,1999, 629-648.

[18] NICOLAS.J-P, Analyse complexe et analyse spectrale, Institut de Mathématiques de Bordeaux.

[19] PONGERARD.P et WAGSCHAL.C, ramification non abélienne, J. Math. pures et appl. 77,1998, p.51-88.

[20] PONGERAR. P, sur Solutions ramifiées à croissance lente de certaines équations de Fuchs quasi-linéaires, Osaka Journal of Mathematics. 2010-03, P.157-176.

[21] VITERBO. C, Notes de cours de Géométrie différentielle. 23 juin 2013.

[22] WAGSCHAL .C, problème de Cauchy analytique à données méromorphes, J. Math. Pure et Appl. 53, 1974, 99-132.

[23] WAGSCHAL .C, Une généralisation du problème de Goursat pour des systèmes d'équations intégro-différentielles holomorphes ou partiellement holomorphes, J. Math. Pure et Appl. 53, p. 99-132.

[24] WAGSCHAL .C, Sur le problème de Cauchy ramifié, J. Math. Pure et Appl. 53,1974, p. 174-164.

[25] WAGSCHAL .C, Le problème de Goursat non linéaire, J. Math. Pure et Appl. 58,1979, p. 309-337.

[26] WAGSCHAL .C, Sur le problème de Cauchy ramifié à caractéristiques multiples holomorphes de multiplicité variable, J. Math. Pure et Appl. 62,1983, p. 99-127.

Résumé

considérons dans $\mathbb{C}^{n+1}$ un opérateur différentiel quasi-linéaire d'ordre deux à caractéristiques simples :
$P(x,D)u = P_p(x,D)u + f(x,D^A u)$ où P_p est la partie principale de P,A représente les dérivées de u d'ordre un et f une fonction holomorphe au voisinage de l'origine.
soit $q \in \mathbb{N}^*$, on suppose que : $P_p(x,D)u - P_{\text{lin}}(x,D)u = O(u^q)$ où $P_{\text{lin}}(x,D)$ est la partie linéarisée, au voisinage de $u = 0$.On étudie le problème $P(x,D)u(x) = v(x)$ où v est une fonction ramifiée autour des deux hypersurfaces caractéristiques simples $K_i : k_i = 0,(i = 1,2)$ et dont le comportement au voisinage de $K_1 \cup K_2$ est de la forme :
$\mid v(x) \mid \leq c \mid k_1(x) \mid^{a_1} \mid k_2(x) \mid^{a_2} \qquad a_1, a_2 \geq \frac{1}{q}$
On montre alors que u est ramifiée autour de $K_1 \cup K_2$ et que
$\mid u(x) \mid \leq c \mid k_1(x) \mid^{a_1+1} \mid k_2(x) \mid^{a_2+1}$.

Abstract

We consider in $\mathbb{C}^{n+1}$ a quasilinear differentiel operator of second order with simple characteristic hypersurfaces :
$P(x,D)u = P_p(x,D)u + f(x,D^A u)$ where P_p is the principal part of P,A represent the derivatifs of ordre 1 of u and f is a holomorphic function in a neighbor of 0.
let $q \in \mathbb{N}^*$, we suppose that : $P_p(x,D)u - P_{\text{lin}}(x,D)u = O(u^q)$ where $P_{\text{lin}}(x,D)$ is the linearzed part of P,near $u = 0$.we study the problem $P(x,D)u(x) = v(x)$ where v is a ramified function around two simple characteristic hypersurfaces
$K_i : k_i = 0,(i = 1,2)$ and $\mid v(x) \mid \leq c \mid k_1(x) \mid^{a_1} \mid k_2(x) \mid^{a_2} \qquad a_1, a_2 \geq \frac{1}{q}$
we get solution u witch are ramified around two simple characteristic hypersurfaces and $\mid u(x) \mid \leq c \mid k_1(x) \mid^{a_1+1} \mid k_2(x) \mid^{a_2+1}$.