République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Ghardaïa

Faculté des Sciences et Technologie
Département des Mathématiques et Informatique

Projet de fin d'étude présenté en vue de l'obtention du diplôme de

De : **Master**

En : **Mathématiques**

Spécialité : **Analyse Fonctionnelle et Applications**

Par : **LAHOUADJI Aicha et BENDEKKEN Safia**

THEME:

Les courbures d'une variété Riemannienne

Soutenue publiquement juin 2017 devant la comité de jury composée de :

MERABET Ibrahim	**MCB**	**Président**
ZOUAOUI Ali	**MAB**	**Examinateur**
CHIKH SALAH Abdelouahab	**MCB**	**Encadreur**

Annee Universitaire: 2016/2017

Remerciements

Nous remercions dieu tout puissant de nous avoir permis à terme ce travail qui est pour nous le point de départ d'une merveilleuse aventure, celle de la recherche, source de remis en cause permanent et de perfectionnement perprétuelle, qui a bénéficié des conseils scientifiques des uns, de l'appui moral et du soutien financier des autres. Dans l'impossibilité de citer tous ceux qui ont participé à la réalisation de ce travail, nous adressons nos remerciements particulièrement à :

Nous remercions notre encadreur monsieur **Chikh Salah Abdelouahab** ,pour la disponibilité, la patience, les conseils qu'il nous a prodigués, et pour tout le temps et l'énergie qu'il a consacré à la réalisation de ce travail.

Nous remercions particulièrement Monsieur **Zouaoui Ali**, maître-assistante à universitaire de Ghardaïa, qui ont bien voulu accepter de consacrer du temps évaluer notre modeste travail.

Nous remercions particulièrement Monsieur **Merabet Ibrahim**, maître de conférence à universitaire de Ghardaïa, qui ont bien voulu accepter de consacrer du temps évaluer notre modeste travail.

Il serait ingrat de ne pas remercier nos familles pour leurs grandes participations aussi bien morales que matérielles.

Aicha-Safia

Table des matières

Notation

$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réel
M, N	Variété différentielle
$C^k(M)$	Fonction de classe C^k sur M
$C^\infty(M)$	Fonction lisse sur M
$\mathcal{L}(E, F)$	L'espce des applications linéaires continues de E dans F
$\chi(M)$	L'ensembe des champs des vecteurs
f^*	Image reciproque par l'application f
$dimM$	La dimension de la variété M
(U, φ)	Carte d'une variété
(U_i, φ_i)	Atlas d'une variété
$\mathbb{R}^n$	Espace vectoriel réel de dimension n
$\mathcal{F}_p(M)$	L'ensemble des fonctions différentiables
TM	Fibré tangent de la variété M
$T_p(M)$	L'espace tangent dans un point P de M
T^*M	Fibré cotangent de la variété M
i_X	Produite extèrieur par le champ X
$[x, y]$	Crochet de Lie
L_X	Dérivée de Lie
$\Omega(M)$	Forme différentielles sur M
$\Omega^p(M)$	Forme différentielles de degré p sur M
$\otimes$	Produit tensoriel (de vecteur ou de forme)
$\wedge$	Produit exterieur
$\bigwedge^k$	Puissance exterieur $k-$ième
$\langle\,,\,\rangle$	Produit scalaire euclidien
g	Métrique Riemannienne
(M, g)	Variété Riemannienne
$d(c)$	La longueur d'une courb c
∇	Connexions affine
$\Gamma^k_{i,j}$	Symbol de Cristoffel
$R(X, Y)Z$	Courbure Riémannien
$R(X, Y, Z, T)$	Oppérateur de courbure Riemannienne
$K(x, y)$	Courbure sectionelle
$Ric(x, y)$	Courbure de Ricci
$Scal(P)$	Courbure scalire du plan P

Introduction

Le but de ce mémoire est de présenter les notions fondamentales des courbures d'une variété Riemannienne et pour le présenter en manière claire et facile.

Notre travaille sera divisée en trois chapitres :
Dans le premier chapitre de ce mémoire nous rappelons quelques définitions et quelques propriétés d'analyse, algèbre et la topologie dans le calcul différentielle, les morphisme algebrique et l'espace topoloqique.
Ensuite nous présentons les notions de base de la géométrie différentielle les variétés, champs de vecteurs, les tenseurs et les formes différentielles, dérivée exterieur derivée de lié, connexions affine.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions les notions de base des variétés Riemannienne (M, g),dans la métrique Riemannienne et la connexion de Levi-civita, si M une variété Riemannienne c-à-d il existe une connexion affine ∇ unique sur M satisfais les deux conditions

1. ∇ est symétrique
$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \forall \quad X, Y \in \chi(M)$$

2. ∇ est compatible avec la métrique Riemannienne
$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \qquad \forall X, Y, Z \in \chi(M)$$

Dans le troisième chapitre, on définit les courbures Riemanniennes qui jeux un rôle fondamental en géométrie Riemannienne, on commence par la courbure Riemannienne pour tout X, Y champs de vecteures une application $R(X, Y) : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ définit par :

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \quad Z \in \chi(M)$$

et la courbure sectionalle
$$K(x, y) = \frac{R(x, y, x, y)_p}{|x \wedge y|^2}$$

la courbure de Ricci est la trace de la courbure Riemannienne ie $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de $T_p(M)$ alors
$$Ric(x, y) = \sum_{i=1}^{n} R_p(x, e_i, y, e_i)$$

la courbure scalaire est la trace de la courbure de Ricci

$$Scal(p) = \sum_{i,j=1}^{n} R(e_i, e_j, e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} K(e_i, e_j)$$

Résumé

Dans ce mémoire nous avons étudié les définitions et propriétés géométrique intrinsèque des courbures d'une variété Riemannienne (courbures Riemanniennes, courbures sectionnelles, courbures de Ricci, courbures scalaires) et on donne quelques exemples des courbures Riemanniennes dans le cas d'une variété à courbure constante.

Abstract

In this thesis we have studied the intrinsic geometrical definitions and properties of the curvatures of a Riemannian manifold (Riemannian curvatures, sectional curvatures, Ricci curvatures, scalar curvatures) and some examples of Riemannian curvatures in the case of a constant curvature.

ملخص

في هذه المذكرة درسنا التعاريف والخصائص الهندسية الجوهرية للمنحنيات منوعة ريمانيان (انحناء الريماني، انحناء قطاعات، انحناء ريتشي، انحناء العددية) وإعطاء بعض الأمثلة للانحناء الريماني في حالة لانحناءمنوعة ثابثه .

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Rappel

1.1.1 Calcul différentiel

Fonctions différentiables, fonctions de classe C^1

On suppose que U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E, et on considère une fonction

$$f : U \longrightarrow F$$

où F est un autre espace vectoriel normé, le fait que U soit ouvert permettra de considérer les valeurs de f au voisinage de tout point de U.
Si cela n'est pas le cas, il faudrait restreindre la définition qui suit aux points intérieurs à U.

On rappelle que $\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F.

Définition 1.1.1. *[1]*
La fonction f est différentiable en un point $x \in U$ s'il existe $l \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que :

$$\lim_{h \to 0_E} \frac{\|f(x+h) - f(x) - l(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0.$$

Autrement dit, f est différentiable en x s'il existe une application linéaire continue.
$l \in \mathcal{L}(E,F)$ et R réel positive et une application $\epsilon : B(0_E, R) \to \mathbb{R}^+$ tendant vers 0 en 0_E telles que pour tout $h \in B(0_E, R)$

$$\|f(x+h) - f(x) - l(h)\|_F = \epsilon(h)\|h\|_E$$

Il suffit en effet de poser $\epsilon(0_E) = 0$ et si $R > 0$ est choisi de sorte que la boule $B(0_E, R)$ (de centre 0_E de rayon R) soit incluse dans U (ce qui est possible car U est ouvert),

$$\epsilon(h) = \frac{\|f(x+h) - f(x) - l(h)\|_F}{\|h\|_E}$$

pour $0 < \|h\|_E < R$ *cela signifie que* $l(h)$ *(approche) la défference* $f(x+h) - f(x)$ *l'orsque* h *tend vers* 0_E.

Proposition 1.1.1. *[1]*
Une fonction $f : U \longrightarrow F$ *différentiable en un point* $x \in U$ *est nécessairement continue au point* x.

Définition 1.1.2. *[1]*
On dit que la fonction f *est différentiable sur* U *si elle est différentiable en tout point* $x \in U$ *Dans ce cas on appelle differentielle de* f *l'application*

$$df : U \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$$
$$x \longrightarrow df(x)$$

Si de plus df *est continue, on dit que* f *est continûment différentiable, ou de façon équivalente que* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$.

1.1.2 Les morphismes algébrique

Morphismes de groupes

Définition 1.1.3. *[2]*
Soient G *un groupe muni d'une loi de composition interne* $\bullet$ *et* G' *un groupe muni d'une loi de composition interne* $*$. *On appel morphisme de groupes, ou homomorphisme de groupes de* G *dans* G' *toute application* $f : G \longrightarrow G'$ *telle que*

$$f(x.y) = f(x) * f(y), \quad \forall x, y \in G$$

Exemple 1.1.1. *[2]*
L'application $exp(\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*, .)$ *qui a tout nombre reel associe son exponentielle est un morphisme de groupes de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$
$exp(x+y) = exp(x).exp(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

Groupes symetrique

Définition 1.1.4. *Soit* E *un ensemble fini, une permutation de* E *est une bijection de* E *dans* E.
On note S_E *l'ensemble des permutations de* E.
Si $E = \{1, ..., n\}$ *on le note simplement* S_n.
L'ensemble S_E *muni de la loi de composition des applications est un groupe d'élément neutre* $e = id$ *appelé groupe symétrique sur l'ensemble* E.

Définition 1.1.5. *(signature)*
Si k est le nombre d'inversions d'une permutation p, on appelle signature de la permutation p, le nombre $(-1)^k$.
La signature d'une permutation vaut $+1$ si son nombre d'inversions est pair.
La signature d'une permutation vaut -1 si son nombre d'inversions est impair.

Isomorphismes de groupes

Définition 1.1.6. *Soient G et G' deux groupes, on appel isomorphisme de groupes de G dans G' tout morphisme $f : G \longrightarrow G'$ qui est de plus une bijection de G sur G'.*

Proposition 1.1.2. *[2]*
Si f est un isomorphisme de groupes de G dans G', alors la réciproque f^{-1} est un isomorphisme de groupes de G' sur G.

Définition 1.1.7. *[2]*
Soient G et G' deux groupes. On dit que G et G' sont isomorphes lorsqu'il existe un isomorphisme de groupes de G dans G'. On note $G \simeq G'$.

1.1.3 Espace topologique

Définition 1.1.8. *[3]*
Une structure topologique, ou topologie, est donné sur un ensemble E par la donnée d'une famille τ de parties de E, appelées parties ouvertes ou ouverts de E ,vérifiant les propriétés suivantes :

1. *L'ensemble E et la partie vide $\varnothing$ appartennent à la famille τ, c-à-d sont des ouverts.*

2. *Toute réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.*

3. *L'intersection de deux ouverts (et par suite, toute intersection finie d'ouverts) est un ouvert.*

Un ensemble E muni d'une topologie est appelé espace topologique.

Définition 1.1.9. *[4]*
Un espace topologique est dit séparé si, pour tous points x, y de cet espace, il existe un voisinage U de x et un voisinage V de y tels que $U \cap V = \varnothing$.
Un espace séparé est dit aussi un espace de Hausdorff.

Exemple 1.1.2. *[5] (Espaces métriques).*

Rappelons qu'un ensemble non vide M muni d'une fonction $d : M \times M \to \mathbb{R}^+$ est appelé un espace métrique (et d est une distance ou aussi une métrique) si les quatre axiomes suivants sont vérifiés pour $x, y, z \in M$.

1. *$d(x, y) \geq 0$.*

2. *$d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.*

3. *$d(x, y) = d(y, x)$ (symetrique).*

4. *$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (inégalité du triangle).*

1.2 Variétés differentielles

On va introduire dans cette section les définitions et quelque propriétés de base sur les variétés, pour plus de détailles on renvoit le lecteur au [5], [13]

1.2.1 Variété topologique

Définition 1.2.1. *Une variété topologique de dimension n est un espace de Hausdorff M tel que pour tout $p \in M$ il existe un voisinage ouvert $U \subset M$, $\forall p \in U$, un voisinage ouvert $U' \subset \mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme φ*

$$\varphi : U \longrightarrow U'$$

On appel n la dimension de la variété topologique M.
Nous la noterons par $dimM$.

Pour indiquer que la variété M est de dimension n nous la noterons parfois par M^n :

$$dimM^n = n$$

Définition 1.2.2. *(Carte)*
Une carte d'une variete topologique X est la donnée d'un couple (U, φ) formé d'un ouvert U de X (le domaine de la carte) et d'un homeomorphisme φ de U sur un ouvert $\mathbb{R}^n$

Définition 1.2.3. *(Atlas)*
Un atlas de X est une famille $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$(pas necessairement finie) de cartes, dont les domaines U_i recouvrent X c-à-d ($\bigcup U_i = X$).

Définition 1.2.4. *(Homéomorphisme)*
Soient X et Y des espaces topologiques. On dit que $f : X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme si les 3 conditions suivantes sont satisfaites :

1. *f est continue.*
2. *f est une bijection, dont l'inverse est noté $f^{-1} : Y \longrightarrow X$.*
3. *L'application $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ est continue.*

Définition 1.2.5. *(Difféomorphisme C^k)*
Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^n$ On dit que $f : U \longrightarrow V$ est un C^k- difféomorphisme si f est une bijection, et si f et sa réciproque sont de classe C^k.

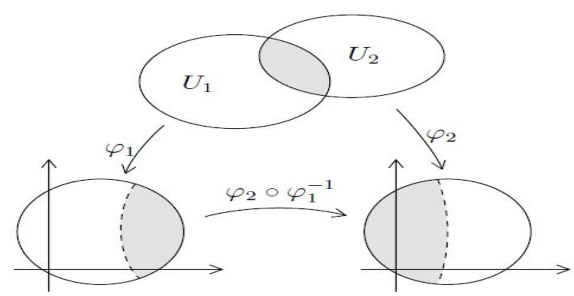
On dit que f est un C^k-difféomorphisme local en $x \in U$, s'il existe U_x et $V_{f(x)}$ voisinage respectifs de x dans U et de $f(x)$ dans V tels que $V_{f(x)} = f(U_x)$ l'application induite $f : U_x \longrightarrow V_{f(x)}$ est un C^k-difféomorphisme

1.2.2 Variété différentielle

Définition 1.2.6.
Notons que si (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) sont deux cartes de M telles que $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, alors l'application de changement de cartes

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2). \tag{1.1}$$

est un homéomorphisme.



Changement de cartes

Dans la suite, nous nous intéresserons au cas où ces applications sont différentiables .
Puisque nous nous limiterons partout aux applications et fonctions qui sont de classe C^∞, nous adoptons la convention de notation suivante :
différentiable *: signifiera toujours différentiable de classe C^∞.*
Pour la définition suivante, nous rappelons que pour des domaines ouverts Ω, Ω' dans $\mathbb{R}^n$ une application $f : \Omega \to \Omega'$ est appelée un difféomorphisme si f est un homéomorphisme et si f et son inverse f^{-1} sont différentiables.

Définition 1.2.7.
Soit une variété topologique $M = M^n$, deux cartes $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ de M sont compatibles (plus précisément, compatibles de classe $\mathcal{C}^\infty$, si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1. *$U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ et l'application de changement de cartes est un difféomorphisme*
2. *$U_1 \cap U_2 = \varnothing$.*

Définition 1.2.8.
Un atlas $\mathcal{A}$ de M est différentiable si toutes les cartes de $\mathcal{A}$ sont compatibles entre elles.
Une variété différentiable est un couple $(M, \mathcal{A})$ où M est une variété topologique et $\mathcal{A}$ est un atlas différentiable de M.

Exemple 1.2.1.
(Ouverts de $\mathbb{R}^n$) Les exemples les plus simples sont les ouverts ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) munis de l'atlas $\mathcal{A}$ qui contient la seule carte (Ω, id_Ω).
La structure différentiable $(\Omega_i, id_{\Omega_i})$ définie par cet atlas est appelée la structure différentiable standard de $\mathbb{R}^n$.

1.2.3 Sous-variété

Définition 1.2.9.
Une partie $N^p \subset M$ est une sous-variété de dimension p de M^n si pour tout x de N, il existe des voisinages ouverts U et V de x et 0 dans $\mathbb{R}^{n-p}$ et un difféomorphisme

$$f : U \to V \quad \text{tel que} \quad f(U \cap N) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$$

On dit alors que N est de codimension $n-p$ dans M.

1.2.4 Espace tangent

Soit M une variété différentielle de dimension n et $p \in M$ nous notons $\mathcal{F}_p(M)$ l'ensemble des fonctions différentiables de M dans $\mathbb{R}$.
Et $lbracex_1, ..., x_2\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ au voisinage de $\varphi(p)$.

Une fonction $f \in \mathcal{F}_p(M)$ est appelée stationnaire (fonction constante) en p s'il existe une carte (U, φ) avec $p \in U$ tel que

$$\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) = 0 \quad i = 1, ..., n \tag{1.2}$$

En se servant de la règle pour la dérivée d'une fonction composée, on voit immédiatement que f est stationnaire si et seulement si (1.2) est vérifiée pour toute carte (U, φ) satisfaisant $p \in U$.
Nous notons $\mathcal{F}_p^0(M) \subset \mathcal{F}_p(M)$ l'ensemble de toutes les fonctions stationnaires de $\mathcal{F}_p(M)$

Définition 1.2.10. *[5]*
Un vecteur tangent en p est une application

$$A : \mathcal{F}_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui à toute fonction $f \in \mathcal{F}_p(M)$ de sorte que les règles suivantes sont vérifiées pour tout $f, g \in \mathcal{F}_p(M)$.
D_1 *: $A[f+g] = A[f] + A[g]$.(Linéaire)*
D_2 *:$A[fg] = A[f]g + fA[g]$.(Dérivation)*
D_3 *: $f \in \mathcal{F}_p^0(M) \Longleftrightarrow A[f] = 0$.(Homogène)*
L'ensemble des vecteurs tangents en p est noté $T_p(M)$. C'est un espace vectoriel muni des opérations suivantes

$$(A+B)[f] = A[f] + B[f]$$
$$(\lambda A)[f] = \lambda(A[f])$$

pour $A, B \in T_p(M), \lambda \in \mathbb{R}$. On appelle $T_p(M)$ l'espace tangent de M en p.

Remarque 1.2.1. *[5]*
Une application $A : \mathcal{F}_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfaisant* D_1, D_2 *et* D_3 *est aussi appelée une dérivation.*

Exemple 1.2.2. *Soit* (U, φ) *une carte de* M^n*,* $p \in M$ *et* $\bar{p} = \varphi(p)$ *et* $f \in \mathcal{F}_p(M)$ *pour* $i = 1, ..., n$ *on définit un vecteur tangent* X_P

$$X_p^i[f] = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})(\bar{p})}{\partial x_i}.$$

Théorème 1.2.1. *[5]*
Les vecteurs $X_p^1, ..., X_p^n$ *forment une base de* $T_p(M)$ *. En particulier,* $dimT_p(M) = dimM$*.*

Preuve 1.2.1. *Considérons les fonctions de coordonnées* $\xi_j : U \to \mathbb{R}$ *définies par*

$$\xi_j(\varphi^{-1}(x_1, ..., x_n)) = x_j \quad j = 1, ..., n$$

Elles ont la propriété que

$$X_p^i[\xi_j] = \delta_{ij}$$

On en déduit que $X_1, ..., X_n$ *sont linéairement indépendants.*
Soit maintenant $A \in T_p(M)$ *et posons*

$$\alpha_i = A[\xi_i](p) \qquad i = 1, ..., n$$

Soit $f \in \mathcal{F}_p(M), f$ *s'ecrit*

$$f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}(\bar{p})\xi_j + h = \sum_{j=1}^{n} X_p^j[f] + h$$

Avec $h \in \mathcal{F}_p^0(M)$*.*
En utilisant les règles de calcul pour les dérivations et le fait que $X_p^i[\xi_j] = \delta_{ij}$ *on obtient*

$$A[f](p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_p^i[f]$$

Ceci étant vrai pour tout $f \in \mathcal{F}_p(M)$ *on a daonc*

$$A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_p^i$$

Définition 1.2.11. *[5]*

1. *La base* $X_p^1, ..., X_p^n$ *s'appelle la base canonique de* $T_p(M)$ *associée à la carte* (U, φ)*, ou simplement la base associée.*
2. *Si* $A = \sum \alpha_i X_p^i \in T_p(M)$*), nous dirons que* $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *est la représentation de* A *en coordonnées, relativement à la carte* (U, φ)*.*

Proposition 1.2.1. *[5](Changement des coordonnées)*
les cartes, $(U,\varphi)(V,\psi)$ *de* $M, p \in U \cap V$ *et les bases de* $T_p(M)$ *associées respectivement* $\{X_p^1, ..., X_p^n\}$ *et* $\{Y_p^1, ...Y_p^n\}$ *Si le changement de coordonnées est donné sous la forme*

$$(\psi \circ \varphi^{-1})(x_1, ...x_n) = (y_1, ...y_n)$$

alors on a la formule suivante, où $\frac{\partial y_i}{\partial x_i}$ *est évalué en* $x = \varphi(p)$

$$X_p^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} Y_p^j \qquad i = 1, ..., n \tag{1.3}$$

Si $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *est la représentation en coordonnées de* $A \in T_p(M)$ *relativement à* (U,φ) *alors la représentation de* A *relativement à* (V,ψ) *est* $(\alpha_1', ..., \alpha_n')$ *, où*

$$\alpha_j' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \alpha_i \quad j = 1, ..., n \tag{1.4}$$

Fibré tangent

Soit M^n une variété différentielle de dimension n pour tout p de M on note $T_p(M)$ espace tangent et on note $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ base de $T_p(M)$,$(x^1, ..., x^n)$ coordonée de la carte (U,φ)

Définition 1.2.12.
Nous posons tout d'abord

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$$

Alors TM *est une variété différentiable, appelée fibré tangent à* M^n*.*
Un élément de TM *est un couple* $(p, X(p))$ *avec* $p \in M$ *et* $X(p) \in T_p(M)$*. Cherchons des coordonnées sur* TM*.*
Soit (U,ϕ) *une carte locale sur* M*, de coordonnées* (x^i)*. Pour* $p \in U$*, et* $X(p) \in T_pM$*, nous pouvons prendre comme coordonnées du couple* $(p, X(p))$ *les réels* $(x^1(p), ..., x^n(p), X^1(p), ..., X^n(p))$ *où nous décomposons* $X(p)$ *selon* $X(p) = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}(p) \in T_p(M)$*.*
Nous avons donc $2n$ *coordonnées pour caractériser un élément de* TM*. Cette variété topologique est donc de dimension* $2n$*. De plus, on peut voir que , grâce à ces coordonnées, que* TM *est bien une variété différentiable.*

Remarque 1.2.2.
Il existe une application surjective particulière $\pi : TM \longrightarrow M$ *définie par* $\pi(p, X) = p$*. c'est la projection de* TM *sur* M*. Nous remarquons que les ouverts des cartes de* TM*, définies ci-dessus, sont les ouverts* $\pi^{-1}(U) \longrightarrow TM$*. D'autre part, en identifiant* $p \in M$ *au point* $(p, 0)$ *de* TM*, on peut considérer* M *comme une sous-variété de* TM*.*

1.3 Champs de vecteurs

Définition 1.3.1. *[10]*
Un champ de vecteurs X *sur une variété différentiable* M *est une application associée à chaque*

point $p \in M$ un vecteur $X(p) \in T_p(M)$.
En termes d' applications X est une application de M dans le fibré tangentiel TM. Le champ est différentiable

$$X : M \longrightarrow TM$$
$$p \longrightarrow X_p \in T_p(M)$$

est différentiable
Localement X on peut écrire

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.5}$$

Où chaque $a_i : U \longmapsto \mathbb{R}$ est fonction sur U et $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ est la base associée à x^i,$i = 1, ..., n$.
on note $\chi(M)$ l'ensemble des champs des vecteurs sur M

Remarque 1.3.1.

1. *X est différentiable si et seulement si les fonctions a_i sont différentiables.*
2. *il est pratique d'utiliser l'idée dans 1 et de prendre à un champ vectoriel comme un application $X : \mathcal{F}(M) \longmapsto \mathcal{F}(M)$ de l'ensemble Ω de fonctions différentiables sur M vers l'ensemble $\mathcal{F}(M)$des fonctions sur M défini de la manière suivante*

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \tag{1.6}$$

Où f indique, par abus de notation, l'expression de f dans la paramétrisation x.

1.3.1 Crochet de Lie

Proposition 1.3.1. *(et Definition)[10]*
soit M une variété différentiable, et soit X et Y deux champs de vecteurs , alors il existe un unique champ de vecteur Z tel que, $\forall f \in \mathcal{F}(M)$, $Zf = (XY - YX)f$.
on note $[X, Y] = Z = XY - YX$

Proposition 1.3.2. *[10]*
Soient X, Y et Z des champs de vecteurs différentiable dans M , et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et f, g sont des fonctions différentiable alors :

1. $\Big[X, Y\Big] = -\Big[Y, X\Big]$*(anticommutative).*
2. $\Big[\alpha X + \beta Y, Z\Big] = \alpha\Big[X, Z\Big] + \beta\Big[Y, Z\Big]$*(linéarité).*
3. $\Big[\Big[X, Y\Big], Z\Big] + \Big[\Big[Y, Z\Big], X\Big] + \Big[\Big[Z, X\Big], Y\Big] = 0$*(L'identité de jacobi).*
4. $\Big[fX, gY\Big] = fg\Big[X, Y\Big] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Preuve 1.3.1.
pour prouver 1) :

$$\begin{aligned}
\Big[X, Y\Big] &= XY - YX \\
&= -YX + XY \\
&= -(YX - XY) \\
&= -\Big[Y, X\Big]
\end{aligned}$$

2) est évidant
3)

$$\begin{aligned}\Big[\Big[X,Y\Big],Z\Big] &= \Big[XY-YX,Z\Big]\\ &= \Big[XY,Z\Big]-\Big[YX,Z\Big]\\ &= XYZ-ZXY-YXZ+ZYX\\ &= XYZ-XZY+YZX-YXZ\\ &= \Big[X,\Big[Y,Z\Big]\Big]+\Big[Y,\Big[Z,X\Big]\Big]\end{aligned}$$

on a par utiliser le propriété 1)on obtient :

$$\Big[\Big[X,Y\Big],Z\Big]=\Big[X,\Big[Y,Z\Big]\Big]+\Big[Y,\Big[Z,X\Big]\Big]=-\Big[\Big[Y,Z\Big],X\Big]-\Big[\Big[Z,X\Big],Y\Big]$$

donc

$$\Big[\Big[X,Y\Big],Z\Big]+\Big[\Big[Y,Z\Big],X\Big]+\Big[\Big[Z,X\Big],Y\Big]=-\Big[\Big[Y,Z\Big],X\Big]-\Big[\Big[Z,X\Big],Y\Big]+\Big[\Big[Y,Z\Big],X\Big]+\Big[\Big[Z,X\Big],Y\Big]=0$$

4) par 1)

$$\begin{aligned}\Big[fX,gY\Big] &= fX(gY)-gY(fX)\\ &= fgXY+fX(g)Y-gfYX-gY(f)X\\ &= fg\Big[X,Y\Big]+fX(g)Y-gY(f)X\end{aligned}$$

Dérivations et champs de vecteurs

Nous appellerons dérivation sur l'algèbre $\mathcal{F}(M)$ toute application linéaire $D:\mathcal{F}(M)\longrightarrow\mathcal{F}(M)$ qui vérifie la relation de Leibniz :

$$D(fg)=D(f)g+fD(g).$$

Alors tout champ de vecteur X sur M définit une dérivation sur $\mathcal{F}(M)$ par la relation suivante :

$$(X\cdot f)(p)=X(p)f(p).$$

f où dans le second membre, $X(p)$ est pris comme dérivation au sens de la définition de $T_p(M)$. Localement, cette formule s'écrit

$$(X\cdot f)(p)=\sum_i X^i(p)\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

C'est la dérivée de f dans la direction de X, comme il est facile de le voir dans $\mathbb{R}^n$.
Réciproquement, on peut voir que toute dérivation de d'algèbre $\mathcal{F}(M)$ définit un champ de vecteurs.
Donc nous identifions $\chi(M)$ aux dérivations de $\mathcal{F}(M)$.
Muni de ce crochet, $\chi(M)$ est une algèbre de Lie. Son expression locale est

$$[X,Y]=\sum -i,j,k\left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}-Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

On remarque que $\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right]=0$. Ceci est une caractéristique des dérivations le long de coordonnées.

1.3.2 Espace cotangent

Dualité

Comme $T_p(M)$ est un espace vectoriel, il est possible de considérer son dual, que nous noterons $T_p^*(M)$, on l'appel espace cotangent à M en p.
Nous rappelons que le dual d'un espace vectoriel est l'ensemble des applications linéaires de cet espace vectoriel vers $\mathbb{R}$.
Cet ensemble forme lui-même un espace vectoriel, de même dimension.
Nous noterons $\langle \alpha_{|p}, X_{|p} \rangle \in \mathbb{R}$ le couplage entre $\alpha_{|p} \in T_p^*(M)$ et $X_{|p} \in T_p(M)$ c'est â dire $\alpha_{|p}(X_{|p})$

Différentielle d'une fonction

Soit f une fonction sur M. Si nous considérons $X_{|p}$ comme une dérivation, $X_{|p} \cdot f \in \mathbb{R}$ dépend linéairement de $X_{|p}$. Ainsi la dérivation de f définit une application linéaire $T_p(M) \longmapsto \mathbb{R}$, donc un élément de $T_p^*(M)$. On note $df(p)$ ou $df_{|p}$ cet élément, qui ne dépend bien sûr que de f et p. Nous avons ainsi

$$\langle df_{|p}, X_{|p} \rangle = X_{|_p} \cdot f$$

Nous dirons que $df_{|p}$ est la différentielle de f en p. Elle ne peut dépendre que des dérivées premières de f en p.

Une base de l'espace cotangent

Nous savons que localement, au dessus d'un ouvert U d'une carte locale (U, ϕ) ,$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \right\}$ est une base de $T_p(M)$ pour tout $p \in U$. Nous notons $\left\{ dx^i_{|p} \right\}$ sa base duale. Cette écriture se justifie en effet par la définition de la différentielle, puisque les x^i sont n fonctions définies localement sur M et puisque nous avons par définition même de la différentielle

$$\langle dx^j_{|p} \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \rangle = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}|_p = \delta^j_i$$

Il est aisé de vérifier que dans cette base,

$$df_{|p} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i_{|p}$$

Fibré cotangent

Définition 1.3.2. *Comme pour $T_p(M)$, nous pouvons considérer la variété différentiable*

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*(M)$$

appelée fibré cotangent de M.

1.4 Tenseur et forme différentielle

1.4.1 prouduit tensorielle sur un espace vectoriel

Définition 1.4.1. *[8]*
Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimensions p et q respectivement.
Nous notons E^* et F^* leur espace vectoriel dual. Pour $f \in E^*, g \in F^*$ appelé forme de E et F $x \in E, y \in F$ nous posons

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$$

.
Nous définissons ainsi $(f \otimes g)$ comme une forme bilinéaire sur $E \times F$.
C'est le produit tensoriel des deux formes f et g.

Proposition 1.4.1. *[8]*
Si $\{f^1, ..., f^p\}$ est une base de E^* et $\{g^1, ..., g^q\}$ une base de F^*, alors l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur $E \times F$ admet pour base les pq éléments $f^i \otimes g^j$

Définition 1.4.2. *[8]*
l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times F$ est noté $E^* \otimes F^*$ et appelé produit tensoriel de E^* et F^*.
Tout élément $T \in E^* \otimes F^*$ s'écrit donc $T = T_{ij}e^i \otimes f^i$, $T_{ij} \in \mathbb{R}$.
Nous savons d'autre part que tout vecteur de E peut être considéré comme une forme linéaire sur E^*,c'est à dire comme élément de E^{**} (en dimension finie, nous avons $E^{**} \simeq E$).
Nous pouvons donc appliquer ce schéma de construction à E^* et F^* afin de définir le produit tensoriel $E \otimes F \simeq E^{**} \otimes F^{**}$.
Une base de $E \otimes F$ est alors $e_i \otimes f_j$ où e_i et f_j sont des bases de E et F.
Nous avons alors les règles algébriques suivantes :
si $x, x_1, x_2 \in E, y, y_1, y_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,alors

1. $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$

2. $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$

3. $(\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y) = \lambda(x \otimes y)$

Nous pouvons itendre le processus de tensorialisation et définir ainsi $E \otimes ... \otimes E \otimes F \otimes ... \otimes F$.
Pour la suite,nous particularisons F en prenant $F = E^*$.
Nous obtenons alors $E \otimes ... \otimes E \otimes E^* \otimes ... \otimes E^*$ où E apparaît s fois et E^* r fois.
Les éléments de cet ensemble sont des formes $(r + s)$linéaires sur $E \times ... \times E \times E^* \times ... \times E^*$.
Un tel élément s'écrit

$$T = \sum_{1 \leq j_1 \leq j_r \leq n 1 \leq i_1 \leq i_r \leq n} T^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes ... \otimes e^{j_r}$$

c'est un tenseur de type (r, s).
Nous dirons que les coefficients $T^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r}$ *sont les coordonnées du tenseur* T *dans la base* (e_i).
Nous dirons que les indices bas de T *sont covariants, et les indices hauts contravariants.*

Définition 1.4.3. *[8]*
Un élément de $\mathbb{R}$ *est par convention un tenseur de type* $(0, 0)$. *Ces tenseurs sont appelés des scalaires.*
Un tenseur de type $(1, 0)$ *est bien sûr un vecteur de* E, *et un tenseur de type* $(0, 1)$ *est une forme de* E^*.

Définition 1.4.4. *[8]*
Nous dirons qu'un tenseur $T = T^{i_1 \dots i_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s}$ *est symétrique (resp. antisymétrique) si* $T_{i_1 \dots i_s} = T^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(s)}}$ *(resp.*$T^{i_1 \dots i_s} = (-1)^{sign(\sigma)} T^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(s)}}$*) pour tout* $\sigma \in S_n$ *où* S_n *est le groupe des permutations de l'ensemble* $\{1, \dots, s\}$,*cette définition est indépendante du choix de la base.*
Les opérations de produit tensoriel et de contraction permettent de construire de nouveaux tenseurs à partir de tenseurs donnés.
Le produit tensoriel du tenseur

$$S = \sum_{1 \le l_1 \le l_p \le n, \ 1 \le k_1 \le k_q \le n} S^{k_1 \dots k_q}_{l_1 \dots l_p} e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_q} \otimes e^{l_1} \otimes \dots \otimes e^{l_p}$$

avec le tenseur

$$T = \sum_{1 \le i_1 \le i_s \le n} T^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}$$

est le tenseur

$$S \otimes T = \sum S^{k_1 \dots k_q}_{l_1 \dots l_p} T^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_q} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{l_1} \otimes \dots \otimes e^{l_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}$$

La contraction d'un tenseur consiste à sommer l'un de ses indices hauts avec l'un de ses indices bas.
Par exemple, la contraction de $\alpha \otimes X$ *où* $\alpha \in E^*$ *et* $X \in E$ *,est* $\langle \alpha, X \rangle$ *c'est à dire que nous sommons un indice haut* (X^i) *et un indice bas* $(\alpha_i) : \alpha_i X^j \mapsto \alpha_i X^i$.
Dans ce cas particulier, nous obtenons un scalaire.
Dans le cas général, la contraction d'un seul indice fait passer d'un tenseur de type (s, r) *à un tenseur de type* $(s - 1, r - 1)$.

1.4.2 1-forme différentielle

Définition 1.4.5. *[7]*
Une 1-forme différentielle ou forme différentielle de degré 1 sur une variété M *est une section lisse*

$$\begin{array}{rccl} \omega : & M & \longrightarrow & T^*M \\ & p & \longmapsto & \omega_p \in T^*_p(M) \end{array}$$

Remarque 1.4.1. *La différentielle d'une fonction f définie par*

$$\begin{array}{cccc} df: & M & \longrightarrow & T_x^*M \\ & p & \longmapsto & d_pf \end{array}$$

est une 1-forme différentielle .

Proposition 1.4.2. *[7]*

1. *Si α et β sont deux 1-formes différentielles,la somme $\alpha+\beta$ définie par*

   $$\alpha+\beta : p \to \alpha_p + \beta_p$$

   est une 1-forme différentielle.
2. *Si f est une fonction et ω est une 1-forme différentielle le produit*

   $$f.\omega : p \to f(p).\omega_p$$

   est également une 1-forme différentielle.
3. *Si ω est une forme différentielle et $(x_1, ..., x_n)$ des coordonnées au voisinage U d'un point p. Il existe des fonctions uniques ω_i définies sur U telles que*

   $$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_i$$

   Cette dernière proposition nous permet de donner un sens à la notion de 1-forme différentiable.

Définition 1.4.6. *[7](Forme différentielle lisse)*
Nous dirons qu'une 1-forme diférentielle ω est de classe $\mathcal{C}^k$ au voisinage du point p, s'il existe des coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ telles qu'au voisinage de p nous ayons

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$$

pour des fonctions f_i de classe $\mathcal{C}^k$ au voisinage de p.
Nous dirons qu'un 1-forme difféerentielle est de classe $\mathcal{C}^k$ si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ au voisinage de tout les points de la variété M.

Remarque 1.4.2.
On dite que forme différentielle est lisse si $k = \infty$.

Définition 1.4.7. *[7]*
Nous notons $\Omega^1(M)$ l'espace des une formes différentielles lisse sur M.
L'espace $\Omega^1(M)$ est un espace vectoriel.

1.4.3 Tenseurs sur une variété différentielle

Définition 1.4.8. *[8]*
Pour tout $p \in M$, définissons l'espace vectoriel

$$T_p^{(s,r)}M = \underbrace{T_p(M) \otimes ... \otimes T_p(M)}_{s fois} \otimes \underbrace{T_p^*(M) \otimes ... \otimes T_p^*(M)}_{r fois}$$

Un élément $T \in T_p^{(s,r)}(M)$ est un tenseur de type (s,r) au dessus de p.
Dans une base associée à des coordonnées (x^i) au voisinage de p, il s'écrit

$$T_{|p} = T^{i_1...i_s}_{j_1...j_r}(p)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(p) \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}(p) \otimes dx^{j1}_{|p} \otimes ... \otimes dx^{j_r}_{|p}$$

Champs de tenseurs

Nous pouvons considérer la variété différentiable

$$T^{(s,r)}M = \bigcup_{p\in M} T_p^{(s,r)}M$$

qui est un fibré au dessus de M, le fibré des tenseurs de type (s,r).
Des sections $\mathcal{C}^\infty$ de ce fibré seront appelées champs de tenseurs de type (s,r).
Un champ de tenseurs T de type (s,r) s'écrit donc localement, au dessus d'une carte locale de M, de coordonnées (x^i),

$$T = T^{i_1...i_s}_{j_1...j_r}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}} \otimes dx^{j1} \otimes ... \otimes dx^{j_r}$$

Globalement, on peut vérifier qu'un tenseur de type (r,s) est une application $\mathcal{F}(M)$-multilinéaire sur $\chi(M) \times ... \times \chi(M) \times \Omega^1(M) \times ... \times \Omega^1(M)$ à valeurs dans $\mathcal{F}(M)$.

Remarque 1.4.3. *[8]*
Un champ de tenseurs de type $(0,0)$ n'est autre qu'une fonction sur M, un tenseur de type $(1,0)$ est un champ de vecteurs, et un tenseur de type $(0,1)$ est une 1-forme différentielle.

Définition 1.4.9. *[8]*
si $F : M \to N$ est un difféomorphisme, il est possible de définir l'application pull-back sur les champs de tenseurs :

$$(F^*T)(\alpha^1, ..., \alpha^s, X_1, ..., X_r) = T((F^{-1})^*\alpha^1, ..., (F^{-1})^*\alpha^s, F_*X_1, ..., F_*X_r)$$

où T est un champ tensoriel sur N,$\alpha^i \in \Omega^1(M)$ et $X_i \in \chi(M)$.

1.4.4 Algèbre extérieur

Définition 1.4.10.
Un champ de tenseur covariant alternet d'ordre r sur M sera appellée les forme différentielle extèrieur de degré r noté $\bigwedge^r(M)$

Théorème 1.4.1. *[6]*
soit $\bigwedge(M)$ L'ensemble de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de tout les formes différentielle extérieure , alors pour $\varphi \in \bigwedge^r(M)$ et $\psi \in \bigwedge^s(M)$ la formule

$$(\varphi \wedge \psi)_p = \varphi_p \wedge \psi_p$$

définit un produit associatif qui satisfait la relation

$$(\varphi \wedge \psi) = (-1)^{rs}\varphi \wedge \psi$$

avec ce produit, $\bigwedge(M)$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$.
Si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,nous avons aussi $(f\varphi) \wedge \psi = f(\varphi \wedge \psi) = \varphi \wedge (f\psi)$.
Si $dx^1, ..., dx^n$ est un coropère c-à-d(Base orthonormé des 1-formes différentielle de M) , alors l'ensemble $\{dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r}\}|_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_r \leq n}$ est une base de $\bigwedge^r(M)$.

Théorème 1.4.2. *[6]*
Si $F : M \to N$ une application $\mathcal{C}^\infty$, alors $F^* : \bigwedge(N) \to \bigwedge(M)$ est un homomorphisme nous appellerons $\bigwedge(M)$ l'algèbre des formes différentielles ou de l'algèbre extérieure Sur M.

1.4.5 p-forme différentielle

Nous allons procéder pour les p-formes comme pour les 1-formes.
Soit

$$\Omega^p(M) = \bigcup_{m \in M} \Omega^p(T_m^*M)$$

Définition 1.4.11. *[7]*
Une p-forme différentielle est une application $\omega : m \to \omega_m$ défini sur M à valeurs dans $\Omega^p(T_m^*M)$ telle que pour tout m, on a $\omega_m \in \Omega^p(T_m^*M)$.

Définition 1.4.12. *[7](Formes différentielle lisse)*
Nous dirons qu'une p-forme différentielle ω est de classe $\mathcal{C}^k$ au voisinage du point m, s'il existe des coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ telles qu'au voisinage de m, les composantes de ω sont de classe $\mathcal{C}^k$ au voisinage du point m.
Nous dirons qu'un p-forme différentielle est de classe $\mathcal{C}^k$ elle est de classe $\mathcal{C}^k$ au voisinage de tout les points de la variété M.
Notons $\Omega^p(M)$ l'ensemble des p-formes différentielle lisse (c^∞)

1.5 Dériver Extérieur

Théorème 1.5.1. *[11]*
Soit M une variété lisse , pour tout $p \in \mathbb{N}$,il existe un opérateur local unique $d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$

appelé dérivée extérieur tel que :

1. *pour $p = 0$ $\quad d : C^\infty(M) \longmapsto \Omega^1(M)$ est la fonction différentielle*

2. *pour* $f \in C^{\infty}(M)$ *nous avons* $d(df) = 0$
3. *pour* $\alpha \in \Omega^p(M)$ *et* $\beta \in \Omega^q(M)$ *nous avons*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d_\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$$

Preuve[11]
commençons par traiter le cas ou M est un sous-ensemble ouvert U à $\mathbb{R}$ puis $\alpha \in \Omega^p(U)$ peut être décomposé d'un manière unique

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_n} \alpha_{i_1,\ldots,i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots. \wedge dx^{i_p}$$

on la somme est comprise sur tout les séquences strictement croissantes $i_1, ..., i_p$ à $[1, n]$

et le $\alpha_{i_1,\ldots,i_p}$ étant des fonctions lisse ,on pose :

$$d\alpha = \sum d\alpha_{i_1,\ldots,i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

on vérifie directement que l'opérateur vient de définir ce qui satisfait le (1) et (2)

par contraction (3)

$$\begin{aligned}
d(\alpha_I dx^I \wedge \beta_J dx^J) &= \Big(\sum_i \frac{\partial \alpha_I}{\partial x^i}\beta_J + \alpha_I \frac{\partial \beta_J}{\partial x^i}\Big) dx^i \wedge dx^I \wedge dx^J \\
&= \Big(\sum_i \frac{\partial \alpha_I}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I \wedge \beta_J\Big) + (-1)^p \alpha_I dx^I \wedge \Big(\sum_i \frac{\partial \beta_J}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^J\Big) \\
&= d_\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta
\end{aligned}$$

Corollaire 1.5.1. *[11]*
Soit $\phi : U \longmapsto V$ *un difféomorphisme entre deux sous-ensembles ouverts de* $\mathbb{R}^n$ *puis*

$$\phi^* \circ d = d \circ \phi^*$$

c'est le diagramme dans la figure commute

Proposition 1.5.1. *[11]*
pour tout p-forme ω *on* M

1. $d(d\omega) = 0$ *c-â-d* $d \circ d = 0$
2. $\phi : M \longmapsto N$, $d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega)$ *c-â-d* $\phi^* \circ d = d \circ \phi^*$ *avec* L_X *la dérivée de Lie (voir la suite)*
3. *Pour le champ de vecteur* X *dans* M, $L_X d\omega = d(L_\omega)$ *c.â.d* $L_X \circ d = d \circ L_X$
4. $L_X\omega = d(i_X\omega) + i_X(d\omega)$, *c-â-d* $L_X = d \circ i_X + i_X \circ d$

Corollaire 1.5.2. *[11]*
Pour $\alpha \in \Omega^p(M)$ *et* $(X_0, ..., X_p)$ $p + 1$ *champ de vecteur dans* M

$$\begin{aligned}
d\alpha(X_0, ..., X_p) &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i L_X \alpha\Big(\big(X_0, ..., \widehat{X_i}, ..., X_p\big)\Big) \\
&+ \sum_{0 \leq i \leq j \leq p} (-1)^{i+j} \alpha\Big(\big[X_i, X_j\big], X_0, ..., \widehat{X_i}, ..., \widehat{X_j}, ..., X_p\Big)
\end{aligned}$$

1.6 dérivée de Lie

Proposition 1.6.1. *et Définition[11]*

La dérivée de Lie associée à un champ vectoriel X sur M est l'application

$$L_X : \chi(M) \longmapsto \chi(M)$$

Qui envoie S au tenseur

$$\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\phi_t{}^* S\right)|_t = 0$$

Où ϕ_t est le groupe de paramètres local associé à X.

Vérifier que cette formule définit réellement un tenseur, et que l'expression de $L_X S$ à m dans les coordonnées locales ne dépend que des valeurs de m de S, X et de Leurs dérivés d'ordre un.

L'opérateur L_X est en fait défini par Propriétés :

1. *pour $f \in C^\infty(M), L_X f = df(x) = Xf$.*
2. *pour $Y \in \chi(M), L_X Y = [X, Y]$*
3. *Pour tout tenseur S, T :$L_X(S \otimes T) = L_X S \otimes T + S \otimes L_X T$ (i.e l'application L_X est une dérivation de l'algèbre de tenseur sur M)*

Proposition 1.6.2. *[11]*
Pour deux champs vectoriels X et Y, il en est ainsi :

$$L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X = L_{[X,Y]},$$

1.7 Connections Affine

Définition 1.7.1. *[10]*
Une connexions affine sur M est un opérateur noté ∇ définit par :

$$\begin{array}{rcl} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) & \longmapsto & \chi(M) \\ \Big(X, Y\Big) & \overset{\nabla}{\longmapsto} & \nabla_X Y \end{array}$$

Avec $$\nabla_X Y = \nabla(X, Y)$$
qui satisfait les propriétés suivantes :

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
2. $\nabla_X \Big(Y + Z\Big) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

pour tous $X, Y, Z \in \chi(M)$ et $f, g \in \mathcal{M}$

Proposition 1.7.1. *[10]*
Soit M une variété différentiable avec une connexion affine. Il existe une correspondance unique qui associe à une champ de vecteur V de long de la courbe différentiable $c : I \longmapsto M$ un autre champ de vecteur $\frac{DV}{dt}$ le long de c appelée dérivée covariant de V de long c tel que :

1. *$\frac{D}{dt}(V+W)=\frac{DV}{dt}+\frac{DW}{dt}$*
2. *$\frac{D}{dt}(fV)=\frac{Df}{dt}V+f\frac{DV}{dt}$, ou W est un champ de vecteur de long c et f est une fonction différentielle on M*
3. *Si V est induite par un champ de vecteur $Y\in\chi(M)$*
   e.i $V(t)=Y(c(t))$ puis $\frac{DV}{dt}=\nabla_{DV/dt}Y$

Preuve

Nous supposons initialement qu'il existe une correspondance satisfaisante 1), 2) et 3)

soit $x:U\subset\mathbb{R}^n\longmapsto M$ être un système de coordination avec $c(I)\cap x(U)\neq\varnothing$ et

soit $\Big(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)\Big)$ coordonnés local de la courbe $c(t),t\in I$

Soit $X_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$ on exprime localement le vecteur V par $V=\sum\limits_j v^jX_j$, $j=1,...,n$ avec $v^j=v^j(t)$ et $X_j=X_j\Big(c(t)\Big)$

par 1) et 2) nous avons

$$\frac{DV}{dt}=\sum_j\frac{dv^j}{dt}X_j+\sum_j v^j\frac{DX_j}{dt}$$

par 3)et 1) de définition précédant :

$$\begin{aligned}\frac{DX_j}{dt}&=\nabla_{Dc/dt}X_j\\&=\nabla_{\left(\sum_i\frac{dx^i}{dt}X_i\right)}X_j\\&=\sum_i\frac{dx^i}{dt}\nabla_{X_i}X_j,\qquad i,j=1,...,n\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{DV}{dt}=\sum_j\frac{dv^j}{dt}X_j+\sum_{i,j}\frac{dx^i}{dt}\nabla_{X_i}X_j \tag{1.7}$$

l'expression (1) nous montre qu s'il existe une correspondance satisfaisant aux conditions de la proposition une telle correspondance est donc unique.

pour montre l'expression on définit $\frac{DV}{dt}$ en $X(U)$ par (1)

L'équation 1 possède les propriétés souhaitées. Si $y(W)$ est un autre voisinage de coordonnées,avec $y(W)\cap x(U)\neq\varnothing$ et nous définissons $\frac{DV}{dt}$ dans $y(W)$ par (1)

Les définitions valable en $y(W)\cap x(U)$, Par l'unicité de $\frac{DV}{dt}$ dans $x(U)$ il s'ensuit que la définition peut être étendue à l'ensemble de M, et ceci conclut la preuve

Définition 1.7.2. *[10]*
Soit M une variété différentiable avec une connection affine ∇. et le vecteur V le long d'une courbe $c : I \longmapsto M$ est dit parallèle lorsque $\frac{DV}{dt} = 0$ pour tout $t \in I$

Proposition 1.7.2. *[10]*
Soit M une variété différentiable avec une connections affine ∇.Soit $c : I \longmapsto M$ une courbe différentiable en M et soit v_0 un vecteur tangent à M en $c(t_0)$ $t_0 \in I$ ($i.eV_0 \in T_{c(t_0)}M$).
Alors il existe un champ de vecteur parallèle unique V le long de c, tel que $V(t_0) = V_0$
($V(t)$ appelé le transport parallèle de $V(t_0)$ le long de c)

Preuve
Supposons que le proposition ait été prouvé pour le cas où $c(t)$ est contenu dans un voisinage local de coordonnées. Par compacité pour tout $t_1 \in I$ par hypothèse le segment $c([t_0, t_1]) \subset M$ peut être
recouvert par un nombre fini de voisinage de coordonnées, Dans lequel V peut être
défini. de l'unicité, les définitions coïncident lorsque l'intersection n'est pas vide,ce
qui permet la définition de V le long de $\left[t_0, t_1\right]$. Nous n'avons donc qu'à prouver le théorème lorsque $C(I)$est contenu dans un quartier coordonnée $x(U)$ d'un système de coordonnées $x; U \in \mathbb{R}^n \longrightarrow M$. Soit $x^{-1}(C(t)) = (x_1(t), ..., x_n(t))$être l'expression locale pour $C(t)$ et soit $V_0 = \sum_j V_0^j X_j$ ou $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(C(t_0))$.
Supposons qu'il existe un champ de vecteur V in $x(U)$ de long de c avec $V(t_0) = V_0$. alors $V = \sum v^j X_j$ satisfait

$$0 = \frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j$$

En mettant $\nabla_{x_i} X_j = \sum_k \Gamma_{i,j}^k X_k$ et en remplaçant j par k dans la première somme on obtient

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} \sum_{i,j} v^j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{i,j}^k \right\} X_k = 0$$

Le système de n équations différentielles en $v^k(t)$

$$0 = \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k v^j \frac{dx_i}{dt} \tag{1.8}$$

Possède une solution unique répondant aux conditions initiales $v^k(t_0) = v_0^k$.Il s'ensuit que, si X existe, il est unique

Chapitre 2

Variétés Riemannienne

2.1 Métrique et métrique Riemannienne

Définition 2.1.1. *[9]*
Soit le tenseur g définit par :

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$
$$(x, y) \longrightarrow g(x, y)$$

Soit $(\frac{\partial}{\partial x^i})_{1 \leq i \leq n}$ *la base de* $T_p(M)$ *dans carte local au voisinage d'un point* p.
Soit $u, v \in T_p(M)$ *avec*

$$u = \sum_{i=1}^{n} u^i \frac{\partial}{\partial x^i_{|p}} \quad et \quad v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i_{|p}}.$$

alors

$$g_p(u, v) = \sum_{i,j} g_{ij}(p) u^i v^j$$

où

$$g_{ij}(p) = g_p(\frac{\partial}{\partial x^i_{|p}}, \frac{\partial}{\partial x^j_{|p}})$$

Nous noterons

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

ou

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$$

g est dit métrique Riemannienne et notés g ou$\langle , \rangle$
toutes les variétés avec lesquelles nous travaillons sont supposées être connexe à l'infini.
Avec ces hypothèses, nous avons les suivantes

Définition 2.1.2. *[9]*
Une variété M est dite Riemannienne si elle est muni d'une métrique Riemannienne g note (M, g)

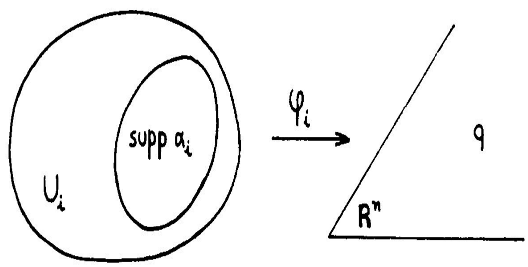
Théorème 2.1.1. *[9]*
Il existe au moins une métrique Riemannienne sur une variété.

Preuve 2.1.1. *[9]*
Nous allons d'abord construit des métriques Riemanniennes sur les domaines des cartes locales de M et ensuite généraliser avec une partition de l'unité.
Soit $(U_k, \varphi_k), (k \in K)$ un atlas telle que (U_k) est un recouverture de M, et soit (a_k) une partition subordonnée de l'unité pour un produit scalaire q sur $\mathbb{R}^n (n = dim M)$ et $k \in K$.
soit ${\varphi^*}_k(q_k)$ (q_k une métrique riemannienne sur U_k)et

$$g = \sum_k \alpha_k q_k$$

g est une section lisse et définie positive de T^*M si en effet $p \in M$ il existe au moins un $j \in K$ avec $\alpha_j(p) > 0$ et si $u \in T_pM$ n'est pas nul, alors

$$g(u,u) = \sum_k \alpha_k q_k(u,u) \geq \alpha_j(p) q_j(u,u) \geq 0$$



2.1.1 Changement de carte

Soit (U, f) et (V, f') deux cartes locales pour M. Si g est donnée par (g_{kl})(resp.(g'_{ij})) .
En ce qui concerne les systèmes de coordonnées connexes $(x_k) et (y_j)$ alors

$$g(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}) = \sum_{i,j} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} . \frac{\partial x^l}{\partial y^j} g(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l})$$

c'est-à-dire

$$(g'_{ij}) =^t (\Phi^{-1})(g_{kl}(\Phi^{-1}))$$

Où Φ est la matrice jacobienne de la fonction de changement de carte .

Exemple 2.1.1. *[9]*
L'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est canoniquement équipé d'un structure Riemannienne g : calculons l'expression locale de cette métrique en coordonnées polaire. Nous avons :

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) \quad et \quad \frac{\partial}{\partial \theta}(r,\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta)$$

On pose

$$g(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}) = 1 \quad , g(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}) = r^2$$

et

$$g(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}) = 0$$

c'est-à-dire

$$g = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

Définition 2.1.3. *[9]*
Soit (M,g) et (N,h) Deux variétés Riemanniennes. Une application

$$f : M \to N$$

est une isométrie si f est un difféomorphisme et si $g = f^*h$ c'est-à-dire si pour $u, v \in T_pM$

$$h_{f(p)}({f^*}_p.u, {f^*}_p.v) = g_p(u,v)$$

${f^*}_p$ est une isométrie des espaces vectoriels euclidiens entre (T_pM, g_p) et $(T_{f(p)}N, h_{f(p)})$.
On peut aussi définir la notion d'isométrie locale.

2.1.2 Longueur des courbes

Soit $c : [0,\alpha]$ une courbe, et $0 =< \alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_n = \alpha$ une partition de $[0,\alpha]$ telle que $C_{|[\alpha_i,\alpha_{i+1}]}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ (c de classe C^k par morceau $(\mathcal{C}^1)$).
La longueur de c est définie par

$$d(c) = \sum_{i=1}^{n_1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} |c'(t)| dt$$

Où

$$|c'(t)| = \sqrt{g\langle c'(t), c'(t)\rangle}$$

2.1.3 Sous-variété de $\mathbb{R}^n$

Une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ est équipé d'une manière canonique (le produit scalaire).
La métrique Riemannienne g définie par la restriction en limitant à chaque espace tangentiel $T_p(M)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
La longueur des courbes de M est égale à leur longueur Mesuré en $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2.1.2. *[9]*
Soit $S^n \subset \mathbb{R}^{n+l}$ équipé de la métrique induite, on calcule la longueur d'un arc de grand cercle d'angle α.
Comme la longueur (ne dépend pas de la paramétrisation) , on peut choisir la courbe $c : [0, \alpha] \to S^n$ définie par

$$c(t) = (\cos t)x + (\sin t)y \quad (ou \quad |x| = |y| = 1 \quad and \quad \langle x, y\rangle = 0)$$

alors

$$d(c) = \int_0^\alpha |c'(t)| \,\mathrm{d}t = \int_0^\alpha \mathrm{d} = \alpha$$

2.2 Connexion de Levi-Civita

Connexion Riemannienne

Définition 2.2.1. *[10]*
Soit M un variété Riemannienne, une connexion sur M est compatible avec une métrique si et seulement si pour tous les champs vecteurs V et W une longue courbe différentielle $c : I \longrightarrow M$ nous avons

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle \;\; t \in I$$

Corollaire 2.2.1. *[10]*
Une connexion ∇ sur un variété Riemannienne M, est compatible avec la métrique si et seulement si

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \qquad X, Y, Z \in \chi(M)$$

Définition 2.2.2. *[10]*
une connexion affine sur une variété lisse M est dit symétrique si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \forall \;\; X, Y \in \chi(M)$$

Remarque 2.2.1. *[10]*
Dans un système de coordonnées (U, x), le fait que ∇ est symétrique implique que pour tout $i, j = 1, ..., n$

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0 \text{ avec } \;, X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème fondamental de cette section

Théorème 2.2.1. *(Levi-Civita)[10]*
Étant donné une variété Riemannienne M, Il existe une connexion affine ∇ unique sur M satisfaisant les conditions :

1. *∇ Est symétrique*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \;\; \forall \;\; X, Y \in \chi(M)$$

2. ∇ Est compatible avec la métrique riemannienne

$$\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \qquad X, Y Z \in \chi(M)$$

Preuve 2.2.1.
supposons d'abord l'existence d'un telle ∇ alors

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X, Z\rangle \tag{2.1}$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y, X\rangle \tag{2.2}$$

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle \tag{2.3}$$

ajoutant (2.1) *et* (2.2) *et en soustrayant* (2.3)*, nous avons, en utilisant la symétrie ∇ alors*

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle + \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle$$

parce que

$$\nabla_X Z - \nabla_Z X = [X, Z], \qquad \nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y, Z], \qquad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] + 2\nabla_Y X$$

on a donc

$$\langle Z, \nabla_Y X\rangle = \frac{1}{2}\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle \tag{2.4}$$

ce qui prouve que $\nabla_X Y$ est défini de façon unique.
l'existence sera prouver par le lemme 2.2.1

Remarque 2.2.2. *[10]*
La connexion donnée par le théorème sera désormais la connexion Levi-civita (ou Riemannienne) sur M .

L'équation (2.4) a la conséquence intéressante suivante :

Définition 2.2.3. *[12]*
Étant donné les coordonnées $(x_1, ..., x_m) : U \to \mathbb{R}^m$ on M, les symboles Cristoffel $\Gamma_{i,j}^k$ de la connexion de Levi-Civita sont définis par

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma_{i,j}^k \partial_k$$

Où $\partial_i = \frac{\partial}{\partial_{x_i}}$

Lemme 2.2.1. *[12]*
Les symboles Christoffel de la connexion Levi-Civita dépendent uniquement de la métrique et de ses premiers partiels.

Preuve 2.2.2. *$X = \partial_i, Y = \partial_j$ et $Z = \partial_k$ dans (2.4) on a*

$$2\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k\rangle = \partial_i\langle \partial_j, \partial_k\rangle + \partial_j\langle \partial_j, \partial_i\rangle - \partial_k\langle \partial_i, \partial_j\rangle$$

Comme $[\partial_i, \partial_j] = [\partial_j, \partial_k] = [\partial_i, \partial_k] = 0$,$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ ect ,on obtient

$$2\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ji} - \partial_k g_{ij} \tag{2.5}$$

Où g est une métrique ,de la matrice (g_{ij}) est non dégénéré .
Soit (g^{rs}) désigner son inverse ,de sorte que

$$\sum_s g^{rs} g^{sk} = \delta_{rk}$$

En multipliant les deux côtés de (2.5) par g^{sk} et en additionnant k on obtient

$$\sum_l \delta_{sl}\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2}\sum_k g^{sk}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ji} - \partial_k g_{ij})$$

et la simplification donne

$$\Gamma_{ij}^s = \frac{1}{2}\sum_k g^{sk}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ji} - \partial_k g_{ij})$$

Cela prouve que les symboles de Christoffel dépendent uniquement de la métrique et de ses partiels de premier ordre.

2.3 isomorphismes canoniques réciproques (”isomorphismes musicaux”)

On définie l'application suivante :

$$\flat : E \longrightarrow E^*$$

par $x^\flat(y) = \langle y, x\rangle = g(y, x)\ \forall y, x \in E$

et

$$\sharp : E^* \longrightarrow E$$

par

$\langle y, u^\sharp\rangle = u(y)\ \forall y, x \in E$ et $u \in E^*$

Si les composantes de $x \in E$ dans une base sont x^i les composantes de $x^\flat$ dans la base duale sont les x_i définis par $x_i = g_{ij}x^j$, et $x^j = g^{ji}x_i$,ou (g^{ji}) est la matrice inverse de (g_{ij})matrice de g dans la base considérée, et ou l'on a écrit $g^{ji}x_i$ par abus pour $\sum g^{ji}x_i$

Chapitre 3

Les courbures Riemannienne

3.1 La courbure Riemannienne

Définition 3.1.1. *[10]*
La courbure R d'une variété M est une correspondance qui associe à chaque $X, Y \in \chi(M)$ une application $R(X,Y) : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ définit par :

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \quad Z \in \chi(M)$$

S'appelle la courbure de la connexion ∇. Où ∇ une connexion affine sur M

Remarque 3.1.1. *[10]*
si $M = \mathbb{R}^n$ alors $R(X,Y)Z = 0$ pour tout $X, Y, Z \in \chi(\mathbb{R}^n)$. En fait, si le champ de vecteur Z est donné par $Z = (z_1, ..., z_n)$ avec les composants de Z provenant de la coordonnée naturelle de $\mathbb{R}^n$

on obtient

$$\nabla_X Z = \Big(X(z_1), ..., X(z_n)\Big)$$

Par conséquent

$$\nabla_Y \nabla_X Z = \Big(Y(X(z_1)), ..., Y(X(z_n))\Big)$$

Ce qui implique que

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]} Z = 0$$

Remarque 3.1.2. *[10]*
Une autre façon de voir la définition 1 est de considérer un système de coordonnées (x^i) autour $p \in M$ depuis $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$ on obtient

$$R\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big)\frac{\partial}{\partial x^k} = \Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\Big)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

C'est-à-dire que la courbure mesure la non commutativité du dérivé covariant

Proposition 3.1.1. *[10]*
La courbure R de la variété Riemannienne présente les propriétés suivantes :

1. *R est bilinéaire en $\chi(M)\times\chi(M)$ et pour tout $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(M), X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \chi(M)$:*

$$R\Big(f_1X_1 + f_2X_2, Y_1\Big)Z = f_1R\Big(X_1, Y_1\Big)Z + f_2R\Big(X_2, Y_1\Big)Z$$

$$R\Big(X_1, f_1Y_1, f_2Y_2\Big)Z = f_1R\Big(X_1, Y_1\Big)Z + f_2R\Big(X_1, Y_2\Big)Z$$

2. *pour tout $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ et $f \in \mathcal{F}(M)$ la courbure $R(X,Y) : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ est linéaire c-à-d :*

$$R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W$$

$$R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z$$

Preuve 3.1.1.
R est bilinéaire, alors pour tout $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(M), X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \chi(M)$:
1)

$$\begin{aligned}
R\Big(f_1X_1+f_2X_2,Y_1\Big)Z &= \nabla_{Y_1}\nabla_{f_1X_1+f_2X_2}Z - \nabla_{f_1X_1+f_2X_2}\nabla_{Y_1}Z \\
&+ \nabla_{[f_1X_1+f_2X_2,Y_1]}Z \\
&= \nabla_{Y_1}\nabla_{f_1X_1}Z + \nabla_{Y_1}\nabla_{f_2X_2}Z - \nabla_{f_1X_1}\nabla_{Y_1}Z \\
&- \nabla_{f_2X_2}\nabla_{Y_1}Z + \nabla_{f_1[X_1,Y_1]} + \nabla_{f_2[X_2,Y_1]} \\
&= f_1\nabla_{Y_1}\nabla_{X_1}Z + f_2\nabla_{Y_1}\nabla_{X_2}Z - f_1\nabla_{X_1}\nabla_{Y_1}Z \\
&- f_2\nabla_{X_2}\nabla_{Y_1}Z + f_1\nabla_{[X_1,Y_1]} + f_2\nabla_{[X_2,Y_1]} \\
&= f_1\Big[\nabla_{Y_1}\nabla_{X_1}Z - \nabla_{X_1}\nabla_{Y_1}Z + \nabla_{[X_1,Y_1]}Z\Big] \\
&+ f_2\Big[\nabla_{Y_1}\nabla_{X_2}Z - \nabla_{X_2}\nabla_{Y_1}Z + \nabla_{[X_2,Y_1]}Z\Big] \\
&= f_1R\Big(X_1,Y_1\Big)Z + f_2R\Big(X_2,Y_1\Big)Z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(X_1, f_1Y_1+f_2Y_2)Z &= \nabla_{f_1Y_1+f_2Y_2}\nabla_{X_1}Z - \nabla_{X_1}\nabla_{f_1Y_1+f_2Y_2}Z \\
&+ \nabla_{[X_1,f_1Y_1+f_2Y_2]}Z \\
&= f_1\nabla_{Y_1}\nabla_{X_1}Z + f_2\nabla_{Y_2}\nabla_{X_1}Z - f_1\nabla_{X_1}\nabla_{Y_1}Z \\
&- f_2\nabla_{X_1}\nabla_{Y_2}Z + f_1\nabla_{[X_1,Y_1]} + f_2\nabla_{[X_1,Y_2]} \\
&= f_1\Big[\nabla_{Y_1}\nabla_{X_1}Z - \nabla_{X_1}\nabla_{Y_1}Z + \nabla_{[X_1,Y_1]}Z\Big] \\
&+ f_2\Big[\nabla_{Y_2}\nabla_{X_1}Z - \nabla_{X_1}\nabla_{Y_2}Z + \nabla_{[X_1,Y_2]}Z\Big] \\
&= f_1R\Big(X_1,Y_1\Big)Z + f_2R\Big(X_1,Y_2\Big)Z
\end{aligned}$$

2) La première partie

$$\begin{aligned}
R(X,Y)(Z+W) &= \Big(\nabla_Y\nabla_X - \nabla_X\nabla_Y + \nabla_{[X,Y]}\Big)\Big(Z+W\Big) \\
&= \nabla_Y\nabla_XZ - \nabla_X\nabla_YZ + \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y\nabla_XW - \nabla_X\nabla_YW + \nabla_{[X,Y]}W \\
&= R(X,Y)Z + R(X,Y)W
\end{aligned}$$

Pour le deuxième, nous avons

$$\begin{aligned}\nabla_Y\nabla_X(fZ) &= \nabla_Y\Big(f\nabla_X Z + (Xf)Z\Big)\\ &= f\nabla_Y\nabla_X Z + (Yf)(\nabla_X Z) + (Xf)(\nabla_Y Z) + (Y(Xf))Z\end{aligned}$$

Donc

$$\nabla_Y\nabla_X(fZ) - \nabla_X\nabla_Y(fZ) = f\Big(\nabla_Y\nabla_X - \nabla_X\nabla_Y\Big)Z + \Big(\Big(YX - XY\Big)f\Big)Z$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}R(X,Y)fZ &= f\nabla_Y\nabla_X Z - f\nabla_X\nabla_Y Z + \Big(\Big[Y,X\Big]f\Big)Z + f\nabla_{[X,Y]}Z + \Big(\Big[X,Y\Big]f\Big)Z\\ &= fR(X,Y)Z\end{aligned}$$

Proposition 3.1.2. Identité de Bianchi*[10]*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

Preuve 3.1.2. *[10]*
De la symétrie de la connexion Riemannienne que nous avons

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y &= \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]}Z\\ &+ \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_{[Y,Z]}X\\ &+ \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_{[Z,X]}Y\\ &= \nabla_Y[X,Z] + \nabla_Z[Y,X] + \nabla_X[Z,Y]\\ &- \nabla_{[X,Z]}Y - \nabla_{[Y,X]}Z - \nabla_{[Z,Y]}X\\ &= \Big[Y,\Big[X,Z\Big]\Big] + \Big[Z,\Big[Y,X\Big]\Big] + \Big[X,\Big[Z,Y\Big]\Big]\\ &= 0\end{aligned}$$

Où la dernière égalité découle de l'identité Jacobi pour les champs de vecteur

Définition 3.1.2. *[10]*
L'opérateur de courbure Riemannienne est le tenseur $\langle R(X,Y,Z,T) = R(X,Y)Z,T\rangle$ *de type* $(0,4)$

Proposition 3.1.3. *[10]*

1. $R(X,Y,Z,T) = -R(Y,X,Z,T)$
2. $R(X,Y,Z,T) = -R(X,Y,T,Z)$
3. $R(X,Y,Z,T) = R(Z,T,X,Y)$.

Preuve 3.1.3.
1)

$$\begin{aligned}R(X,Y,Z,T) &= \langle R(X,Y)Z,T\rangle\\ &= \langle\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z,T\rangle\\ &= \langle-\nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[Y,X]}Z,T\rangle\\ &= -\langle\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{[Y,X]}Z,T\rangle\\ &= -R(Y,X,Z,T)\end{aligned}$$

2) est équivalent à $R(X,Y,Z,Z)=0$ Dont la preuve suit

$$R(X,Y,Z,Z)=\langle \nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_X\nabla_Y Z+\nabla_{[X,Y]}Z,Z\rangle$$

Mais

$$\langle \nabla_Y\nabla_X Z,Z\rangle = Y\langle \nabla_X Z,Z\rangle-\langle \nabla_X Z,\nabla_Y Z\rangle$$

et

$$\langle \nabla_{[X,Y]}Z,Z\rangle=\frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z,Z) &= Y\langle \nabla_X Z,Z\rangle - X\langle \nabla_Y Z,Z\rangle+\frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle\\
&= \frac{1}{2}Y(X\langle Z,Z\rangle)-\frac{1}{2}X(Y\langle Z,Z\rangle)+\frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle\\
&= -\frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle+\frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle=0
\end{aligned}$$

Qui prouve 2)
Et l'ordre de prouver 3),nous utilisons l'identité de Bianchi

$$R(X,Y,Z,T)+R(Y,Z,X,T)+R(Z,X,Y,T)=0$$

$$R(Y,Z,T,X)+R(Z,T,Y,X)+R(T,Y,Z,X)=0$$

$$R(T,X,Y,Z)+R(X,Y,T,Z)+R(Y,T,X,Z)=0$$

En additionnant l'équation ci-dessus, on obtient

$$2R(Z,X,Y,T)+2R(T,Y,Z,X)=0$$

Et donc

$$R(Z,X,Y,T)=R(Y,T,Z,X)$$

3.2 La courbure sectionèlle

Étroitement liée à l'opérateur de courbure est la courbure sectionnelle que nous allons maintenant définir.

Définition 3.2.1. *[10]*
Pour tout vecteur tangent x,y dans um point $p\in M$, on note la norme du produit vectoriel des vecteurs x,y par $|x\wedge y|$ l'expression

$$\sqrt{|x|^2|y|^2-\langle x,y\rangle}$$

Qui représente la zone d'un parallélogramme bidimensionnel déterminé par la paire de vecteurs $x,y\in V$.

Définition 3.2.2. *[10]*
Étant donné un point $p \in M$ et un sous-espace bidimensionnel $\sigma \subset T_p(M)$, le nombre réel $K(x,y) = K(\sigma)$, où $\{x,y\}$ est une base de σ, est appelé courbure sectionnelle de σ à p.

Proposition 3.2.1. *[10]*
Soit $\sigma \subset T_p(M)$ un sous-espace bidimensionnel de l'espace tangent $T_p(M)$ et soit $x,y \in \sigma$ deux vecteurs linéairement indépendants, alors

$$K(x,y) = \frac{R(x,y,x,y)}{|x \wedge y|^2}$$

Ne dépend pas du choix des vecteurs $x,y \in \sigma$.

Preuve 3.2.1.
Pour éviter le calcul, nous observons que nous pouvons passer de la base $\{x,y\}$ de σ à n'importe quelle base $\{x',y'\}$ en itérant les tranformations élémentaires suivantes

(1) $\{x,y\} \to \{y,x\}$

(2) $\{x,y\} \to \{\lambda x,y\}$

(3) $\{x,y\} \to \{x+\lambda y,y\}$

Il est facile de voir que $K(x,y)$ est invariant par de telles transformations

$$\begin{aligned} K(y,x) &= \frac{R(y,x,y,x)}{|x \wedge y|^2} \\ &= \frac{R(x,y,x,y)}{|x \wedge y|^2} \\ &= K(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(\lambda x,y) &= \frac{R(\lambda x,y,\lambda x,y)}{|\lambda x \wedge y|^2} \\ &= \frac{\lambda^2}{\lambda^2}\frac{R(x,y,x,y)}{|x \wedge y|^2} \\ &= K(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(x+\lambda y,y) &= \frac{R(x+\lambda y,y,x+\lambda y,y)}{|x+\lambda y \wedge y|^2} \\ &= \frac{R(x,y,x,y)+R(x,y,\lambda y,y)+R(\lambda y,y,x,y)+R(\lambda y,y,\lambda y,y)}{|x \wedge y + \lambda y \wedge y|^2} \\ &= \frac{R(x,y,x,y)}{|x \wedge y|^2} \\ &= K(x,y) \end{aligned}$$

Remarque 3.2.1. *[10]*

1. *si (x,y) est orthonormée, alors*

$$K(x, y) = R(x, y, x, y)$$

2. *le fait que la courbure sectionnelle $K(x, y)$ a des interprétations géométriques intéressantes, qui vient du fait que la connaissance de $K(\sigma)$, pour tout σ, détermine complètement la courbure R.*
   C'est un fait purement algébrique

Définition 3.2.3. *[10]*
Une variété Riemannienne, (M, g) a courbure constant (resp. négatif, resp. positif) courbure si sa courbure sectionnelle est constante (resp. négatif, resp.positif)

Exemples

1 La sphère $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ avec la métrique induite par $\mathbb{R}^{n+1}$, ou

$$S^n = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | (x_1^2, ..., x_{n+1}^2)\}$$

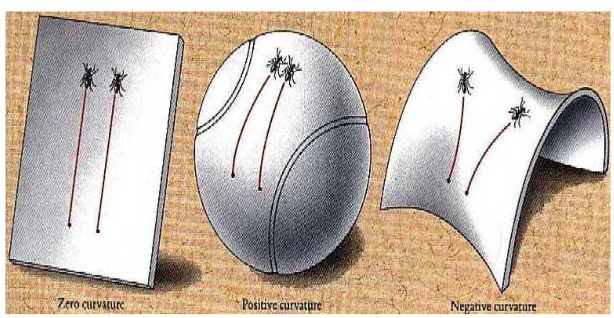
S^n une courbure sectionnelle costante $K = 1$

2 Espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$ avec sa métrique euclidienne naturelle , alors $K = 0$

3 L'espace hyperbolique

$$H^n = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle x, x \rangle = -1, \quad x_1 > 0\}$$

L'espace H^n s'appelle espace hyperbolique et il a une courbure constante $K = -1$



Lemme 3.2.1. *(chengement de métrique)[10]*
Soit $R : T_p(M)\times T_p(M)\times T_p(M) \to T_p(M)$ *et* $R' : T_p(M)\times T_p(M)\times T_p(M) \to T_p(M)$ *etre des applications tri-linéaires tels que les conditions* (1), (2), (3) *et* (4) *de proposition 3.1.3 Sont satisfaits par*

$$R(x, y, z, t) = \langle R(x, y)z, t\rangle.$$
$$R'(x, y, z, t) = \langle R'(x, y)z, t\rangle.$$

si x, y *sont deux vecteurs linéairement indépendants, nous pouvons écrire*

$$K(\sigma) = \frac{R(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}$$

$$K'(\sigma) = \frac{R'(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}$$

Où σ *est le sous-espace bidimensionnel généré par* x *et* y.
Si pour tous $\sigma \subset T_p(M)$, $K(\sigma) = K'(\sigma)$ *,alors* $R = R'$

Preuve 3.2.2.
Il suffit de prouver que $R(x, y, z, t) = R'(x, y, z, t)$ *pour n'importe quel* $x, y, z, t \in T_p(M)$.
Observez d'abord que, par hypothèse, nous avons $R(x, y, z, t) = R'(x, y, z, t)$, *pour tout* $x, y \in T_p(M)$, *alors*

$$R(x + z, y, x + z, y) = R'(x + z, y, x + z, y)$$

d'où

$$R(x, y, x, y) + 2R(x, y, z, y) + R(z, y, z, y) = R'(x, y, x, y) + 2R'(x, y, z, y) + R'(z, y, z, y)$$

et ,donc

$$R(x, y, z, t) = R'(x, y, z, t)$$

pour tout $x, y, z \in T_p(M)$.
En utilisant ce que nous venons de prouver, nous obtenons

$$R(x, y, z, t) + R(x, t, z, y) = R'(x, y, z, t) + R'(x, t, z, y)$$

Qui peut être écrit plus loin que

$$R(x, y, z, t) - R(x, y, z, t) = R(y, z, x, t) - R'(y, z, x, t)$$

. Il s'ensuit que l'expression $R(x, y, z, t) - R'(x, y, z, t)$ *est invariable par des permutations cycliques des trois premiers éléments.*
Par conséquent, par (1) *de la proposition 3.1.3, nous avons*

$$3[R(x, y, z, t) - R'(x, y, z, t)] = 0$$

d'où

$$R(x, y, z, t) = R'(x, y, z, t)$$

pour tout $x, y, z, t \in T_p(M)$

Les variétés Riemanniennes qui ont une courbure sectionnelle constante ont joué un rôle fondamental dans le développement de la géométrie Riemannienne.
En ce moment, nous souhaitons seulement montrer comment le lemme ci-dessus nous permet d'otenir une caractérisation de ces varieté au moyen des composants R_{ijkl} de la courbure d'une manière orthonormée.
Cela résulte du lemme ci-dessous

Lemme 3.2.2. *[10]*
Soit M une variété Riemannienne et p un point de M .
Définir un application tri-linéaire $R' : T_p(M) \times T_p(M) \times T_p(M) \to T_p(M)$ par

$$\langle R'(X,Y,W), Z\rangle = \langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle Y,W\rangle\langle X,Z\rangle$$

pour tout $X,Y,W,Z \in T_p(M)$.
Alors M a une courbure sectionnelle constante égale à K_0 si et seulement si $R = K_0R'$ où R est la courbure de M.

Preuve 3.2.3.
Supposons que $K(\sigma) = K_0$ pour tout $\sigma \subset T_p(M)$ et définir

$$\langle R'(X,Y,W), Z\rangle = R'(X,Y,W,Z)$$

Remarquez que R' répond les propriétés $(1),(2),(3)$ et (4) de la proposition 3.1.3
Depuis

$$R'(X,Y,X,Y) = \langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2$$

Nous avons cela, pour toutes les paires de vecteurs $X,Y \in T_p(M)$

$$R(X,Y,X,Y) = K_0(|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2) = K_0R'(X,Y,X,Y)$$

Le lemme 3.2.1 implique que, pour tout X,Y,W,Z

$$R(X,Y,W,Z) = K_0R'(X,Y,W,Z)$$

Donc $R = K_0R'$ l'inverse est immédiat .

Corollaire 3.2.1. *[10]*
Soit M une variété Riemannienne de dimension n et p un point de M ,et $\{e_1, ..., e_n\}$, une base orthonormée de $T_p(M)$ on note $R_{ijkl} = \langle R(e_i,e_j)e_k, e_l\rangle, \qquad i,j,k,l = 1,...,n.$
alors $K(\sigma) = K_0$ pour tout $\sigma \subset T_p(M)$,si et seulement si

$$R_{ijkl} = K_0(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$$

Où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, si & i = j \\ 0, si & i \neq j \end{cases}$$

En d'autres termes, $K(\sigma) = K_0$ pour tout $\sigma \subset T_p(M)$ si et seulement si $R_{ijij} = -R_{ijji} = K_0$ pour tout $i \neq j$,et R_{ijkl} dans les autres cas .

3.3 La courbure de Ricci et la courbure scalaire

Définition 3.3.1. *[8]*
La courbure de Ricci d'une variété Riemannienne (M, g) est la trace de l'endomorphisme de $T_p(M)$ donné par $v \to R_p(x, v)y$ il résulte de la proposition 3.1.3 Que nous obtenons un tensor symétrique de type (0.2).
On désignera la courbure de Ricci par Ric.
Si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de $T_p(M)$ alors

$$Ric(x, y) = \sum_{i=1}^{n} R(x, e_i, y, e_i)$$

Définition 3.3.2. *[8]*
La courbure scalaire d'une variété Riemannienne est la trace de la courbure de Ricci.
Nous obtenons une fonction sur la variété M qui doit être désigné par Scal .
Si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de $T_p(M)$ alors

$$Scal(p) = \sum_{i,j=1}^{n} R(e_i, e_j, e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} K(e_i, e_j)$$

Exemple 3.3.1. *[8]*
Dans dimension 2 le tenseur de courbure est entièrement donné par la courbure scalaire, et

$$Scal(p) = 2K(p)$$

.

$$Scal(p) = \sum_{i=1}^{n} Ric(e_i, e_i) = \sum_{i \neq j}^{n} K(e_i, e_j) = 2\sum_{i<j}^{n} K(e_i, e_j) = 2K(p)$$

Exemple 3.3.2. *[8]*
Dans la dimension 3, le tenseur de courbure est entièrement donné par la courbure de Ricci.

Proposition 3.3.1. *[8]*
Soit (M, g) une variété Riemannienne de courbure sectionalle constante K_0.
Alors

$$Ric = (n-1)K_0$$

$$Scal(p) = n(n-1)K_0$$

Preuve 3.3.1. *[8]*

$$Ric_p(e_j, e_j) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_j, e_i)e_j, e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(K_0(g(e_i, e_i)e_j - g(e_j, e_i)e_i), e_j)$$

Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ *une base orthonormée*
$$= K_0 \sum_{i=1}^{n}(g(e_i, e_i)g(e_j, e_j) - \sum_{i=1}^{n} g(e_i, e_j)g(e_i, e_j)$$

$$= K_0(\sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij})$$

$$= (n-1)K_0$$

Pour obtenir la formule pour la courbure scalaire il suffit de multiplier la courbure constant Ricci $Ric_p(e_j, e_j)$ *par* n.

Exemple 3.3.3. *Si* $g_1 = tg$ *où* t *est une constante positive, le tenseur de courbure* $(0,4)$ *correspondant* R_1 *est egale* tR *(depuis* $\nabla = \nabla^1$*) Donc*

$$K_1(P) = t^{-1}K(P), \quad Ric_1 = Ric, \quad Scal_1 = t^{-1}Scal.$$

$$\begin{aligned} K_1(P) &= \frac{R(tx, y, tx, y)}{|tx \wedge y|^2} \\ &= \frac{t}{t^2}\frac{R(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2} \\ &= \frac{1}{t}K(p) \\ &= t^{-1}K(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Scal_1 &= \sum_{i,j=1}^{n} K_1(e_i, e_j) \\ &= t^{-1}\sum_{i,j=1}^{n} K(e_i, e_j) \\ &= t^{-1}K \\ &= t^{-1}Scal \end{aligned}$$

Conclusion

La courbure est le sujet central de la géométrie Riemannienne, elle mesure la distance entre une variété et des espaces euclidiens.
La signification géométrique de courbure de Riemannienne : Dans la relativité générale qui est basée sur la courbure Riemannienne, mesure la densité énergétique dans l'espace
Géométriquement, c'est le changement de double différentiation covariante, en physique
Le tenseur de la courbure de Ricci est la trace du tenseur de la courbure Riemannienne,la courbure de Ricci joue un rôle important dans la relativité générale, en particulier, c'est le terme clé dans l'équation du champ Eienstien.
Ricci plat signifie résoudre l'équation du champ Eienstien de la variété Riemannienne avec une constante cosmologique disparaissante.
Pour cette raison, on conclue que le tenseur de courbure de Ricci est plus important que le tenseur de courbure Riemannienne.

Bibliographie

[1] Sylvie Benzoni-Gavage,profésseur à l'université Lyon1,Calcul différentiel et équation différentiel

[2] François Dumas, groupes et anneaux 1,2007-2008

[3] Gilles Christol,Anne Cot,Charles-Michel Marle ,1997

[4] Thierry Masson,Géométrie différentielle,groupes et algèbres de Lie, fibrés et connexions,19 décembre 2001

[5] Peter Buser,Géométrie Riemannienne,Hiver 2003-2004

[6] William M. Boothby,An Introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry,Academic press new york San francisco london 1975

[7] François Labourie,Géométrie différentielle,25 septembre 2013

[8] S. Gallot D. Hulin, Riemannian geometry, J. lafontaine ,mathematics subject classification (1980)

[9] Thierry Masson,Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie ,fibrés et connexions,Version du 8 mars 2010

[10] Richard V.Kadison,Isidore M.Singer,Riemannian geometry, 1993

[11] Alessandra Frabetti,Géométrie différentielle appliquée à la physiqu,Université Lyon 1

[12] Eugene Lerman,Connctions and curvature notes

[13] Jacques Lafontaine,Introduction aux variétés différentielles

[14] Paul Malliavin,Géométrie différentielle intrinseque,Hermann paris 1972