

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة غرداية
Université de Ghardaïa

N° d'enregistrement
.....



كلية العلوم والتكنولوجيا
Faculté des Sciences et de la Technologie
قسم الرياضيات و الإعلام الآلي
Département de Mathématiques et Informatiques
Mémoire de fin d'étude, en vue de l'obtention du diplôme
Master

Domaine: Mathématiques et Informatiques
Filière: Mathématiques
Spécialité: Analyse Fonctionnelle et Applications

Thème

Fonctions Multifformes, Branchement, Coupure et Application

Présenté par :
M. Bilal BRAHIMI

Soutenue publiquement le 21 / 06 / 2023

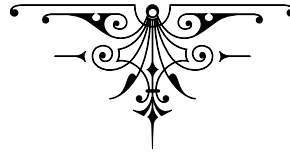
Devant le jury composé de:

M. Mokhtar BOUMAAZA	MCB	Univ. Ghardaia	Président
M. Smail LATRECHE	MAA	Univ. Ghardaia	Encadrant
Mme. Yasmina KHELLAF	MAA	Univ. Ghardaia	Examineur
M. Abdelouahab CHIKH SALAH	MCB	Univ. Ghardaia	Examineur

Année universitaire 2022/2023



Dédicace



A

Ma femme et ma fille.

A

Tous les membres de la famille BRAHIMI.

A

Tous les professeurs du Département de mathématiques.

A

Mon encadreur de mémoire M.LATRACHE Smail

A

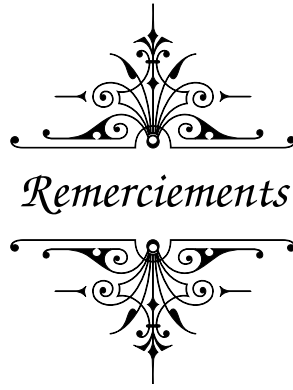
Mon ami MAGHERBI Mustapha.

A

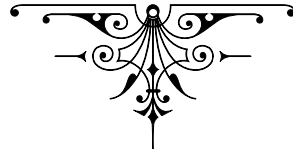
Tous les amis...

BRAHIMI Bilal 





Remerciements



Je tiens à remercier mon encadreur de mémoire M.LATRECHE Smail, à qui j'adresse mes remerciements les plus sincères pour sa disponibilité et ses conseils. Je garde toujours beaucoup de plaisir à discuter avec lui et à bénéficier de tes conseils.

Je remercie Monsieur BOUMAZA Moukhtar, Monsieur CHIKH SALAH Abdelouahab et Madame KHELLOF Yasmina d'avoir accepté de rapporter ce travail.

Merci à tous ceux qui m'ont enseigné.

En fin, j'adresse mes remerciements à ma femme, ma fille et tous mes amis, qu'ils trouvent ici l'expression de ma sincère gratitude.

Avec mes sincères remerciements.

BRAHIMI Bilal 



ملخص

ليكن $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ تابع متعدد القيم. الهدف من هذه المذكرة هو إزالة اللبس و الغموض حول هذا النوع من التوابع و كيفية البحث عن الفروع الرئيسية لها سواء كان ذلك باستعمال مساحات ريمان أو عن طريق إزالة نقاط التفرع. الكلمات المفتاحية: تابع متعدد القيم، نقاط التفرع، الفرع الرئيسي، مساحات ريمان.

Résumé

Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction multiforme d'une variable complexe. L'objectif de ce mémoire est l'élimination de l'ambiguïté de ce genre de fonctions et les rendre uniforme, pour cela on utilise les surfaces de Riemann et la notion de coupure.

Mots clés:

Fonction multiformes, Point de branchement, Coupure, Branche principale, surfaces de Riemann.

Abstract

Let $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ be a multivalued function of a complex variable. The objective of this thesis is to eliminate the ambiguity of such functions and how to search of a holomorphic branch. To achieve this, we use Riemann surfaces and the concept of branch cuts.

Key Words:

Multivalued function, Branch points, branch cuts, Principal branch, Riemann surfaces.

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières	v
Introduction	vii
1 Rappels et définition	1
1.1 Topologie de \mathbb{C}	1
1.2 Fonctions d'une variable complexe	3
1.3 Fonctions Uniformes et Fonctions Multiformes	4
1.4 Fonctions différentiables	5
1.5 Transformations conformes et applications géométriques	8
1.6 Intégration des fonctions holomorphes	10
1.7 Fonctions méromorphes, théorème des résidus	12
1.8 Position du problème	17
2 Surface de Riemann	20
2.1 Variétés et Surfaces	20
2.2 Exemples de Surfaces de Riemann	22
2.3 Propriétés élémentaires des applications holomorphes	24
2.4 Les Revêtements	27
3 Uniformisation	32
3.1 Étude globale de fonctions	32
3.1.1 Logarithme(s)	32
3.1.2 Racine Carrée	36
3.2 Uniformisation de \sqrt{z} et $\log z$ par la méthode de Coupures	39
3.2.1 Logarithme complexe $\log z$	39
3.2.2 Racine Carrée Complexe \sqrt{z}	41

3.3	Uniformisation de \sqrt{z} et $\log z$ par les surfaces de Riemann	42
3.3.1	La surface de Riemann de $\log z$	43
3.3.2	Réalisation de la surface de Riemann du logarithme	43
3.3.3	La surface de Riemann de \sqrt{z}	45
3.3.4	Surface étalée au dessus de \mathbb{C}^*	46
Annexe		47
Conclusion		55
Références		56

INTRODUCTION

Rappelons qu'en général, la définition d'une fonction fait qu'à une valeur de la variable correspond une seule valeur au plus de la fonction (voir [B.C78]). Dans certains cas, cela n'est pas très naturel car l'usage des fonctions complexes n'est pas simple. Lors de la définition de telles fonctions, on rencontre généralement des difficultés au niveau de la détermination de l'image non unicité, défaut de continuité. On parle dans ce cas de fonction multiforme. Si la définition, par exemple, de la fonction carrée z^2 , de la fonction inverse $\frac{1}{z}$, de la fonction exponentielle $\exp z$, (voir [B.C72]) etc. ne pose pas de problèmes majeurs, il n'en va pas de même, par exemple, avec les tentatives de définition de la fonction racine carrée \sqrt{z} , la fonction logarithme complexe $\log z$, (voir [T.N97],[T.W01]) etc. Considérons par exemple la fonction \sqrt{z} sur l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} . Si z est un nombre complexe, on peut l'écrire $z = re^{i(\theta+2k\pi)}$ où r est le module de z et θ est un argument de z , défini à $2k\pi$ près. Lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs \mathbb{Z} , z reste inchangé. Les racines carrées de z dans \mathbb{C} sont alors $z = \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+k\pi)}$, (voir [A.L14]). Supposons que le nombre complexe z décrit un cercle ne contenant pas l'origine, son argument augmente puis revient à sa valeur initiale après un tour complet.

Par contre, si z décrit un cercle contenant 0, alors son argument augmente de 2π , z reprend donc sa valeur initiale mais, pendant ce temps, l'argument de la racine carrée choisie verra son argument augmenter de π . Au final, on retombe sur l'autre détermination de la racine carrée.

L'origine 0 qui pose ici un problème, est appelé point de branchement ou de ramification pour la fonction racine carrée, (voir [B.C90]). On est donc en présence d'une fonction multiforme, deux images opposées. Si z est non nul, il existe deux valeurs possibles pour \sqrt{z} , et il n'y a pas de raison de préférer l'une à l'autre. Laquelle choisir ? Problème a priori insoluble quel que soit le choix car nous travaillons ici dans \mathbb{C} . Les calculs faisant intervenir des fonctions multiformes sont parfois lourds et compliqués.

Riemann a eu l'idée de transformer les fonctions multiformes en fonctions uniformes (un point n'a qu'une seule image), en modifiant le domaine de définition, (voir [E.R89], [Mir95]). Il recolle

pour cela continûment plusieurs représentations du domaine de définition, les feuillets, et obtient le concept de surface de Riemann(voir [O.F81], [B.C72]). Partant de diverses fonctions multiformes sur \mathbb{C} , on peut les rendre uniformes en remplaçant leur domaine \mathbb{C} par une surface de Riemann ; c'est le procédé d'uniformisation. Quoi qu'il semble compliqué a priori de remplacer \mathbb{C} par une surface, on peut se dire que cette surface est le domaine naturel sur lequel la fonction est définie, ce qui justifie son introduction. Parmi les problèmes qui se posent, on ne peut pas définir de façon cohérente les opérations de calcul sur les fonctions multiformes ; par exemple que vaut $(\pm\sqrt{z}\pm\sqrt{z})$. Sur la surface de Riemann de \sqrt{z} , cette complication n'existe pas. Plus précisément, pour remédier à ce problème, Riemann imagine un artifice redéfinissant l'ensemble de définition des fonctions complexes, on parle aujourd'hui de surfaces de Riemann sur lesquelles ces fonctions redeviennent uniformes (nos fonctions usuelles ; l'image est unique). Pour la fonction \sqrt{z} , on clone le plan complexe que l'on représente par deux feuillets reliés entre eux par le demi-axe positif, appelé coupure(voir [E.T09], [A.Y14]). Aucun cercle autour de 0 ne doit franchir cette coupure à moins de passer d'un feuillet à l'autre ou inversement(voir [A.L14]).

Dans ces conditions, z ne reprendra sa valeur initiale qu'au bout de deux tours. Ayant fait le choix d'une détermination de la racine carrée, celle-ci devient uniforme sur la surface de Riemann (ici la sphère de Riemann), ce qui autorise alors la notation \sqrt{z} .

Lorsque Riemann introduit les surfaces qui portent son nom, il ne cherche d'ailleurs pas à étudier des objets géométriques abstraits ; les surfaces de Riemann qu'il considère sont celles définies par une équation algébrique,(voir [Mir95]) ou plus généralement, les surfaces associées à des fonctions multiformes. L'origine du problème de l'uniformisation n'est pas l'étude des surfaces de Riemann, mais l'existence de fonctions multiformes. Amenés à calculer les primitives de fonctions rationnelles dans le domaine complexe, les mathématiciens de la première moitié du XIX eme siècle (en particulier, Abel et Jacobi) avaient déjà été confrontés à des fonctions multiformes, la valeur de la primitive $f(z) = \int_{z_0}^z \frac{dw}{w}$ n'est pas unique ; elle dépend du chemin d'intégration(voir[AM00]). Bien vite, l'existence de multiformité pour les fonctions analytiques est apparu au grand jour, (voir[L.V53]). On sait qu'une fonction analytique est entièrement caractérisée par sa restriction à n'importe quel ouvert non-vide. Mais lorsque l'on cherche à étendre une fonction analytique initialement définie sur un petit ouvert U , l'objet que l'on construit n'est pas une fonction au sens moderne du terme, mais une fonction multiforme. Se débarrasser de ces phénomènes de multiformité est vite apparu comme un problème crucial c'est le but de l'uniformisation. Uniformiser, c'est transformer les fonctions multiformes en fonctions uniformes.

Le noyau central autour du quel a été composé ce mémoire est pour éliminer l'ambiguïté sur les fonctions multiformes aux comment on choisi la branche principale et pour donner quelques aspects généraux pour rendre les fonctions multiformes uniformes. Le mémoire comporte trois chapitres plus annexe. Le première chapitre a été consacré à la théorie des fonctions d'une variable complexe, Le deuxième contient une introduction au domaine assez vaste des surfaces de Riemann aux des revêtements et le troisième comporte quelques méthodes pour uniformiser les fonctions multiformes.

CHAPITRE 1

RAPPELS ET DÉFINITION

Commençons par des rappels nécessaires concernant les fonctions d'une variable complexe. Plus précisément, on donne quelques notions sur la différentiabilité, les transformations conformes, l'intégration d'une fonction holomorphe, et à la fin de ce chapitre on pose le problème que nous traiterons dans ce mémoire.

1.1 Topologie de \mathbb{C}

Les références de cette section sont ; [B.C90],[B.C78],[L.V53].

Métrie sur \mathbb{C}

Puisque \mathbb{C} est isomorphe à \mathbb{R}^2 , on utilise sur \mathbb{C} la distance Euclidienne. Donc, pour les nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ on définit la distance sur \mathbb{C} par :

$$d(z_1, z_2) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |z_1 - z_2| \quad (1.1)$$

$(\mathbb{C}, |.|)$ est un espace métrique complet (espace de Banach). Avec la notation (1.1) l'équation du cercle de centre a et de rayon r est définie par

$$|z - a| = r$$

Autrement dit l'ensemble des points sur ce cercle est

$$C(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$$

Ensembles ouverts, fermés et compacts

- **Voisinage.** L'ensemble $V(a, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}$ est appelé un voisinage du point $a \in \mathbb{C}$.
- **Points intérieurs, extérieurs et frontières.** Soit $A \subset \mathbb{C}$:
 - On dit que a est un point intérieur de A si A est un voisinage de a .
 - On dit que b est un point extérieur de A si b est un point intérieur de $\mathbb{C} \setminus A$.
 - On dit que $c \in \partial A$ est un point frontière de A si tout voisinage de c rencontre A et $\mathbb{C} \setminus A$.
- **Disque ouvert.** L'ensemble $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ est appelé disque ouvert (boule ouverte) de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$. Tout disque ouvert est voisinage de chacun de ses points.
- **Disque unité.** $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ est appelé disque unité de \mathbb{C} .
- **Ensemble ouvert.** Un ensemble $U \subset \mathbb{C}$ est dit ouvert dans \mathbb{C} si pour tout $z \in U$ il existe $r > 0$ tel que $D(z, r) \subset U$.
 - Si $U \subset \mathbb{C}$ et $\partial U \cap U = \emptyset$ alors U est un ouvert de \mathbb{C} .
 - Tout disque ouvert $D(a, r)$ est un ouvert dans \mathbb{C} .
- **Ensemble fermé.** Un ensemble $F \subset \mathbb{C}$ est dit fermé dans \mathbb{C} si son complémentaire $\mathbb{C} \setminus F$ est un ouvert de \mathbb{C} .
 - Si $F \subset \mathbb{C}$ et $\partial F \subset F$ alors F est un fermé de \mathbb{C} .
 - Un ensemble est fermé s'il contient tous ses points frontières.
 - $\bar{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$ est un fermé de \mathbb{C} , appelé disque fermé.
 - La couronne $\Delta(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z - a| \leq R\}$ est un fermé dans \mathbb{C} .
 - F est fermé s'il contient toutes les limites de ses suites convergentes.
- **Adhérence ou Fermeture d'un ensemble.** Soit $S \subset \mathbb{C}$ alors l'ensemble $\bar{S} = S \cup \partial S$ est appelé adhérence ou fermeture de S .
- **Ensemble borné.** Un ensemble $S \subset \mathbb{C}$ est dit borné s'il existe $M > 0$ tel que $|z| < M$ pour tout $z \in S$. On dit aussi que S est borné si $S \subset D(0, r)$ pour un certain $r > 0$.
- **Ensemble compact.** Un ensemble $K \subset \mathbb{C}$ est dit compact dans \mathbb{C} s'il est borné et fermé dans \mathbb{C} .
- **Ensemble connexe.** Un ensemble $S \subset \mathbb{C}$ est dit connexe s'il ne peut être la réunion de deux ouverts disjoints non vides.

Définition

On appelle chemin d'un espace topologique X toute application continue

$\gamma : [0, 1] \rightarrow X$. Les points $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ sont appelés les extrémités du chemin, $\gamma(0)$ est appelé l'origine et $\gamma(1)$ l'arrivée.

- **Ensemble connexe par arcs.** Un ensemble $S \subset \mathbb{C}$ est dit connexe par arcs si deux points quelconques peuvent être reliés par un chemin qui se trouve entièrement dans S .
- **Remarque** Toute partie connexe par arcs est connexe. La réciproque n'est pas vraie en générale sauf un ouvert connexe dans un espace vectoriel normé est connexe par arcs.
- **Région simplement connexe.** Une région connexe $S \subset \mathbb{C}$ est dite simplement connexe si tout chemin fermé sur S peut être réduit continûment à un point. Intuitivement, on peut rétrécir le chemin fermé jusqu'à ce qu'il ne forme plus qu'un point, il n'y a pas d'obstacle (c'est-à-dire de trou). Autrement dit, une région simplement connexe n'a pas de "trous". Si la région possède des trous on l'appelle multi-connexe.
- **Domaine.** Un ensemble $D \subset \mathbb{C}$ qui est, ouvert et connexe est appelé domaine.

1.2 Fonctions d'une variable complexe

Définition 1.2.1. [T.L16] Soient A et B deux sous-ensembles non vides de \mathbb{C} . Si à chaque valeur $z \in A$, correspond une ou plusieurs valeurs $w \in B$, on dit que f est une fonction de z et on écrit $w = f(z)$ où

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ z &\longmapsto w = f(z) \end{aligned}$$

La fonction $z \mapsto w = f(z)$ définit une correspondance entre deux plans complexes.

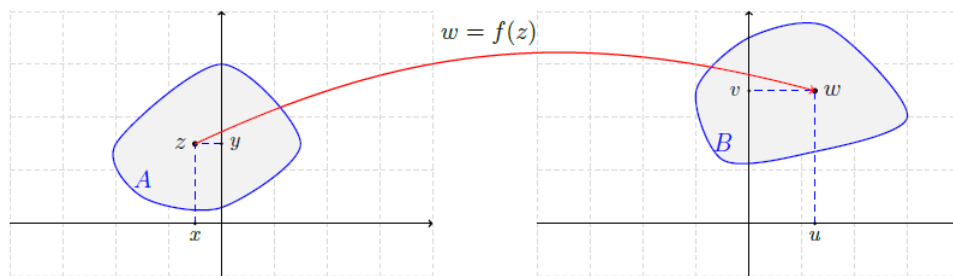


FIGURE 1.1 – La fonction $z \mapsto w = f(z)$

Définition 1.2.2. [T.L16] Si $z = x + iy$ on peut écrire $f(z)$ comme $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = w$; les fonctions u et v sont appelées respectivement partie réelle et partie imaginaire de f . On note $u = \text{Re}(f)$, $v = \text{Im}(f)$.

Exemple 1.2.1. $f(z) = z^3 = (x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + (3yx^2 - y^3)i$, donc $u = \operatorname{Re}(f) = x^3 - 3xy^2$, $v = \operatorname{Im}(f) = 3yx^2 - y^3$

1.3 Fonctions Uniformes et Fonctions Multiformes

Définition 1.3.1. [A.L14] On dit que la fonction f est uniforme si à chaque valeur de z ne correspond qu'une valeur au plus w , sinon elle est dit multiforme.

Remarque 1.3.1. [T.L16] Une fonction multiforme peut être considérée comme un ensemble de fonctions uniformes chaque élément de cet ensemble est appelé une branche de la fonction.

On choisit habituellement un des éléments de cet ensemble comme branche principale de la fonction multiforme. La fonction choisie est appelée détermination principale.

Fonction élémentaires

[R.S09]

1. Les fonctions polynomiales :

Les fonctions polynomiales définies par $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, où a_0, a_1, \dots, a_n sont des constantes complexes avec $a_n \neq 0$ et n un entier positif appelé degré du polynôme $P(z)$.

2. Les fonctions rationnelles

Les fonctions rationnelles sont définies par $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont des polynômes.

3. Les fonctions exponentielles

Les fonctions exponentielles sont définies par $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

4. Les fonctions trigonométriques

Nous définirons les fonctions trigonométriques où circulaires $\cos z, \sin z, \tan z \dots$ etc à l'aide des fonctions exponentielles par exemple :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

5. Fonctions hyperboliques

par exemple $\cosh z, \sinh z, \tanh z \dots$ etc.

6. La fonction racine carré

Considérons $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \rightarrow w : w^2 = z$.

Soit : $z = r e^{i\theta}$ alors $w = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$, où $r = |z|$ et $\theta = \operatorname{arg} z$.

Si $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ et dès lors la fonction $w = \sqrt{z}$ prend deux valeurs distinctes w_1 et w_2 pour

chaque valeurs $z \neq 0$ c-à-d

$$w = f(z) = \begin{cases} w_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \\ w_2 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}+\pi} = -w_1. \end{cases}$$

7. Fonction logarithmiques

La fonction $z \mapsto f(z) = \log z, z \neq 0$ est définie comme l'inverse de la fonction exponentielle $w = \log z \Leftrightarrow z = e^w$.

- La fonction $z \mapsto \log z, z \neq 0$ est une fonction multiforme définie par ;

$$\begin{aligned} \log z &= \ln |z| + i \arg z \\ &= \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi); k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

8. Fonctions trigonométriques inverses

$$\begin{aligned} \arcsin z &= \frac{1}{i} \log(iz + \sqrt{1 - z^2}) \\ \arccos z &= \frac{1}{i} \log(z + \sqrt{z^2 - 1}) \\ \arctan z &= \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right) \end{aligned}$$

9. Fonctions hyperboliques inverses

$$\begin{aligned} \operatorname{argsh} z &= \log(z + \sqrt{1 + z^2}) \\ \operatorname{argch} z &= \log(z + \sqrt{z^2 - 1}) \\ \operatorname{argth} z &= \frac{1}{2} \log\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) \end{aligned}$$

10. La Fonction z^α où α peut être complexe est définie par $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$.

De même si $f(z)$ et $g(z)$ sont deux fonctions données de z , nous pouvons définir $f(z)^{g(z)} = e^{g(z) \log f(z)}$; en général de telles fonctions sont multiformes.

11. Fonction algébrique et transcendante

Si w est solution de l'équation algébriques

$P_0(z)w^n + P_1(z)w^{n-1} + \dots + P_{n-1}(z)w + P_n(z) = 0$ où $P_0(z) \neq 0, P_1(z) \dots P_n(z)$ sont des polynômes en z et n un entier positif alors $w = f(z)$ est appelée une fonction algébrique de z .

- $w = z^{\frac{1}{2}}$ est solution de l'équation $w^2 - z = 0$ donc c'est une fonction algébrique de z .

1.4 Fonctions différentiables

Définition 1.4.1. [A.L14] On dit que $f(z)$ est dérivable au point z_0 si et seulement si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe, indépendamment de la façon dont h tend vers 0 dans \mathbb{C} . Cette limite, notée $f'(z)$, est appelée dérivée de f en z . On utilise souvent l'écriture analogue

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Définition 1.4.2. [A.L14] La fonction f est différentiable en z si et seulement s'il existe un nombre complexe $f'(z)$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{C}, \quad f(z+h) = f(z) + h.f'(z) + o(|h|).$$

Définition 1.4.3. [A.L14] Une fonction f est dite holomorphe en un point z_0 si elle est dérivable dans un disque ouvert centré en z_0 .

La fonction f est dite holomorphe dans Ω si elle est dérivable en tout point de Ω .

Exemple 1.4.1. [T.L16] La fonction $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

La fonction $z \mapsto f(z) = \operatorname{Re}(z)$ n'est pas dérivable en aucun point.

Proposition 1.4.1. [T.L16] Si la fonction $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable au point $z_0 \in D$ alors elle est continue au point z_0 .

Démonstration. Remarquer que pour tout nombre complexe $z \in D \setminus \{z_0\}$ on peut écrire ;

$$f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0)$$

Alors :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0$$

Donc $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = 0$ où $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ ce qui montre que f est continue en z_0 . \square

Remarque 1.4.1. [T.L16] La réciproque de cette proposition n'est pas vraie, en effet, la fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \bar{z}$ est continue en tout $z_0 \in \mathbb{C}$, mais elle n'est pas dérivable en aucun point.

Définition 1.4.4. [T.L16] Une fonction f est dite entière si elle est dérivable dans tout le plan complexe \mathbb{C} .

Exemple 1.4.2. [T.L16] Les polynômes $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ tq $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, les fonctions $z \mapsto e^z$, $z \mapsto \sin z$ et $z \mapsto \cos z$ sont des fonctions entières.

Théorème 1.4.1. [A.L14] La fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est holomorphe dans D alors u et v sont différentiables dans D et satisfont aux conditions (où équations) de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

En outre on a :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Démonstration. Puisque $f = u + iv$ est holomorphe en tout point $z_0 = x_0 + iy_0$ on a :

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) + i(v(x,y) - v(x_0,y_0))}{x - x_0 + i(y - y_0)}$$

En choisissant $y = y_0, x \rightarrow x_0$ on obtient :

$$f'(z_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y_0) - v(x_0, y_0))}{x - x_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

et en choisissant $x = x_0, y \rightarrow y_0$ on obtient :

$$f'(z_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0, y) - v(x_0, y_0))}{i(y - y_0)} = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\text{Alors } f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

On en déduit que u et v vérifiant les conditions de Cauchy-Riemann. □

Il est légitime de se demander si la réciproque de cette proposition est vraie ou fausse. La réponse est dans la proposition suivante.

Proposition 1.4.2. [T.L16] *Si les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ sont continues dans D , et vérifient les équations de Cauchy-Riemann, alors la fonction $z \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est holomorphe dans D .*

Démonstration. Soit $z = x + iy \in D$ et soit $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}^*$ tel que $z + h \in D$. Les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ étant supposées continues, alors en utilisant le développement de Taylor à l'ordre 1, on obtient :

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= u(x+h_1, y+h_2) - u(x, y) + i[v(x+h_1, y+h_2) - v(x, y)] \\ &= h_1 \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + h_2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + ih_1 \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + ih_2 \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)(h_1 + ih_2) \end{aligned}$$

où $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ et $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ quand $h_1 \rightarrow 0$ et $h_2 \rightarrow 0$.

D'après les équation de Cauchy-Riemann, on aura :

$$f(z+h) - f(z) = (h_1 + ih_2) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i(h_1 + ih_2) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)(h_1 + ih_2)$$

D'où en divisant par $h = h_1 + ih_2$ et faisant tendre h vers 0 on voit que :

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

□

Ces conditions peuvent être très fortes, mais l'existence des dérivées partielles en un point ne suffit pas pour l'existence de la dérivée comme dans l'exemple suivant.

Exemple 1.4.3. [T.L16] Soit la fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{z^4}} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

La dérivée en $z = 0$ suivant la droite $y = x$ n'est pas définie, en effet ;
on a $(x + ix)^4 = x^4(1 + i)^4 = -4x^4$ alors ;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + ix) - f(0)}{x + ix} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{4x^4}} - 0}{x(1 + i)} = \frac{1}{1 + i} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{4x^4}}}{x} = \infty$$

Cependant, les dérivées partielles de u et v en $(0; 0)$ sont toutes égales à zéro. Par exemple,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{-1}{4x^4}}}{x} = 0$$

On désigne par $\mathcal{H}(D)$, l'ensemble des fonctions holomorphes sur un ouvert $D \subset \mathbb{C}$.

1.5 Transformations conformes et applications géométriques

Une bonne façon de représenter graphiquement les fonctions de variables complexes est d'utiliser deux plans. Le plan z est l'ensemble de départ et le plan w est l'ensemble d'arrivée. On trace dans le plan z des courbes dont on reproduit les images par $f(z)$ dans le plan w . Quand nous faisons ainsi la représentation graphique d'une fonction, nous utilisons les termes application ou transformation au lieu du terme fonction.

Définition 1.5.1. [W.R98] Soit f une application dans un domaine D dans le plan complexe, et $z_0 \in D$ a un voisinage pointé $V(z_0, r)$ sur lequel $f(z) \neq f(z_0)$: On dit que f conserve les angles en z_0 si et seulement si la quantité suivante existe et est indépendante de θ

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} e^{-i\theta} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)}{|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)|}$$

Définition 1.5.2. [A.L14] Soit U un ouvert de \mathbb{C} , une application $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est dite conforme si elle conserve les angles.

Exemple 1.5.1. La fonction $f(z) = z^2$ vérifie que :

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow 0^+} e^{-i\theta} \frac{f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)}{|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)|} &= \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{-i\theta} \frac{(z_0 + re^{i\theta})^2 - z_0^2}{|(z_0 + re^{i\theta})^2 - z_0^2|} \\
&= \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{-i\theta} \frac{z_0^2 + r^2 e^{2i\theta} + 2z_0 r e^{i\theta} - z_0^2}{|z_0^2 + r^2 e^{2i\theta} + 2z_0 r e^{i\theta} - z_0^2|} \\
&= \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{-i\theta} \frac{r^2 e^{2i\theta} + 2z_0 r e^{i\theta}}{|r^2 e^{2i\theta} + 2z_0 r e^{i\theta}|} \\
&= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r e^{i\theta} + 2z_0}{|r e^{i\theta} + 2z_0|} = \frac{2z_0}{|2z_0|} = \frac{z_0}{|z_0|}
\end{aligned}$$

Donc ne dépend pas de θ , alors f conserve les angles.

Remarque 1.5.1. [W.R98] Dans un langage moins précis, la condition signifie que pour deux vecteurs quelconques R_1 et R_2 , issus de z_0 , l'angle que leurs images $f(R_1)$ et $f(R_2)$ font en $f(z_0)$ est le même que celui fait par R_1 et R_2 . comme on le voit sur la figure suivante ;

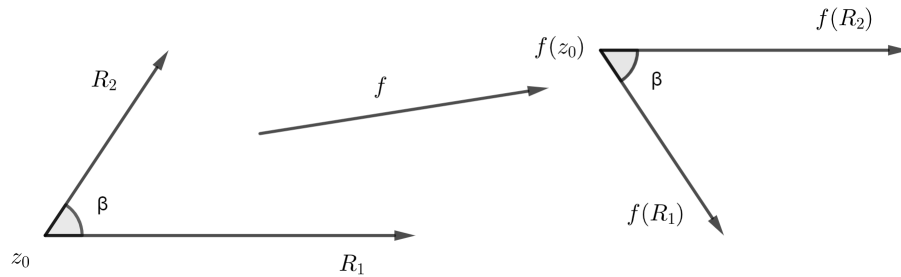


FIGURE 1.2 – Conservation des angles

La propriété de conservation des angles pour tout point d'un domaine est une caractérisation de fonctions holomorphes dont la dérivée ne s'annule pas dans ce domaine. Pour cette raison on appelle applications conformes les fonctions holomorphes dont la dérivée ne s'annule pas.

Théorème 1.5.1. [W.R98],[A.L14]. Soit un domaine D du plan complexe, et f une fonction holomorphe dans D . Si $f'(z_0)$ existe en un point z_0 et $f'(z_0) \neq 0$; l'application f conserve les angles en z_0 . Réciproquement, si la différentielle de f existe et n'est pas nulle en z_0 et si f conserve les angles en z_0 alors $f'(z_0)$ existe et n'est pas nulle, c'est-à-dire :

$$f'(z_0) \neq 0 \Leftrightarrow f \text{ est conforme en } z_0$$

Les transformations de Möbius

Définition 1.5.3. [W.R98],[A.L14]. Soient $a; b; c$ et d quatre nombres complexes tels que $ad - bc \neq 0$. l'application définie par

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

s'appelle transformation de Möbius ou transformation homographique.

Remarque 1.5.2. [W.R98]. Les cas spéciaux du transformation de Möbius sont :

1. La translation pour : $a = d = 1; c = 0$ et $b \in \mathbb{C}$

2. L'homothétie pour : $d = 1; c = b = 0$ et $a \in \mathbb{C}$
3. La rotation pour : $d = 1; c = b = 0$ et $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| = 1$
4. L'inverse pour : $d = a = 0; c = b = 1$.

Théorème 1.5.2. [W.R98]. Toute transformation de Möbius est conforme.

1.6 Intégration des fonctions holomorphes

Définition 1.6.1. [A.L14]. On appelle chemin \mathcal{C}^1 par morceaux une application continue $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, définie sur un intervalle fermé $[a, b]$ de \mathbb{R} et telle qu'il existe une subdivision $a = \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n = b$, de $[a, b]$ pour laquelle la restriction de γ à chaque intervalle $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$, $1 \leq k \leq n$ soit de classe \mathcal{C}^1 . On dit que le chemin γ est fermé (ou un circuit, ou encore un lacet) si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Définition 1.6.2. [A.L14],[B.C90]. Soient $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin \mathcal{C}^1 par morceaux. On appelle intégrale de f le long de γ l'expression

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Théorème 1.6.1. (Théorème de Cauchy) [A.L14],[J.A84].

Soit f une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe $D \subset \mathbb{C}$ et soit γ un chemin fermé contenu dans D . Alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Démonstration. Si $[a; b]$ est le segment du paramétrage de γ , puisque $\gamma(b) = \gamma(a)$ on a :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

□

Exemple 1.6.1. • Calculons $\oint_C z dz$, où $C = \{\gamma(t) = 2e^{it}, t \in [0; 2\pi]\}$ On a :

$$\oint_C z dz = \int_0^{2\pi} 2e^{it} (2ie^{it}) dt = \int_0^{2\pi} 4ie^{i2t} dt = [2e^{i2t}]_0^{2\pi} = 2 - 2 = 0$$

Remarque 1.6.1. Ce théorème fondamental est à la fois valable pour des domaines simplement connexes.

Le théorème de Cauchy admet une réciproque.

Théorème 1.6.2. (Théorème de Morera) [W.R98],[B.C78],[A.L14]. Soit f une fonction continue dans un domaine simplement connexe D . Supposons que $\oint_C f(z) dz = 0$ pour toute courbe fermée et simple C dans D . Alors f est holomorphe dans D .

Théorème 1.6.3. [A.L14],[B.C78]. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine D . Soit γ un chemin fermé contenu dans D et soit Δ le domaine simplement connexe ayant γ pour frontière. Alors

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s-z} ds$$

La fonction f est indéfiniment dérivable dans Δ et on a, pour tout $z \in \Delta$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} ds$$

Définition 1.6.3. [B.C78],[A.L14]. Soit D un ouvert de \mathbb{C} . On dit qu'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique au point $z_0 \in D$ si elle admet un développement en série entière dont le rayon de convergence r n'est pas nul. On dit que f est analytique sur D si elle l'est en tout point $z_0 \in D$. On écrit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, z \in D$$

où $|z - z_0| < r$ et $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes.

Théorème 1.6.4. [T.L16],[B.C78]. Si D un ouvert dans \mathbb{C} , alors toute fonction f holomorphe dans D est analytique dans D .

Démonstration. Soit f holomorphe dans D . La propriété qui va permettre le développement en série entière la fonction f autour de z_0 élément quelconque de D est la formule intégrale de Cauchy. Choissant un cercle C centré en z_0 et contenue ainsi que son intérieure dans D , on écrit la formule intégrale de Cauchy pour un point quelconque z de l'intérieur de C :

$$f(z) = \oint_C \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Notant r le rayon de C , on a alors $|z - z_0| < |w - z_0| = r$ ce qui permet d'écrire

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0 - (z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

Cette dernière série étant uniformément convergente pour $w \in C$ car $\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$ ce qui nous permet d'intervertir les signes somme et intégrale :

$$f(z) = \oint_C \frac{f(w)}{w-z} dw = \oint_C f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{2i\pi} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

en posant $a_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$ on obtient le résultat demandé

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

.

D'autre part, d'après la formule intégrale de Cauchy $a_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

et donc $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$

□

On obtient alors le théorème suivant.

Théorème 1.6.5. [A.L14]. Soit D un ouvert de \mathbb{C} et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe d'une variable complexe z . Alors la fonction f est analytique dans D si et seulement si elle est holomorphe dans D .

1.7 Fonctions méromorphes, théorème des résidus

Théorème 1.7.1. [A.L14]. Soit $f : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans la couronne ouverte

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

Alors, la fonction f peut être représentée dans Δ de façon unique par une série de la forme

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (1.2)$$

avec

$$a_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{k+1}} ds, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (1.3)$$

où γ est un chemin fermé entourant z_0 et contenu dans la couronne. En outre, cette série converge absolument vers f dans Δ et uniformément dans toute couronne fermée contenue dans Δ .

Définition 1.7.1. [A.L14]. La série (1.2) avec les coefficients donnés par (1.3) s'appelle série de Laurent de f autour du point z_0 . Écrivons la série (1.2) sous la forme

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}_{(I)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k}}_{(II)}$$

La série (I) est appelée partie régulière (ou holomorphe) et la série (II) est dite partie principale de la série de Laurent (1.2).

Exemple 1.7.1. [T.L16]. Déterminons le développement en série de Laurent de la fonction f dans

la couronne $D = \left\{ z \in \mathbb{C}; \frac{3}{2} < |z| < \frac{5}{2} \right\}$ tel que ;

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} \right)$$

La fonction f est holomorphe dans D et sur sa frontière, car les singularités -1 et -3 sont à l'extérieur D . Donc f admet un développement en série de Laurent centré à l'origine $z_0 = 0$.

- Si $|z| > \frac{3}{2} > 1$, On a :

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{z}} \right) = \frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{1}{z} \right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \dots$$

- Si $|z| < \frac{5}{2} < 3$, on a :

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+\frac{z}{3}} \right) = \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{z}{3} \right)^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{z}{9} + \frac{z^2}{27} - \dots$$

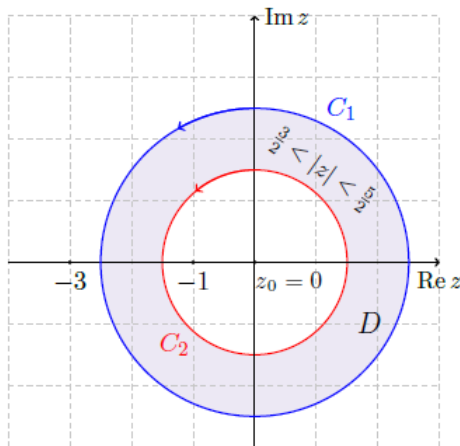


FIGURE 1.3 – La couronne D

Alors dans la couronne D on a :

$$f(z) = \dots - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{18} - \frac{z^2}{54} + \dots$$

Classification des points

Définition 1.7.2. [A.L14], [T.L16],[B.C78]. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $D \subset \mathbb{C}$, sauf peut-être en un certain nombre de points. Un point $z_0 \in D$ est un point régulier pour f si $a_{-k} = 0, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, la série de Laurent

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

est la série de Taylor tout simplement.

Tout point qui n'est pas régulier est dit singulier.

Définition 1.7.3. [A.L14],[B.C78]. Un point singulier est dit isolé s'il existe un voisinage de ce point ne contenant pas d'autres points singuliers. Dans le cas contraire il est dit non isolé.

Exemple 1.7.2. [T.L16]. La fonction $z \mapsto f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$ a des singularités en $z_k = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}^*$ et en $z_0 = 0$.

Comme nous pouvons entourer chacune des singularités $z_k = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}^*$ par un cercle de rayon δ n'en contenant pas d'autre singularités, on en déduit qu'elles sont isolées.

De plus comme tout cercle de rayon δ centré en $z_0 = 0$ contient d'autres singularités que $z_0 = 0$, on en déduit que $z_0 = 0$ est une singularité non isolée.

On distingue deux types de singularités isolées :

Définition 1.7.4. [B.C78],[A.L14]. Le point z_0 est un pôle d'ordre $n > 0$, lorsque

$$a_{-n} \neq 0 \text{ et } a_{-(n+l)} = 0 \quad \forall l \in \mathbb{N}^* : f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Autrement dit, si f s'écrit sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ avec g holomorphe au voisinage de z_0 et telle que $g(z_0) \neq 0$.

Définition 1.7.5. [B.C78],[A.L14]. Le point z_0 est un point singulier essentiel s'il existe une infinité de coefficients a_{-k} non nuls.

Exemple 1.7.3. [B.C78],[T.L16]. Le développement de $e^{\frac{1}{z}}$ s'écrit $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$ on en déduit que $z = 0$ est une singularité essentielle.

Définition 1.7.6. [T.L16]. Si une fonction uniforme f n'est pas définie en $z = z_0$ mais si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe alors $z = z_0$ est appelée une singularité apparente.

Exemple 1.7.4. [T.L16]. Si $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ alors $z = 0$ est une singularité apparente car $f(0)$ n'est pas défini mais $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ car ;

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right] = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

Remarque 1.7.1. [T.L16],[T.W01]. En posant $\frac{1}{z}$ dans $f(z)$ on obtient la fonction $w \mapsto f\left(\frac{1}{w}\right) = F(w)$. Alors la nature de la singularité à $z = \infty$ est définie comme étant la même que celle de $F(w)$ en $w = 0$.

Exemple 1.7.5. [T.L16],[T.W01]. La fonction $f(z) = z^3$ a un pôle triple en $z = \infty$ car $F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^3}$ possède un pôle triple en $z = 0$.

Définition 1.7.7. (Points de branchement)[L.V53], [T.L16].[T.W01]

Soit z_0 un point singulier isolé de f . Le point z_0 est un point de branchement lorsque l'image par f d'au moins une courbe fermée entourant z_0 est une courbe non fermée. Le point est dit d'ordre n s'il faut au plus n tours autour de z_0 pour refermer la courbe image. Si la courbe ne se referme jamais quel que soit le nombre de tours effectués autour de z_0 , on dit que le point de branchement est transcendant où logarithmique.

Remarque 1.7.2. [L.V53], [T.W01]. Le point à l'infini peut être un point de branchement pour $f(s)$. Pour le montrer, on considère la fonction $f(1/s)$. Si 0 est un point de branchement de $f(1/s)$ alors l'infini est un point de branchement de $f(s)$.

Définition 1.7.8. (Fonctions méromorphes)[A.L14].

On dit qu'une fonction $f(z)$ est méromorphe dans un domaine D si elle est holomorphe dans D sauf en un nombre fini de points qui sont des pôles.

Exemple 1.7.6. [T.L16]. Une fonction rationnelle constitue un cas particulier de fonction méromorphe. Par exemple la fonction

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)^2}$$

qui est holomorphe en tout point à distance finie sauf en $z = -1$ (pôle simple) et $z = -2$ (pôle double) est une fonction méromorphe.

Définition 1.7.9. [A.L14], [T.W01]. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$, privé du point z_0 . On appelle résidu de f au point z_0 , le nombre

$$\text{Rés}(f; z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz$$

c'est-à-dire le coefficient de $\frac{1}{z - z_0}$ dans le développement en série de Laurent de f au voisinage de z_0 .

Remarque 1.7.3. [A.L14], [T.W01]. Le résidu de f à l'infini est $\text{Rés}(f; \infty) = \text{Rés}\left(-\frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right); 0\right)$, où $u = 1/z$. En effet, lorsqu'on effectue le changement de variable $z \mapsto u = \frac{1}{z}$, le point $z = \infty$ se transforme en $u = 0$, tandis que l'intégrale $\int_{\gamma} f(z) dz$ devient $\int_{\gamma} -\frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) du$.

Calcul des résidus

[A.L14], [T.W01].

1. Lorsque z_0 est un pôle d'ordre m de $f(z)$, alors

$$\text{Rés}(f; z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m \cdot f(z)]$$

2. Lorsque z_0 est un pôle simple de la fonction $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, avec $P(z_0) \neq 0$ et $Q(z_0) = 0$, alors

$$\text{Rés}(f; z_0) = \frac{p(z_0)}{Q'(z_0)} \text{ si } Q'(z_0) \neq 0$$

3. Lorsque z_0 est un point singulier essentiel de f , le résidu s'obtient en développant $f(z)$ en série de Laurent autour de z_0 .

Démonstration.

1. Par hypothèse, $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$, avec $g(z)$ une fonction holomorphe autour de z_0 et $g(z_0) \neq 0$. Développons g en série entière autour de z_0 :

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

On obtient ainsi la série de Laurent de $f(z)$ autour de z_0 , dans la couronne telle que z_0 est le seul point singulier dans le petit cercle, dont le coefficient de $\frac{1}{z - z_0}$ vaut

$$\text{Rés}(f; z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z))$$

2. Comme $Q(z_0) = 0$ et $Q'(z_0) \neq 0$, on a

$$\text{Rés}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left((z - z_0) \frac{P(z)}{Q(z)} \right) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P(z)}{\frac{Q(z) - Q(z_0)}{z - z_0}} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

□

Exemple 1.7.7. [T.L16].

• Le point $z = -1$ est un pôle double pour la fonction

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$$

Donc :

$$\text{Rés}(f; -1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left\{ (z+1)^2 \left(\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right) \right\} = -\frac{1}{4}$$

Remarque 1.7.4. (**Point singulier essentiel**)[T.L16].

Si z_0 est un point singulier essentiel, le résidu peut parfois être trouvé en utilisant des développements en série connus.

Exemple 1.7.8. [T.L16]. Si $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$, alors $z = 0$ est un point singulier essentiel ;

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots$$

avec $u = -\frac{1}{z}$ on trouve ;

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!.z^2} - \frac{1}{3!.z^3} + \dots$$

où l'on voit que le résidu en $z = 0$ étant le coefficient de $\frac{1}{z}$ sa valeur est -1 .

Théorème 1.7.2. (des résidus). [T.L16],[T.W01].

Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine $z_1; z_2; \dots; z_k \in D$ et $f : D \setminus \{z_1; z_2; \dots; z_k\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2i\pi \sum_{j=1}^k \text{Rés}(f; z_j)$$

où γ est un chemin fermé contenu dans D à l'intérieur duquel sont contenus tous les $z_j; j = 1, \dots, k$.

1.8 Position du problème

La fonction de base qui pose des problèmes est essentiellement le logarithme, car c'est une fonction multiforme avec une infinité de branches, soit $z = re^{i\theta}$, $r > 0$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z$. Par définition, on a

$$\log z = \ln r + i(\theta + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Le point 0 est un point de branchement. En effet, soit un circuit entourant le point 0. Après chaque tour effectué sur ce circuit, l'argument de z passe de $\theta + 2k\pi$ à $\theta + 2(k+1)\pi$ et donc la fonction $\log z$ est passée de la détermination

$$Z_k = \ln r + i\theta + 2ki\pi$$

à la détermination

$$Z_{k+1} = \ln r + i\theta + 2(k+1)i\pi$$

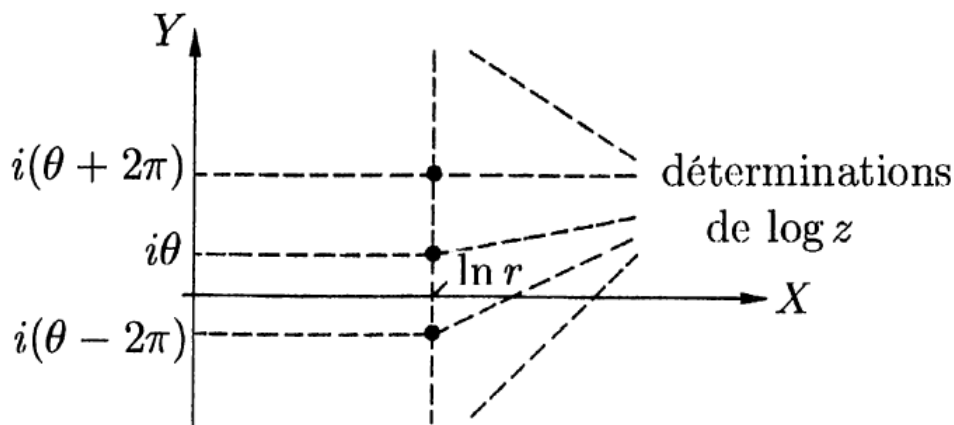


FIGURE 1.4 – Déterminations de $\log z$

On dit que le point $z = 0$ est un point de branchement ou de ramification.

Dans le plan des $Z = \log z = X + iY$, les différentes déterminations correspondant à une valeur de z donnée se trouvent sur une parallèle à l'axe imaginaire, passant par le point $\ln r$.

Tous les points qui annulent le terme qui est sous log sont des candidats de points de branchement, par exemple pour $f(z) = \log(z - 1)$, le z qui annule le terme $(z - 1)$, c-à-d $z = 1$ est un candidat de point de branchement. Pour vérifier que le nombre de branches distinctes est plus grand que 1 lorsqu'on tourne autour de ce point $z = 1$. En écrivant ;

$$\log(z - 1) = \log|z - 1| + i \arg(z - 1) = \log|z - 1| + i(\theta + 2n\pi);$$

qui est distinct pour chaque n et donc il existe ici une infinité de branches et le point $z = 1$ est par conséquent un point de branchement.

Beaucoup de fonction problématique peuvent être réécrites avec des logarithmes, par exemple :

$$f(z) = \sqrt{z} = \exp\left(\frac{1}{2} \log z\right)$$

Ici, $z = 0$ annule ce qu'il y a sous le log il est susceptible d'être un point de branchement, en effet si $z = |z| \exp(i(\theta + n2\pi))$ alors ;

$$\begin{aligned} \sqrt{z} &= \exp\left(\frac{1}{2} \log z\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2} \log(|z| \exp(i(\theta + n2\pi)))\right) \\ &= |z|^{\frac{1}{2}} \exp\left(i\left(\frac{\theta}{2} + n\pi\right)\right) \end{aligned}$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient des images différentes et donc $z = 0$ est bien un point de branchement, pour $n = 2$ on retombe sur la branche $n = 0$ car la fonction $\exp(ix)$ avec x réel est périodique de période 2π .

Le cas le plus général est z^α avec α réel ;

$$\begin{aligned} z^\alpha &= \exp(\alpha \log z) \\ &= \exp(\alpha (\log|z| + i \arg z)) \\ &= |z|^\alpha \exp(i\alpha \arg z) \\ &= |z|^\alpha \exp(i\alpha\theta + in2\pi) \end{aligned}$$

Il faut considérer les différents cas possibles :

1. $\alpha \in \mathbb{Z}$ la fonction $\exp(ix)$ avec x réel est périodique de période 2π , on obtient la même chose pour tout n , alors la fonction est uniforme.
2. $\alpha = \frac{m}{l} \in \mathbb{Q}$ est rationnel avec m et l des entiers premiers entre-eux, la fonction est multiforme car, en changeant n l'image est différente. Pour déterminer le nombre de branches, il faut trouver le plus petit n tel que $an = \frac{n \cdot m}{l}$ soit entier, c-à-d $n = l$. Donc la fonction a l branches.
3. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est irrationnel, la fonction est multiforme avec une infinité de branches.

Pour des fonctions telles que plusieurs valeurs de z annulent ce qu'il y a sous le log, il faut écrire

les termes "candidats" séparément (une somme de log) par exemple :

$$\sqrt{z(z-1)} = \exp\left(\frac{1}{2}\log(z(z-1))\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\log z + \frac{1}{2}\log(z-1)\right)$$

On a donc 2 candidats potentiels $z = 0$ (candidat 1) et $z = 1$ (candidat 2).

Il faut écrire une paramétrisation indépendante pour chaque point :

$$\begin{aligned} z &= |z| \exp(i(\theta_1 + n_1 2\pi)) \\ z-1 &= |z-1| \exp(i(\theta_2 + n_2 2\pi)) \\ \sqrt{z(z-1)} &= |z|^{\frac{1}{2}} |z-1|^{\frac{1}{2}} \exp\left(i\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + (n_1 + n_2)\pi\right)\right) \end{aligned}$$

Les 2 valeurs n_1 et n_2 sont indépendantes et la paire (n_1, n_2) définit une branche. Il faut donc vérifier différentes paires pour identifier les branches qui sont indépendantes :

$$\begin{aligned} \text{branche } (0; 0) &= \text{branche } (1; 1) \\ \text{branche } (1; 0) &= \text{branche } (0; 1) \neq \text{branche } (0; 0) \end{aligned}$$

La fonction est multiforme, on peut de la même manière traiter des fonctions composées faisant intervenir des logarithmes.

CHAPITRE 2

SURFACE DE RIEMANN

Dans ce chapitre on se propose d'étudier la notion de surfaces de Riemann qui est l'une des plus fondamentales en analyse complexe, et la notion de revêtement. Cette dernière notion est la généralisation topologique de celle de surface de Riemann.

2.1 Variétés et Surfaces

Définition 2.1.1. (Carte). [Dol90] Sur un espace topologique X , on appelle carte de dimension n de X un homéomorphisme φ d'un ouvert U de X sur un ouvert de \mathbb{R}^n . L'ouvert U est appelé le domaine de la carte ; on dit que c'est un ouvert de carte. On désigne parfois une carte par le couple (U, φ) .

Si V est un ouvert de X contenu dans U alors (V, φ) est une carte du domaine V .

Définition 2.1.2. (Carte compatibles). [J.L96] Deux cartes (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) de X sont compatibles d'ordre k , ($0 \leq k \leq \infty$) si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ou si l'application

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

(dite fonction de transition) est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme .

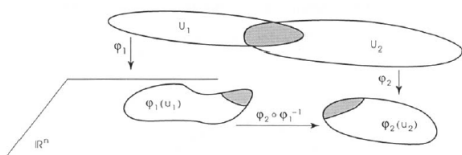


FIGURE 2.1 – Changement de cartes

Définition 2.1.3. (*Atlas*) [Dol90],[J.L96].

1. Un atlas de X , de classe \mathcal{C}^k est un ensemble de cartes $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, de dimension n , deux à deux compatibles, dont les domaines constituent un recouvrement de X . L'existence d'un atlas impose à l'espace X d'être homéomorphe, au voisinage de chaque point, à un ouvert de \mathbb{R}^n .
2. Deux atlas de classe \mathcal{C}^k sont dits compatibles si leur réunion est un atlas de classe \mathcal{C}^k ; on vérifie que la compatibilité est une relation d'équivalence dans l'ensemble des atlas de classe \mathcal{C}^k de X .
3. Un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de classe \mathcal{C}^k est dit maximal si toute carte compatible avec les cartes de l'atlas appartient elle-même à l'atlas. Un tel atlas est aussi appelé structure différentielle de classe \mathcal{C}^k .

Définition 2.1.4. [J.L96]. Une variété différentielle de classe \mathcal{C}^k est une variété topologique munie d'une structure différentielle de classe \mathcal{C}^k .

Remarque 2.1.1. [J.R12],[J.F11]. 1. Lorsque $n = 2$, X est appelée surface différentielle.
2. Lorsque $n = 1$, X est appelée courbe lisse (de classe \mathcal{C}^∞).

Exemple 2.1.1. [J.R12],[J.F11]. Les ensembles suivants sont des variétés différentielles (toutes de dimension deux).

- Le disque ouvert $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$.
- La sphère $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
- Le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 = \mathbb{R} / \mathbb{Z} \times \mathbb{R} / \mathbb{Z}$ homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$; ou $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$

Définition 2.1.5. En remplaçant partout \mathbb{R}^n par \mathbb{C}^n , et en exigeant des changements de cartes qu'ils soient analytiques complexes, on obtient la catégorie des variétés analytiques complexes.

Remarque 2.1.2. [A.L18] Les variétés analytiques complexes sont définies de façon similaire aux variétés différentielles réelles. Toute variété analytique complexe de dimension n possède une structure canonique de variété différentielle réelle orientable de dimension $2n$.

Définition 2.1.6. [A.L18]. Une variété complexe de dimension n est une espace topologique séparé X recouvert par un nombre au plus dénombrable de cartes. Une carte est la donnée d'un ouvert U de X , d'un ouvert V de \mathbb{C}^n et d'un homéomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$ tels que si deux cartes (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) se rencontrent, l'application de changement de cartes $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ soit un biholomorphisme c -à- d ; $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ et son inverse sont holomorphe.

Lorsque $n = 1$, X est aussi appelée courbe complexe ou surface de Riemann.

Définition 2.1.7. [SC12],[E.R89]. Une surface de Riemann est un espace topologique séparé connexe X , muni d'un atlas holomorphe $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ où :

- $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X .
- la carte $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ est un homéomorphisme de U_i sur un ouvert de \mathbb{C} .
- tout changement de cartes $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ est holomorphe.

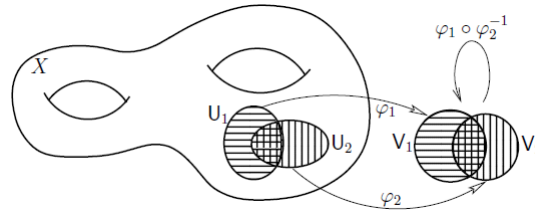


FIGURE 2.2 – Changement de cartes

2.2 Exemples de Surfaces de Riemann

Les références de cette section sont ;[O.F81],[SC12],[Do190],[F.P99].

- Le plan complexe \mathbb{C} . Sa structure complexe est définie par l'atlas dont la carte unique est l'application identité $id : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.
- Domaines d'une surface. Si X est une surface de Riemann et si $Y \subset X$ est un domaine, i.e. un ensemble ouvert connexe, alors Y hérite d'une structure complexe naturelle qui en fait une surface de Riemann, à savoir on prend comme atlas toutes les cartes complexes $\varphi : U \rightarrow V$ sur X pour lesquelles U est un ouvert de Y . En particulier, tout domaine $Y \subset \mathbb{C}$ est une surface de Riemann.
- La sphère de Riemann \mathbb{P}^1 (la droite projective). Soit $\mathbb{P}^1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On introduit la topologie suivante sur cet objet \mathbb{P}^1 . Ses ouverts sont tout d'abord les ouverts usuels $U \subset \mathbb{C}$ et ensuite les ensembles de la forme $V \cup \{\infty\}$, où $V \subset \mathbb{C}$ est le complémentaire d'un compact quelconque $V \subset \mathbb{C}$. Avec cette topologie, \mathbb{P}^1 devient un espace topologique compact séparé, homéomorphe à la sphère S^2 . Posons maintenant :

$$\begin{aligned} U_1 &:= \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} = \mathbb{C} \\ U_2 &:= \mathbb{P}^1 \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

et définissons deux applications $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}, i = 1; 2$, comme suit : φ_1 est l'application identité, et :

$$\varphi_2(z) := \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{pour } z \in \mathbb{C}^*, \\ 0 & \text{pour } z = \infty. \end{cases}$$

Alors chacune de ces deux applications est un homéomorphisme, donc \mathbb{P}^1 est une variété de dimension 2. Puisque U_1 et U_2 sont connexes et sont d'intersection $\mathbb{C}^* \setminus \{0\}$ non vide, \mathbb{P}^1 est aussi connexe. La structure complexe sur \mathbb{P}^1 est alors définie par l'atlas constitué de ces deux cartes $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}, i = 1; 2$, mais il reste encore à vérifier qu'elles sont holomorphiquement compatibles : on a $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$ et l'application de transfert :

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z &\longmapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

est en effet clairement biholomorphe (c'est une involution). Ici, la notation \mathbb{P}^1 provient du fait que l'on peut considérer \mathbb{P}^1 comme l'unique (à isomorphisme près) espace projectif de

dimension 1 sur le corps des nombres complexes.

- Les tores complexes. Supposons que $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ sont deux nombres complexes linéairement indépendants sur \mathbb{R} et définissons le réseau qu'ils engendrent :

$$\Gamma := \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 = \{nw_1 + mw_2 \in \mathbb{C} : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

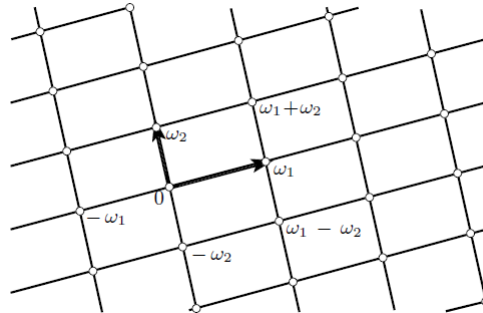


FIGURE 2.3 – Le réseau Γ

Deux nombres complexes $z, z' \in \mathbb{C}$ sont dits équivalents mod Γ si $z - z' \in \Gamma$. L'ensemble des classes d'équivalences est alors noté \mathbb{C}/Γ . Soit $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ la projection canonique, i.e. l'application qui associe à tout point $z \in \mathbb{C}$ sa classe d'équivalence mod Γ .

On introduit la topologie suivante, dite topologie quotient, sur \mathbb{C}/Γ . Par définition, un sous-ensemble $U \subset \mathbb{C}/\Gamma$ est ouvert précisément lorsque $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}$ est ouvert. Avec cette topologie, \mathbb{C}/Γ est un espace topologique séparé et l'application quotient $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ est continue. Puisque \mathbb{C} est connexe, \mathbb{C}/Γ est aussi connexe. De plus, \mathbb{C}/Γ est compact, puisqu'il est recouvert par l'image à travers π du parallélogramme compact :

$$W = \{\lambda w_1 + \mu w_2 \in \mathbb{C} : \lambda, \mu \in [0, 1]\}$$

L'application π est aussi ouverte, i.e. l'image de tout ouvert $V \subset \mathbb{C}$ est aussi un ouvert, et pour se convaincre que $\pi(V)$ est ouvert, on doit, par définition, vérifier que $\pi^{-1}(\pi(V))$ est ouvert, mais cela est clair puisque l'on a :

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{w \in \Gamma} \underbrace{(w + V)}_{\text{ouvert traduit}}$$

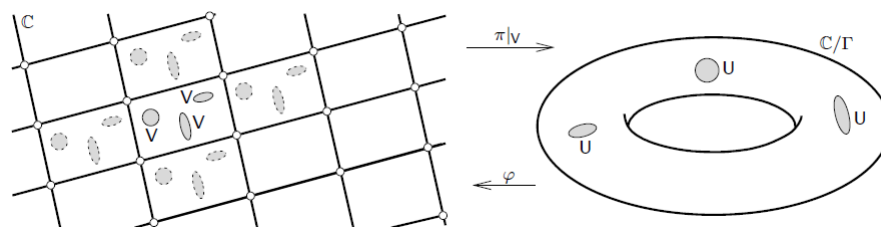


FIGURE 2.4 – Projection π

Maintenant, la structure complexe sur \mathbb{C}/Γ est définie comme suit. Soit $V \subset \mathbb{C}$ un ouvert dans lequel aucun couple de points distincts n'est équivalent mod Γ . Alors $U := \pi(V)$ est

ouvert et $\pi|_V: V \rightarrow U$ est un homéomorphisme (bijectif, continu, d'inverse continu). Son inverse $\varphi: U \rightarrow V$ est une carte complexe sur \mathbb{C}/Γ . Soit \mathcal{A} l'ensemble de toutes les cartes obtenues de cette façon. On doit vérifier que deux telles cartes $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i, i = 1; 2$ appartenant à \mathcal{A} sont holomorphiquement compatibles. Considérons donc l'application :

$$\psi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

Pour tout $z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$, on a $\pi(\psi(z)) = \varphi_2^{-1}(z) = \pi(z)$, d'où $\psi(z)$ et z ont même image par π , et donc $\psi(z) - z \in \Gamma$. Puisque Γ est discret et que ψ est continue, cela implique que $\psi(z) - z$ est constant sur chaque composante connexe de $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$. Ainsi, ψ est holomorphe. On vérifie de même que ψ^{-1} est aussi holomorphe. En conclusion, on équipe \mathbb{C}/Γ de la structure complexe définie par cet atlas \mathcal{A} .

2.3 Propriétés élémentaires des applications holomorphes

De nombreux concepts et objets de la théorie des fonctions à une variable complexe (les fonctions holomorphes et les fonctions méromorphes) peuvent être définis sur une surface de Riemann en utilisant les coordonnées locales, autant que ces objets d'étude demeurent invariants à travers les changements de carte.

Définition 2.3.1. [O.F81],[SC12]. Soient X et Y deux surfaces de Riemann. Une application $f: X \rightarrow Y$ est holomorphe si elle est continue et si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est holomorphe pour tout couple $(\varphi; \psi)$ de cartes holomorphes de X et de Y . Il est clair qu'il suffit que ce soit vrai pour ψ et φ dans des atlas holomorphes

Définition 2.3.2. [O.F81],[SC12]. Soit X une surface de Riemann et soit $D \subset X$ un sous-ensemble ouvert. Une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ est dite holomorphe si, pour toute carte $\psi: U \rightarrow V$ sur X , la fonction conjuguée :

$$f \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap D) \rightarrow \mathbb{C}$$

est holomorphe au sens usuel sur l'ouvert $\psi(U \cap D) \subset \mathbb{C}$. L'ensemble de toutes les fonctions holomorphes sur D sera noté $\mathcal{H}(D)$: c'est un anneau.

Remarque 2.3.1. [O.F81],[SC12].

- La somme et le produit de fonctions holomorphes sont à nouveau holomorphes. Toutes les fonctions constantes sont holomorphes. Donc $\mathcal{H}(D)$ est une \mathbb{C} -algèbre.
- Si X, Y et Z sont trois surfaces de Riemann, et si $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$ sont deux applications holomorphes, alors leur composition $g \circ f: X \rightarrow Z$ est aussi une application holomorphe.

Définition 2.3.3. [O.F81],[SC12]. Une application $f: X \rightarrow Y$ est dite biholomorphe si elle est bijective, si elle est holomorphe, et si son inverse $f^{-1}: Y \rightarrow X$ est elle aussi holomorphe. Deux surfaces de Riemann X et Y sont dites isomorphes s'il existe une application biholomorphe

$f : X \longrightarrow Y$.

Définition 2.3.4. [Dol90]. Les applications holomorphes $f : X \longrightarrow Y$ de surfaces de Riemann ont été, définies en 2.3.1; on les appellera aussi morphismes (de surfaces de Riemann).

Théorème 2.3.1. (Théorème d'identité)[Dol90].

Soient X une surface de Riemann connexe et $f_1, f_2 : X \longrightarrow Y$ deux morphismes qui coïncident au voisinage d'un point x_0 de X , alors f_1 et f_2 coïncident sur X .

Démonstration. Soit G l'ensemble des $x \in X$ ayant un voisinage ouvert W_x tel que $f_1|_{W_x} = f_2|_{W_x}$. D'après sa définition G est un ouvert et contient x_0 . Soit $b \in \overline{G} \setminus G$; montrons que $b \in G$: soit (U, φ) une carte de X telle que $b \in U$ connexe et telle qu'il existe une carte (V, ψ) de Y avec $f_j(U) \subset V (j = 1, 2)$; alors les deux fonctions $f'_j = \psi \circ f_j \circ \varphi : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$ coïncident sur l'ouvert non vide $\varphi(U \cap G)$, donc sur l'ouvert connexe $\varphi(U)$ de \mathbb{C} , d'où $f_1|_U = f_2|_U$ et $b \in G$. Donc l'ensemble G non vide, ouvert et fermé de X (connexe), alors G est égal à X . \square

Théorème 2.3.2. (Théorème de prolongement)[Dol90].

Soient U un ouvert d'une surface de Riemann, $a \in U$ et $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a\})$ une fonction bornée au voisinage de a . Alors f a une extension unique holomorphe sur U .

Démonstration. Il suffit d'établir le théorème dans le cas où U est le domaine d'une carte (U, φ) ; le théorème est connu pour l'ouvert $\varphi(U)$ de \mathbb{C} et la fonction $f \circ \varphi^{-1}$ holomorphe sur $\varphi(U) \setminus \varphi(a)$. \square

Proposition 2.3.1. [O.F81],[SC12]. Soient X, Y deux surfaces de Riemann, $f : X \longrightarrow Y$ une application holomorphe, x_0 un point de X et $y_0 = f(x_0)$ son image par f . On suppose f non constante au voisinage de x_0 . Soit ψ une carte de Y centrée en y_0 avec $\psi(y_0) = 0$. Alors il existe une carte φ de X centrée en x_0 telle que dans les cartes φ et ψ , la fonction f prend la forme, $z \longmapsto f(z) = z^d$ c-à-d :

$$\begin{array}{ccc} U \subset X & \xrightarrow{f} & V \subset Y \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ U' & \xrightarrow{z^d} & V' \end{array}$$

où d est un entier naturel indépendant des cartes, appelé ordre de ramification de f en x_0 .

Démonstration. Soit φ_0 une carte de X centrée en x_0 . Alors l'application $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi_0^{-1}$ est holomorphe et vérifie $\tilde{f}(0) = 0$. On écrit, $\tilde{f} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Soient $d = \min \{K : a_k \neq 0\}$ et $c = a_d^{1/d}$.

On peut écrire,

$$\tilde{f} = a_d z^d (1 + u(z))$$

avec u holomorphe et $u(0) = 0$. Mais la fonction

$$h : z \mapsto h(z) = (1 + u(z))^{1/d}$$

est holomorphe au voisinage de 0 et $h(0) = 1$. On a alors $(1 + u(z)) = h(z)^d$ holomorphe et $\tilde{f}(z) = (c.z.h(z))^d$. Si on pose $\varphi(x) = c.\varphi_0(x).h(\varphi_0(x))$ alors $\varphi(x_0) = 0$ et d'après le théorème d'inversion locale, φ définit une carte locale au voisinage de x_0 .

Pour $\varphi(x) = z$ on a :

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z) &= (\psi \circ f \circ \varphi_0^{-1})(\varphi_0 \circ \varphi^{-1})(z) \\ &= (c.\varphi_0 \circ \varphi^{-1}(z)h(\varphi_0 \circ \varphi^{-1}(z)))^d \\ &= (\varphi(x))^d \\ &= z^d\end{aligned}$$

Enfin, $\tilde{f}(z) = z^d$ dans les cartes $(U; \varphi)$ et $(V; \psi)$, et pour tout $y \in V - \{y_0\}$ le cardinal de $f^{-1}(\{y\}) \cap U = d$. L'entier "d" est indépendant des cartes. \square

Remarque 2.3.2. (*Interprétation géométrique.*) [O.F81],[SC12].

Le nombre "d" du théorème peut être caractérisé de la manière suivante. Pour tout voisinage ouvert U de x_0 , il existe un sous-voisinage ouvert $U_{x_0} \subset U$ de x_0 et un voisinage ouvert V de $y_0 = f(x_0)$ tel que l'ensemble $f^{-1}(\{y\}) \cap U_{x_0}$ contient exactement "d" éléments distincts deux à deux, pour tout $y \in V \setminus \{y_0\}$, puisqu'il y a exactement "d" racines d-èmes de l'unité. On appelle "d" la multiplicité avec laquelle l'application f prend la valeur y_0 au point x_0 , ou l'on dit simplement que f est de multiplicité "d" au point x_0 et noté $\deg_x(f)$.

Proposition 2.3.2. [O.F81],[SC12]. On a $\deg_x(f) = 1$ si et seulement si $Df(x) \neq 0$. Si $\deg_x(f) \geq 2$, on dit que x est un point de ramification (c'est la même chose qu'un point critique). L'ensemble $R(f) \subset X$ des points de ramification est discret et fermé, ou de façon équivalente localement fini. Son image $B(f) \subset Y$ est l'ensemble des points de branchement (valeurs critiques).

Démonstration. On a $\deg_x(f) = 1$ si et seulement si $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \sim C.z$ avec $C \neq 0$, soit $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(0) \neq 0$, soit $Df(x) \neq 0$. Si $x \in R(f)$ et U est un voisinage sur lequel on a $\psi \circ f = \varphi^d$, alors $R(f) \setminus U = \{x\}$ puisque $\text{crit}(z \mapsto z^d) = \{0\}$, donc $R(f)$ est discret. De plus, la caractérisation $Df(x) = 0$ montre qu'il est fermé. \square

Corrolaire 2.3.1. [O.F81],[SC12]. Soient X et Y deux surfaces de Riemann et soit $f : X \rightarrow Y$ une application holomorphe injective. Alors f est un biholomorphisme de X sur son image $f(X) \subset Y$.

Démonstration. Puisque f est injective, dans la description locale énoncée par la proposition précédente, on doit toujours avoir d_{x_0} , d'où la différentielle de f est inversible. Donc par le théorème d'inversion locale analytique, l'application inverse $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ est elle aussi holomorphe. \square

Corrolaire 2.3.2. [Dol90]. Soient X une surface de Riemann connexe et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme non constant. Alors f est une application ouverte.

Théorème 2.3.3. [O.F81],[SC12], [Dol90]. Soient X et Y deux surfaces de Riemann. On suppose que X est compacte et que $f : X \rightarrow Y$ est une application holomorphe non constante. Alors Y est compacte et f est surjective.

Démonstration. On sait que $f(X)$ est un sous-ensemble ouvert de Y . Puisque X est compacte, son image $f(X)$ est elle aussi compacte, donc fermée. Mais comme les seuls sous-ensembles d'un espace topologique connexe qui sont à la fois fermés et ouverts sont l'ensemble vide et l'espace tout entier, il en découle que $f(X) = Y$. Ainsi f est surjective et Y est compacte. \square

2.4 Les Revêtements

Les applications holomorphes non constantes entre surfaces de Riemann sont des revêtements, parfois avec des points de ramification. C'est pour cette raison que l'on doit étudier d'abord la théorie générale des revêtements entre variétés avant de pouvoir l'appliquer aux surfaces de Riemann.

Définition 2.4.1. [O.F81],[SC12],[Dol90]. Soient T et T' deux espaces topologiques et soit $\pi : T' \rightarrow T$ une application continue. Si $t \in T$ est un point, le sous-ensemble : $\pi^{-1}(t) = \{t' \in T' : \pi(t') = t\}$ est appelé la fibre de π au-dessus de t .

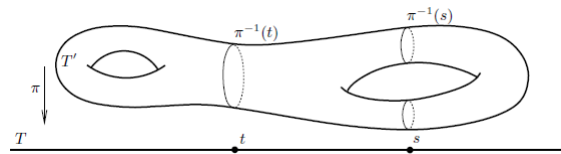


FIGURE 2.5 – fibre de π

Définition 2.4.2. [O.F81],[SC12]. Avec $\pi : T' \rightarrow T$ comme ci-dessus, si $\tau : T'' \rightarrow T$ est une seconde application continue entre espace topologiques de même but T , alors une application continue $\phi : T' \rightarrow T''$ est dite préserver les fibres si l'on a $\pi = \tau \circ \phi$

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{\phi} & T'' \\ \pi \downarrow & \searrow \tau & \\ T & & \end{array}$$

En effet, on voit, pour tout point $t' \in \pi^{-1}(t)$ dans la fibre au-dessus d'un point $t \in T$ quelconque, que $\phi(t') \in T''$ appartient à la fibre $\tau^{-1}(t)$ de la seconde application au-dessus du même point, puisque :

$$\pi(t') = t = \tau(\phi(t'))$$

Géométriquement, ces inclusions :

$$\phi(\pi^{-1}(t)) \subset \tau^{-1}(t), \forall t \in T$$

signifient donc que ϕ envoie les fibres de π dans les fibres de τ sans en changer les points de base.

Définition 2.4.3. [O.F81],[SC12]. Un sous-ensemble A d'un espace topologique T est dit discret si tout point $a \in A$ possède un voisinage ouvert V_a tel que $V_a \cap A = \{a\}$.

Une application $\pi : T' \rightarrow T$ entre deux espaces topologiques T' et T est dite discrète si la fibre $\pi^{-1}(t) \subset T'$ de tout point $t \in T$ est un sous-ensemble discret de T' .

Théorème 2.4.1. [O.F81],[SC12],[Dol90]. Soient X et Y deux surfaces de Riemann et soit $p : Y \rightarrow X$ une application holomorphe non constante. Alors p est ouverte et à fibres discrètes.

Démonstration. Puisque p est holomorphe, on sait qu'elle est ouverte. Par contradiction, si la fibre d'un point $a \in X$ n'était pas discrète d'où $p^{-1}(a)$ a un point d'accumulation, alors par le théorème d'identité, p serait identiquement égale à la constante a . \square

Définition 2.4.4. (Point de branchement) [O.F81],[SC12],[Dol90].

Si $p : Y \rightarrow X$ est un morphisme non constant, Y est appelée un domaine (étalé) au-dessus de X . Soient X et Y deux surfaces de Riemann et soit $p : Y \rightarrow X$ une application holomorphe non constante.

Un point $y \in Y$ est appelé point de branchement ou point de ramification de p s'il n'existe pas de voisinage V de y tel que la restriction $p|_V$ soit injective. Une telle application p est dite non ramifiée s'elle n'a aucun point de branchement dans Y .

Exemple 2.4.1. [O.F81],[SC12].

1. Puissance canonique : Supposons que $d \geq 2$ est un entier et soit $p_d : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par $p_d(z) = z^d$. Alors $0 \in \mathbb{C}$ est un point de branchement pour p_d mais la restriction $p_d|_{\mathbb{C}^*}$ de cette puissance d -ème à \mathbb{C}^* est non ramifiée.

2. L'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est une application holomorphe non ramifiée, puisque \exp est injective sur tout sous-ensemble $V \subset \mathbb{C}$ qui ne contient pas deux points qui diffèrent d'un multiple entier de $2i\pi$. Une autre manière de s'en convaincre est de rappeler que la dérivée $\exp' = \exp$ ne s'annule jamais et de constater que :

Lemme 2.4.1. [O.F81],[SC12]. Un point $y \in Y$ est de branchement pour une application holomorphe $p : Y \rightarrow X$ entre deux surfaces de Riemann si et seulement si sa différentielle complexe :

$$Dp : \mathbb{T}_y Y \rightarrow \mathbb{T}_{p(y)} X.$$

entre espace tangents complexes (de dimension complexe égale à 1) est nulle au point y .

Définition 2.4.5. [O.F81],[SC12]. On appelle relèvement de f relativement à p toute application continue $g : Z \rightarrow Y$ telle que $f = p \circ g$, i.e. telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow g & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Géométriquement parlant, tout point $z_0 \in Z$ est envoyé par g sur l'un des points qui se situent au-dessus de $f(z_0)$ dans Y , à savoir : $g(z_0)$ est l'un des points de la fibre $p^{-1}(f(z_0))$

Théorème 2.4.2. [O.F81],[SC12]. Soient X, Y et Z trois surfaces de Riemann, soit $p : Y \rightarrow X$ une application holomorphe non ramifiée et soit $f : Z \rightarrow X$ une application holomorphe quelconque. Alors tout relèvement continu $g : Z \rightarrow Y$ de f est nécessairement holomorphe.

Démonstration. Soit $c \in Z$ un point arbitraire, soit $b := g(c)$ et soit $a := p(b) = f(c)$. Il existe des voisinages ouverts V de b et U de a tels que $p|_V : V \rightarrow U$ est biholomorphe. Soit $\varphi : U \rightarrow V$ l'application inverse. Puisque g est continue, il existe un voisinage ouvert W de c tel que $g(W) \subset V$. Mais comme $f = p \circ g$, on déduit $g|_W = \varphi \circ f|_W$, et donc g est holomorphe au voisinage du point c . \square

Corrolaire 2.4.1. [O.F81],[SC12]. Soient X, Y et Z trois surfaces de Riemann et soient deux applications holomorphes non ramifiées $p : Y \rightarrow X$ et $q : Z \rightarrow X$. Alors toute application continue $f : Y \rightarrow Z$ qui préserve les fibres, i.e satisfait $p = q \circ f$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ \downarrow p & \nearrow q & \\ X & & \end{array}$$

est holomorphe.

Démonstration. En effet, un changement de perspective dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & \nearrow f & \downarrow q \\ Y & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

montre que f est un relèvement de p relativement à q , donc le théorème s'applique. \square

Définition 2.4.6. [O.F81],[SC12],[E.R89],[Dol90]. Soient X et Y deux espaces topologiques. Une application continue $p : Y \rightarrow X$ est appelée un revêtement si tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U dans X (suffisamment petit) dont la pré-image :

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$$

consiste en une famille, indexée par un certain ensemble J , d'ouverts $V_j \subset Y$ disjoints deux à deux tels que chaque application restreinte : $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$

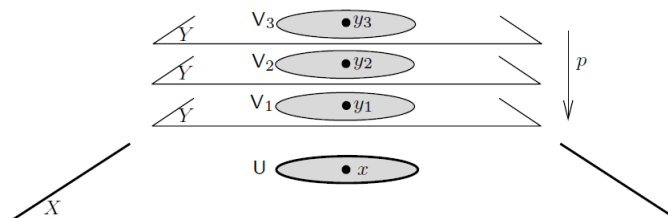


FIGURE 2.6 – Revêtement p

est un homéomorphisme (pile d'assiettes ouvertes disjointes).

Remarque 2.4.1. [SC12],[F.P99]. Tout revêtement est un homéomorphisme local.

Exemple 2.4.2. [Dol90],[SC12],[F.P99],[O.F81].

1. Revêtement de degré fini :

Soit $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application polynomiale de degré $k \geq 1$. Notons $C_p = \{z \in \mathbb{C}; P'(z) = 0\}$ l'ensemble des points critiques de P , et $V_p := P(C_p)$ l'ensemble des valeurs critiques.

Posons $X = \mathbb{C} \setminus V_p$. Alors la restriction à $Y = P^{-1}(X)$ de l'application P définit une application $P : Y \rightarrow X$ qui est un revêtement de degré k .

Cas particulier

Soit k un nombre entier ≥ 2 et soit :

$$p_k : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*; \quad z \mapsto z^k$$

Alors p_k est un revêtement. En effet, supposons que $a \in \mathbb{C}^*$ est arbitraire et choisissons $b \in \mathbb{C}^*$ avec $p_k(b) = a$. Puisque p_k est un homéomorphisme local, il existe un voisinage ouvert V_0 de b et un voisinage ouvert U de a tel que $p_k|_{V_0} : V_0 \rightarrow U$ est un homéomorphisme. Alors on a :

$$p_k^{-1}(U) = V_0 \cup wV_0 \cup \dots \cup w^{k-1}V_0$$

où w est une racine primitive k -ième de l'unité, par exemple $\exp(2i\pi/k)$. La fibre au-dessus de a est l'ensemble des racines k -ièmes. Ces racines se permettent circulairement quand a fait un tour autour de 0 . Il est clair que les ensembles $V_j = w^j V_0, j = 0; \dots; k-1$, sont disjoints deux à deux, et que chaque restriction $p_k|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ est un homéomorphisme.

En restreignant cet exemple à l'ensemble des nombres complexes de module 1. On obtient un revêtement de degré k du cercle trigonométrique \mathbb{S}^1 , ayant \mathbb{S}^1 pour espace total.

$$\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1; \quad e^{i\theta} \mapsto e^{ik\theta}$$

2. Revêtement de degré infini :

L'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est un revêtement. En effet ;

soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ avec $\exp(b) = a$. Puisque l'exponentielle est un homéomorphisme local, il existe un voisinage ouvert V_0 de b et un voisinage ouvert U de a tels que $\exp|_{V_0} : V_0 \rightarrow U$ est un homéomorphisme. Alors on a ;

$$\exp^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n \text{ où } V_n := 2i\pi n + V_0$$

Il est clair que les V_0 sont disjoints deux à deux et que chaque application $\exp|_{V_n} : V_n \rightarrow U$ est un homéomorphisme.

Pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, la fibre $\exp^{-1}(a)$ se compose d'une infinité de points de \mathbb{C} (les « déterminations

du logarithme complexe ») : notant $\log a$ un point arbitraire de $\exp^{-1}(a)$, on a :

$$\exp^{-1}(a) = \{\log a + 2i\pi k; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Quand a tourne autour de 0, les différentes déterminations du logarithme s'échangent ($k \mapsto k+1$), de sorte qu'il est impossible de définir la fonction \log globalement sur \mathbb{C}^* .

En restreignant ce revêtement au-dessus du cercle trigonométrique, on obtient un revêtement de degré infini du cercle qui, par un changement de variable évident ($z = i\theta$), s'identifie au paramétrage usuel du cercle par l'angle :

$$\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1; \quad \theta \longmapsto e^{i\theta}.$$

La fibre $\pi^{-1}(a)$ est l'infinité des « déterminations de l'argument $\arg a$ » :

$$\pi^{-1}(a) = \{\arg a + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}\}.$$

3. Contre exemple :

1. Soit $j : Y \longrightarrow X$ l'injection canonique d'un ouvert Y d'un espace topologique X , différent de X ; alors j est un homéomorphisme local bijectif de Y sur son image, c'est id_Y , mais, pour tout $x \in \overline{Y} \setminus Y$ et tout voisinage ouvert U de x dans X , $j^{-1}(U) \cap Y$ est un ouvert de Y qui n'est pas homéomorphe à U par j ; donc j n'est pas un revêtement.

2. Soit $f : Y \longrightarrow X$ un homéomorphisme local surjectif et soit $\{y_j\}_{j \in J}$ la fibre de $x \in X$; tout point y_j a un voisinage ouvert V'_j tel que $f|_{V'_j}$ soit un homéomorphisme : $V'_j \longrightarrow f(V'_j) = U_j$. Si J est fini, alors $\bigcap_{j \in J} U_j$ est un ouvert U et les $V_j = V'_j \cap f^{-1}(U)$ sont les ouverts tels que $f^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$; si pour tout x les ouverts V_j sont disjoints, f est un revêtement. Mais si J est infini, pour qu'il en soit ainsi, il faut que $\bigcap_{j \in J} U_j$ soit un ouvert ce qui n'est pas toujours réalisé.

3. Comme un remarque n'est pas tous les homéomorphismes locale sont des revêtements, car cette figure montre un exemple d'homéomorphisme local qui n'est pas un revêtement. On a $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1, x > 0\}$, $X = \mathbb{R}$ et pour $x > 0$ la fibre Y_x consiste en un seule point, mais ce point tend vers l'infini quand $x \longrightarrow 0$, et pour $x \leq 0$ on a $Y_x = \emptyset$.

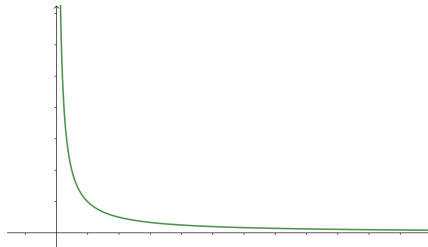


FIGURE 2.7 – homéomorphisme local $\frac{1}{x}$

Le fait qu'un point de la fibre puisse tendre vers l'infini alors que x reste dans un compact signifie que l'application P n'est pas propre (rappelons qu'une application est dite « propre » si l'image réciproque de tout compact est compacte).

CHAPITRE 3

UNIFORMISATION

Dans ce dernier chapitre nous étudions globalement les fonctions multiformes (\sqrt{z} et $\log z$), et on donne deux méthodes pour uniformiser ces fonctions.

3.1 Étude globale de fonctions

3.1.1 Logarithme(s)

Étude globale

Dans le domaine réel, l'application $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ est une bijection croissante. Son inverse est le logarithme népérien, noté $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$. Dans le domaine complexe, l'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est surjective, mais non injective. Quand $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit $z = e^w = e^{a+ib} = e^a e^{ib}$, nous observons que :

- La partie réelle a de w est bien définie, avec $a = \ln |z|$.
- La partie imaginaire b de w n'est définie qu'à 2π près. On dit que b est un argument de z .

Lorsqu'on écrit $z \in \mathbb{C}$ sous la forme $z = e^w$, le complexe w est un logarithme de z : il n'est défini qu'à 2π près. On dit que le logarithme complexe est une fonction "multiforme" (ou multivaluée).

Définition 3.1.1. [AM00]. *Sur tout ouvert U de \mathbb{C} , on appelle détermination du logarithme toute fonction continue $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\varphi \in \log z$ pour tout $z \in U$, i.e. telle que $\exp \circ \varphi = Id_U$.*

Proposition 3.1.1. [AM00],[P.T06]. *Il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur \mathbb{C}^* tout entier.*

Démonstration. Sinon, on disposerait d'une détermination continue de l'argument

$$z \in \mathbb{C}^* \mapsto \theta(z) \in \mathbb{R}$$

avec, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $z = |z|e^{i\theta(z)}$. En particulier, en se restreignant au cercle unité, on aurait pour tout $t \in \mathbb{R}$: $e^{it} = e^{i\theta(e^{it})}$. Puisque, pour tout $t \in \mathbb{R}$, t et $\theta(e^{it})$ sont deux déterminations de l'argument du complexe e^{it} , l'application continue $\delta : t \in \mathbb{R} \mapsto t - \theta(e^{it}) \in \mathbb{R}$ prend ses valeurs dans $2\pi\mathbb{Z}$. L'application δ , définie sur un ensemble connexe et à valeurs dans un espace discret, serait donc constante. On obtient une contradiction car $t \mapsto \theta(e^{it})$ est 2π -périodique sur \mathbb{R} , mais $t \mapsto t$ ne l'est pas. \square

Le même raisonnement (une fonction continue définie sur un espace connexe et à valeurs dans un espace discret est constante) donne la :

Théorème 3.1.1. [AM00]. Soit U un domaine de \mathbb{C} . Soit φ une détermination du logarithme sur U . Alors l'ensemble des déterminations du logarithme sur U est

$$\{\varphi + 2ik\pi\}$$

En conséquence, pour tout $z_0 \in U$ et pour tout $y_0 \in \log z_0$, il existe une et une seule détermination ψ du logarithme sur U telle que $\psi(z_0) = y_0$.

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ il est immédiat que $\psi_k = \varphi + 2ik\pi$ est une détermination du logarithme sur U . Réciproquement, soit ψ une telle détermination. Alors pour tout $z \in U$, on a $\exp(\varphi(z)) = \exp(\psi(z)) = z$ d'où $\exp(\psi(z) - \varphi(z)) = 1$, d'où $\psi(z) - \varphi(z) \in 2i\pi\mathbb{Z}$, comme $\psi - \varphi$ est continue, comme U est connexe et comme $2i\pi\mathbb{Z}$ est une partie discrète de \mathbb{C} , nécessairement $\psi - \varphi$ est constante, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\psi = \psi_k$.

Soit $z_0 \in U$ et $y_0 \in \log z_0$. Comme $\varphi(z_0) \in \log z_0$ il y a un entier $k \in \mathbb{Z}$ et un seul tel que $y_0 = \varphi(z_0) + 2ik\pi$. Alors $\psi_k(z_0) = y_0$ et pour tout entier $l \neq k$ on a $\psi_l(z_0) = y_0 + 2i(l-k)\pi \neq y_0$ \square

Proposition 3.1.2. [AM00],[P.T06]. Soit $\mathbb{L} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ c'est un domaine simplement connexe de \mathbb{C} . la fonction

$$\text{Log} : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \ln(|z|) + 2i \arctan \left(\frac{\text{Im}(z)}{|z| + \text{Re}(z)} \right) \quad (3.1)$$

est une détermination du logarithme, appelée détermination principale du logarithme.

Démonstration. Si $\text{Log}(z) = \ln(|z|) + 2i \arctan \left(\frac{\text{Im}(z)}{|z| + \text{Re}(z)} \right)$ est une détermination du logarithme sur \mathbb{L} on a d'après 3.1.1 ;

$$\exp \circ \text{Log} = |z| \exp \left[2i \arctan \left(\frac{\text{Im}(z)}{|z| + \text{Re}(z)} \right) \right] = |z| e^{i \arg z}$$

Donc $\arg z := \theta = 2 \arctan \left(\frac{\text{Im}(z)}{|z| + \text{Re}(z)} \right)$ alors $\frac{\text{Im}(z)}{|z| + \text{Re}(z)} = \tan \frac{\theta}{2}$.

D'autre part on a $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z| + \operatorname{Re}(z)}$, en fin ; $\exp \circ \operatorname{Log} = |z| \exp i\theta$; $\theta \in]-\pi, \pi[$.
Donc $\exp \circ \operatorname{Log} = \operatorname{Id}_{\mathbb{L}}$. Le fait que Log définie par (3.1) est bien une détermination. On a $\operatorname{Log}(1) = 0$, donc Log est la seule détermination du logarithme sur \mathbb{L} qui prend la valeur 0 en 1. \square

Étude locale

Proposition 3.1.3. [P.T06] Soit $U \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert.

1. Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est une détermination continue du logarithme sur U , alors f est holomorphe et on a $f'(z) = 1/z$ pour tout $z \in U$.
2. On suppose maintenant l'ouvert U connexe. Soit $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $g'(z) = 1/z$ pour tout $z \in U$. Alors il existe une constante $\alpha \in \mathbb{C}$ telle que $z \in U \rightarrow g(z) - \alpha \in \mathbb{C}$ soit une détermination continue du logarithme.

Démonstration. 1. Soit $z \in U$. Puisque $\exp(f(z)) = z$, et $\exp(f(z+h)) = z+h$ lorsque $h \in \mathbb{C}$ est assez petit pour que $z+h \in U$, il vient

$$\exp(f(z+h) - f(z)) = 1 + \frac{h}{z}$$

La continuité de f au point z assure que $f(z+h) - f(z) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$.
Puisque $\exp(u) = 1 + u + o(u)$, on obtient

$$\exp(f(z+h) - f(z)) = 1 + (f(z+h) - f(z))(1 + \epsilon(h))$$

où $\epsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. Il suit

$$f(z+h) - f(z) = \frac{h}{z}(1 + \epsilon(h))^{-1}$$

la fonction f est donc \mathbb{C} -dérivable en z , avec $f'(z) = 1/z$ pour tout $z \in U$. Elle est donc holomorphe.

2. Supposons la fonction g holomorphe, avec $g'(z) = 1/z$. Soit $h \in \mathcal{H}(U)$ définie par $h(z) = \exp(g(z))/z$. On vérifie facilement que $h' = 0$, et donc que h est constante puisque l'ouvert U est supposé connexe. Il existe donc $a \in \mathbb{C}^*$ tel que, pour tout $z \in U$, on ait $e^{g(z)} = az$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $a = e^\alpha$. La fonction $z \in U \rightarrow g(z) - \alpha \in \mathbb{C}$ est une détermination du logarithme sur U . \square

Nous noterons Inv la fonction $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$, qui est rationnelle donc analytique. On a bien que Inv n'a pas de primitive globale. En effet ;
Soit γ le chemin donné par $t \mapsto e^{2i\pi t}$ pour $t \in [0; 1]$ on a ;

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2i\pi \int_0^1 e^{-2i\pi t} e^{2i\pi t} dt = 2i\pi \neq 0$$

Notons que quel que soit le domaine U , si une fonction analytique $f \rightarrow \mathbb{C}$ admet une primitive globale sur U , alors $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ pour tout lacet γ de U . Mais elle a des primitives sur tout sous-domaine simplement connexe de \mathbb{C}^* . Ces primitives sont étroitement liées aux déterminations du logarithme :

Théorème 3.1.2. [AM00]. *Soit U un sous-domaine simplement connexe de \mathbb{C} , et soit une U -primitive de Inv . Pour que φ soit une détermination du logarithme sur U , il faut et il suffit qu'il existe $z_0 \in U$ tel que $\varphi(z_0) \in \log z_0$. En conséquence, sur U , il existe des déterminations du logarithme, et ce sont toutes des fonctions analytiques.*

Démonstration. La nécessité de la condition est triviale. Réciproquement, supposons trouvé $z_0 \in U$ tel que $\varphi(z_0) \in \log z_0$. La fonction $F = \exp \circ \varphi$ est analytique sur U et on a $F' = \varphi.F$ i.e $zF'(z) + F(z) = 0$ pour tout $z \in U$, donc $\frac{d}{dz} \left(\frac{F(z)}{z} \right) = 0$ pour tout $z \in U$, d'où par connexité de U , l'existence de $C \in \mathbb{C}$ tel que $F(z) = Cz$ pour tout $z \in U$. On a $Cz_0 = F(z_0) = e^{\varphi(z_0)} = z_0$, donc $\exp \circ \varphi = \text{Id}_U$, i.e φ est une détermination du logarithme sur U .

Fixons alors $z_0 \in U$. D'après ce qui précède, les U -primitives de Inv dont la valeur en z_0 appartient à $\log z_0$ sont des déterminations du logarithme sur U , et d'ailleurs ce sont les seules en vertu du théorème 3.1.1. Elles sont bien analytiques puisque ce sont des primitives de Inv . \square

On peut donner le développement du logarithme en série entière autour d'un point quelconque. Commençons par le classique développement autour du point 1.

Théorème 3.1.3. [AM00]. *Soit D un disque ouvert de \mathbb{C} de centre 0 et de rayon 1. On a :*

$$\forall z \in D; \quad -\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad (3.2)$$

Démonstration. La série formelle $S(X) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} X^n$ est de rayon 1, et on a :

$$S'(X) = \sum_{n \geq 0} X^n = \frac{1}{1-X}$$

La fonction $\varphi = \tilde{S}$ définie par S sur D est analytique et vérifie $\varphi'(z) = \frac{1}{1-z}$ pour tout z . Notons Δ le disque ouvert $1 + D$ (de centre 1 et de rayon 1). Notons s la bijection $z \mapsto 1-z$ de D sur Δ et σ sa bijection réciproque, qui est donnée par $z \mapsto 1-z$. Notons I la restriction de Inv à Δ . On a $\varphi = I \circ s$, donc $I = \varphi' \circ \sigma$. En posant $\psi = -\varphi \circ \sigma$, on voit que $\psi' = \varphi' \circ \sigma = I$. Donc ψ est une Δ -primitive de Inv . Comme $\psi(1) = -\varphi(0) = 0 \in \log 1$, on déduit du théorème 3.1.2 que ψ est une détermination du logarithme sur Δ ; c'est l'unique détermination qui prend la valeur 0 en 1, donc ce ne peut être que la restriction de \log à Δ . Autrement dit $-\varphi(1-z) = \log z$ pour tout $z \in \Delta$, ce qui équivaut à dire que $-\log(1-z) = \varphi(z)$ pour tout $z \in D$. \square

Corrolaire 3.1.1. [AM00]. *Soit φ une détermination du logarithme sur un sous-domaine U de \mathbb{C}^* , et soit $z_0 \in U$. Soit r la distance euclidienne de z_0 à $\mathbb{C} \setminus U$. Pour tout $u \in D_r$; (disque ouvert*

de centre 0 et de rayon r), on a :

$$\varphi(z_0 + u) = \varphi(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{nz_0^n} u^n \quad (3.3)$$

3.1.2 Racine Carrée

On se propose de prolonger, sur \mathbb{C} , la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est définie sur \mathbb{R}^+ et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* . Soit $z \in \mathbb{C}^*$ il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On serait tenté de poser : $\sqrt{z} = \sqrt{re^{i\theta}} := \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$. Malheureusement cela donne lieu à une fonction multiforme ; Si $z = re^{i\theta}$ alors $z = re^{i(\theta+2\pi)}$ et on a alors :

$$\sqrt{z} = \begin{cases} w_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \\ w_2 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}+\pi} = -w_1. \end{cases}$$

Si on restreint l'argument θ de z sur un domaine de type $[\theta_0; \theta_0 + 2\pi[$ avec θ_0 fixé, on peut éviter le problème et on obtient une fonction appelée détermination de la racine carrée. Mais cette dernière n'est pas continue sur \mathbb{C} ; en effet \sqrt{z} tend vers $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ ou $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ si z tend vers $re^{i\theta}$, selon que θ tend vers θ_0^+ ou $(\theta_0 + 2\pi)^-$. Ainsi la fonction définie est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \cdot e^{i\theta_0}$.

Définition 3.1.2. [Mou15]. *L'unique détermination de la racine carrée continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et tel que $\sqrt{1} = 1$ est appelée détermination principale.*

Étude locale

On va chercher à définir \sqrt{z} sur un " petit " ouvert U , par exemple un disque.

Théorème 3.1.4. [Mou15]. *Soit $H = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ tq } \forall z \in \mathbb{C}; (f(z))^2 = z\}$ alors :*

1. $\{f \in H \text{ et continue sur } \mathbb{C}\} = \emptyset$.
2. $\{f \in H \text{ tq } \forall a, b \in \mathbb{C}; f(ab) = f(a).f(b)\} = \emptyset$

Démonstration. 1. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continue tel que $\forall z \in \mathbb{C}; (f(z))^2 = z$.

Soit $g(z) = f(e^{it})e^{-\frac{it}{2}} \forall t \in \mathbb{R}$. La fonction g est continue et de carré 1, donc elle est constante et vaut 1 ou -1 d'où $f(e^{it}) = ae^{\frac{it}{2}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ où $a = \pm 1$. En particulier $f(1) = 1$ pour $t = 0$ et $f(1) = -1$ pour $t = 2\pi$, contradiction.

2. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}; (f(z))^2 = z$ et $f(ab) = f(a)f(b), \forall a, b \in \mathbb{C}$. Donc $f(1) = \pm 1$ et $f(1) = f(1.1) = (f(1))^2$ d'où $f(1) = 1$. Cela implique $(f(1))^2 = f((1)^2) = f(1) = 1$ ce qui contredit le fait que $f(ab) = f(a)f(b), \forall a, b \in \mathbb{C}$. \square

Soit U un ouvert de \mathbb{C} , on pose :

$$\mathcal{F}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ tq } \forall z \in \mathbb{C}; (f(z))^2 = z\}$$

Remarque 3.1.1. [Mou15]. *On peut vérifier que si $0 \in U$ ou U contient un cercle centré en 0 , alors $\mathcal{F}(U) = \{\emptyset\}$.*

Soit donc U un ouvert non vide et connexe de \mathbb{C}^* . Si f et g deux éléments de $\mathcal{F}(U)$ alors $f^2 = g^2$ et donc $f = \pm g$ puisque U est connexe. Donc $\mathcal{F}(U)$, s'il n'est pas vide, a exactement deux éléments opposés. Soit $z_0 \in U$ et $w_0 \in \mathbb{C}$ tel que $w_0^2 = z_0^2$, alors chacune des deux déterminations de la racine carrée est uniquement déterminée par la condition $f(z_0) = w_0$ ou $f(z_0) = -w_0$.

Prenons $z_0 = 1$ et $w_0 = 1$ et on cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ (f(z))^2 = z \end{cases} \quad (3.4)$$

Commençons par les solutions sous forme des séries entières au voisinage de 1 :

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-1)^n \Rightarrow f(1+u) = g(u) = \sum_{n \geq 0} a_n u^n$$

On montre que (3.4) est équivalent au système différentiel :

$$\begin{cases} g(0) = 1 \\ 2(1+u)g' = g \end{cases} \quad (3.5)$$

Les conditions correspondantes sur les coefficients s'écrivent :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ 2((n+1)a_{n+1} + na_n) = a_n \end{cases} \quad (3.6)$$

On en déduit que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-n + \frac{1}{2}}{n+1}$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{-k + \frac{1}{2}}{k+1} = \binom{\frac{1}{2}}{n}$$

Où $\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1$ et $\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - k)$. En fin ;

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} (z-1)^n$$

Le rayon de convergence de cette série est 1 (car $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$) et l'on a donc obtenu une solution holomorphe sur le disque ouvert $U = D(1; 1)$. On ne pouvait pas espérer un plus grand rayon de convergence puisque, pour $r > 1$, le disque ouvert $D(1; r)$ contient 0.

La restriction de la détermination principale de la racine carrée à $U = D(1; 1)$ est égale à la série entière trouvée ou son opposée (puisque elles ont la même valeur en 1).

On choisit maintenant, arbitrairement, $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et $w_0 \in \mathbb{C}$ tel que $w_0^2 = z_0$. On a le système, au

voisinage de 0, suivant :

$$\begin{cases} f(z_0) = w_0 \\ (f(z))^2 = z \end{cases} \quad (3.7)$$

On peut se ramener au système (3.4) au voisinage de 1 en posant $f(z) = w_0 h(\frac{z}{z_0})$, le système (3.7) est équivalent à $h(1) = 1$ et $(h(z))^2 = z$ que l'on a résolu et on trouve :

$$f(z) = w_0 \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{z_0} - 1 \right)^n$$

qui est en fait, (ou son opposée), la restriction à $D(z_0; |z_0|)$ de la détermination de la racine carré continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-.e^{i\theta_0}$, où vérifie $D(z_0, |z_0|) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-.e^{i\theta_0}$.

Remarque 3.1.2. *On sait maintenant définir localement des déterminations de la racine carrée continues, même holomorphes. On a vu d'après le théorème (3.1.4) que c'est impossible d'en construire globalement. On comprendra à quel étape on ne peut plus prolonger.*

Étude globale

Prolongement Analytique[Mou15].

On fait un tour, dans le sens positif, autour de 0 le long du cercle unité $\partial D(0; 1) \subset \bigcup_{k=0}^3 U_k$ ou $U_k = D(e^{\frac{ik\pi}{2}}; 1) \subset \mathbb{C}^*$. Soit f_0 la restriction de la détermination principale de la racine carrée à U_0 . On note par $f_{01} \in \mathcal{F}(U_{01})$ la restriction de f_0 à l'ouvert $U_{01} = U_0 \cap U_1$. Comme U_{01} est non vide et connexe, il y a exactement deux déterminations $\pm f_{01}$ de la racine carrée sur U_{01} . On a vu aussi qu'il y a exactement deux déterminations de la racine carrée sur U_1 , qui sont les fonctions $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} f_0\left(\frac{z}{i}\right)$, et dont l'une des deux admet pour restriction à U_{01} la fonction f_{01} , notons f_1 cette fonction. Les applications $\mathcal{F}(U_0) \rightarrow \mathcal{F}(U_{01})$ et $\mathcal{F}(U_1) \rightarrow \mathcal{F}(U_{01})$ sont bijectives. On obtient ainsi une bijection $\mathcal{F}(U_0) \rightarrow \mathcal{F}(U_1)$ qui envoie f_0 à f_1 . On continue la procédure le long de U_2, U_3 et finir par $U_4 = U_0$. A la fin on a $f_4 = \pm f_1$. On conclut l'impossibilité d'un prolongement analytique global.

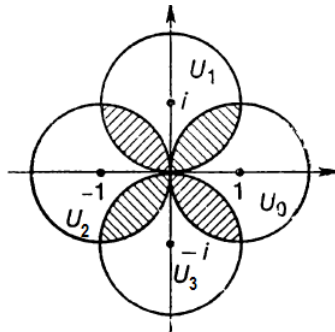


FIGURE 3.1 – Les Domaines U_k

Remarque 3.1.3. [Mou15]. *Lorsque l'argument de z fait un tour complet sur le cercle, l'argument de sa racine carrée, qui va deux fois moins vite, ne fait qu'un demi-tour et ne revient pas au point*

de départ, on ne se retrouve pas nécessairement à son point de départ, mais peut-être sur un plan différent.

Prolongement Analytique le long d'un chemin[Mou15].

Une question qui se pose, peut-on prolonger une détermination locale de la racine carré ; On se donne $x \in \mathbb{C}^*$ et une fonction f de carrée l'identité continue au voisinage de x , comment propage-t-on l'information au voisinage d'un point y en lequel f n'est pas définie au départ.

La réponse est basée sur le prolongement analytique le long d'un chemin $\gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ d'origine x et d'extrémité y . La procédure est la suivante :

1. On recouvre $\text{Im}\gamma$ par un nombre fini de disques ouverts $U_i = D(z_i; r_i)$ dans \mathbb{C}^* où $z_i = \gamma(t_i); r_i > 0; i = 0, \dots, k$ tel que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ avec $z_0 = x, z_k = y$ et $\forall i = 1, \dots, k; U_i \cap U_{i-1} \neq \emptyset$.
2. On note f_0 l'unique élément de $\mathcal{F}(U_0)$ qui coïncide avec f au voisinage de x .
3. On note f_1, \dots, f_k les images successives de f_0 dans $\mathcal{F}(U_1), \dots, \mathcal{F}(U_k)$ par les bijections comme ci-dessus.
4. Le résultat de prolongement analytique de f le long de γ est la fonction f_k .

Remarque 3.1.4. (principe de monodromie)[Mou15],[L.V53].

*Le résultat de prolongement dépend uniquement de la classe d'homotopie du chemin dans \mathbb{C}^**

3.2 Uniformisation de \sqrt{z} et $\log z$ par la méthode de Coupures

Les références de cette section sont ;[J.A84],[P.T06],[A.L14],[A.Y14],[G.P74].

3.2.1 Logarithme complexe $\log z$

La méthode de coupure consiste à retirer une partie du plan complexe pour éliminer l'ambiguïté de la fonction. Pour la fonction logarithme, on choisit la coupure le long de l'axe réel négatif, de sorte que l'argument de la fonction logarithme principale est dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$. En effet ; On a bien que l'application exponentielle $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est un morphisme de groupes surjectif, de noyau $\ker(\exp) = 2i\pi\mathbb{Z}$. Sa restriction $\exp : \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi \leq \text{Im } w < \pi\} \rightarrow \mathbb{C}^*$ à la bande semi-fermée est donc bijective.L'image de la droite

$$\{w \in \mathbb{C} \mid \text{Im } w = -\pi\}$$

est le demi-axe réel négatif. Il suit que la restriction

$$\exp : \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im } w < \pi\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$$

à la bande ouverte est une application holomorphe bijective, dont la dérivée est partout non nulle. Elle réalise donc un biholomorphisme entre ces deux ouverts.

L'application réciproque

$$\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \longrightarrow \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} w < \pi\}$$

est appelée **détermination principale du logarithme**. Elle prolonge au plan coupé $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ le logarithme réel $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$. La détermination principale de l'argument correspondante \arg prend ses valeurs dans $]-\pi; \pi[$. Cette détermination du logarithme est **maximale** : elle ne se prolonge pas en une détermination (continue) du logarithme sur un ouvert plus grand.

Maintenant, nous considérons $w = \log z$ comme une application de l'espace z -plan fendu $\mathbb{C} \setminus]-\infty; 0]$ vers le plan w . Puisque la fonction exponentielle transforme les lignes horizontales en rayons émanant de l'origine, son inverse, la fonction logarithme, transforme les rayons émanant de l'origine en lignes horizontales. En fait, la formule

$$\log z = \ln |z| + i \arg z, z \neq 0$$

montre que le rayon $\{\arg z = \theta_0\}$ est transformé en une ligne horizontale $\{\operatorname{Im} w = \theta_0\}$. Lorsque z parcourt le rayon de 0 à ∞ , l'image w parcourt toute la ligne horizontale de gauche à droite. Lorsque θ_0 augmente entre $-\pi$ et π , les rayons balayent l'espace fendu $\mathbb{C} \setminus]-\infty; 0]$, et les lignes images remplissent une bande horizontale $\{-\pi < \operatorname{Re} w < \pi\}$ dans le plan w . De même, la formule (3.2.1) montre que l'image d'un cercle troué $\{|z| = r, -\pi < \arg z < \pi\}$ est l'intervalle vertical $\{\operatorname{Re} w = \ln |z|, -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$, où la ligne verticale $\{\operatorname{Re} w = \ln |z|\}$ rencontre la bande horizontale.

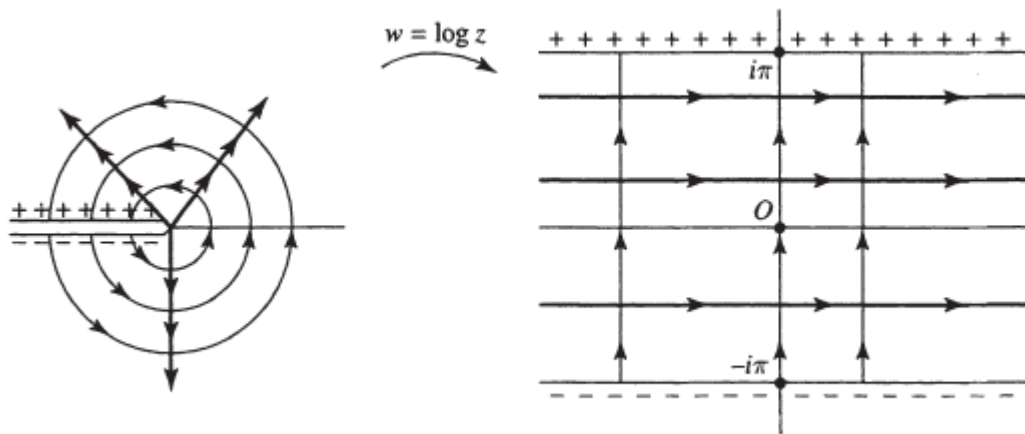


FIGURE 3.2 – fonction $\log z$

3.2.2 Racine Carrée Complexe \sqrt{z}

Pour la fonction racine carrée. Nous suivons la même méthode de logarithme complexe, de sorte que l'argument de la racine carrée principale est dans l'intervalle $] - \pi, \pi[$. En effet ;

Si $z = re^{i\theta}$ on a bien que la fonction $z \mapsto z^2$ transforme un quadrant sur un demi-plan, en particulier, le premier quadrant $\{z : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ sur le demi-plan supérieur ouvert \mathbb{H}^+ . et $\mathbb{H}^+ = \{z : 0 < \arg z < \pi\}$ sur $\{z : 0 < \arg z < 2\pi\} = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

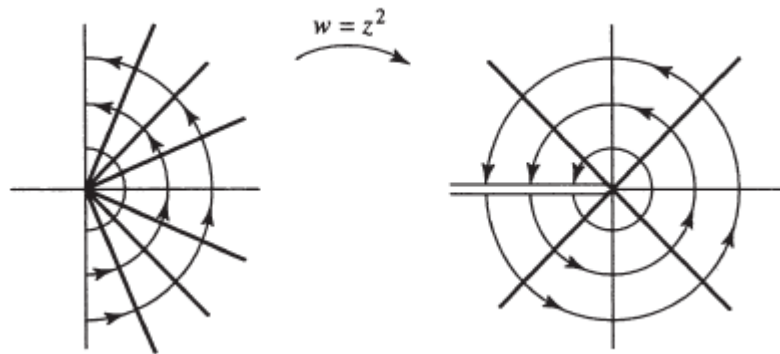


FIGURE 3.3 – Fonction z^2

Ainsi, pour tout nombre complexe z dans le plan complexe, la racine carrée principale de z est définie comme suit :

1. Si z est sur l'axe réel négatif, on prend la racine carrée de z avec une partie imaginaire non-négative (c'est-à-dire, la racine carrée principale de z est définie comme $\sqrt{z} = i\sqrt{-z}$).
2. Si z est en dehors de l'axe réel négatif et que $\theta = \arg z \in] - \pi, \pi[$, on prend la racine carrée principale de z avec une partie imaginaire non-négative (c'est-à-dire, la racine carrée principale de z est définie comme $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$).
3. Si z est en dehors de l'axe réel négatif et que $\theta \notin] - \pi, \pi[$, on ajoute ou soustrait 2π à l'argument de z jusqu'à ce qu'il soit dans l'intervalle $] - \pi, \pi[$, puis on prend la racine carrée principale de z avec une partie imaginaire non-négative.

Exemple 3.2.1. *Le choix de la coupure pour la fonction racine carrée complexe n'est pas unique.*

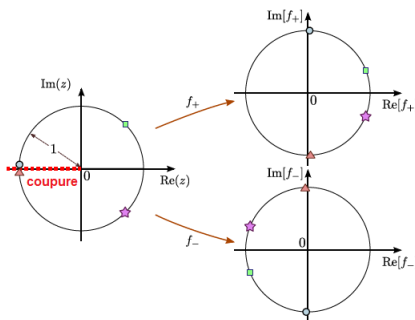


FIGURE 3.4 – La coupure le long de \mathbb{R}_+^*

En général, on peut choisir n'importe quelle droite passant par l'origine et retirer cette droite du plan complexe pour éliminer l'ambiguïté de la fonction. Cependant, la coupure le long de l'axe réel négatif est la plus couramment utilisée car elle est la plus simple et la plus intuitive. On obtient ;

$$f_{\pm}(z) = \pm r^{1/2} e^{i\theta/2}; \theta \in]-\pi, \pi[$$

Si on prend la coupure le long de l'axe réel positive on obtient ; $f_{\pm}(z) = \pm r^{1/2} e^{i\theta/2}; \theta \in]0, 2\pi[$.

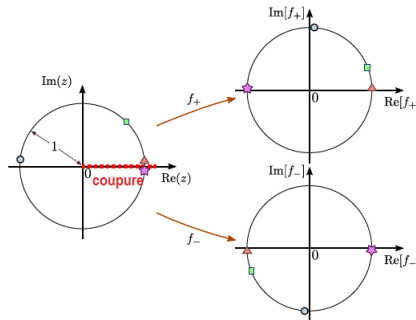


FIGURE 3.5 – La coupure le long de \mathbb{R}_+^*

Exemple 3.2.2. On donne quelques exemples sur des fonctions multiformes et leurs points de branchement et coupure.

Fonction $f(z)$	Point de branchement	Coupure
$\log z$	0	$] -\infty; 0]$
\sqrt{z}	0	$] -\infty; 0]$
$\sqrt{(z^2 - 1)}$	± 1	$[-1; 1]$
$\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$	± 1	$[-1; 1]$
$\log\left(\frac{1-z^2}{z^2}\right)$	± 1 et ∞	$] -\infty; 0]$ et $[1; \infty[$
$\arccos z$	± 1	$] -\infty; -1]$ et $[1; \infty[$
$\arcsin z$	± 1	$] -\infty; -1]$ et $[1; \infty[$
$\arctan z$	$\pm i$	$] -i\infty; -i]$ et $[i; i\infty[$

3.3 Uniformisation de \sqrt{z} et $\log z$ par les surfaces de Riemann

L'une des méthodes pour étudier une fonction multiforme consiste à remplacer le plan complexe par une surface de rendre la fonction uniforme. Le principe de Riemann consiste à feuilleter le plan, sur lequel $f(z)$ n'est pas une fonction uniforme, en l'imaginant comme étant en réalité le collage de feuillets plans, en nombre à préciser dans chaque cas (c'est à dire chaque fonction multiforme) et faisant une coupure à chaque fois. Séparons les feuillets les uns des autres en les maintenant collés exclusivement le long de la coupure. L'empilement des plans ainsi constitué forme une surface

sur laquelle la fonction $f(z)$ devient uniforme et qu'on appelle surface de Riemann. Décrivons la surface de Riemann de quelques fonctions :

3.3.1 La surface de Riemann de $\log z$

Les références de cette section sont ; [B.C90],[E.R89],[SC12],[B.C72],[F.P99].

La surface de Riemann du logarithme complexe $\log z$ est à une infinité de feuillets. Prenons encore pour domaine D le plan \mathbb{C} privé du demi-axe négatif et considérons dans D la détermination principale du logarithme

$$w = f_0(z) = \ln |z| + i \arg z (-\pi < \arg z < \pi).$$

Cette fonction est univalente(uniforme) et réalise une application conforme du domaine D sur la bande $D_0^* = \{-\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$. Le logarithme possède dans le domaine D une infinité de déterminations

$$w = f_k(z) = f_0(z) + 2k\pi i, \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$$

qui appliquent D sur des bandes D_k^* qui se déduisent de D^* par des translations successives de vecteur $2\pi i$. En conséquence, on prend un ensemble dénombrable d'exemplaires du domaine D et on colle les lèvres supérieure et inférieure de la coupure de l'exemplaire zéro respectivement à la lèvre inférieure de celle de l'exemplaire 1 et à la lèvre supérieure de celle de l'exemplaire -1 . On colle ensuite les autres lèvres libres respectivement à la lèvre inférieure de la coupure de l'exemplaire 2 et à la lèvre supérieure de celle de l'exemplaire -2 et ainsi de suite. Au-dessus de chaque point $z \neq 0 \neq \infty$ est située une portion de surface composée d'un ensemble dénombrable de disques distincts ; à chaque disque est associée une détermination du logarithme de numéro approprié agissant dans ce voisinage (les points du demi axe négatif ne font pas exception). Donc le logarithme peut être traité sur la surface de Riemann construite comme une fonction ordinaire. Le logarithme n'est pas défini en $z = 0$ et $z = \infty$, donc on conviendra que sa surface de Riemann ne possède pas de points au-dessus de $z = 0$ et $z = \infty$.

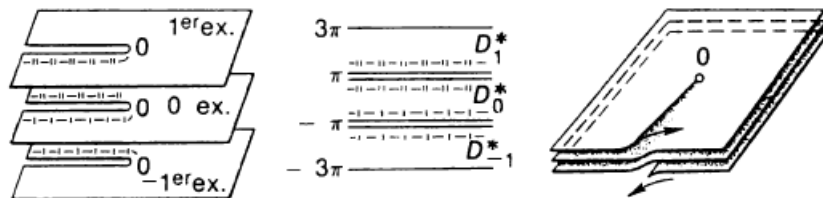


FIGURE 3.6 – Surface de Riemann de $\log z$

3.3.2 Réalisation de la surface de Riemann du logarithme

On réalise la surface de Riemann du $\log z$ sous forme de surface plongée dans $\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, on obtient ;

$$\Sigma := \{(re^{it}, t); r > 0, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$$

Dans cette réalisation, on voit facilement en quoi la surface de Riemann résout l'ambiguïté du logarithme. On ne peut pas poser $\log(re^{it}) := \ln r + it$ mais on peut très bien poser

$$\widetilde{\log}(re^{it}, t) := \ln r + it, \forall (re^{it}, t) \in \Sigma$$

On obtient ainsi un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & & \\ \pi \downarrow & \searrow \widetilde{\log} & \\ \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\log} & \mathbb{C} \end{array}$$

L'application π dans ce diagramme est la projection $(re^{it}, t) \mapsto re^{it}$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ sur \mathbb{C} ; la flèche du \log est bizarre parce que \log n'est pas une vraie fonction. La fonction $\widetilde{\log}$ est une vraie fonction (relèvement de \log), elle est uniforme. On va voir plus bas comment faire pour qu'elle soit holomorphe. En effet ;

1. La projection π est un revêtement de \mathbb{C}^*

Cela signifie que tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$ admet un voisinage ouvert U tel que $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} V_k$, une réunion disjointe d'ouverts telle que les restrictions $\pi|_{V_k} : V_k \rightarrow U$ soient des homéomorphismes. On le voit en prenant par exemple pour U le disque ouvert $D(z_0, |z_0|)$. Soit t_0 un argument de z_0 : tout élément $z \in U$ admet alors un unique argument $t \in]t_0 - \frac{\pi}{2}; t_0 + \frac{\pi}{2}[$; notons temporairement $\arg z := t$ ce dernier. Alors :

$$V_k = \{(z; \arg z + 2ki\pi); z \in U\}$$

2. La fonction $\widetilde{\log}$ est holomorphe.

Si l'on munit Σ de la topologie induite par celle de \mathbb{R}^3 , on en fait un espace séparé et la fonction $\widetilde{\log}$ est continue sur Σ . Pour prouver qu'elle est de plus holomorphe, il faut d'abord définir ce qu'est une fonction holomorphe sur la surface de Riemann Σ . On munit Σ de cartes analytiques $(V; \varphi)$ formés d'un ouvert V de Σ et d'un homéomorphisme φ de V sur un ouvert $U = \varphi(V)$ de \mathbb{C} ; il faut que les ouverts V recouvrent Σ . Nous prendrons ici pour cartes de Σ les $(V_k; \pi|_{V_k})$ et on applique la définition 2.3.3, on obtient pour $z_0 = r_0 e^{it_0}$ alors $w_0 = \ln r_0 + it_0$, cette fonction est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- e^{it_0}$. Sa restriction à $D(z_0, |z_0|)$ est la fonction définie par la série (3.3).

En particulier ; pour $r_0 = 1$ et $t_0 = 1$ on obtient la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ dont la restriction à $D(1; 1)$ coïncide avec la fonction définie par la série (3.2).

3. La surface Σ est isomorphe à \mathbb{C}

D'abord, l'application $\widetilde{\log}$ est un homéomorphisme de Σ sur \mathbb{C} . En effet : elle est continue ; elle est bijective, de réciproque $w \mapsto (e^w; \operatorname{Im} w)$; cette réciproque est-elle même continue.

Puisque la surface Σ est homéomorphe à \mathbb{C} , elle est simplement connexe et par conséquent π est le revêtement universel de \mathbb{C} . On a déjà vu plus haut que $\widetilde{\log}$ est holomorphe. Pour dire que c'est un isomorphisme (de surfaces de Riemann ...), il faut pouvoir prouver que sa réciproque ϵ est holomorphe. On peut définir cette propriété comme signifiant : pour toute carte $(U; \varphi)$, la composée $\varphi \circ \epsilon$ est holomorphe de $\widetilde{\log}(U) \subset \mathbb{C}$ dans \mathbb{C}^* car l'application $\varphi \circ \epsilon$ est l'exponentielle $w \mapsto e^w$.

3.3.3 La surface de Riemann de \sqrt{z}

Les références de cette section sont ; [E.T09],[B.C90],[A.L14],[B.C72],[Mou15].

On dispose de deux détermination sur $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ de la fonction \sqrt{z}

$$\sqrt{z} = \begin{cases} f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \\ f_2(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}+\pi} = -f_1(z). \end{cases}$$

ou $z = re^{i\theta}$, $r > 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[$. Si γ est un chemin qui traverse la coupure pour tout $t = t_0$, dans le sens des ordonnées croissantes, la fonction f_1 ne peut pas être prolongé par continuité en $t = t_0$. Par contre ce prolongement par continuité est possible si pour les points situés au-dessus de la coupure on remplace f_1 par f_2 . Cette remarque est à l'origine de construction suivante :

Considérons deux copies S_1, S_2 de $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$. Dans un premier temps nous définissons une fonction f sur $S_1 \cup S_2$ en posant :

$$g(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{Si } z \in S_1 \\ f_2(z) & \text{Si } z \in S_2. \end{cases}$$

Nous allons coller S_1 et S_2 selon leur coupure et pour cela nous marquons la partie de S_1 et S_2 au-dessus de l'axe réel positif d'un signe \oplus et la partie au-dessus d'un signe \ominus . Maintenant collons le bord \oplus de la coupure de S_1 avec le bord \ominus de S_2 et collons le bord \ominus de S_1 avec le bord \oplus de S_2 .

Appelons Σ la surface obtenue. On peut la considérer comme la réunion de $S_1 \cup S_2$ et de deux demi-droites(l'une est le bord inférieur de S_1 recollé avec le bord supérieur de S_2 et l'autre est le bord inférieur de S_2 recollé avec le bord supérieur de S_1). Par construction la fonction g se prolonge par continuité à Σ puisque S_1 est une copie de $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ à chaque élément z de S_1 correspond un nombre complexe qu'on note $h(z)$. On procède de même pour les points de S_2 . La fonction h ainsi définie sur $S_1 \cup S_2$ se prolonge à Σ et vérifie $g^2 = h$.

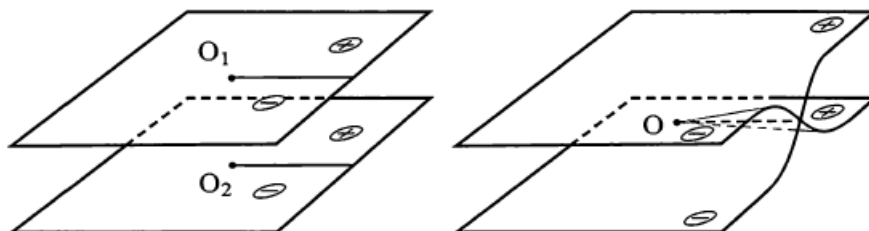


FIGURE 3.7 – Surface de Riemann de \sqrt{z}

Pour obtenir la surface de Riemann $\hat{\Sigma}$ de \sqrt{z} il faudrait répéter les constructions précédents en remplaçant \mathbb{C} par $\hat{\mathbb{C}}$ où $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, puisque f_1 et f_2 se prolongent à l'infini en posant $f_1(\infty) = \infty$ et $f_2(\infty) = \infty$, il suffit d'ajouter un point à l'infini à Σ . Les fonctions g et h se prolongent par continuité à $\hat{\Sigma}$ en des fonctions \hat{g} et \hat{h} qui vérifient $\hat{g}^2 = \hat{h}$.

Remarque 3.3.1. *Identifications $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ à la sphère \mathbb{S}^2 à l'aide de la projection stéréographique.*

Remarquons que pour tout $z_0 \neq 0$ et $\neq \infty$, le point z_0 a exactement deux antécédents distincts par \hat{h} . Les points 0 et ∞ n'ont chacun qu'un seul antécédent.

Les seuls points de ramification de \hat{h} sont donc les antécédents de 0 et ∞ , par conséquent l'application \hat{h} est un revêtement ramifié à deux feuillets de \mathbb{S}^2 par $\hat{\Sigma}$.

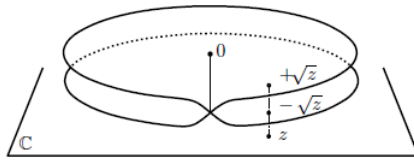


FIGURE 3.8 – Surface de Riemann de \sqrt{z}

3.3.4 Surface étalée au dessus de \mathbb{C}^*

On note par Σ^* la surface de Riemann obtenue ci-dessus. Sa projection sur \mathbb{C}^* est un revêtement double de degré 2. On note par $\pi : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ cette projection : l'image réciproque d'un ouvert U suffisamment petit est la réunion disjointe de deux ouverts V_1 et V_2 de Σ^* tels que les restrictions $\pi|_{V_1}$ et $\pi|_{V_2}$ soient des homéomorphismes de $V_1; V_2$ sur U . La racine carrée s'uniformise sur sa surface de Riemann par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^* & & \\ \pi \downarrow & \searrow \tilde{\sqrt{z}} & \\ \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\sqrt{z}} & \mathbb{C} \end{array}$$

La fonction multivaluée \sqrt{z} se relève en une fonction $\tilde{\sqrt{z}}$ (uniforme) holomorphe définie géométriquement comme suit :

Soit U un ouvert de \mathbb{C}^* contenant 1, alors $\pi^{-1}(U)$ est la réunion disjointe des deux ouverts V_1 et V_2 où chaque ouvert V_i correspond à l'une des déterminations f_i de la racine carrée sur U . Soit $\{p_0\} = V_1 \cap \pi^{-1}(1)$. La valeur de \sqrt{z} en p_0 est alors $f_1(1)$. Maintenant, soient p un point de Σ^* et $\tilde{\gamma}$ un chemin de p_0 à p dans Σ^* . La projection de $\tilde{\gamma}$ par π est un chemin, de $\pi(p_0) = 1$ à $\pi(p) = z$, dans \mathbb{C}^* . Le prolongement analytique de f_1 le long du chemin définit une détermination f de la racine carrée au voisinage de z . Donc la valeur de $\tilde{\sqrt{z}}$ en p est par définition $f(z)$.

Remarque 3.3.2. *Dans le cas général où $n > 2$, on peut aussi définir, de la même manière, la surface de Riemann de la racine n -ième Σ^* et la fonction holomorphe $\tilde{\sqrt[n]{z}} : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{C}^*$*

ANNEXE

Ensembles dénombrables

Définition[J.D03].

On dit qu'un ensemble E est dénombrable s'il est équipotent à \mathbb{N} , (s'il existe une bijection de E sur \mathbb{N}).

On dit qu'un ensemble E est au plus dénombrable s'il est fini ou s'il est dénombrable.

Si un ensemble E est dénombrable, il est infini comme \mathbb{N} . L'existence d'une bijection $f : \mathbb{N} \rightarrow E$ permet de numéroter les éléments de E ; en notant x_n au lieu de $f(n)$, on peut donc ranger les éléments de E en une suite (x_0, x_1, \dots, x_n) .

Théorème[J.D03].

Tout sous-ensemble de ensemble \mathbb{N} des entiers est fini ou dénombrable.

Proposition[J.D03].

Tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est fini ou dénombrable; on dit qu'un tel ensemble est au plus dénombrable.

Lemme[J.D03].

Soient A un ensemble dénombrable et f une application de A sur un ensemble B . Alors B est au plus dénombrable.

Théorème[J.D03].

La réunion d'une famille dénombrable d'ensembles dénombrables (au plus dénombrable) est dénombrable (au plus dénombrable).

Calculs différentiels

Définition[J.F11].

Soient E, F deux espaces de Banach, U un ouvert de E et V un ouvert de F . Une application $f : U \rightarrow V$ est dite difféomorphisme si :

1. f est bijective.
2. f est différentiable sur U .
3. $f^{-1} : V \rightarrow U$ est différentiable sur V .

Définition[J.F11].

Une application $f : U \rightarrow V$ est dite C^k -difféomorphisme si :

1. f est bijective.
2. f est C^k -différentiable.
3. $f^{-1} : V \rightarrow U$ est C^k -différentiable.

Si $k = 0$ l'application f est appelée homéomorphisme.

1. f est bijective.
2. f est continu.
3. f^{-1} est continu.

Remarque[J.F11].

1. Toute application C^k -difféomorphisme est homéomorphisme, la réciproque est fausse.
2. Un homéomorphisme conserve les propriétés topologiques (ouvert, fermé, compact, convexe, ...etc).
3. Un difféomorphisme conserve les propriétés topologiques et géométriques.

Théorème (Théorème d'inversion locale.)[J.F11].

Soit $f : U \rightarrow F$ une application de classe C^1 d'un ouvert U d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F . On suppose qu'en un point $a \in U$, la différentielle $f'(a)$ de l'application f est un isomorphisme de E sur F . Alors il existe un voisinage ouvert V de a , $V \subset U$ tel que $W = f(V)$ soit un ouvert de F et que la restriction de f à V soit un difféomorphisme de classe C^1 de V sur W .

Proposition[D.H22].

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe et $z_0 \in U$. On suppose que $f'(z_0) \neq 0$. Alors f est un biholomorphisme au voisinage de z_0 alors il existe un voisinage $V \subset U$ de z_0 pour lequel $f(V) \rightarrow \mathbb{C}$ est ouvert, et tel que l'application $f : V \rightarrow f(V)$ soit bijective d'inverse $f^{-1} : f(V) \rightarrow V$ holomorphe.

La fonction exponentielle

Nous étendons la définition de la fonction exponentielle à tous les nombres complexes z en la définissant comme suit :

$$e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y; \quad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

Depuis $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, cela équivaut à $e^z = e^x e^{iy}$; $z = x + iy$.

Cette identité n'est que la représentation polaire de e^z ; ($|e^z| = e^x$; $\arg e^z = y$).

Une propriété fondamentale de la fonction exponentielle est qu'elle est périodique. Le nombre complexe λ est une période de la fonction $f(z)$ si $f(z + \lambda) = f(z)$ pour tous les z pour lesquels $f(z)$ et $f(z + \lambda)$ sont définis. La fonction $f(z)$ est périodique si elle a une période non nulle. Étant donné que $\sin x$ et $\cos y$ sont des fonctions périodiques avec une période de 2π , la fonction e^z est

périodique avec une période de $2\pi i$.

$$e^{z+2\pi i} = e^z; \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

En fait, $2\pi ik$ est une période de e^z pour tout entier k .

Proposition[D.H22],[P.T06],[W.R98].

1. La série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ définit une fonction entière $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$. On notera également $\exp(z) = e^z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
2. On a $\exp(0) = 1$ et $(\exp)'(z) = \exp(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
3. Pour $z, w \in \mathbb{C}$ on a $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ et $e^{w+z} = e^w e^z$. En particulier, $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ne s'annule pas.
4. La restriction de \exp à \mathbb{R} est l'application exponentielle réelle, qui est une bijection croissante $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ (et même un difféomorphisme).
5. On a $|e^z| = 1$ si et seulement si $z \in i\mathbb{R}$.

Remarque[D.H22],[W.R98].

L'exponentielle complexe \exp est l'unique application entière $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie simultanément $f(0) = 1$ et $f'(z) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Théorème[D.H22],[W.R98].

1. L'application exponentielle $\exp : (\mathbb{C}; +) \rightarrow (\mathbb{C}^*; \times)$ est un morphisme de groupes surjectif.
2. Il existe un unique réel positif, noté π , pour lequel $\ker(\exp) = 2i\pi\mathbb{Z}$.
3. On a $e^{i\pi} = -1$ et $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

Démonstration. • L'application exponentielle est un morphisme de groupes car

$$\forall a, b \in \mathbb{C}; e^{a+b} = e^a \times e^b$$

, et son image est ouverte par ce que e^z est une application holomorphe dont la dérivée ne s'annule pas.

• Surjectivité

L'image $H = \exp(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^*$ est un sous-groupe ouvert de \mathbb{C}^* . C'est donc aussi un sous-groupe fermé de \mathbb{C}^* . En effet on a

$$\mathbb{C}^* = H \cup \left\{ \bigcup_{a \in \mathbb{C}^* \setminus H} aH \right\}$$

\cup indique une union disjointe et où chaque classe $aH \subset \mathbb{C}^*$ modulo H est ouverte comme H , puisque la multiplication $z \in \mathbb{C} \rightarrow az \in \mathbb{C}$ par $a \in \mathbb{C}^*$ est un homéomorphisme de \mathbb{C} et induit donc un homéomorphisme de \mathbb{C}^* . On conclut par connexité de \mathbb{C}^* .

• Noyau de \exp

Il nous reste à étudier le noyau du morphisme de groupes $\exp : (\mathbb{C}; +) \rightarrow (\mathbb{C}^*; \times)$. On a vu dans la proposition précédente que $\ker(\exp) \subset i\mathbb{R}$. On peut donc se contenter de chercher le noyau du morphisme de groupes

$$h : (\mathbb{R}; +) \rightarrow (\mathbb{S}^1; \times), t \mapsto e^{it}$$

Ce morphisme est surjectif et continu. Son noyau $\ker(h) \subset \mathbb{R}$ est donc un sous-groupe fermé de \mathbb{R} , qui est :

1. Distinct de \mathbb{R} (car h est surjectif).
2. Non trivial (car si $e^{it_0} = i$, on a $e^{4it_0} = 1$).

Il existe donc un unique réel $a > 0$ pour lequel $\ker(h) = a\mathbb{Z}$. On définit π par la relation $2\pi := a$.

• **Deux valeurs de exp**

On a alors $e^{i\pi} = -1$, ($e^{i\pi}$ étant différent de 1, et de carré égal à 1). Puisque de carré égal à 1, on a $e^{i\frac{\pi}{2}} = \pm i$. Il reste à voir que sa partie imaginaire est positive. Pour cela on considère de nouveau l'application

$$h : t \in \mathbb{R} \longrightarrow e^{it} \in \mathbb{S}^1$$

. La partie imaginaire de $h(t)$ (autrement dit, $\sin t$) s'annule si et seulement si $h(t) = \pm 1$. Il s'ensuit que $\operatorname{Im} h(t)$ garde un signe constant sur l'intervalle $]0; \pi[$. Comme $h'(0) = i$, ce signe est positif. □

Représentations graphiques de la fonction exponentielle :

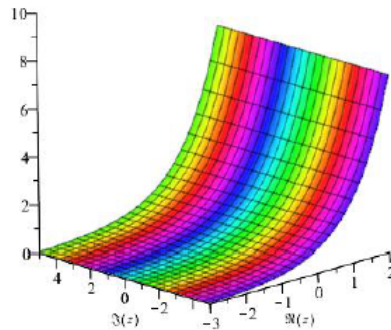


FIGURE 3.9 – Représentations graphiques de exp

Sur cette représentation, on lit l'égalité $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ ainsi que la périodicité de exp sous $2i\pi\mathbb{Z}$ (on rappelle que les couleurs indiquent l'argument de e^z modulo 2π , c'est-à-dire $\operatorname{Im} z \bmod 2\pi$).

une autre représentation de l'exponentielle complexe. Celle-ci envoie les droites horizontales (partie imaginaire constante) sur les demi-droites issues de l'origine, et les droites verticales (partie réelle constante) sur les cercles. L'orthogonalité de ces deux familles de courbes est préservée.

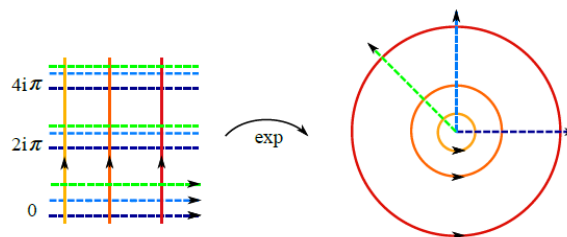


FIGURE 3.10 – Représentations graphiques de exp

Remarque[D.H22].

L'argument que nous venons de développer pour démontrer la surjectivité de l'application exponentielle $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ montre, plus généralement, qu'un sous-groupe ouvert d'un groupe topologique est toujours fermé. Il suit par exemple que le groupe $GL_n^+\mathbb{R}$ des matrices à déterminant positif est engendré par $\exp(M_n\mathbb{R})$ (la notation \exp désignant ici l'exponentielle matricielle)

$$\exp : M \in M_n\mathbb{R} \rightarrow \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{M^k}{k!} \in GL_n^+\mathbb{R}$$

cela signifie que toute matrice réelle de déterminant positif s'écrit comme produit d'exponentielles de matrices réelles. Cependant, l'application $\exp : M_n\mathbb{R} \rightarrow GL_n^+\mathbb{R}$ n'est pas surjective.

Homotopie

Rappelons les notions suivant

Définition[Tan10],[AM00]

On appelle chemin d'un espace topologique X toute application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$. Les points $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ sont appelés les extrémités du chemin, $\gamma(0)$ est appelé l'origine et $\gamma(1)$ l'arrivée. Le chemin γ est appelé un lacet ssi $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Définition[Tan10],[AM00]

Deux chemins $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ et $\delta : [0, 1] \rightarrow X$ d'un espace topologique X sont dits homotopes ssi il existe une application continue $h : [0, 1]^2 \rightarrow X$ telle que pour tout $t \in [0, 1]$, on ait $h(t, 0) = \gamma(t)$, $h(t, 1) = \delta(t)$, $h(0, t) = \gamma(0)$ et $h(1, t) = \delta(1)$. Toute telle application continue h est appelée une homotopie entre γ et δ (ou : de γ à δ).

Proposition[Tan10],[AM00]

Soit X un espace topologique. Sur l'ensemble des chemins de X , la relation "le chemin γ et le chemin δ sont homotopes" est une relation d'équivalence.

Démonstration. • Réflexivité :

si γ est un chemin de X , l'application

$$h : [0, 1]^2 \rightarrow X, (t, u) \mapsto \gamma(t)$$

est une homotopie entre γ et γ .

• Symétrique :

Si h est une homotopie entre les chemins γ et δ , l'application

$$\tilde{h} : [0, 1]^2 \rightarrow X, (t, u) \mapsto h(t, 1 - u)$$

est une homotopie entre δ et γ .

• Transitive :

Soit : γ_1, γ_2 et γ_3 trois chemins de X , soit h_1 une homotopie de γ_1 à γ_2 et h_2 une homotopie de γ_2 à γ_3 , l'application

$$H : [0, 1]^2 \longrightarrow X, (t, u) \longmapsto \begin{cases} h_1(t, 2u) & \text{si } 0 \leq u \leq \frac{1}{2} \\ h_2(t, 2u - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq u \leq 1 \end{cases}$$

est une homotopie de γ_1 à γ_3 .

□

Intégrales faisant appel à des fonctions multiformes.

Les références de cette section sont, [A.L14], [J.A84], [G.P74].

Les intégrands multiformes doivent être uniformisés au moyen d'une coupure adéquate. Les contours d'intégration ne pouvant pas traverser ces coupures, l'intégrand sera déterminé univoquement par une de ses déterminations le long de ces contours.

Type I $\int_0^\infty x^\alpha f(x) dx$.

où f est holomorphe sauf en un nombre fini de points qui ne sont pas sur le demi-axe réel $x > 0$. Supposons que f décroît plus vite à l'infini que $\frac{1}{x^2}$, ce qui assure la convergence de l'intégrale en question. On calcule $\int_\gamma x^\alpha f(x) dx$ où $\gamma = \gamma_1 \cup [R, r] \cup \gamma_2 \cup [r, R]$.

Le point $z = 0$ est un point de branchement de l'intégrand. La coupure rend celui-ci uniforme sur

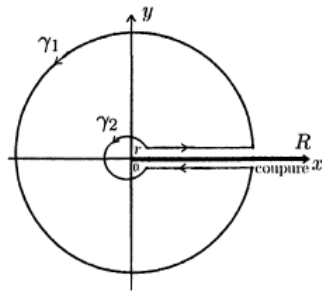


FIGURE 3.11 – Le contour d'intégration

γ . On choisira la détermination de l'intégrand telle que :

$$z^\alpha = \begin{cases} x^\alpha & \text{sur le bord supérieur de la coupure} \\ x^\alpha e^{2i\pi\alpha} & \text{sur le bord inférieur de la coupure} \end{cases}$$

On applique le théorème des résidus :

$$\begin{aligned} \int_\gamma z^\alpha f(z) dz &= \int_{\gamma_1} z^\alpha f(z) dz + \int_R^r e^{2i\pi\alpha} x^\alpha f(x) dx + \int_{\gamma_2^-} z^\alpha f(z) dz + \int_r^R z^\alpha f(z) dz \\ &= 2i\pi \sum \text{Résidus aux points singuliers de la détermination choisie pour } z^\alpha f(z). \end{aligned}$$

Le reste consiste à calculer les limites des intégrales sur γ_1 et γ_2 quand $R \rightarrow +\infty$ et $r \rightarrow 0$.

Type II $\int_0^\infty f(x) \log dx$.

où f est une fraction rationnelle n'ayant pas de pôles sur le demi-axe $x \geq 0$. On suppose que f décroît plus vite à l'infini que $\frac{1}{x}$; c-à-d., $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = 0$. On a déjà vu que $\log z$ est multiforme à une infinité de déterminations et que $z = 0$ en est un point de ramification. On utilise le même contour que dans le cas précédent et on applique le théorème des résidus tout en tenant compte du fait que l'argument de z vaut 0 sur le bord supérieur de la coupure et 2π sur le bord inférieur de celle-ci. On a

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)(\log z)^2 dz &= \int_{\gamma_1} f(z)(\log z)^2 dz + \int_R^r f(z)(\log z + 2i\pi)^2 dz + \int_{\gamma_2^-} f(z)(\log z)^2 dz \\ &\quad + \int_r^R f(z)(\log z)^2 dz \\ &= 2i\pi \sum \text{Résidus de la détermination choisie de } f(z)(\log z)^2 dz \\ &\quad \text{aux pôles de } f(z). \end{aligned}$$

Le reste consiste à calculer les limites des intégrales sur γ_1 et γ_2 quand $R \rightarrow +\infty$ et $r \rightarrow 0$. On montre que ces intégrales tendent vers 0 en vertu du lemme de Jordan. D'où ;

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x) \log dx + i\pi \int_0^\infty f(x) dx = \\ -\frac{1}{2} \sum \text{Résidus de la détermination choisie de } f(z)(\log z)^2 \text{ aux pôles de } f(z) \end{aligned}$$

et il suffit de comparer partie réelle et partie imaginaire pour obtenir les intégrales en question. Notons que dans le cas particulier où $f(x)$ est paire, on peut obtenir le même résultat en considérant le circuit suivant : avec $\gamma = \gamma_1 \cup [-R, -r] \cup \gamma_2 \cup [r, R]$.

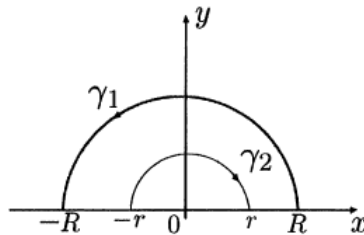


FIGURE 3.12 – Le contour d'intégration

Type III $\int_a^b f(x) \sqrt[n]{(x-a)^k (b-x)^{n-k}} dx$.

où f est une fraction rationnelle n'ayant pas de pôles sur l'intervalle $[a; b]$ et n, k sont de entiers avec $0 < k < n$. Notons que $f(z) \sqrt[n]{(z-a)^k (b-z)^{n-k}}$ est multiforme à n déterminations On calcule l'intégrale

$$\int_\gamma f(z) \sqrt[n]{(z-a)^k (b-z)^{n-k}} dz$$

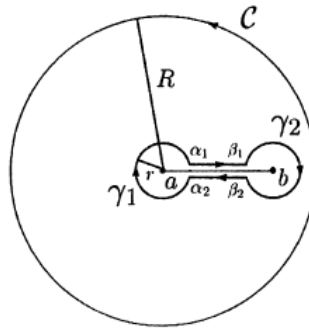


FIGURE 3.13 – Le contour d'intégration

où $\gamma = \gamma_1 \cup [\alpha_1; \beta_1] \cup \gamma_2 \cup [\beta_2; \alpha_2]$ tq; $\gamma_1 = \{z : |z - a| = r\}$ et $\gamma_2 = \{z : |z - b| = r\}$ La coupure rend l'intégrant uniforme sur γ . Posons

$$\varphi(z) = f(z) \sqrt[n]{(z - a)^k (b - z)^{n-k}}$$

On choisira la détermination de l'intégrant telle que : $\varphi(z)$ sera égal à $\varphi(x)$ sur le bord supérieur de la coupure. Soit \mathcal{C} le cercle de centre a (arbitraire) et de rayon R (voir figure ci-dessus). On obtient ;

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi(z) dz + \int_{\gamma^-} \varphi(z) dz = 2i\pi \sum \text{Résidus de la détermination choisie de } \varphi(z) \text{ aux pôles de } f(z).$$

Le reste consiste à calculer les limites des intégrales sur γ_1 et γ_2 quand $R \rightarrow +\infty$ et $r \rightarrow 0$. Les intégrales sur γ_1 et γ_2 tendent vers 0 en vertu du lemme de Jordan. L'intégrale sur $[\alpha_1; \beta_1]$ tend vers l'intégrale que l'on cherche à calculer et que l'on note I . Pour passer de $[\alpha_1; \beta_1]$ à $[\beta_2; \alpha_2]$, z décrit le cercle γ_2 de centre b dans le sens négatif. Dans ce cas, l'argument de $b - z$ augmente de -2π tandis que $z - a$ reste inchangé. Dès lors, $\varphi(z)$ augmente de $-\frac{2\pi(n-k)}{n}$ car $(b - z)^{n-k}$ augmente de $-2\pi(n - k)$. Donc l'intégrale sur $[\beta_2; \alpha_2]$ tend vers $-\exp\left(-\frac{2\pi(n-k)}{n}\right) I$.

Par conséquent,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}} \varphi(z) dz + \left(1 - \exp\left(-\frac{2\pi(n-k)}{n}\right)\right) I = 2i\pi \sum \text{Résidus de la détermination choisie de } \varphi(z) \text{ aux pôles de } f(z)$$

et le calcul de I s'en déduit aisément. Signalons que souvent le calcul de la limite ci-dessus lorsqu'elle n'est pas nulle se fait en développant l'intégrant en série de Laurent.

CONCLUSION

En conclusion, pour uniformiser les fonctions multiformes on remplace le plan complexe \mathbb{C} par une surface X (Surface de Riemann) qui est localement homéomorphe à un ouvert du plan de \mathbb{C} ou bien on trace une coupure du plan pour choisir une détermination principale.

En outre, les fonctions multiformes ouvrent des perspectives de recherches et d'applications, parmi eux les intégrales faisant appels à des fonctions multiformes, les fonctions fuchsiennes et les solutions des équations différentielles linéaires complexes.

RÉFÉRENCES

- [A.L14] A.Lesfari. *Variables complexes*. ellipses, 2014.
- [A.L18] A.Lesfari. *Éléments de géométrie différentielle*. ellipses, 2018.
- [AM00] A.Jean-Marie. *Equations Différentielles de fonctions de variable réelle ou complexe*. ellipses, 2000.
- [A.Y14] A.Yger. *Analyse complexe*. ellipses, 2014.
- [B.C72] M.Lavrentiev & B.Chabat. *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*. Mir.Moscou, 1972.
- [B.C78] B.Conway. *Functions of one complex variable I*. Springer, 1978.
- [B.C90] B.Chabat. *Introduction à l'analyse complexe Tome1*. Mir Moscou, 1990.
- [D.H22] D.Hulin. *Fonctions Holomorphes*. Université Paris-Saclay, 2022.
- [Do190] P. Dolbeault. *Analyse Complexe*. Masson, 1990.
- [E.R89] E.Reyssat. *Quelques Aspect des Surfaces de Riemann*. Birkhäuser Boston, 1989.
- [E.T09] R.Sà Earp & E.Toubiana. *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann*. Cassini, 2009.
- [F.P99] F.Pham. *Géométrie et calcul différentiel sur les variétés*. Dunod, 1999.
- [G.P74] J.Genet & G.Pupion. *Analyse moderne, Tome2*. Librairie Vuibert, 1974.
- [J.A84] E.Azoulay & J.Avignat. *Mathématiques3.Analyse*. McGraw-Hill, 1984.
- [J.D03] J.Dieudonné. *Éléments d'analyse, Tome1*. Jacques Gabay, 2003.
- [J.F11] J.Frédéric. *Géométrie différentielle et Application au contrôle géométrique*. Cours AOT 13, 2011.

- [J.L96] J.Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. Grenoble Sciences, 1996.
- [J.R12] R.Roussarie & J.Roux. *Des équations différentielles aux systèmes dynamiques. Tome1*. Sciences, 2012.
- [L.V53] L.V.Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill, 1953.
- [Mir95] R. Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces, 1995, Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 1995.
- [Mou15] S. Moulahi. *Pinceaux réels en courbes de genre 2*. PhD thesis, Université d'Angers, 2015.
- [O.F81] O.Forster. *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer, 1981.
- [P.T06] P.Tauvel. *Analyse complexe pour la licence3*. Dunod, 2006.
- [R.S09] J.Schiller & D.Spellman R.Spiegel, S.Lipschutz. *Complex variables*. McGraw Hill, 2009.
- [SC12] S.Jean-Claude. *Surfaces de Riemann*. Cours M1 Mathématiques avancées, 2012.
- [Tan10] Y. Félix & D. Tanré. *Topologie Algébrique*. Dunod, 2010.
- [T.L16] T.Laadj. *Notes de Cours du module Analyse Complexe*. Université des sciences et de la technologie Houari Boumedienne, 2016.
- [T.N97] T.Needham. *Visual Complex Analysis*. Oxford University Press, 1997.
- [T.W01] T.W.Gamelin. *Complex Analysis*. Springer, 2001.
- [W.R98] W.Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 1998.