République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et La Recherche Scientifique

Université De Ghardaïa

Faculté des Science et de Technologie

Département de Mathématique et Informatique

&

Laboratoire de Mathématiques et Sciences Appliquées

Mémoire réalisé dans le cadre d'obtention du diplôme *Master académique*, intitulé :

Problème de Goursat non-linéaire Holomorphe-Carleman

Présenté par :

Hayate BELLAOUAR

Soutenu publiquement le : 01/ 07/ 2019, devant le jury composé de :

Abdenour LANI	MA(Univ. Ghardaia)	Président
Yacine HADJ MOUSSA	MA(Univ. Ghardaia)	Examinateur
Smail LATRECHE	MA(Univ. Ghardaia)	Raporteur

Année universitaire 2018/2019

DÉDICACE

Je dédie ce travail

à mes chers parents.

à mes frères, ma sœur et ma tente.

à ma grand-mère.

à la mémoire de mes grand-pères, et de ma grand-mère.

À tous ceux qui m'ont enseignés un mot.

H.Bellaouar

Juillet 2019

REMERCIEMENT

Au nom ***Allah*** Clément et Miséricordieux !

Je tiens, en premier lieu, à remercier ***Allah*** de m'avoir guidé tout au long de ce chemin et de m'avoir donné la force, le courage et la volonté pour accomplir ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à M. **LATRÈCHE Smail**, pour m'avoir proposé le sujet, encouragé, orienté, aidé et guidé, pour son soutien et son encouragement, sa confiance en moi tout au long de ce travail. J'espère qu'Allah lui donne la santé et le bien-être pour continuer dans les niveaux plus avancés.

Je n'oublie pas de passer mes vifs remerciements à M.**ELMAGBED Alhachemi**, **CHENINI Lahcen** grâce à eux j'ai mets mes premier pas dans ce domaine.

Merci à Mlle.**BAHEDI Bahia**, pour son soutien, disponibilité, j'ai l'honneur et le plaisir d'être parmi ses étudiantes.

Mes remerciements vont également à tous les membres du Jury, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'être dans le Jury de ma thèse et à tous les enseignants de l'université.

Je remercie M. **DAHMANI Abdelhakim**, de m'avoir aidé dé le début de ce travail.

Enfin, je remercie aussi mes proches et amis pour leur soutien, conseils et encouragements et surtout de m'avoir supporté toutes ces années.

H.Bellaouar

Juillet 2019

Abstract, Résumé, ملخص

ملخص

نهدف في هذه المذكرة الى البرهان عن وجود ووحدانية الحل لمشكل غورسا الغير خطي في فضاء كارلمان بالتحديد في مجموعة الدوال من الصنف التحليلي بالنسبة للمتغير الاول و كارلمان بالنسبة للثاني حيث نقوم بتحويل المعادلة التكاملية-التفاضلية الى مسالة نقطة صامدة في جوار مغلق داخل جبر بناخ معرف بسلسلة غير منتهية ركبت بواسطة سلسلة عددية محدبة لوغاريثميا وتملك بعض الخواص الاضافية.

الكلمات المفتاحية: مشكل غورسا، النقطة الصامدة، جبر بناخ، سلسلة غير منتهية، فضاء كارلمان.

Résumé

Ce mémoire a pour objectif de prouver l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème de Goursat non linéaire dans l'espace de Carleman, plus précisément dans l'ensemble des fonctions de type holomorphe-Carleman. L'idée est de transformer le problème integro-diferentiel à un problème de point fixe appliqué dans une boule fermée dans une algèbre de Banach définie par certaines séries formelles composées d'une suite numérique logarithméquement convexe et qui a des propriétés supplémentaires.

Mots clés: problème de Goursat, point fixe, algèbre de Banach, série formelle, espace de Carleman.

Abstract

This dissertation has like aim to prove the existence and uniqueness of a solution for the non-linear Goursat problem in a Carleman space more precisely in the set of Holomorphic- Carleman functions. The idea is to transform the integro-differential equation into a fixed point problem in an Banach algebra defined by the formalism of some formal power series constructed by a logarithmically convex sequence that has some additional properties.

Keywords: Goursat problem, fixed point, Banach algebra, formal power series, Carleman space.

INTRODUCTION

L'histoire du problème de Goursat commence par Cauchy en 1842, où il énonce dans [1] les conditions de convergence d'une série formelle à l'aide des fonctions majorantes, puis il décide d'appliquer ce principe à l'intégration par séries d'équations aux dérivées partielles. Après il donne dans [17] une théorème d'existence et d'unicité de la solution analytique pour les équations quasi-linéaire de la forme :

$$\begin{cases} D_t u = \sum_{i=1}^{n} A_i D_{x_i} u + B \\ u_{|t=0} = u_0(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

Où B, A_i sont des fonctions analytiques de $(n+1)$ variables $t, x_1, ..., x_n$ et de l'inconnue u elle même fonction des mêmes variables, u_0 est une fonction analytique des variables $x_1, ..., x_n$.

L'idée consiste à développer en série formelle la solution, les coefficients de cette série serons obtenus à l'aide des conditions initiales et de l'équation, en déterminant alors l'unicité. Premièrement il étend dans[16], paragraphe 1, ce résultat et cette méthode de démonstration pour les systèmes quasi-linéaire de la forme :

$$\begin{cases} D_t u_j = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} A_{ik} D_{x_i} u_k + B_j \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq N \\ u_{j|t=0} = u_{0,j}(x_1, ..., x_n) \qquad\qquad\qquad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq N \end{cases}$$

Où B_j, A_{ik} sont des fonctions analytiques de $(n+1)$ variables $t, x_1, ..., x_n$ et de l'inconnue $u = (u_1, ..., u_N)$ elle même fonction des mêmes variables, $u_{0,j}$ est une fonction analytique de n variables $x_1, ..., x_n$.

Deuxièmement, il généralise le résultat et la méthode de démonstration de [17] pour les équations semi-linéaire de la forme :

$$\begin{cases} D_t u = F(x_1, ..., x_n, t, u, D_{x_1}u, ..., D_{x_n}u) \\ u_{|t=0} = u_0(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

Où F, u_0 sont des fonctions analytiques en leurs variables respectives et u une fonction de $t, x_1, ..., x_n$.

Dans le paragraphe 2 de [16], il étend le résultat et la méthode de démonstration du paragraphe 1 pour les systèmes semi-linéaire d'ordre un de la forme :

$$\begin{cases} D_t u_j = F_j(x_1, ..., x_n, t, u_1, ..., u_N, D_x u, D_t u) & \text{pour} \quad 1 \leq j \leq N \\ u_{j|t=0} = u_{0,j}(x_1, ..., x_n) & \text{pour} \quad 1 \leq j \leq N \end{cases}$$

Où

$$D_x = D_{x_i} u_{k(1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq N)} \quad \text{et} \quad D_t u = D_t u_{k(1 \leq k \leq N, k \neq j)}$$

$F_j, u_{0,j}$ sont des fonctions analytiques en leurs variables respectives et u_j une fonction de $t, x_1, ..., x_n$ pour $1 \leq j \leq N$.

Ensuite, il généralise dans [18], le résultat de [17] au équation semi-linéaire d'ordre quelconque de la forme :

$$\begin{cases} D_t^m u = F_j(x_1, ..., x_n, t, D^A u) \\ D^k u_{|t=0} = u_{0,k}(x_1, ..., x_n) \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq m-1 \end{cases}$$

Où

$D^A u = \{D_x^\alpha D_t^\beta u / (\alpha, \beta) \in A\}$, A est une partie finie de l'ensemble

$$\left\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{n+1} / |\alpha| + \beta \leq m, \quad (\alpha, \beta) \neq (0, m)\right\}$$

Où $F, u_{0,k}$ sont des fonctions analytiques en leurs variables, et u une fonction de $t, x_1, ..., x_n$.

Il réduit ce problème à un système semi-linéaire de première ordre. A la fin de même article [18], il généralise ce résultat et cette méthode de démonstration à des systèmes d'ordre quelconque sans préciser la forme particulière des équations.

Trentaine d'années après, Sophie Kowalowsky dans [10] généralise les résultats de Cauchy aux système semi-linéaire d'ordre quelconque de la forme :

$$\begin{cases} D_t^{m_i} u_i = F_i(x_1, ..., x_n, t, D^B u) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq N \\ D_t^k u_{i|t=0} = g_{i,k}(x_1, ..., x_n) \qquad \text{et} \quad 0 \leq k \leq m_i - 1 \end{cases}$$

Où
$D^B u = \left\{ D_x^\alpha D_t^\beta u_k / (k,\alpha,\beta) \in B \right\}$, $B = \cup_k \{k\} \times B_k$, B_k est une partie finie de l'ensemble

$$\left\{ (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^{n+1} / |\alpha| + \beta \leq m_k, \quad (\alpha,\beta) \neq (0,m_k) \right\}$$

les fonctions F_i sont des fonctions analytiques des variables $t, x_1, ..., x_n$, et de $y \in \mathbb{R}^r$ où $r = cardB$, $g_{i,k}$ sont des fonctions analytiques des variables $x_1, ..., x_n$ et u_i est fonction de ces mêmes variables et de t.

Elle démontre directement le résultat sans le ramener à un système de premier ordre, en suivant le même schéma de Cauchy. Des années après des mathématiciens comme Goursat [5], Lednev [15], Garding [12], Persson [9], l'un généralise le résultat et la démonstration de l'autre.

Une dizaine d'années après, C.Wagschal dans [26], réduit la démonstration des résultats analogue à ceux de Garding et Pearsson pour une seule équation de type semi-linéaire (problème de Goursat holomorphe, partiellement holomorphes, Gevrey-continue et Gevrey-holomorphes), cette méthode sera traitée au cas holomorphe dans le première chapitre, elle consiste à transformer le problème integro-différentiel à un problème de point fixe dans un espace de Banach défini par le formalisme des fonctions majorantes de Cauchy. En suivant le meme technique mais cette fous ci, avec le formalisme des séries formelles dans le cas Carleman qui sera détaillé dans le deuxième chapitre.

Dans le troisième chapitre, nous allons au delà des ces résultats et avec le même schéma, on montre l'existence et l'unicité d'une solution pour le probleme de Goursat holomorphe-Carleman, c'est à dire on cherche une solution qui soit holomorphe par rapport à la première variable et de classe Carleman par rapport à la deuxième.

TABLE DES MATIÈRES

NOTATION

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$, $x, y \in \mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{C}\{X\}$:l'algèbre des séries convergentes.
- $\mathbb{C}[[X]]$:l'algèbre des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- $\|\cdot\|$: norme
- $D_x^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$
- $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ tel que $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, pour tout $i = 0 \ldots n$
- $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$
- $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$
- $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \cdots, \alpha_n \pm \beta_n)$ tel que $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$ pour tout $i = 0 \ldots n$
- $\alpha \neq \beta$ signifie $(\exists i, 0 \leq i \leq n : \alpha_i \neq \beta_i\ )$
- $\alpha \leq \beta$ signifie $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $i = 0 \ldots n$
- $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$
- $(x.y)^k = \displaystyle\sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha \in \mathbb{N}^n}} \frac{|\alpha|! x^\alpha y^\alpha}{\alpha!}$
- $\gamma < \alpha$ signifie $\gamma \leq \alpha$ et $\gamma \neq \alpha$

CHAPITRE 0

PRÉLIMINAIRES

Définition 0.1 *[21] On appelle Algèbre tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel A muni d'une multiplication vérifiant :*

1. $x(yz) = (xy)z$
2. $(x + y)z = xz + yz$, $x(y + z) = xy + xz$
3. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

pour tout x, y et z dans l'espace vectoriel A et tout scalaire α

Si de plus A est un espace de Banach de norme vérifiant

4. $\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \quad (\forall x, y \in A)$

on dit que A est une Algèbre de Banach

Définition 0.2 *[3](Algèbres des polynômes formelles)*
Soit K un corps commutatif. On considère les polynômes formels à une lettre (ou indéterminée) X à coefficients dans K. L'addition de deux polynômes, la multiplication d'un polynôme par un scalaire (c'est-à-dire par un élément de K) font de l'ensemble $K[X]$ des polynômes un espace vectoriel sur K, ayant la base infinie

$$1, X, ..., X^n, ...$$

Chaque polynôme est une combinaison linéaire finie des X^n à coefficients dans K, qu'on écrit $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$, avec a_n une suite dont tous ses éléments sont nuls sauf un nombre fini. La table de multiplication

$$X^p.X^q = X^{p+q}$$

définit une multiplication dans $K[X]$; le produit

$$\left(\sum_p a_p X^p\right).\left(\sum_q b_q X^q\right) = \sum_n c_n X^n \tag{1}$$

où $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$ *Cette multiplication est commutative et associative.*
Elle est bilinéaire, en ce sens que

$$\begin{cases} (P_1 + P_2).Q = P_1Q + P_2Q \\ (\lambda P).Q = \lambda.(PQ) \end{cases}$$

quels que soient les polynômes P, P_1, P_2, Q et le scalaire λ. Elle admet comme élément unité le polynôme $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ *tel que* $a_0 = 1, a_n = 0 \quad \forall n > 0$.
On exprime toutes ces propriétés en disant que $K[X]$, muni de sa structure d'espace vectoriel et de sa multiplication, est une algèbre commutative sur le corps K.

Définition 0.3 *[3](Algèbres des séries formelles)*
Une série entière formelle en X est une expression formelle $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ *où cette fois ci on ne suppose plus nécessairement que les coefficients a_n soient nuls sauf un nombre fini d'entre eux.*
On définit la somme des deux séries formelles

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right) + \left(\sum_{n\geq 0} b_n X^n\right) = \sum_{n\geq 0} c_n X^n, \quad c_n = a_n + b_n$$

ainsi que le produit d'une série formelle par un scalaire :

$$\lambda\left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right) = \sum_{n\geq 0} (\lambda a_n) X^n$$

L'ensemble $K[[X]]$ des séries formelles forme ainsi un espace vectoriel sur K. On note 0 l'élément neutre de l'addition ; c'est la série formelle dont tous les coefficients sont nuls.
Le produit de deux séries formelles se définit encore par la formule 1, qui conserve un sens car dans le second membre il n'y a qu'un nombre fini de termes à ajouter. La multiplication est encore commutative et associative, et bilinéaire vis-à-vis de la structure vectorielle. Ainsi $K[[X]]$ est une algèbre sur le corps K, ayant pour élément unité noté 1 la série $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ *telle que* $a_0 = 1$ *et* $a_n = 0, \quad \forall n > 0$.

Définition 0.4 *[2](Algèbre des séries convergentes)*
Soit $F = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ *une série formelle, si $\exists \rho > 0$ tel que F converge pour tout*

$$X \in K, \textit{tel que} \quad |X| < \rho$$

alors $F(X)$ est une fonction holomorphe dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon ρ.

l'ensembles des séries convergentes de $K[[X]]$ forment une algèbre noté $K\{X\}$.

Définition 0.5 *[6]Fonction homogène*

Soit $f : (\mathbb{R}^*)^n \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$

On dit que f est positivement homogène de degré k si :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(tx) = t^k f(x) \text{ pour tout } x \in (\mathbb{R}^*)^n$$

Si f est différentiable en tout point, elle est positivement homogène de degré k si et seulement si elle satisfait l'identité d'Euler :

$$f(x) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Théorème 0.1 *[4]Théorème de Point fixe de Banach*

Soit (E, d) un espace métrique complet, A un sous ensemble fermé de E, $f : A \to E$ une application telle que $f(A) \subset A$ et

$$d(f(u), f(v)) \leq \tau d(u, v) \quad \forall u, v \in A$$

avec $0 \leq \tau < 1$

alors, f admet un point fixe unique.

Lemme 0.1 *[19] Taylor*

Soit f une fonction de (x, y) holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+m}$ vérifiant $f(0, 0) = 0$, il existe une fonction $G : (x, y, z) \to G(x, y, z)$ holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+2m}$ vérifiant $G(0, 0, 0) = 0$, telle que pour (x, y, z) assez petit dans $\mathbb{C}^{n+2m}$:

$$f(x, y) = f(x, z) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y_j}(y_j - z_j) + \sum_{j=1}^{m} G(x, y, z)(y_j - z_j)$$

par suite, il existe une fonction $F : (x, y) \to F(x, y)$ holomorphe dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+m}$ vérifiant $F(0, 0) = 0$, telle que pour (x, y) assez petit dans $\mathbb{C}^{n+m}$:

$$f(x, y) = f(x, 0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y_j} y_j + \sum_{j=1}^{m} F(x, y) y_j$$

Théorème 0.2 *[8]Pringsheim*

Une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty$ est analytique dans un ouvert Ω si et seulement si pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\sup_K |f^{(n)}(x)| \leq c^{n+1} n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 0.3 *[13]Inégalité de Cauchy*

Soit $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ un polydisque de centre a et de rayon r, f une fonction analytique sur Δ, alors pour toute $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a

$$|D^\alpha f(a)| \leq \sup_\Delta |f(x)| \frac{\alpha!}{r^\alpha}$$

Définition 0.6 *Un polydisque ouvert de $\mathbb{C}^n$ de centre a et rayon $r = (r_1, ..., r_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ c'est une ensemble qui vérifie :*

$$\{x \in \mathbb{C}^n; \quad |x - a| < r\}$$

l'écriture $|x - a| < r$ signifie

$$|x_i - a_i| < r_i, \quad \forall i; \quad 0 \leq i \leq n$$

Théorème 0.4 *[13](principe de prolongement analytique)*

Soient f et g deux fonctions holomorphes dans un ouvert connexe Ω, $U \subset \Omega$ un ouvert non vide, alors

$$f = g \text{ sur } U \Rightarrow f = g \text{ sur } \Omega$$

Définition 0.7 *[26]*

Soient $u = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} u_\alpha x^\alpha$, $\Phi = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \Phi_\alpha x^\alpha$ deux séries formelles à n variables $(x_1, ..., x_n)$ telles que $u_\alpha \in \mathbb{C}$, $\Phi_\alpha \in \mathbb{R}_+$. On note

$$u \ll \Phi \quad \text{la relation} \quad (\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |u_\alpha| \leq \Phi_\alpha)$$

.

Si Φ est une série convergente, auquel cas on dit que Φ est une fonction majorante.

Proposition 0.1 *[24]*

Soit $u, v, U, V \in \mathbb{C}[[x]]$. Alors

$$u \ll U \quad \text{et} \quad v \ll V \Rightarrow \quad u + v \ll U + V \tag{2}$$

$$u \ll U \quad \text{et} \quad v \ll V \Rightarrow \quad u.v \ll U.V \tag{3}$$

CHAPITRE 1

PROBLÈME DE GOURSAT HOLOMORPHE

L'espace des fonctions analytiques est un espace riche de propriétés qui viennent de la nature exceptionnelle de ces fonctions, dans ce chapitre on va exploiter certaines de ces propriétés comme la différentiabilité et la convergence des séries de Taylor pour bénéficier du théorème de point fixe de Banach. Telles propriétés nous permets d'introduire une nouvelle algèbre de Banach à partir de l' espace (l'espace des fonctions analytiques), qui n'est qu'un espace de Fréchet, afin d'établir un résultat d'existence et d'unicité qui peut être généralisé dans d'autres espaces notamment partiellement-holomorphes, Gevery-continue,Gevrey-holomorphe et Garleman-continue.

On s'intéresse au problème de Goursat non linéaire suivant défini au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$ tel que :

$$\begin{cases} D^\alpha u(x) = f(x, D^B u(x)) \\ u = O(x^\alpha) \end{cases} \tag{1.1}$$

où

$\alpha \in \mathbb{N}^n$,B désigne une partie finie de l'ensemble

$$\{\beta \in \mathbb{Z}^n; |\beta| \leq |\alpha| \text{ et } \beta \neq \alpha\}$$

où $|\beta| = \sum_{j=1}^{n} \beta_j$ quand $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$.

$D^B u = (D^\beta u)_{\beta \in B}$, où $D_j^{-1}u$ désigne la primitive de u par rapport à x_j qui s'annule avec x_j ; la fonction f est une fonctions de x et de $n' = CardB$ variables complexes notées $(y_\beta)_{\beta \in B}$.

La condition $u = O(x^\alpha)$ signifie que $u(x) = x^\alpha g(x)$, où g est holomorphe à l'origine, ce qui implique que $D^\beta u(0) = 0$ pour tout $\beta \in B$; on supposera donc f holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+n'}$.

On pose

$$A_\beta = D_{y_\beta} f(0,0), \ \beta \in B$$

et pour tout $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$\rho(\xi) = \sum_{\substack{\beta \in B \\ |\beta| = |\alpha|}} |A_\beta| \xi^{\beta - \alpha}; \tag{1.2}$$

Cette fonction introduite par Lednev, appelée fonction spectrale du problème de Goursat.

Théorème 1.1 *[15](Lednev)*
S'il existe $\xi \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $\rho(\xi) < 1$. le problème de Goursat (1.1) admet une unique solution holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$.

Pour simplifier le travail on peut supposer $\alpha = 0$ et $f(0,0) = 0$

en effet, posons $f(0,0) = c$ et $v(x) = u(x) - c$ on a alors

$$v = f(x, D^B v + D^B c) - c = g(x, D^B v) \tag{1.3}$$

où $g(x,y) = f(x, y + D^B c) - c$. d'où $g(0,0) = f(0,0) - c = 0$ vu que $D^\beta c(0) = 0$, pour tout $\beta \in B$, ce qui vient de la définition des composantes de l'opérateur D^α pour tout $\alpha \in B$.
enfin

$$\sum_{\substack{\beta \in B \\ |\beta| = 0}} |D_{y_\beta} g(0,0)| \xi^\beta = \sum_{\substack{\beta \in B \\ |\beta| = 0}} |D_{y_\beta}(f(0,0) - c(0))| \xi^\beta = \sum_{\substack{\beta \in B \\ |\beta| = 0}} |D_{y_\beta} f(0,0)| \xi^\beta$$

D'où la fonction spectrale du problème de Goursat (1.3) coïncide avec celle du problème initial. En résumé, il s'agit de prouver le théorème de Lednev pour le problème

$$u(x) = f(x, D^B u(x))$$

où (B fini)

$$B \subset \{\beta \in \mathbb{Z}^n; |\beta| \leq 0 \text{ et } \beta \neq 0\} \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0$$

A cet effet, on va montrer que l'application

$$T : u \to f(x, D^B u(x))$$

est une contraction stricte dans un espace métrique complet ; cet espace métrique complet va être tout simplement une boule fermée dans une algèbre de Banach qui sera définie par l'intermédiaire de certains fonctions majorantes.

1.1 Fonctions Majorantes

On note B_Φ l'espace de Banach des fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^n$ suivant [25] :

$$B_\Phi = \{u \in \mathbb{C}\{x\}\,; \exists c \geq 0 : u \ll c\Phi\}$$

pour la norme

$$\|u\|_\Phi = \min\{c \geq 0; u \ll c\Phi\}.$$

On utilisera la fonction majorante de Lax [14] :

$$\theta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)^2}, \quad |t| < 1$$

dont voici une propriété essentielle

Proposition 1.1 *[26](Lax)*
Il existe une constante K telle que

$$\theta^2(t) \ll K\theta(t)$$

Preuve 1.1 *On a d'après le produit de Cauchy*

$$\theta^2(t) = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)^2})^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(j+1)^2} \frac{1}{(n-j+1)^2}) t^n$$

On majore les coefficients de t^n dans $\theta^2(t)$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(j+1)^2} \frac{1}{(n-j+1)^2} &\leq 2 \sum_{0 \leq j \leq n/2} \frac{1}{(j+1)^2} \frac{1}{(n-j+1)^2} \\ &\leq 2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2} \right) \frac{1}{((n/2)+1)^2} \\ &\leq 2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2} \right) \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} \frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

comme $\sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{1}{(j+1)^2} = \dfrac{\pi}{6}$ donc il nous suffit de prendre K tel que :

$$K \geq \frac{4\pi}{3} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}$$

On prend par exemple $K = \dfrac{4\pi}{3}$

On utilise alors la fonction majorante suivante

$$\varphi_R(t) = K^{-1}\theta(\frac{t}{R}), \quad R > 0 \tag{1.4}$$

Proposition 1.2 *[26]*

$\forall k \geq 1, \forall R > 0$ on a :

$$\varphi_R^k(t) \ll \varphi_R(t) \tag{1.5}$$

Preuve 1.2 *On a pour $k = 2$*

$$\varphi_R^2(t) = K^{-2}\theta^2(\frac{t}{R}) \ll K^{-2} \times K\theta(\frac{t}{R}) = K^{-1}\theta(\frac{t}{R})$$

on itère les processus pour les autre ordres.

$$\varphi_R^k(t) \ll \varphi_R^{k-1}(t) \ll \cdots \ll \varphi_R(t)$$

Étant donné un paramètre $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. On note $B_R(\xi)$ l'espace vectoriel associé à la fonction majorante φ et définie comme suit :

$$B_R(\xi) = \{u \in \mathbb{C}\{x\} : \exists c \geq 0, u \ll c\varphi_R(\xi.x)\}$$

avec

$$\xi.x = \sum_{i=0}^{n} \xi_i.x_i$$

Proposition 1.3 *[26]*

Les espaces $B_R(\xi)$ muni de la norme

$$\|u\| = min\{c \geq 0 : u \ll c\varphi_R(\xi.x)\}$$

sont des Algèbres de Banach

Preuve 1.3 *Montrons d'abord que $B_R(\xi)$ est complet.*

Soient $(u^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_R(\xi)$ une suite de Cauchy, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \in \mathbb{N} \text{ avec } p, q \geq n \text{ on a : } \|u^p - u^q\| \leq \varepsilon$$

ce qu'est équivalent à

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |u_\alpha^p - u_\alpha^q| \leq \varepsilon\varphi_{R,\alpha}$$

d'après la complétude de $\mathbb{C}$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |u_\alpha^p - u_\alpha| \leq \varepsilon\varphi_{R,\alpha}$$

d'où

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |u_\alpha| \leq |u_\alpha^p - u_\alpha| + |u_\alpha^p| \leq (\varepsilon + c)\varphi_{R,\alpha}$$

Ce qui prouve que u^n *converge vers* u *dans* $B_R(\xi)$

Pour montrer que $B_R(\xi)$ *est une algèbre, soit* $u, v \in B_R(\xi)$ *d'où*

$$u(x) \ll \|u\|\varphi_R(\xi x) \text{ et } v(x) \ll \|v\|\varphi_R(\xi x)$$

D'après la proposition 0.1 et 1.2 on a

$$u(x).v(x) \ll \|u\|\|v\|\varphi_R(\xi x)$$

Proposition 1.4 *[26]*
Soient $u \in B_R(\xi)$ *et* $R' > 0$ *tels que* $\|u\| < R'$*, alors la fonction* $\dfrac{R'}{R'-u}$ *appartient à l'espace* $B_R(\xi)$ *et*

$$\frac{R'}{R'-u} \ll \left(K + \frac{\|u\|}{R' - \|u\|}\right)\varphi_R(\xi.x)$$

Remarque : Évidemment, toutes les fonctions de $B_R(\xi)$ sont holomorphes au voisinage de l'origine, pour montrer l'inclusion inverse sachant que ξ étant fixé et R suffisamment petit, on utilisera :

Lemme 1.1 *[26]*
Pour tout $\eta > 1$*, il existe une constante* $c(\eta) > 0$ *telle que*

$$\frac{\eta R}{\eta R - t} \ll c(\eta)\varphi_R(t) \text{ pour tout } R > 0 \text{ et } |t| < \eta R \tag{1.6}$$

Preuve du Lemme : L'inégalité 1.6 est équivalente à

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\eta R}\right)^n \ll c(\eta)K^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{R^n(n+1)^2}$$

ce qui signifie

$$\frac{1}{(\eta R)^n} \leq c(\eta)K^{-1}\frac{1}{R^n(n+1)^2}$$

qui est vérifiée pour

$$c(\eta) = \sup_{n\in\mathbb{N}} K\frac{(n+1)^2}{\eta^n}$$

Proposition 1.5 *[26]*
Si u *est une fonction holomorphe et bornée dans le polydisque*

$$\Delta = \{x \in \mathbb{C}^n, \xi_i|x_i| < \eta R\}$$

alors

$$u \ll c(\eta)M\varphi_R(\xi.x) \text{ où } M = \sup_{x\in\Delta}|u(x)|$$

Peuve de la proposition : u étant holomorphe et bornée dans un voisinage de l'origine, donc on a d'après les inégalités de Cauchy 0.3

$$|D^\alpha u(0)| \leq M\frac{\xi^\alpha}{(\eta R)^{|\alpha|}}\alpha!, \quad \alpha\in\mathbb{N}^n, \quad M=\sup_{x\in\Delta}|u(x)|$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{|D^\alpha u(0)|}{\alpha!} &\leq M\frac{\xi^\alpha}{(\eta R)^{|\alpha|}}\\
\Rightarrow \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{|D^\alpha u(0)|}{\alpha!}x^\alpha &\ll \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} M\frac{\xi^\alpha}{(\eta R)^{|\alpha|}}x^\alpha\\
&\ll M\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}}{(\eta R)^{\alpha_1}\cdots(\eta R)^{\alpha_n}}x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}\\
&\ll M\left(\sum_{\alpha_1\in\mathbb{N}^n}\frac{(x_1\xi_1)^{\alpha_1}}{(\eta R)^{\alpha_1}}\right)\cdots\left(\sum_{\alpha_n\in\mathbb{N}^n}\frac{(x_n\xi_n)^{\alpha_n}}{(\eta R)^{\alpha_n}}\right)\\
&\ll M\prod_{i=1}^{n}\frac{\eta R}{\eta R-\xi_i x_i}
\end{aligned}$$

Considérons maintenant la fonction $\dfrac{\eta R}{\eta R-\xi.x}$ dont sa série de Taylor $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi.x}{\eta R}\right)^k$ converge dans le polydisque Δ. On a

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi.x}{\eta R}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{|\alpha|=k\\ \alpha\in\mathbb{N}^n}}\frac{|\alpha|!\xi^\alpha x^\alpha}{\alpha!(\eta R)^{|\alpha|}}=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{|\alpha|!\xi^\alpha x^\alpha}{\alpha!(\eta R)^{|\alpha|}}$$

Or pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^n$, on a $\dfrac{|\alpha|!}{\alpha!}\geq 1$.Ce que signifie

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\eta R}{\eta R-\xi_i x_i}=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{\xi^\alpha x^\alpha}{(\eta R)^{|\alpha|}}\ll\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi.x}{\eta R}\right)^k=\frac{\eta R}{\eta R-\xi.x}$$

d'où

$$u\ll M\frac{\eta R}{\eta R-\xi.x}\ll c(\eta)M\varphi_R(\xi.x)\text{ d'apres le lemme 1.1}$$

On conclu que toute fonction u holomorphe et bornée dans le polydisque Δ appartient à l'espace $B_R(\xi)$ et par suite

$$\mathbb{C}\{x\}=\bigcup_{R>0}B_R(\xi)$$

Lemme 1.2 *[26]*

Il existe une constante $c_{1,2}>0$ telle que

$$D^{-k}\varphi_R(t)\ll c_{1,2}R^k\varphi_R(t)\ \textit{pour tout } R>0 \textit{ et tout } k\in\mathbb{N}$$

Preuve du lemme :

$D^{-k}\varphi_R(t)$ étant la primitive de $\varphi_R(t)$ qui s'annule avec t, donc

$$D^{-k}\varphi_R(t) = K^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\frac{1}{R^n}\frac{n!}{(n+k)!}t^{n+k}$$

l'inégalité cherchée s'écrit :

$$\frac{1}{(n+1)^2}\frac{1}{R^n}\frac{n!}{(n+k)!} \leq c_{1,2}R^k\frac{1}{R^{n+k}(n+k+1)^2}$$

qui est équivalente à

$$\frac{(n+k+1)^2}{(n+1)^2}\frac{n!}{(n+k)!} \leq c_{1,2}$$

or la fonction $\dfrac{(n+k+1)^2}{(n+1)^2}\dfrac{n!}{(n+k)!}$ est décroissante par rapport à n, il suffit de choisir

$$c_{1,2} = \sup_k \frac{(k+1)^2}{k!}$$

1.2 Démonstration du théorème 1.1

Par hypothèse il existe $\xi \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que

$$\rho(\xi) = \sum_{\substack{\beta\in B\\ |\beta|=0}} |A_\beta|\xi^\beta < 1;$$

Dans la suite l'algèbre $B_R(\xi)$ sera notée simplement B_R.

Proposition 1.6 *[26]*

Il existe des nombres $R_0 > 0$ et $a > 0$ tels que, pour tout $R \in]0, R_0]$, l'application

$$T : u \to f(x, D^B u(x)) \tag{1.7}$$

soit une contraction stricte dans la boule fermée $B'(0,a) = \{u \in B_R; \|u\| \leq a\}$ de l'algèbre de Banach B_R.

Preuve de la proposition :

D'après le lemme 0.1 on peut écrire

$$f(x,y) = f(x,0) + \sum_{\beta\in B} A_\beta y_\beta + \sum_{\beta\in B} F_\beta(x,y)y_\beta \tag{1.8}$$

$$f(x,y) - f(x,z) = \sum_{\beta\in B} A_\beta(y_\beta - z_\beta) + \sum_{\beta\in B} G_\beta(x,y,z)(y_\beta - z_\beta) \tag{1.9}$$

les fonctions $f(x,0), F_\beta(x,y)$ et $G_\beta(x,y,z)$ sont holomorphes au voisinages de l'origine de $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n+n'}$ et $\mathbb{C}^{n+2n'}$ respectivement et on a

$$f(0,0) = F_\beta(0,0) = G_\beta(0,0,0) = 0 \tag{1.10}$$

d'autre part étant donné $\eta > 1$, il existe $R_1 > 0$ et $R_1' > 0$ tels que ces fonctions soient holomorphes et bornées dans le polydisque

$$\Delta(R_1, R_1') = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^{n+2n'}; \xi_i|x_i| < \eta R_1, |y_\beta| < R_1', |z_\beta| < R_1'\}$$

pour tout $0 < R < R_1, 0 < R' < R_1'$, posons

$$\varepsilon_0(R) = \sup_{\Delta(R)} |f(x,0)|, \text{ où } \Delta(R) = \{x \in \mathbb{C}^n, \xi_i|x_i| < \eta R\}$$

et

$$\varepsilon_0'(R,R') = \sup_\beta \sup_{\Delta(R,R')} (|F_\beta|, |G_\beta|)$$

On remarque d'après (1.10) que ces fonctions $\varepsilon_0(R)$ et $\varepsilon_0'(R,R')$ tendent vers zéro quand R et R' tendent vers zéro, et ainsi les fonctions $\varepsilon_1(R)$, $\varepsilon_2(R)$, $\varepsilon_3(R)$, $\varepsilon_1'(R,R')$, $\varepsilon'(R,R')$ et $\varepsilon''(R,R')$ qui apparaissent par la suite conservent la même propriété

D'après la proposition 1.5 on a

$$f(x,0) \ll \varepsilon_1(R)\varphi_R(\xi.x) \qquad \text{tel que } \varepsilon_1(R) = c(\eta)\varepsilon_0(R)$$

Comme $F_\beta(x,y)$ est holomorphe et bornée dans le polydisque $\Delta(R_1, R_1')$ donc d'après l'inégalité de Cauchy

$$|D_x^\alpha D_y^\delta F_\beta(0,0)| \leq M_\beta \frac{\xi^\alpha \alpha!}{(\eta R)^{|\alpha|}} \frac{\delta!}{R'^{|\delta|}} \text{ avec } M_\beta = \sup_{\Delta(R,R')} F_\beta(x,y)$$

ce que signifie que

$$\frac{|D_x^\alpha D_y^\delta F_\beta(0,0)|}{\alpha!\delta!} x^\alpha y^\delta \leq M_\beta \frac{\xi^\alpha x^\alpha}{(\eta R)^{|\alpha|}} \frac{y^\delta}{R'^{|\delta|}}$$

d'où

$$\begin{aligned} F_\beta(x,y) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sum_{\delta \in \mathbb{N}^{n'}} \frac{|D_x^\alpha D_y^\delta F_\beta(0,0)|}{\alpha!\delta!} x^\alpha y^\delta \\ &\ll \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sum_{\delta \in \mathbb{N}^{n'}} M_\beta \frac{\xi^\alpha x^\alpha}{(\eta R)^{|\alpha|}} \frac{y^\delta}{R'^{|\delta|}} \\ &\ll M_\beta \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\xi^\alpha x^\alpha}{(\eta R)^{|\alpha|}} \sum_{\delta \in \mathbb{N}^{n'}} \frac{y^\delta}{R'^{|\delta|}} \\ &\ll \varepsilon_1'(R,R')\varphi_R(\xi.x) \prod_{i=1}^{n'} \frac{R'}{R'-y_i} \end{aligned}$$

quand $c(\eta)M_\beta \leq c(\eta)\varepsilon'_0(R,R') = \varepsilon'_1(R,R')$ qui tend vers zéro quand R, R' tendent vers zéro avec le même raisonnement on majore $G_\beta(x,y,z)$. finalement on a

$$\left\{\begin{array}{c} f(x,0) \ll \varepsilon_1(R)\varphi_R(\xi.x) \\ F_\beta(x,y) \ll \varepsilon'_1(R,R')\varphi_R(\xi.x)\prod_{\gamma\in B}\frac{R'}{R'-y_\gamma} \\ G_\beta(x,y,z) \ll \varepsilon'_1(R,R')\varphi_R(\xi.x)\prod_{\gamma\in B}\frac{R'}{R'-y_\gamma}\frac{R'}{R'-z_\gamma} \end{array}\right. \tag{1.11}$$

Cherchons tout d'abord des conditions suffisantes sur a et $R \in]0, R_1]$ pour lesquelles la boule $B'(0,a)$ soit invariante par l'opérateur T définie par (1.7) ceci équivalent à :

$$T(B'(0,a)) \subset B'(0,a)$$

Soit $u \in B'(0,a)$; d'après le lemme 1.2 on a pour tout $\beta \in B$

$$\begin{aligned} y_\beta = D^\beta u \ll aD^\beta\varphi_R(\xi.x) &\ll a\xi^\beta D^{|\beta|}\varphi_R(\xi.x) \\ &\ll \left\{\begin{array}{ll} a\xi^\beta\varphi_R(\xi.x) & si \quad |\beta| = 0 \\ a\varepsilon_2(R)\varphi_R(\xi.x) & si \quad |\beta| < 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_2(R) = c_{1,2}R^{-|\beta|}$
Si $a\xi^\beta \leq R'/2$ et $a\varepsilon_2(R) \leq R'/2$, c'est à dire si $\|D^\beta u\| < R'/2$, alors la proposition 1.4 donne que

$$\begin{aligned} &\frac{R'}{R'-D^\beta u} \ll c_1\varphi_R(\xi.x) \quad \text{tel que } c_1 = \left(K + \frac{\|D^\beta u\|}{R'-\|D^\beta u\|}\right) \leq (K+1) \\ \Rightarrow &\prod_{\beta\in B}\frac{R'}{R'-D^\beta u} \ll c_1^{n'}\varphi_R(\xi.x) \quad (n' = CardB) \end{aligned}$$

D'après (1.8) , (1.11) et la proposition 1.2 , on a alors

$$\begin{aligned} Tu = f(x, D^B u(x)) &= f(x,0) + \sum_{\beta\in B} A_\beta D^\beta u + \sum_{\beta\in B} F_\beta(x,y)D^\beta u \\ &= f(x,0) + \sum_{\substack{\beta\in B \\ |\beta|=0}} A_\beta D^\beta u + \sum_{\substack{\beta\in B \\ |\beta|<0}} A_\beta D^\beta u + \sum_{\beta\in B} F_\beta(x,y)D^\beta u \\ &\ll [\varepsilon_1(R) + a(\rho(\xi) + \varepsilon'(R,R'))]\varphi_R(\xi.x) \end{aligned}$$

Tels que

$$\sum_{\substack{\beta\in B\\|\beta|=0}} A_\beta D^\beta u \ll a\rho(\xi)\varphi_R(\xi.x)$$

$$\sum_{\substack{\beta\in B\\|\beta|<0}} A_\beta D^\beta u \ll (\sum_{\substack{\beta\in B\\|\beta|<0}} A_\beta\varepsilon_2(R))a\varphi_R(\xi.x)$$

et

$$\varepsilon'(R,R') = c_1^{n'}n'\varepsilon_1'(R,R')\max(\xi^\beta, c_{1,2}R^{-|\beta|}) + \sum_{\substack{\beta\in B\\|\beta|<0}} A_\beta\varepsilon_2(R)$$

finalement l'inclusion $T(B'(0,a)) \subset B'(0,a)$ est satisfaite pour

$$\begin{cases} a \le cR', \qquad a\varepsilon_3(R) \le R' \\ \varepsilon_1(R) + a(\rho(\xi) + \varepsilon'(R,R')) \le a \end{cases} \tag{1.12}$$

Quand $c = (2\xi^\beta)^{-1}$ et $\varepsilon_3(R) = 2\varepsilon_2(R) = 2c_{1,2}R^{-|\beta|}$

Écrivons ensuite les conditions pour que T soit une contraction stricte.

Soient $u, u' \in B'(0,a)$; les conditions (1.12) étant supposées réalisées, on a

$$\frac{R'}{R'-y_\gamma} \ll c_1\varphi_R(\xi.x) \quad \text{et} \quad \frac{R'}{R'-z_\gamma} \ll c_1\varphi_R(\xi.x)$$

avec

$$y_\gamma = D^\gamma u, \quad z_\gamma = D^\gamma u', \quad \gamma \in B$$

et

$$y_\beta - z_\beta = D^\beta(u-u') \ll \begin{cases} \|u-u'\|\xi^\beta\varphi_R(\xi.x) & si|\beta| = 0 \\ \|u-u'\|\varepsilon_2(R)\varphi_R(\xi.x) & si|\beta| < 0 \end{cases}$$

D'après (1.9) , (1.11) et la proposition 1.2 , on a donc

$$\begin{aligned} Tu - Tu' = f(x, D^\beta u) - f(x, D^\beta u') &= \sum_{\beta\in B} A_\beta(D^\beta u - D^\beta u') + \sum_{\beta\in B} G_\beta(x,y,z)(D^\beta u - D^\beta u') \\ &= \sum_{\substack{\beta\in B\\|\beta|=0}} A_\beta(D^\beta(u-u')) + \sum_{\beta\in B} G_\beta(x,y,z)(D^\beta(u-u')) \\ &\ll \|u-u'\|[\rho(\xi) + \varepsilon''(R,R')]\varphi_R(\xi.x) \end{aligned}$$

tel que $\varepsilon''(R,R') = c_1^{2n'}n'\varepsilon_1'(R,R')\max(\xi^\beta, c_{1,2}R^{-|\beta|}) + \sum_{\substack{\beta\in B\\|\beta|<0}} A_\beta\varepsilon_2(R)$

Soient $\rho(\xi) < \rho < 1$, $\varepsilon(R,R') = \max(\varepsilon'(R,R'), \varepsilon''(R,R'))$ pour que T soit une contraction stricte, il suffit que

$$\rho(\xi) + \varepsilon(R,R') \le \rho$$

En résumé, il suffit d'avoir les inégalités

$$\begin{cases} a \leq cR', \qquad a\varepsilon_3(R) \leq R'. \\ \rho(\xi) + \varepsilon(R, R') \leq \rho. \\ \varepsilon_1(R) \leq (1-\rho)a. \end{cases}$$

On procède comme suit :

comme $\rho - \rho(\xi) > 0$ et $\varepsilon(R, R') = \max(\varepsilon'(R, R'), \varepsilon''(R, R'))$ tels que

$$\varepsilon'(R, R') = c_1^{n'} n' c(\eta) \max(\xi^\beta, c_{1,2} R^{-|\beta|}) \left(\sup_\beta \sup_{\Delta(R,R')} (|F_\beta|, |G_\beta|)\right) + \sum_{\substack{\beta \in B \\ |\beta| < 0}} A_\beta c_{1,2} R^{-|\beta|}$$

$$\varepsilon''(R, R') = c_1^{2n'} n' c(\eta) \max(\xi^\beta, c_{1,2} R^{-|\beta|}) \left(\sup_\beta \sup_{\Delta(R,R')} (|F_\beta|, |G_\beta|)\right) + \sum_{\substack{\beta \in B \\ |\beta| < 0}} A_\beta c_{1,2} R^{-|\beta|}$$

Alors il existe $R_2 \in]0, R_1]$ et $R' \in]0, R_1']$ tel que

$$\rho(\xi) + \varepsilon(R, R') \leq \rho \text{ pour tout } R \in]0, R_2]$$

R' étant ainsi fixé, on choisit a tel que $0 < a \leq cR'$ $(c = (2\xi^\beta)^{-1})$, puis $R_0 \in]0, R_2]$ assez petit pour que

$$a\varepsilon_3(R) \leq R', \quad \varepsilon_1(R) \leq (1-\rho)a \text{ pour tout } R \in]0, R_0]$$

La proposition précédente prouve le théorème d'existence ; elle prouve également l'unicité.

En effet, si u et u' sont deux fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^n$ telles que $u = f(x, D^B u)$, $u' = f(x, D^B u')$, on a $u(0) = u'(0) = f(0, 0) = 0$ donc d'après la proposition 1.5 on a $u \ll \varepsilon_1(R)\varphi_R(\xi.x)$, et de même $u' \ll \varepsilon_1(R)\varphi_R(\xi.x)$, pour tout $R > 0$ suffisamment petit. En particulier on peut choisir $R \in]0, R_0]$ tel que $\varepsilon_1(R) \leq a$ et ceci prouve que u et u' sont deux point fixes de la contraction stricte T, on conclu l'égalité partout de u et u' d'après le principe de prolongement analytique 0.4.

CHAPITRE 2

PROBLÈME DE GOURSAT CARLEMAN

2.1 L'espaces de Carleman

Définition 2.1 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante positive et* $\alpha \in \mathbb{N}^p$, *on note* $C^{\alpha,M}(\Omega)$ *l'espace des fonctions* $u : \Omega \to \mathbb{R}$, *admettant* $\forall\gamma \in \mathbb{N}^p$ $\gamma \leq \alpha$ *et* $\forall\delta \in \mathbb{N}^q$ *des dérivées partielles continues*

$$D_x^\gamma D_y^\delta u : \Omega \to \mathbb{R}$$

telles que $\exists c > 0$ *:*

$$\sup_\Omega |D_x^\gamma D_y^\delta u(x,y)| \leq c^{|\delta|+1}\delta! M_{|\delta|}, \quad \forall\gamma \leq \alpha \text{ et } \forall\delta \in \mathbb{N}^q$$

La suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ considérée doit satisfaire les hypothèses suivantes :

1. $M = (M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ logarithmiquement convexe,

$$i.e.\ M_k^2 \leq M_{k-1}M_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

   et $M_0 = 1$

2.

$$\sup_k \left(\frac{M_{k+1}}{M_k}\right)^{\frac{1}{k}} < \infty, \quad k \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

Lemme 2.1 *Si* $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *logarithmiquement convexe et* $M_0 = 1$*,alors*

$$M_jM_k \leq M_{j+k}\ \forall j,k \in \mathbb{N}$$

Preuve 2.1 *Par récurrence sur k :*

Pour $k = 0$, on a $M_j M_0 = M_j \leq M_{j+0}$

Supposons maintenant qu'elle est vraie pour k.

d'après (2.1) la suite $\left(\dfrac{M_{n+1}}{M_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. D'où

$$\begin{aligned} M_j M_{k+1} &= M_j M_k \frac{M_{k+1}}{M_k} \\ &\leq M_{j+k} \frac{M_{k+1}}{M_k} \\ &\leq M_{j+k} \frac{M_{k+2}}{M_{k+1}} \\ &\vdots \\ &\leq M_{j+k} \frac{M_{k+j+1}}{M_{k+j}} = M_{k+j+1} \end{aligned}$$

Lemme 2.2 *[11]*

Si $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ logarithmiquement convexe et $M_0 = 1$, alors

$$M_n M_{\alpha_1} \cdots M_{\alpha_n} \leq M_1^n M_k \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{N}^*, \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$$

Preuve 2.2 *Par récurrence sur k :*

- *Si $n = k$, l'inégalité est évidente.*
- *Si $n < k$, alors $\exists i$ tel que $\alpha_i \geq 2$, on pose $\alpha_i' = \alpha_i - 1$; l'hypothèse de récurrence sera :*

$$M_n M_{\alpha_1} \cdots M_{\alpha_i'} \cdots M_{\alpha_n} \leq M_1^{k-1} M_{k-1}$$

d'après (2.1) on a :

$$\begin{aligned} M_n M_{\alpha_1} \cdots M_{\alpha_n} &= M_n M_{\alpha_1} \cdots M_{\alpha_i'} \cdots M_{\alpha_n} \frac{M_{\alpha_i}}{M_{\alpha_i'}} \\ &\leq M_1^{k-1} M_{k-1} \frac{M_k}{M_{k-1}} \\ &\leq M_1^k M_k \end{aligned}$$

Dans tout ce qui suit la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ considérée vérifie les hypothèses (3.1) et (3.2).

2.2 Hypothèses et Résultats

On s'intéresse au problème de Goursat non linéaire au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, On cherche à prouver l'existence et l'unicité d'une solution de type Carleman associée à la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On considère alors le problème de Goursat non linéaire au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$, $y = (y_1, ..., y_q) \in \mathbb{R}^q$

$$\begin{cases} D_x^\alpha u(x,y) = f(x,y,D^B u(x,y)), \\ u = O(x^\alpha) \end{cases} \tag{2.3}$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^p$, et B est une partie finie de

$$\{(\gamma,\delta) \in \mathbb{Z}^p \times \mathbb{N}^q ; |\gamma| + |\delta| \leq |\alpha|, \quad \gamma < \alpha\}$$

$D^B u = (D_x^\gamma D_y^\delta u)_{(\gamma,\delta)\in B}$

f est une fonction de $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, $z \in \mathbb{R}^r$ où $r = Card(B)$, qu'on suppose de classe $C^{0,M}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q+r}$; f est donc continue en x et de classe Carleman C^M en (y,z)

Théorème 2.1 *Si $\exists\ c_{\gamma,\delta} > 0$ tel que :*

$$\frac{M_{k+|\delta|}}{M_k} \frac{(k+|\delta|)!}{(k-|\gamma|+|\alpha|)!} \leq c_{\gamma,\delta} \quad \forall k \geq 0 \tag{2.4}$$

Alors le problème de Goursat (2.3) admet une solution unique au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$,

Remarque 2.1 *Lorsque $M_n = n!^{d-1}$ ce théorème coïncide avec le théorème 5.1 dans [26] ; dans ce même cas si $d = 1$ le théorème 2.1 est contenu dans le théorème 4.1 du même référence*

en effet $M_n = n!^{d-1}$ on a $\forall k \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{(k+|\delta|)!^{d-1}}{k!^{d-1}} \frac{(k+|\delta|)!}{(k-|\gamma|+|\alpha|)!} &= \frac{(k+|\delta|)^{d-1}\cdots(k+1)^{d-1}}{(k-|\gamma|+|\alpha|)\cdots(k+|\delta|+1)} \\ &\leq \frac{(k+|\delta|)^{(d-1)|\delta|}}{(k+|\delta|)^{-|\gamma|-|\delta|+|\alpha|}} \\ &\leq 1 \quad (\text{ si } |\gamma| + d|\delta| \leq |\alpha|) \end{aligned}$$

Remarque 2.2 *si la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou la suite $(\frac{M_{n+1}}{M_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée on retrouve le cas holomorphe par rapport à y.*
En effet, si $u \in C^{\alpha,M}(\Omega)$ alors

$\forall \gamma \leq \alpha$ *et* $\forall \delta \in \mathbb{N}^q, \exists c > 0, \exists c_4 > 1$ *tel que*

- *Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée :*

$$\sup_\Omega |D_x^\gamma D_y^\delta u(x,y)| \leq c^{|\delta|+1} \delta! M_{|\delta|} \leq (cc_4)^{|\delta|+1} \delta!$$

d'autre part

- Si $(\frac{M_{n+1}}{M_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée :*

$$\begin{aligned}\sup_{\Omega}|D_x^{\gamma}D_y^{\delta}u(x,y)| &\leq c^{|\delta|+1}\delta! M_{|\delta|}\\ &\leq c^{|\delta|+1}\delta!\frac{M_{|\delta|}}{M_{|\delta|-1}}\cdots\frac{M_2}{M_1}\frac{M_1}{M_0}M_0\\ &\leq c^{|\delta|+1}\delta! c_4^{|\delta|+1}\\ &\leq (cc_4)^{|\delta|+1}\delta!\end{aligned}$$

Pour prouver le théorème 2.1 on peut supposer $\alpha = 0$ et $f(0,0) = 0$; il s'agit donc d'étudier le problème

$$u(x,y) = f(x,y,D^B u(x,y)) \tag{2.5}$$

et B est un sous ensemble finie de

$$\{(\gamma,\delta)\in\mathbb{Z}^p\mathbb{N}^q; |\gamma|+|\delta|\leq 0, \quad \gamma<0\}$$

et la condition (2.4) devient

$$\frac{M_{k+|\delta|}}{M_k}\frac{(k+|\delta|)!}{(k-|\gamma|)!}\leq c_{\gamma,\delta} \quad \forall k\geq 0 \tag{2.6}$$

Nous allons vérifier que l'application

$$T : u \to f(x,y,D^B u(x,y))$$

est une contraction stricte dans une boule fermée d'une algèbre de Banach, qui sera définie dans le paragraphe suivant en utilisant des séries formelles de type Carleman.

2.3 Séries Formelles

Considérons d'abord une série formelle à q indéterminées $y = (y_1, ..., y_q)$:

$$\Phi = \sum_{\delta\in\mathbb{N}^q}\frac{y^{\delta}}{\delta!}\Phi_{\delta}$$

Étant donné un ouvert Ω de $\mathbb{R}^q$ et une fonction $u \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega,\mathbb{R})$. on note $u \ll \Phi$ la relation

$$\forall\delta\in\mathbb{N}^q, \quad \sup_{\Omega}|D_y^{\delta}u|\leq\Phi_{\delta}$$

On a bien

$$u \ll \Phi \Rightarrow D_y^\delta u \ll D_y^\delta \Phi \text{ pour tout } \delta \in \mathbb{N}^q$$

De plus, ce formalisme sera bien adapté pour majorer une fonction composée, Soient Ω' un ouvert de $\mathbb{R}^r$, $u = (u_i)_{1\leq i\leq r} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^r)$ tels que $u(\Omega) \subset \Omega'$; Si

$$u_i \ll \Phi_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq r \qquad \text{et} \qquad v \ll \Psi$$

donc on a

$$v \circ u \ll \Psi([\Phi_1], \cdots, [\Phi_r]).$$

Étant donné un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$.
Notons $\mathcal{C}^{0,\infty}(\mathcal{U} \times \Omega)$ l'algèbre des fonctions $u : \mathcal{U} \times \Omega \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles continues par rapport à y

$$D_y^\delta u : \mathcal{U} \times \Omega \to \mathbb{R}, \quad \forall \delta \in \mathbb{N}^q$$

Pour assurer que les coefficients de y dans Φ ne prennent que des valeurs positives. Posons $t = |x| = (|x_1|, \cdots, |x_p|)$; notons $|\mathcal{U}|$ l'image de $\mathcal{U}$ par l'application $x \to |x|$ considérons la séries formelle en y :

$$\Phi \equiv \Phi(t, y) = \sum_{\delta\in\mathbb{N}^q} \frac{y^\delta}{\delta!} \Phi_\delta(t)$$

où les fonctions $\Phi_\delta : |\mathcal{U}| \to \mathbb{R}_+$ sont continues.

On considère alors le sous espace

$$\mathcal{C}_\Phi^{0,\infty}(\mathcal{U} \times \Omega) = \{u \in \mathcal{C}^{0,\infty}(\mathcal{U} \times \Omega); \exists c \geq 0 : u \ll c\Phi\}$$

et on le munit de la norme

$$\|u\| = \|u\|_\Phi = \min\{c \geq 0; u \ll c\Phi\}$$

Remarque 2.3 *Dire que* $u \in \mathcal{C}_\Phi^{0,\infty}$ *signifie donc*

$$\forall \delta \in \mathbb{N}^q, \forall x \in \mathcal{U}, \sup_{\Omega} |D_y^\delta u(x, y)| \leq \|u\| \Phi_\delta(t) \quad (\text{où} \quad t = |x|) \tag{2.7}$$

Proposition 2.1 *[26]*
L'espace $\mathcal{C}_\Phi^{0,\infty}$ *est un espace de Banach.*

Dans ce qui suit, on va prendre des primitives par rapport à x_i, et pour faciliter le travail on ajoute l'hypothèse

$$x \in \mathcal{U} \Rightarrow \lambda x \in \mathcal{U} \text{ pour tout } \lambda \in [0,1]^p \tag{2.8}$$

où $\lambda x = (\lambda_1 x_1, \cdots, \lambda_p)$, et évidemment $|\mathcal{U}|$ conserve la même propriété

Pour $(\gamma, \delta) \in (-\mathbb{N})^p \times (\mathbb{N})^q$, on définit la série formelle

$$D_t^\gamma D_y^\delta \Phi(t,y) = \sum_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{N}^q \\ \varepsilon \geq \delta}} \frac{y^{\varepsilon-\delta}}{(\varepsilon-\delta)!} D_t^\gamma \Phi_\varepsilon(t), \qquad t \in |\mathcal{U}|$$

tel que $D_{t_i}^{-1}$ désigne la primitive par rapport à t_i qui s'annule avec t_i

On a alors : pour tout $u \in \mathcal{C}_\Phi^{0,\infty}(\mathcal{U} \times \Omega)$ et pour tout $(\gamma, \delta) \in (-\mathbb{N})^p \times (\mathbb{N})^q$ on a

$$D_t^\gamma D_y^\delta u \leq \|u\|_\Phi D_t^\gamma D_y^\delta \Phi \tag{2.9}$$

Considérons la série formelle dépendant de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et des paramètres

$$\xi = (\xi_i)_{1\leq i\leq p} \in (\mathbb{R}_+^*)^p, \qquad \zeta = (\zeta_i)_{1\leq i\leq q} \in (\mathbb{R}_+^*)^q \text{ et } R > 0$$

suivante

$$\Phi_R^M(t,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta.y)^k}{k!} M_k D^k \phi_R(\xi.t) \tag{2.10}$$

où $\xi.t = \sum_{i=1}^{p} \xi_i t_i$, $\zeta.y = \sum_{i=1}^{q} \zeta_i y_i$; cette série formelle est bien définie pour

$$t \in |\mathcal{U}_R| \quad \text{où} \quad |\mathcal{U}_R| = \{x \in \mathbb{R}^p ; \xi|x| < R\}$$

L'espace de Banach associé à la série formelle Φ_R^M sera noté $C_R^M(\Omega_R)$ avec $\Omega_R = \mathcal{U}_R \times \Omega$

$$i.e.\ C_R^M(\Omega_R) = \{u \in \mathcal{C}^{0,\infty}(\Omega_R) ; \exists c \geq 0 : u \ll c\Phi_R^M\}$$

Notons que

$$\frac{(\zeta.y)^k}{k!} = \sum_{\substack{\delta\in\mathbb{N}^q \\ |\delta|=k}} \frac{\zeta^\delta y^\delta}{\delta!} \text{binôme de Newton généralisé} \tag{2.11}$$

D'après 2.7 et (2.11) on peut redéfinir les éléments de $C_R^M(\Omega_R)$ comme suit

$$u \in C_R^M(\Omega_R) \Leftrightarrow \forall \delta \in \mathbb{N}^q, \forall x \in \mathcal{U}, \sup_\Omega |D_y^\delta(x,y)| \leq \|u\| \zeta^\delta M_{|\delta|} D^{|\delta|} \phi_R(\xi.t) \tag{2.12}$$

Remarque 2.4 *On obtient* Φ_R^M *en faisant un développement de Taylor de à fonction*

$$y \to \phi_R(\xi.t + \zeta.y)$$

ensuite en lui appliquant l'opérateur C *suivant*

$$C\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k M_k X^k$$

Indiquons maintenant les relations entre $C^{0,M}$ et C_R^M

Lemme 2.3 *Pour* $0 < R' < R$ *on a*

$$C_R^M(\Omega_R) \subset C^{0,M}(\Omega_{R'})$$

Pour établir l'inclusion inverse, on utilise la version Carleman du lemme 1.1 et une série formelle Θ_R^M définie par :

$$\Theta_R^M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{R^k} M_k \tag{2.13}$$

Lemme 2.4 *Pour tout* $\eta > 1$, *il existe une constante* $c = c(\eta) > 0$ *telle que*

$$\Theta_{\eta R}^M(\zeta.y) \ll c\Phi_R^M(t, y)$$

Lemme 2.5 *Si* $c\eta R \leq \min_{1\leq i\leq p} \zeta_i$; *Alors*

$$C^{0,M}(\Omega_R) \subset C_R^M(\Omega_R)$$

où c est la constante du lemme 2.4

Preuve du lemme :

Soit $u \in C^{0,M}(\Omega_R)$, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathcal{U}_R$

$$\begin{aligned}\sup_{\Omega} |D_y^\delta(x, y)| &\leq c^{|\delta|+1} |\delta|! M_{|\delta|} \\ &\leq c\frac{\zeta^\delta}{(\eta R)^{|\delta|}} |\delta|! M_{|\delta|}\end{aligned}$$

ce qui signifie que $\forall x \in \mathcal{U}_R, u(x, y) \ll c\Theta_{\eta R}^M(\zeta.y)$

et d'après le lemme précédente on a pour tout $x \in \mathcal{U}_R$

$$u(x, y) \ll c\Theta_{\eta R}^M \ll c\Phi_R^M(t, y)$$

On aura besoin de quelques propriétés de l'espace C_R^M qu'on va étudier.

Pour toute série formelle

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$$

on pose

$$[\phi] = \phi - \phi(0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X^k \quad \text{et} \quad \phi^M = \sum_{k=0}^{\infty} a_k M_k X^k$$

On a alors

Lemme 2.6 *Soit* $\phi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ *une série formelle* $\gg 0$ *telle que* $\phi^2 \ll \phi$*. on a*

$$(\phi^M)^2 \ll \phi^M \tag{2.14}$$

$$[\phi^M]^n \ll \frac{M_1^n}{M_n}[\phi^M] \text{ pour tout } n \geq 1 \tag{2.15}$$

Comme étant donné pour tout $t \in |\mathcal{U}_R| \quad \phi_R^2(\xi.t + \zeta.y) \ll \phi_R(\xi.t + \zeta.y)$, on peut appliquer le lemme précédent à la série formelle Φ_R^M

Grâce à la propriété (2.15), qui peut majorer la composée de deux fonctions de classe de Carlaman. On a donc :

Corollaire 2.1 *Les espaces* $C_R^M(\Omega_R)$ *sont des algèbres de Banach.*

Preuve :

La démonstration est un résultat direct des propositions 0.1, 2.1 et de l'inégalité (2.14)

Corollaire 2.2 *Pour* $0 \leq cM_1 < R'$*, on a*

$$\Theta_{R'}^M \circ [c\Phi_R^M] \ll \max(K, \frac{cM_1}{R' - cM_1})\Phi_R^M$$

Preuve :

D'après (2.15) du lemme 2.6 on a

$$\begin{aligned}\Theta_{R'}^M \circ [c\Phi_R^M] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{R'^n} M_n [\Phi_R^M]^n &\ll 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(cM_1)^n}{R'^n}[\Phi_R^M] \\ &\ll 1 + \frac{cM_1}{R' - cM_1}[\Phi_R^M] \\ &\ll \max(K, \frac{cM_1}{R' - cM_1})\Phi_R^M\end{aligned}$$

car

$$1 = K\phi_R(0) \ll K\phi_R(\xi.t) = K\Phi_R^M(t,0)$$

ce qui termine la démonstration.

Théorème 2.2 *[23]*

Soit $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite logarithmiquement convexe, I un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, alors il existe une fonction $\nu(x) \in C^M(I)$ telle que $|\nu^{(k)}(0)| \geq k!M_k$ pour $k \in \mathbb{N}$

Preuve :

Voir le théorème 1 dans [23] ou bien la proposition 3.1.2 dans [22].

Corollaire 2.3 *Il exist une fonction $g \in C^{0,M}(\Omega_R)$ telle que $|D_y^\delta g(0,0)| \geq \delta! M_{\delta_1} M_{\delta_2} \cdots M_{\delta_q}, \forall \delta \in \mathbb{N}^q$.*

Preuve :

Pour I convenablement choisit

Considérons $g(x,y) = \nu(y_1)\nu(y_2)\cdots\nu(y_q)$, on a bien $g \in C^{0,M}(\Omega_R)$ en effet $\forall x \in \mathcal{U}_{\mathcal{R}}$ on a

$$\begin{aligned}
\sup_\Omega |D_y^\delta g(x,y)| &= \sup_\Omega |\nu^{(\delta_1)}(y_1)\nu^{(\delta_2)}(y_2)\cdots\nu^{(\delta_q)}(y_q)| \\
&\leq \left(c^{\delta_1+1}\delta_1! M_{\delta_1}\right)\left(c^{\delta_2+1}\delta_2! M_{\delta_2}\right)\cdots\left(c^{\delta_q+1}\delta_q! M_{\delta_q}\right) \\
&\leq c^{|\delta|+q}\delta! M_{|\delta|} \\
&\leq (\max(c^q, c))^{|\delta|+1}\delta! M_{|\delta|}
\end{aligned}$$

et

$$|D_y^\delta g(0,0)| = |\nu^{(\delta_1)}(0)\nu^{(\delta_2)}(0)\cdots\nu^{(\delta_q)}(0)| \geq \delta! M_{\delta_1} M_{\delta_2}\cdots M_{\delta_q}, \forall \delta \in \mathbb{N}^q$$

Proposition 2.2 *[23]*

L'espace $C^{0,M}(\Omega_R)$ est stable par dérivation par rapport à la deuxième variable y si et seulement si l'hypothèse (2.2) est vérifiée

Preuve :

Supposons que $\sup_k \left(\dfrac{M_{k+1}}{M_k}\right)^{\frac{1}{k}}$ n'est pas borné.

On choisit une fonction g comme dans 2.3, alors la stabilité de l'espace $C^{0,M}(\Omega_R)$ par dérivation par rapport à la deuxième variable y implique qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\forall \delta, \delta' \in \mathbb{N}^q$ avec $\delta = (\delta'_1, \cdots, \delta'_i + 1, \cdots, \delta'_q)$ où i arbitraire, on a

$$\frac{|D_y^\delta g(x,y)|}{\delta'!M_{|\delta'|}} \leq c^{|\delta'|+1} \tag{2.16}$$

d'autre part, d'après le corollaire 2.3 on a $|D_y^\delta g(0,0)| \geq \delta! M_{\delta_1} M_{\delta_2} \cdots M_{\delta_q}, \forall \delta \in \mathbb{N}^q$ d'où

$$\frac{|D_y^\delta g(0,0)|}{\delta'!M_{|\delta'|}} \geq \frac{\delta! M_{\delta_1} M_{\delta_2} \cdots M_{\delta_q}}{\delta'!M_{|\delta'|}} \tag{2.17}$$

En particulier pour $\delta' = (0,\cdots,\delta'_i,\cdots,0)$ et $\delta = (0,\cdots,\delta'_i+1,\cdots,0)$ alors (2.16) devient

$$\frac{|D_{y_i}^{\delta'_i+1} g(x,y)|}{\delta'_i!M_{\delta'_i}} \leq c^{\delta'_i+1}$$

et (2.17) devient

$$\begin{aligned}\frac{|D_{y_i}^{\delta'_i+1} g(0,0)|}{\delta'_i!M_{\delta'_i}} &\geq \frac{\delta! M_0 \cdots M_{\delta_i} \cdots M_0}{\delta'_i!M_{\delta'_i}} \\ &\geq \frac{\delta_i! M_{\delta_i}}{\delta'_i!M_{\delta'_i}} = (\delta'_i+1)\frac{M_{\delta'_i+1}}{M_{\delta'_i}}\end{aligned}$$

D'où

$$\sup_{\delta'_i}\left(\frac{|D_{y_i}^{\delta'_i+1} g(0,0)|}{\delta'_i!M_{\delta'_i}}\right)^{\frac{1}{\delta'_i}} \geq \sup_{\delta'_i}\left\{(\delta'_i+1)^{\frac{1}{\delta'_i}}\left(\frac{M_{\delta'_i+1}}{M_{\delta'_i}}\right)^{\frac{1}{\delta'_i}}\right\}$$

mais $\sup_{\delta'_i}\left(\frac{M_{\delta'_i+1}}{M_{\delta'_i}}\right)^{\frac{1}{\delta'_i}}$ est non borné par hypothèse et $\lim_{\delta'_i\to\infty}(\delta'_i+1)^{\frac{1}{\delta'_i}} = 1$ d'où $\sup_{\delta'_i}\left(\frac{|D_{y_i}^{\delta'_i+1} g(0,0)|}{\delta'_i!M_{\delta'_i}}\right)^{\frac{1}{\delta'_i}}$ est non borné, contradiction avec (2.16)

Inversement ; On va établir la démonstration inverse pour une dérivation d'ordre un seulement par rapport à y_i où i arbitraire ; toute généralisation à d'autre ordres de dérivation est évidente

si (2.2) est satisfaite et $f \in C^{0,M}(\Omega)$ donc $\exists c > 0$ tel que

$\forall \delta, \delta' \in \mathbb{N}^q$ tel que $\delta = (\delta'_1,\cdots,\delta'_i+1,\cdots,\delta'_q)$ on a

$$\begin{aligned}\sup_\Omega |D_y^\delta f(x,y)| &\leq c_1^{|\delta|+1}\delta! M_{|\delta|} \\ &\leq c_1^{|\delta|+1} c_2^{|\delta'|}\delta_i \delta'! M_{|\delta'|} \\ &\leq c_1^{|\delta'|+2} c_2^{|\delta'|} c_3^{|\delta'|+1}\delta'! M_{|\delta'|} \\ &\leq c^{|\delta'|+1}\delta'! M_{|\delta'|}\end{aligned}$$

Notons que

$$\delta_i \leq |\delta| \leq e^{|\delta|} \leq c_3^{|\delta'|+1}$$

$$\frac{M_{|\delta|}}{M_{|\delta'|}} \leq c_2^{|\delta'|}$$

$$c_1^{|\delta'|+2} c_2^{|\delta'|} c_3^{|\delta'|+1} \leq c_1^{|\delta'|+1} c_1 c_2^{|\delta'|} c_3^{|\delta'|+1} \leq c_1^{|\delta'|+1} \left(\max(c_1; c_2)\right)^{|\delta'|+1} c_3^{|\delta'|+1}$$

donc on prend

$$c = c_1 c_3 \left(\max(c_1; c_2)\right)$$

Indiquons maintenant comment opèrent les dérivations dans les algèbres C_R^M

Proposition 2.3 *Pour tout $(\gamma, \delta) \in B$ tel que (2.4), il existe une constante $c'_{\gamma,\delta} \geq 0$ telle que $D_x^\gamma D_y^\delta : C_R^M \to C_R^M$ soit linéaire, continue de norme $\leq c'_{\gamma,\delta} \xi^\gamma \zeta^\delta R^{-|\gamma|-|\delta|}$*

Lemme 2.7 *Soit f une fonction : $(x, y, z) \to f(x, y, z)$ de classe $C^{0,M}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q+r}$ alors il existe des fonctions G_σ avec $\sigma \in B$ telles que : $(x, y, z, z') \to G_\sigma(x, y, z, z')$ est de classe $C^{0,M}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q+2r}$ et telle que pour (x, y, z, z') assez petit dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q+2r}$ on a*

$$f(x, y, z) = f(x, y, z') + \sum_{\sigma \in B} G_\sigma(x, y, z, z')(z_\sigma - z'_\sigma)$$

Preuve du lemme :

Pour simplifier l'écriture on introduit la nouvelle variable $z^i \in \mathbb{R}^r$ avec $0 \leq i \leq r$ tel que $z^0 = z$, $z^i = (z'_1, \cdots, z'_i, z_{i+1}, \cdots, z_r)$ et $z^r = z'$

Rappelons que $r = Card(B)$. D'après la formule de Taylor-Lagrange et pour un i arbitraire il existe ξ_{i+1} strictement compris entre z_{i+1} et z'_{i+1} où $z_\xi^{i+1} = (z'_1, \cdots, z'_i, \xi_{i+1}, z_{i+2}, \cdots, z_r)$ tel que

$$\begin{aligned} f(x, y, z^i) - f(x, y, z^{i+1}) &= \frac{\partial f(x, y, z^{i+1})}{\partial z_{i+1}}(z_{i+1} - z'_{i+1}) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(x, y, z_\xi^{i+1})}{\partial z_{i+1}^2}(z_{i+1} - z'_{i+1})^2 \\ &= \left(\frac{\partial f(x, y, z^{i+1})}{\partial z_{i+1}} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(x, y, z_\xi^{i+1})}{\partial z_{i+1}^2}(z_{i+1} - z'_{i+1})\right)(z_{i+1} - z'_{i+1}) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} f(x, y, z) - f(x, y, z') &= \sum_{i=0}^{r-1} f(x, y, z^i) - f(x, y, z^{i+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} \left(\frac{\partial f(x, y, z^{i+1})}{\partial z_{i+1}} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(x, y, z_\xi^{i+1})}{\partial z_{i+1}^2}(z_{i+1} - z'_{i+1})\right)(z_{i+1} - z'_{i+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} G_i(x, y, z, z')(z_{i+1} - z'_{i+1}) \end{aligned}$$

le fait que $G_i(x, y, z, z')$ est de classe $C^{0,M}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q+2r}$ est une conséquence directe de la proposition 2.2

2.4 Démonstration du théorème 2.1

On fixe les valeurs des paramètres $\xi \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ et $\zeta \in (\mathbb{R}_+^*)^q$ selon les besoins rencontrés. On écrit d'après le lemme 2.7

$$f(x,y,z) - f(x,y,z') = \sum_{\sigma \in B} G_\sigma(x,y,z,z')(z_\sigma - z'_\sigma) \tag{2.18}$$

les fonctions G_σ sont de classe $C^{0,M}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q+2r}$

Il existe un voisinage ouvert Ω de l'origine de $\mathbb{R}^q$ et des nombres $h_0 > 0$, $h_1 > 0$ tels que les fonctions f et G_σ soient définies dans l'ouvert

$$\mathcal{D} := \{(x,y,z,z') \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q+2r}; \xi.|x| < h_0, \quad y \in \Omega, \quad |z_\sigma| < h_1, \quad |z'_\sigma| < h_1\}$$

étant donné $\eta > 1$ il existe des constantes $c > 0, R > 0, R' > 0$ telles que pour tout $(x,y,z,z') \in \mathcal{D}$ et pour tout $\delta \in \mathbb{N}^q, \varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{N}^r$:

$$|D_y^\delta D_z^\varepsilon f(x,y,z)| \le c \frac{\zeta^\delta \delta! M_\delta}{(\eta R)^{|\delta|}} \frac{\varepsilon! M_\varepsilon}{R'^{|\varepsilon|}}$$

$$|D_y^\delta D_z^\varepsilon D_{z'}^{\varepsilon'} G_\sigma(x,y,z,z')| \le c \frac{\zeta^\delta \delta! M_\delta}{(\eta R)^{|\delta|}} \frac{\varepsilon! M_\varepsilon}{R'^{|\varepsilon|}} \frac{\varepsilon'! M_{\varepsilon'}}{R'^{|\varepsilon'|}}$$

ceci signifie que pour tout x vérifiant $\xi.|x| < h_0$:

$$f(x,y,z) \ll c\Theta_{\eta R}^M(\zeta.y) \prod_{\sigma \in B} \Theta_{R'}^M(z_\sigma)$$

$$G_\sigma(x,y,z,z') \ll c\Theta_{\eta R}^M(\zeta.y) \prod_{\nu \in B} \Theta_{R'}^M(z_\nu)\Theta_{R'}^M(z'_\nu)$$

D'après le lemme 2.4 on a :

Il existe un $R_0 > 0$ tel que pour tout $R \in]0, R_0]$ on ait

$$\begin{cases} f(x,y,z) \ll c\Phi_R^M(t,y) \prod_{\sigma \in B} \Theta_{R'}^M(z_\sigma) \\ G_\sigma(x,y,z,z') \ll c\Phi_R^M(t,y) \prod_{\nu \in B} \Theta_{R'}^M(z_\nu)\Theta_{R'}^M(z'_\nu) \end{cases} \tag{2.19}$$

On a alors :

Proposition 2.4 *Il existe $a_0 > 0$ tel que, pour tout $a \ge a_0$ et tout $R \in]0, R_0]$ suffisamment petit, l'application*

$$T : u \to f(x,y,D^B u(x,y))$$

est une contraction stricte dans la boule fermée $B'(0;a)$ de l'algèbre de Banach $C_R^M(\Omega_R)$

Preuve de la proposition :

Soit $u \in B'(0;a) \subset C_R^M(\Omega_R)$, $0 < R \leq R_0$, on $|\gamma| + |\delta| < 0$ pour tout $(\gamma, \delta) \in B$, car si $|\gamma| + |\delta| = 0$ la suite $\dfrac{M_{k+1}}{M_k}$ soit bornée, c'est le cas holomorphe, voir la remarque 2.2,

Alors la proposition 2.3 montre qu'il existe une fonction $\varepsilon :]0, R_0] \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\lim_{R \to 0} \varepsilon(R) = 0$$

et

$$z_\sigma = D_x^\gamma D_y^\delta u \ll a\varepsilon(R)\Phi_R^M(t,y), \forall \sigma = (\gamma, \delta) \in B$$

d'où

$$\sup_\Omega |D_x^\gamma D_y^\delta u(x,y)| \leq a\varepsilon(R)\phi_R(\xi.|x|) \text{ pour } \xi.|x| < R$$

comme $\phi_R(\xi.|x|) \leq \phi_R(R) = \phi_1(1)$ d'où l'existence d'une constante $c_1 > 0$ pour laquelle la condition

$$a\varepsilon(R) \leq c_1 \tag{2.20}$$

affirme que les fonctions $f(x,y,D^B u(x,y)), G_\sigma(x,y,D^B u(x,y), D^B u'(x,y))$ soient bien définies dans Ω_R lorsque $u, u' \in B'(0;a)$.

d'après (2.20), le corollaire 2.2 et en choisissant convenablement R, on a :

$$\Theta_{R'}^M \circ [a\varepsilon(R)\Phi_R^M] \ll K\Phi_R^M$$

finalement grâce à (2.19) on en déduit que

$$Tu = f(x,y,D^B u) \ll c_2 \Phi_R^M(t,y)$$

ce qui prouve que $T(B'(0;a)) \subset B'(0;a)$ si

$$c_2 \leq a \tag{2.21}$$

De plus, si $u, u' \in B'(0;a)$, on a

$$z_\nu - z'_\nu = D_x^\gamma D_y^\delta (u - u') \ll \|u - u'\|\varepsilon(R)\Phi_R^M(t,y), \quad \nu = (\gamma, \delta) \in B$$

d'où

$$Tu - Tu' \ll c_3\varepsilon(R)\|u - u'\|\Phi_R^M(t,y)$$

donc T est une contraction stricte si $c_3\varepsilon(R) < 1$.

pour que $T : B'(0;a) \to B'(0;a)$ soit une contraction stricte, il suffit que

$$a\varepsilon(R) \leq c_1, \quad c_2 \leq a, \quad c_3\varepsilon(R) < 1$$

comme on peut prendre R suffisamment petit pour satisfaire la première et la troisième inégalité la démonstration sera terminée en prenant $a_0 = c_2$

La proposition 2.4, le corollaire 2.1 et le théorème de point fixe de Banach 0.1 prouve l'existence mais dans l'espace C_R^M et avec le lemme 2.3 on conclue.

Pour l'unicité, on raisonne comme suit :

- ▶ Soit u, u' deux fonctions de classe $C^{0,M}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ telles que $u = f(x, y, D^B u), u' = f(x, y, D^B u')$, alors il existe un voisinage ouvert $O \subset \Omega$ de l'origine de $\mathbb{R}^q$ et un nombre $R_1 \in]0, R_0]$ tels que $u, u' \in C_{R_1}^M(O_{R_1})$.

- ▶ Donc pour tout $R \in]0, R_1]$ on a $u, u' \in C_R^M(O_R)$, et si on note $\| \cdot \|_R$ la norme de l'espace $C_R^M(O_R)$ alors :
$$\|u\|_R \leq \|u\|_{R_1}, \quad \|u'\|_R \leq \|u'\|_{R_1}$$

- ▶ On choisit alors $a \geq \max(a_0, \|u\|_{R_1}, \|u'\|_{R_1})$,et $R \in]0, R_1]$ suffisamment petit pour que T soit une contraction stricte dans la boule fermée $B'(0; a) \subset C_R^M(O_R)$

- ▶ Finalement T a deux point fixes u et u' ce qui prouve l'égalité dans $O_{R'}$ □

CHAPITRE 3

PROBLEME DE GOURSAT NON LINÉAIRE HOLOMORPHE-CARLEMAN

3.1 L'espace des fonctions Holomorphe-Carleman

Définition 3.1 *soit Ω ouvert de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q$,$x = (x_1, .., x_p) \in \mathbb{C}^p, \quad y = (y_1, .., y_p) \in \mathbb{R}^q$, on note $C^{\omega,\infty}(\Omega)$ l'algèbre des fonctions $u : \Omega \to \mathbb{C}$, holomorphe en x admettant $\forall \delta \in \mathbb{N}^q$ des dérivées partielles continues $D_y^\delta u$,*

On note $C^{\omega,M}(\Omega)$ sous algèbre de $C^{\omega,\infty}(\Omega)$
telles que $\exists c > 0$:

$$\forall \delta \in \mathbb{N}^q, \quad |D_y^\delta u(x, y)| \leq c^{|\delta|+1}\delta! M_{|\delta|}$$

La suite M_k satisfaire les hypothèses suivantes

1. *$M = (M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ logarithmiquement convexe,*

$$i.e.\ M_k^2 \leq M_{k-1}M_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

   et $M_0 = 1$

2. $$\sup_k \left(\frac{M_{k+1}}{M_k}\right)^{\frac{1}{k}} < \infty, \quad k \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

de telles fonctions sont holomorphe en x et Carleman en y.

3.2 Résultats et hypothèses

On s'intéresse au probleme de Goursat non linéaire au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q$, on cherche à prouver l'existence et l'unicité d'une solution de type Holomorphe-Carleman associe à la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On considère le probleme de Goursat non linéaire au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q$ tel que : $\quad x = (x_1, .., x_p) \in \mathbb{C}^p, \quad y = (y_1, .., y_p) \in \mathbb{R}^q$

$$\begin{cases} D_x^\alpha u(x,y) = f(x, y, D^B u(x,y)), \\ u = O(x^\alpha) \end{cases} \tag{3.3}$$

$\alpha \in \mathbb{N}^p$, B une partie finie de l'ensemble

$$\{(\gamma, \delta) \in \mathbb{Z}^p \times \mathbb{N}^q; \quad |\gamma| + |\delta| \leq |\alpha|; \quad (\gamma, \delta) \neq (\alpha, 0)\}$$

$$D^B = (D_x^\gamma D_y^\delta)_{(\gamma,\delta)\in B}$$

La fonction f est de $x \in \mathbb{C}^p, \quad y \in \mathbb{R}^q, \quad z \in \mathbb{C}^r, \quad r = \mathrm{card}(B)$, qu'on suppose holomorphe en (x, z) et de classe Carleman en y, $u = O(x^\alpha)$ signifie que $u(x, y) = x^\alpha g(x, y)$, où g est de classe $C^{w,M}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q$.

On pose

$$A_\sigma = D_{z_\sigma} f(0, 0, 0); \quad \sigma = (\gamma, \delta) \in B$$

et pour tout $\xi = (\xi_1, ..., \xi_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$:

$$\rho(\xi) = \sum_{\substack{|\gamma|+|\delta|=|\alpha| \\ (\gamma,\delta)\in B}} |A_{(\gamma,\delta)}| \xi^{\gamma-\alpha} \zeta^\delta \tag{3.4}$$

Théorème 3.1 *1. si*

$$\exists c_{\gamma,\delta} > 0 \quad \textit{tel que} \quad , \frac{M_{k+|\delta|}}{M_k} . \frac{(k + |\delta|)!}{(k - |\delta| + |\alpha|)!} \leq c_{\gamma,\delta}, \quad \forall \quad k \geq 0 \tag{3.5}$$

2. si

$$\exists \xi \in (\mathbb{R}_+^*)^p \quad \textit{tel que} \quad \rho(\xi) < 1 \tag{3.6}$$

Alors le probleme (3.3) admet une unique solution de classe $C^{\omega,M}(\Omega)$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q$.

Pour montrer le théorème (3.1) on peut supposer $\alpha = 0$ et $f(0, y, 0) = 0$ il s'agit donc d'étudier le probleme :

$$u(x, y) = f(x, y, D^B u(x, y))$$

$$B \subset \{(\gamma, \delta) \in \mathbb{Z}^p \times \mathbb{N}^q; \quad |\gamma| + |\delta| \leq 0; \quad (\gamma, \delta) \neq (0, 0)\}$$

avec l'hypothèse

$$\rho(\xi) = \sum_{\substack{|\gamma|+|\delta|=0 \\ (\gamma,\delta)\in B}} |A_{(\gamma,\delta)}|\xi^\gamma \zeta^\delta < 1 \tag{3.7}$$

Par ailleurs, si $(\gamma, \delta) \in B$, il existe nécessairement une composante $\gamma_j < 0$ en il résulte que, pour tout u, on a $D^B u(0, y) = 0$ pour tout y. En prenant $u - f(0, y, 0)$ comme nouvelle inconnue, on peut donc supposer

$$f(0, y, 0) = 0, \quad \text{pour tout} \quad y \tag{3.8}$$

Toute solution u de l'équation $u = f(x, y, D^B u)$ vérifie alors

$$u(0, y) = 0 \tag{3.9}$$

On va montrer donc que l'application $T : u \longrightarrow Tu = f(x, y, D^B u)$ est une contraction stricte dans une boule fermée d'une algèbre de Banach qu'on va définir dans le paragraphe suivant en utilisant des séries formelles de type Carleman.

3.3 Séries formelles

Considérons d'abord une série formelle à q indéterminées $y = (y_1, ..., y_q) \in \mathbb{R}^q$ à coefficients dans l'anneaux des séries entières convergentes en x suivante :

$$\Phi = \Phi(x, y) = \sum_{\delta\in\mathbb{N}^q} \frac{y^\delta}{\delta!} \Phi_\delta(x)$$

où Φ_δ est une série convergente qui majore 0, on supposera qu'il existe un voisinage ouvert U de l'origine de $\mathbb{C}^p$ tel que toutes les séries Φ_δ convergent.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $u \in C^{\omega,\infty}(U \times \Omega)$. On note

$$u \ll \Phi$$

la relation de majoration suivante :

$$\forall \delta \in \mathbb{N}^q, \quad \forall y \in \Omega, \qquad D_y^\delta u(x,y) \ll \Phi_\delta(x)$$

où cette dernière inégalité est au sens des fonctions majorantes en x,
ceci signifie

$$\forall (\gamma, \delta) \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^q; \quad \forall y \in \Omega : \quad |D_x^\gamma D_y^\delta u(0,y)| \leq D_x^\gamma \Phi_\delta(0) \tag{3.10}$$

Proposition 3.1 *[26]*
Si $\Psi(x,y) = \sum_{\delta \in \mathbb{N}^q} \frac{y^\delta}{\delta!} \Psi_\delta(x)$ *est une série formelle ayant les mêmes propriétés que* Φ*,*
et si $u, v \in C^{\omega,\infty}(U \times \Omega)$*,* $\quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ *on a bien entendu*

$$u \ll \Phi \quad et \quad v \ll \Psi \Rightarrow \lambda u + \mu v \ll |\lambda|\Phi + |\mu|\Psi \qquad et \quad uv \ll \Phi\Psi \tag{3.11}$$

En notant $\Phi \ll \Psi$ *la relation* $\Phi_\delta \ll \Psi_\delta$ *pour tout* $\delta \in \mathbb{N}^q$*, on a*

$$u \ll \Phi \quad et \quad \Phi \ll \Psi \Rightarrow u \ll \Psi \tag{3.12}$$

Indiquons également la propriété élémentaire

$$u \ll \Phi \Rightarrow \quad pour\ tout \quad (\gamma, \delta) \in \mathbb{Z}^p \times \mathbb{N}^q, D_x^\gamma D_y^\delta u \ll D_x^\gamma D_y^\delta \Phi \tag{3.13}$$

où

$$D_x^\gamma D_y^\delta \Phi(x,y) = \sum_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{N}^q \\ \varepsilon \geqq \delta}} D_x^\gamma \Phi_\varepsilon(x) \frac{y^{\varepsilon - \delta}}{(\varepsilon - \delta)!} \tag{3.14}$$

Considérons alors le sous espace

$$C_\Phi^{\omega,\infty}(U \times \Omega) = \{u \in C^{\omega,\infty}(U \times \Omega); \quad \exists c \geqq 0; \quad u \ll c\Phi\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_\Phi = min\,\{c \geqq 0; \quad u \ll c\Phi\}$$

Proposition 3.2 *[26]*
Les espaces $C_\Phi^{\omega,\infty}$ *sont des espaces de Banach.*

Preuve

On a bien l'espace $\mathcal{C}^{w,\infty}(U \times \Omega)$ muni de la topologie de la convergence compacte de toutes les dérivées D_y^δ ($\delta \in \mathbb{N}^q$) est complet, en outre c'est un espace de Fréchet, on a l'inégalité suivante :

$$\sup_K \sup_\Omega |D_y^\delta u(x,y)| \leq \|u\|_\Phi \sup_{|K|} \Phi_\delta(|x|)$$

pour tout compacte $K \subset U$, ce qui signifie que l'injection canonique de $\mathcal{C}_\Phi^{w,\infty}$ dans $C^{w,\infty}$ est continue.

Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $C_\Phi^{w,\infty}$, d'après l'injection précédente elle converge donc dans $C^{w,\infty}$ vers $u \in C^{w,\infty}$.
Il reste à montrer que $u \in C_\Phi^{w,\infty}$

Ce qui est possible car : $u_p \in C_\Phi^{w,\infty}$ signifie que :

$$|D_x^\gamma D^\delta u_p(0,y)| \leq c D_x^\gamma \Phi_\delta(0)$$

En faisant tendre p vers l'infini et comme l'opérateur $D_x^\gamma D^\delta$ est continue alors,

$$|D_x^\gamma D^\delta u(0,y)| \leq c D_x^\gamma \Phi_\delta(0)$$

ce qui prouve que $u \in C_\Phi^{w,\infty}$

Nous utilisons la série formelle dépendante de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et des paramètres :
$\xi = (\xi_1, ..., \xi_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p, \qquad \zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_q) \in (\mathbb{R}_+^*)^q$

$$\Phi_R^M(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta.y)^k}{k!} M_k D^k \varphi_R(\xi.x)$$

où les séries de Taylor des fonctions $x \longrightarrow D^k\varphi_R(\xi.x)$ convergent lorsque

$$x \in U_R = \{x \in \mathbb{C}^p; \quad \xi.|x| < R\}$$

Posons $\Omega_R = U_R \times \Omega$

L'espace de Banach associe à Φ_R^M sera noté $C_R^{\omega,M}(\Omega_R)$

$$C_R^{\omega,M}(\Omega_R) = \left\{u \in C^{\omega,\infty}(\Omega_R); \quad \exists c \geqq 0; \quad u \ll c\Phi_R^M\right\}$$

$u \in C_R^{\omega,M}(\Omega_R)$ signifie que

$$\forall \delta \in \mathbb{N}^q, \quad \forall y \in \Omega, \qquad D_y^\delta u(x,y) \ll \|u\| \zeta^\delta M_{|\delta|} D^{|\delta|} \varphi_R(\xi.x) \tag{3.15}$$

avec $\dfrac{(\zeta.y)^k}{k!} = \sum\limits_{\substack{\delta \in \mathbb{N}^q \\ |\delta|=k}} \dfrac{\zeta^\delta y^\delta}{\delta!}$ c'est le binôme de Newton généralisé.

Lemme 3.1 *On a* $C_R^{\omega,M}(\Omega_R) \subset C^{\omega,M}(\Omega_{R'})$ *pour tout* $0 < R' < R$.

Preuve

On a

$$\varphi_R(t) = K^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{R^k (k+1)^2}$$

d'où

$$D^{|\delta|} \varphi_R(t) = \frac{K^{-1}}{R^{|\delta|}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+|\delta|)!}{m! R^m (m+|\delta|+1)^2} t^m$$

de

$$\frac{t^m}{m!} = \frac{(\xi.x)^m}{m!} = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^p \\ |\beta|=m}} \frac{\xi^\beta x^\beta}{\beta!}$$

on a

$$D^{|\delta|} \varphi_R(\xi.x) = \frac{K^{-1}}{R^{|\delta|}} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^p} \frac{(|\beta|+|\delta|)!}{R^{|\beta|} \beta! (|\beta|+|\delta|+1)^2} \xi^\beta x^\beta$$

et de

$$D_x^\gamma D^{|\delta|} \varphi_R(\xi x) = \frac{K^{-1} \xi^\gamma}{R^{|\gamma|+|\delta|}} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^p} \frac{(|\gamma|+|\delta|+|\alpha|)!}{R^{|\alpha|} \alpha! (|\alpha|+|\gamma|+|\delta|+1)^2} \xi^\alpha x^\alpha$$

on a

$$D_x^\gamma D^{|\delta|} \varphi_R(0) = \frac{K^{-1} \xi^\gamma}{R^{|\gamma|+|\delta|}} . \frac{(|\gamma|+|\delta|)!}{(|\gamma|+|\delta|+1)^2}$$

$$|D_y^\delta u(x,y)| = |\sum_{\gamma \in \mathbb{N}^p} \frac{D_x^\gamma D_y^\delta u(0,y) x^\gamma}{\gamma!}| \leq \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^p} \frac{|D_x^\gamma D_y^\delta u(0,y)| |x|^\gamma}{\gamma!}$$

d'autre part, en utilisant (3.10)

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^p} \frac{|D_x^\gamma D_y^\delta u(0,y)| |x|^\gamma}{\gamma!} &\leq \|u\| \zeta^\delta M_{|\delta|} . \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^p} \frac{K^{-1} \xi^\gamma}{R^{|\gamma|+|\delta|}} . \frac{(|\gamma|+|\delta|)! |x|^\gamma}{(|\gamma|+|\delta|+1)^2 \gamma!} = D^{|\delta|} \varphi_R(\xi |x|) \\ &\leq \|u\| \zeta^\delta M_{|\delta|} D^{|\delta|} \varphi_R(\xi |x|) \end{aligned}$$

Par suite comme $D^{|\delta|} \varphi_R(\xi|x|)$ est analytique dans $\{x \in \mathbb{C}^p; \quad \xi|x| < R\}$, $\exists R'; \quad 0 < R' < R$ tel que

$$\forall x \in \Omega_{R'} = \left\{ x \in \mathbb{C}^p; \quad \xi|x| \leq R' \right\}$$

donc

$$D^{|\delta|}\varphi_{R'}(\xi|x|) \leq c^{|\delta|+1}|\delta|!$$

d'ou

$$|D_y^{\delta}u(x,y)| \leq \|u\|\zeta^{\delta}M_{|\delta|}|c^{|\delta|+1}|\delta|!$$

Posons $C = max\,\{\|u\|, \zeta_i; \quad (1 \leq i \leq q)\}$

$$|D_y^{\delta}u(x,y)| \leq C^{|\delta|+1}|\delta|!M_{|\delta|}$$

ce qui implique que $u \in C^{\omega,M}(\Omega'_R)$

Lemme 3.2 *[26]*

$\forall\eta > 1$, il existe $c = c(\eta)$ telle que

$$\frac{\eta R}{\eta R - t} \ll cR^k\frac{1}{k!}D^k\varphi_R(t) \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Preuve

D'après le lemme 1.1, il existe $c = c(\eta) > 0$ tel que :

$$\frac{\eta R}{\eta R - t} \ll c\varphi_R(t)$$

d'où par dérivation :

$$\frac{\eta R \times k!}{(\eta R - t)^{k+1}} \ll cD^k\varphi_R(t)$$

On a

$$D^k\varphi_R(t) = K^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+k)!t^m}{m!R^{m+k}(m+k+1)^2}$$

$$D^k\left(\frac{\eta R}{\eta R - t}\right).\frac{(\eta R)^k}{k!} = \left(\frac{\eta R}{\eta R - t}\right)^{k+1}$$

il faut établir la majoration suivante : $\dfrac{\eta R}{\eta R - t} \ll \left(\dfrac{\eta R}{\eta R - t}\right)^{k+1}$:

$$\frac{\eta R}{\eta R - t} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{(\eta R)^m} \ll \left(\frac{\eta R}{\eta R - t}\right)^{k+1} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+k)!t^m}{m!k!\,(\eta R)^m}$$

Il faut avoir l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{(\eta R)^m} \leq \frac{(m+k)!}{m!k!\,(\eta R)^m}$$

est une résultat de

$$m!k! \leq (m+k)!$$

il reste à montrer la majoration suivante :

$$\left(\frac{\eta R}{\eta R - t}\right)^{k+1} \ll c\frac{R^k}{k!}D^k\varphi_R(t)$$

l'inégalité cherchée s'écrit :

$$\frac{(m+k)!}{m!k!(\eta R)^m} \leq c\frac{R^k K^{-1}(m+k)!}{m!k!R^{m+k}(m+k+1)^2}$$

qui est équivalent à :

$$\frac{K(m+k+1)^2}{\eta^k} \leq c$$

qui est vérifié pour

$$c = c(\eta) = \sup_{m,k}\frac{(m+k+1)^2}{\eta^m}$$

Lemme 3.3 *Si* $cR \leqslant \zeta_i; \quad (1 \leqslant i \leqslant q)$ *alors* $C^{\omega,M}(\Omega_R) \subset C_R^{\omega,M}(\Omega_R)$

Preuve

Soit $u \in C^{\omega,M}(\Omega_R); \quad \Omega_R = U_R \times \Omega; \quad U_R = \{x \in \mathbb{C}^p, \quad \xi_i|x_i| < \eta R\}$

alors

$$\forall \delta \in \mathbb{N}^q, \quad \forall y \in \Omega : \quad |D_y^\delta u(x,y)| \leq C^{|\delta|+1}|\delta|!M_{|\delta|} \tag{3.16}$$

d'après l'inégalité de Cauchy 0.3 :

$$|D_x^\gamma D_y^\delta u(0,y)| \leq \sup_{x\in U_R}|D_y^\delta u(x,y)|\frac{\gamma!\xi^\gamma}{(\eta R)^{|\gamma|}}$$

posons $M = \sup_{x\in U_R}|D_y^\delta u(x,y)|$

de (3.16) on trouve

$$|D_x^\gamma D_y^\delta u(0,y)| \leq MC^{|\delta|+1}|\delta|!M_{|\delta|}\frac{\gamma!\xi^\gamma}{(\eta R)^{|\gamma|}}$$

Posons $c = max\{M, C\}$ alors

$$|D_x^\gamma D_y^\delta u(0,y)| \leq c^{|\delta|+1}|\delta|!M_{|\delta|}\frac{\gamma!\xi^\gamma}{(\eta R)^{|\gamma|}}$$

d'où

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^p}\frac{|D_x^\gamma D_y^\delta u(0,y)|}{\gamma!}x^\gamma \ll c^{|\delta|+1}|\delta|!M_{|\delta|}\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^p}\frac{\xi^\gamma x^\gamma}{(\eta R)^{|\gamma|}}$$

on a

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^p}\frac{\xi^\gamma x^\gamma}{(\eta R)^{|\gamma|}} \ll \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^p}\frac{|\gamma|!}{\gamma!}\frac{(\xi.x)^\gamma}{(\eta R)^{|\gamma|}} = \frac{\eta R}{\eta R - \xi.x}$$

d'où $D_y^\delta u(x,y) \ll c^{|\delta|+1}|\delta|!M_{|\delta|}\dfrac{\eta R}{\eta R - \xi.x}$
de lemme (3.2) on résulte

$$D_y^\delta u(x,y) \ll c^{|\delta|+1}|\delta|!M_{|\delta|}\frac{1}{|\delta|!}R^{|\delta|}D^{|\delta|}\varphi_R(\xi x) \ll c\zeta^\delta M_{|\delta|}D^{|\delta|}\varphi_R(\xi x)$$

avec c choisi telle que $cR \leqslant \zeta_i; \quad (1 \leqslant i \leqslant q)$

donc $u \ll c\Phi_R^M(x,y)$, ce qui implique que $u \in C_R^{\omega,M}(\Omega_R)$

Lemme 3.4 *On a :* $(\Phi_R^M)^2 \ll \Phi_R^M$

Preuve

Il suffit de montrer que

$$\sum_{j=0}^{k} M_j M_{k-j}\frac{D^k\varphi_R}{j!}.\frac{D^{k-j}\varphi_R}{(k-j)!} \ll M_k\frac{1}{k!}D^k\varphi_R$$

on a

$$(\varphi_R)^2 \ll \varphi_R \tag{3.17}$$

en appliquant la dérivation sur (3.17)on trouve :

$$D^k(\varphi_R)^2 \ll D^k\varphi_R$$

$$\begin{aligned} D^k(\varphi_R)^2 &= \sum_{j=0}^{k} C_k^j D^k\varphi_R D^{k-j}\varphi_R &\ll& \quad D^k\varphi_R \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!(k-j)!} D^k\varphi_R D^{k-j}\varphi_R &\ll& \quad \frac{1}{k!} D^k\varphi_R \end{aligned} \tag{3.18}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k} M_j M_{k-j} \frac{D^k\varphi_R}{j!} \cdot \frac{D^{k-j}\varphi_R}{(k-j)!} &\ll \sum_{j=0}^{k} M_k \frac{D^k\varphi_R}{j!} \cdot \frac{D^{k-j}\varphi_R}{(k-j)!} \\ &\ll M_k \sum_{j=0}^{k} \frac{D^k\varphi_R}{j!} \cdot \frac{D^{k-j}\varphi_R}{(k-j)!} \end{aligned}$$

D'après (3.18) on a

$$\sum_{j=0}^{k} M_j M_{k-j} \frac{D^k\varphi_R}{j!} \cdot \frac{D^{k-j}\varphi_R}{(k-j)!} \ll M_k \frac{1}{k!} D^k\varphi_R \qquad \text{c.q.d}$$

Corollaire 3.1 *Les espaces $C_R^{\omega,M}(\Omega_R)$ sont des algèbres de Banach.*

Démonstration

De la proposition 3.2 on résulte que les espaces $C_R^{\omega,M}$ sont des espaces de Banach.
Pour montrer que $C_\Phi^{\omega,M}$ forment des algèbres on utilise le Lemme (3.4) et la proposition (3.1).

En effet
si $u, v \in C_R^{\omega,M} \Rightarrow u \ll \|u\|\Phi_R^M$ et $v \ll \|v\|\Phi_R^M$
Alors $uv \ll \|u\|\|v\|(\Phi_R^M)^2 \ll \|u\|\|v\|\Phi_R^M$
D'où

$$uv \ll \|u\|\|v\|\Phi_R^M$$

ce qui implique que $uv \in C_R^{\omega,M}$.

Proposition 3.3 *Pour tout $(\gamma, \delta) \in B$ tel que (3.5) , il existe une constante $c'_{\gamma,\delta} \geq 0$ telle que $D_x^\gamma D_y^\delta : C_R^{\omega,M} \longrightarrow C_R^{\omega,M}$ soit linéaire, continue de norme $\leq c'_{\gamma,\delta}\xi^\gamma\zeta^\delta R^{-|\gamma|-|\delta|}$*

Démonstration.

Soit $u \in C_R^M$, on a d'après(3.14)

$$D_x^\gamma D_y^\delta u \ll \|u\| D_x^\gamma D_y^\delta \Phi_R^M(x, y)$$

D'où

$$D_x^\gamma D_y^\delta u \ll \|u\| \xi^\gamma \zeta^\delta \sum_{k=|\delta|} \frac{(\zeta.y)^{k-|\delta|}}{(k-|\delta|)!} M_k D^{|\gamma|} D^k \phi_R(\xi.x)$$

le développement de Taylor de $D^k \phi_R(\xi.x)$ au voisinage de zéro est

$$D^k \phi_R(\xi.x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\xi.x)^l}{l!} D^{k+l} \phi_R(0)$$

d'après les conditions $|\gamma| + |\delta| \leq 0$, et $(\gamma, \delta) \neq (0,0)$ on a $|\gamma| < 0$ donc l'opérateur $D^{|\gamma|}$ devient une intégration et on a

$$D^{|\gamma|} D^k \phi_R(\xi.x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\xi.x)^{l-|\gamma|}}{(l-|\gamma|)!} D^{k+l} \phi_R(0)$$

d'où

$$D_x^\gamma D_y^\delta u \ll \|u\| \xi^\gamma \zeta^\delta \sum_{k=|\delta|} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\zeta.y)^{k-|\delta|}}{(k-|\delta|)!} M_k \frac{(\xi.x)^{l-|\gamma|}}{(l-|\gamma|)!} D^{k+l} \phi_R(0)$$

en effectuant un changement d'indice tel que $k = j + |\delta|$ et $l - |\gamma| = m$

$$D_x^\gamma D_y^\delta u \ll \|u\| \xi^\gamma \zeta^\delta \sum_{j=o}^{\infty} \sum_{m=-|\gamma|}^{\infty} \frac{(\zeta.y)^j}{j!} M_{j+|\delta|} \frac{(\xi.x)^m}{m!} D^{j+m+|\gamma|+|\delta|} \phi_R(0)$$

et on revient à notre notation, d'où

$$\begin{aligned} D_x^\gamma D_y^\delta u &\ll \|u\| \xi^\gamma \zeta^\delta \sum_{k=o}^{\infty} \sum_{l=-|\gamma|}^{\infty} \frac{(\zeta.y)^k}{k!} M_{k+\delta} \frac{(\xi.x)^l}{l!} D^{k+l+|\gamma|+|\delta|} \phi_R(0) \\ &\ll \|u\| \xi^\gamma \zeta^\delta R^{-|\gamma|-|\delta|} \sum_{k=o}^{\infty} \sum_{l=-|\gamma|}^{\infty} \frac{(\zeta.y)^k}{k!} M_{k+\delta} \frac{(\xi.x)^l}{l!} \frac{K^{-1}(k+l+|\gamma|+|\delta|)!}{R^{k+l}(k+l+|\gamma|+|\delta|+1)^2} \end{aligned}$$

notons que

$$D^{k+l} \phi_R(0) = \frac{K^{-1}(k+l)!}{R^{k+l}(k+l+1)^2}$$

après un développement analogue de Φ_R^M on a

$$\Phi_R^M(t,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\zeta.y)^k}{k!} M_k \frac{(\xi.x)^l}{l!} \frac{K^{-1}(k+l)!}{R^{k+l}(k+l+1)^2}$$

et la démonstration revient à chercher l'existence d'une constante $c'_{\gamma,\delta}$ telle que

$$M_{k+|\delta|} \frac{(k+l+|\gamma|+|\delta|)!}{(k+l+|\gamma|+|\delta|+1)^2} \leq c'_{\gamma,\delta} M_k \frac{(k+l)!}{(k+l+1)^2} \quad \forall k \geq 0, \forall l \geq -|\gamma|$$

si $|\gamma| + |\delta| \leq 0$ alors la fonction

$$\frac{(k+l+|\gamma|+|\delta|)!}{(k+l)!}\frac{(k+l+1)^2}{(k+l+|\gamma|+|\delta|+1)^2}$$

est décroissante par rapport à l et atteint son maximum pour $l = -|\gamma|$;il suffit de vérifier

$$M_{k+|\delta|}\frac{(k+|\delta|)!}{(k+|\delta|+1)^2} \leq c'_{\gamma,\delta} M_k \frac{(k-|\gamma|)!}{(k-|\gamma|+1)^2} \quad \forall k \geq 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{M_{k+|\delta|}}{M_k}\frac{(k+|\delta|)!}{(k-|\gamma|)!}\frac{(k-|\gamma|+1)^2}{(k+|\delta|+1)^2} \leq c'_{\gamma,\delta} \quad \forall k \geq 0$$

D'après l'hypothèse (3.5) du théorème 3.1 alors $\exists c_{\gamma,\delta} \geq 0$ tel que $\forall k \geq 0$ on a

$$\frac{M_{k+|\delta|}}{M_k}\frac{(k+|\delta|)!}{(k-|\gamma|)!} \leq c_{\gamma,\delta}$$

d'autre part

$$\left(\frac{k-|\gamma|+1}{k+|\delta|+1}\right)^2 \leq c''_{\gamma,\delta} \quad \forall k \geq 0 \qquad \text{pour } c''_{\gamma,\delta} = \left(\frac{-|\gamma|+1}{|\delta|+1}\right)^2$$

il suffit de prendre $c'_{\gamma,\delta} = c_{\gamma,\delta} c''_{\gamma,\delta}$

3.4 Démonstration du théorème 3.1

Nous étudions l'application $T : u \longrightarrow f(x, y, D^B u(x, y))$
dans les algèbres de Banach $C_R^{w,M}(\Omega_R)$ où $\xi \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ et $\zeta \in (\mathbb{R}_+^*)^q$ sont fixés selon les besoins rencontrés.
En utilisant les développements de C.Wagschal [26] suivant :

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(x,y,0) + \sum_{\sigma \in B} A_\sigma z_\sigma + \sum_{\sigma \in B} A_\sigma(y) z_\sigma + \sum_{\sigma \in B} F_\sigma(x,y,z) z_\sigma. \\ f(x,y,z) - f(x,y,z^{'}) &= \sum_{\sigma \in B} A_\sigma(z_\sigma - z^{'}_\sigma) + \sum_{\sigma \in B} A_\sigma(y)(z_\sigma - z^{'}_\sigma) + \sum_{\sigma \in B} G_\sigma(x,y,z,z^{'})(z_\sigma - z^{'}_\sigma). \end{aligned} \tag{3.19}$$

où d'après (3.8) :

$$f(0, y, 0) = A_\sigma(0) = F_\sigma(0, y, 0) = G_\sigma(0, y, 0, 0) = 0; \tag{3.20}$$

les fonctions A_σ définies au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^q$ sont de classe Carleman, les fonctions F_σ,G_σ sont de classe $C^{w,M}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{p+2r}_{x,z,z'} \times \mathbb{R}^q_y$.

Nous utilisons le lemme suivante :

Lemme 3.5 *[26]*
Soit O un voisinage ouvert de $\mathbb{R}^q$, $A : O \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe Carleman telle que $A(0) = 0$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $R > 0$ et un voisinage ouvert $\Omega \subset O$ de l'origine de $\mathbb{R}^q$ tel que $A \in C_R^{w,M}(\Omega_R)$ et $\|A\| \leqq \varepsilon$.

Preuve

Soit $A \in C^{w,M}$ alors

$$\forall \delta \in \mathbb{N}^q, \quad \forall y \in O, \quad |D^\delta A(y)| \leq c^{|\delta|+1} |\delta|! M_{|\delta|}$$

il faut satisfaire à :

$$|D^\delta A(y)| \leq \varepsilon \zeta^\delta M_{|\delta|} D^{|\delta|} \varphi_R(0). \tag{3.21}$$

-Pour $\delta = 0$, (3.21)devient

$$\forall y \in \Omega, \qquad |D^\delta A(y)| \leq \varepsilon \varphi_R(0) = \varepsilon K^{-1}$$

ce qui est possible en choisissant Ω assez petit.

-Pour $|\delta| > 0$, (3.21) sera vérifié si

$$c^{|\delta|+1}|\delta|!M_{|\delta|} \leq \varepsilon\zeta^{\delta}M_{|\delta|}D^{|\delta|}\varphi_R(0).$$

On a

$$D^{|\delta|}\varphi_R(0) = K^{-1}\frac{|\delta|!}{R^{|\delta|}(|\delta|+1)^2}$$

c'est à dire si

$$c^{|\delta|+1} \leq \varepsilon\zeta^{\delta}\frac{K^{-1}}{R^{|\delta|}(|\delta|+1)^2}$$

il suffit de choisir R assez petit.

Nous allons ensuite majorer les fonctions f, F_σ, G_σ en utilisant les développements [26] et la donné de (3.20) :

$$f(x,y,0) = \sum_{j=1}^{p} x_j f_j(x,y).$$

$$G_\sigma(x,y,z,z^{'}) = \sum_{j=1}^{p} x_j G_{\sigma,j}(x,y,z,z^{'}) + \sum_{\tau\in B}(z_\tau G_{\sigma,\tau}(x,y,z,z^{'}) + z^{'}_\tau G^{'}_{\sigma,\tau}(x,y,z,z^{'}))$$

et on suppose que toutes les fonctions $f_j, G_{\sigma,j}, G_{\sigma,\tau}, G^{'}_{\sigma,\tau}$ sont de classe $C^{w,M}$ dans le domaine :

$$D = \Big\{(x,y,z,z^{'}) \in \mathbb{C}^{p+2r}_{x,z,z^{'}} \times \mathbb{R}_{\frown}{}^{q}; \quad \xi_j|x_j| < \eta R_1, \qquad y\in\Omega, \qquad |z_\sigma| < R^{'}_1, \qquad |z^{'}_\sigma| < R^{'}_1\Big\}$$

pour $\eta > 1$

D'après le lemme 3.2, on peut supposer que, pour tout $0 < R < R_1, \quad 0 < R^{'} < R^{'}_1$:

$$f_j(x,y) \ll c\Phi^M_R(x,y),$$

D'autre part on peut majorer $G_{\sigma,j}, G_{\sigma,\tau}, G^{'}_{\sigma,\tau}$ comme suit :

$$G_{\sigma,j} \quad \text{et} \quad G_{\sigma,\tau} \quad \text{et} \quad G^{'}_{\sigma,\tau} \ll c\Phi^M_R(x,y)\prod_{\tau\in B}\Theta^M_{R^{'}}(z_\tau)\Theta^M_{R^{'}}(z^{'}_\tau)$$

En effet, pour tout x vérifiant $\xi_j|x_j| < \eta R$, l'inégalité de Cauchy donne :

$$|D^\gamma_x D^\delta_y D^\alpha_z D^\beta_{z^{'}} G_{\sigma,\tau}(0,y,z,z^{'})| \leq \sup_x |D^\gamma_x D^\delta_y D^\alpha_z D^\beta_{z^{'}} G_{\sigma,\tau}(x,y,z,z^{'})|\frac{\gamma!\xi^\alpha}{(\eta R)^{|\gamma|}}$$

comme $G_{\sigma,\tau} \in C^{w,M}$ on a :

$$|D^\gamma_x D^\delta_y D^\alpha_z D^\beta_{z^{'}} G_{\sigma,\tau}(x,y,z,z^{'})| \leq c^{|\delta|+|\alpha|+|\beta|+1}\delta!M_{|\delta|}\alpha!M_{|\alpha|}\beta!M_{|\beta|}$$

Alors,

$$|D_x^{\gamma}D_y^{\delta}D_z^{\alpha}D_{z'}^{\beta}G_{\sigma,\tau}(0,y,z,z')| \leq Mc^{|\delta|+|\alpha|+|\beta|+1}\delta!M_{|\delta|}\frac{\gamma!\xi^{\alpha}}{(\eta R)^{|\gamma|}}\frac{\alpha!M_{|\alpha|}}{(R')^{|\alpha|}}\frac{\beta!M_{|\beta|}}{(R')^{|\beta|}}$$

$M = \sup_x |D_x^{\gamma}D_y^{\delta}D_z^{\alpha}D_{z'}^{\beta}G_{\sigma,\tau}(x,y,z,z')|$ d'où, d'après 3.10 :

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^p}\frac{|D_x^{\gamma}D_y^{\delta}D_z^{\alpha}D_{z'}^{\beta}G_{\sigma,\tau}(0,y,z,z')|}{\gamma!}x^{\gamma} \ll c\delta!M_{|\delta|}\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^p}\frac{\gamma!\xi^{\alpha}}{(\eta R)^{|\gamma|}}\prod_{\tau\in B}\Theta_{R'}^{M}(z_{\tau})\Theta_{R'}^{M}(z'_{\tau})$$

ce qui implique que :

$$D_y^{\delta}D_z^{\alpha}D_{z'}^{\beta}G_{\sigma,\tau}(x,y,z,z') \ll c|\delta|!M_{|\delta|}\frac{\eta R}{\eta R-\xi x}\prod_{\tau\in B}\Theta_{R'}^{M}(z_{\tau})\Theta_{R'}^{M}(z'_{\tau})$$

le lemme 3.2 donne :

$$D_y^{\delta}D_z^{\alpha}D_{z'}^{\beta}G_{\sigma,\tau}(x,y,z,z') \ll c\zeta^{\delta}|\delta|!M_{|\delta|}D^{|\delta|}\varphi_R(\xi x)\prod_{\tau\in B}\Theta_{R'}^{M}(z_{\tau})\Theta_{R'}^{M}(z'_{\tau})$$

d'où

$$G_{\sigma,\tau}(x,y,z,z') \ll c\Phi_R^M(x,y)\prod_{\tau\in B}\Theta_{R'}^{M}(z_{\tau})\Theta_{R'}^{M}(z'_{\tau})$$

On remarque que

$$z_{\tau} \ll \varepsilon(R')\Theta_{\eta R'}^{M}(z_{\tau}) \text{ et } z'_{\tau} \ll \varepsilon(R')\Theta_{\eta R'}^{M}(z'_{\tau})$$

avec $\varepsilon(R') = \eta R'$.

$$\begin{aligned}
x_j \ll \varepsilon_0(R)\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^p}\frac{\xi^{\alpha}x^{\alpha}}{(\eta R)^{|\alpha|}} \quad &= \varepsilon_0(R)\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^p}\frac{\xi_1^{\alpha_1}x_1^{\alpha_1}}{(\eta R)^{\alpha_1}}\cdots\frac{\xi_p^{\alpha_p}x_p^{\alpha_p}}{(\eta R)^{\alpha_p}}\\
&\ll \sum_{\alpha_1\in\mathbb{N}^p}\frac{(\xi_1x_1)^{\alpha_1}}{(\eta R)^{\alpha_1}}\cdots\sum_{\alpha_p\in\mathbb{N}^p}\frac{(\xi_px_p)^{\alpha_p}}{(\eta R)^{\alpha_p}}\\
&\ll \varepsilon_0(R)\frac{\eta R}{\eta R-\xi x}
\end{aligned}$$

avec $\varepsilon_0(R) = \eta R\xi_j^{-1}$

pour majorer x_j par Φ_R^M avec la relation 3.10 il faut que

$$x_j \ll c\Phi_R^M(x,y) \quad \text{c'est à dire} \quad D_y^0x_j \ll c\zeta^0M_0D^0\varphi_R(\xi x) = c\varphi_R(\xi x)$$

d'autre part, vu le lemme 1.1 on a :

$$\frac{\eta R}{\eta R-\xi x} \ll c(\eta)\varphi_R(\xi x)$$

d'où

$$x_j \ll \varepsilon(R)\varphi_R(\xi x); \qquad \varepsilon(R) = c(\eta).\varepsilon_0(R)$$

ce qui implique que

$$x_j \ll \varepsilon(R)\Phi_R^M(x,y)$$

avec $\varepsilon(R)$ et $\varepsilon(R')$ tendent vers zéro avec R et R.

Pour majorer la fonction $G_{\sigma,j}, G_{\sigma,\tau}, G'_{\sigma,\tau}$ on utilise le lemme 3.17, le lemme 2.1 et la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
\Theta^M_{\eta R'}(z_\tau)\Theta^M_{R'}(z_\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{M_{n-k}}{(\eta R')^{n-k}}\frac{M_k}{(R')^k}\right]z_\tau^n \\
&\ll \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M_n}{(R')^n}z_\tau^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\eta^{n-k}} \\
&\ll c(\eta)\Theta^M_{R'}(z_\eta)
\end{aligned}$$

par suite

$$\Theta^M_{\eta R'}(z'_\tau)\Theta^M_{R'}(z'_\tau) \ll c(\eta)\Theta^M_{R'}(z_\eta)$$

On trouve :

$$\begin{cases}
f_j(x,y) \ll c\Phi_R^M(x,y) \\
G_{\sigma,j}, G_{\sigma,\tau}, G'_{\sigma,\tau} \ll c\Phi_R^M(x,y)\prod_{\tau\in B}\Theta^M_{R'}(z_\tau)\Theta^M_{R'}(z'_\tau) \\
x_j \ll \varepsilon(R)\Phi_R^M(x,y); \quad z_\tau \ll \varepsilon(R')\Theta^M_{\eta R'}(z_\tau); \quad z'_\tau \ll \varepsilon(R')\Theta^M_{\eta R'}(z'_\tau)
\end{cases}$$

vu le développement G_σ :

$$G_\sigma(x,y,z,z') = \sum_{j=1}^{p} x_j G_{\sigma,j}(x,y,z,z') + \sum_{\tau\in B}\left[z_\tau G_{\sigma,\tau}(x,y,z,z') + z'_\tau G'_{\sigma,\tau}(x,y,z,z')\right]$$

En donnant les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} x_j G_{\sigma,j}(x,y,z,z') &\ll p\varepsilon(R)c(\Phi_R^M)^2\prod_{\tau\in B}\Theta^M_{R'}(z_\tau)\Theta^M_{R'}(z'_\tau) \\
&\ll \varepsilon_1(R)\Phi_R^M(x,y)\prod_{\tau\in B}\Theta^M_{R'}(z_\tau)\Theta^M_{R'}(z'_\tau)
\end{aligned}$$

avec $\varepsilon_1(R) = pc\varepsilon(R)$

$$\begin{aligned}
z_\tau G_{\sigma,\tau}(x,y,z,z') &\ll c\varepsilon(R')c(\eta)\Phi_R^M(x,y)\prod_{\tau\in B}\Theta^M_{R'}(z_\tau)\Theta^M_{R'}(z'_\tau) \\
&\ll \varepsilon_2(R')\Phi_R^M(x,y)\prod_{\tau\in B}\Theta^M_{R'}(z_\tau)\Theta^M_{R'}(z'_\tau)
\end{aligned}$$

avec $\varepsilon_2(R') = c\varepsilon(R')c(\eta)$

et de même pour $z'_\tau G'_{\sigma,\tau}(x,y,z,z')$

$$\sum_{\tau\in B}\left[z_\tau G_{\sigma,\tau}(x,y,z,z')+z'_\tau G'_{\sigma,\tau}(x,y,z,z')\right]\ll r\varepsilon_2(R')\Phi_R^M(x,y)\prod_{\tau\in B}\Theta_{R'}^M(z_\tau)\Theta_{R'}^M(z'_\tau)$$

Alors

$$\begin{aligned} G_\sigma(x,y,z,z') &\ll \varepsilon_1(R)\Phi_R^M(x,y)\prod_{\tau\in B}\Theta_{R'}^M(z_\tau)\Theta_{R'}^M(z'_\tau)+r\varepsilon_2(R')\Phi_R^M(x,y)\prod_{\tau\in B}\Theta_{R'}^M(z_\tau)\Theta_{R'}^M(z'_\tau)\\ &\ll \varepsilon(R,R')\Phi_R^M(x,y)\prod_{\tau\in B}\Theta_{R'}^M(z_\tau)\Theta_{R'}^M(z'_\tau)\end{aligned}$$

avec $\varepsilon(R,R')=\varepsilon_1(R)+r\varepsilon_2(R')$

le fait que $F_\sigma(x,y,z)=G_\sigma(x,y,z,0)$ on déduit que, pour tout $0<R\leq R_1$, $0<R'\leq R'_1$:

$$\begin{cases} f(x,y,0)=\sum_{j=1}^{p}x_jf_j(x,y)\ll p\varepsilon(R)c\Phi_R^M(x,y)=\varepsilon'(R)\Phi_R^M(x,y)\\ F_\sigma(x,y,z)\ll\varepsilon(R,R')\Phi_R^M(x,y)\prod_{\tau\in B}\Theta_{R'}^M(z_\tau)\\ G_\sigma(x,y,z,z')\ll\varepsilon(R,R')\Phi_R^M(x,y)\prod_{\tau\in B}\Theta_{R'}^M(z_\tau)\Theta_{R'}^M(z'_\tau)\end{cases}$$

avec $\varepsilon'(R),\varepsilon(R,R')$ tendent vers zéro quand R,R' tendent vers zéro.

On a alors :

Proposition 3.4 *Il existe $R_0>0$,$a>0$ tel que, pour tout $R\in]0,R_0]$, l'application :*

$$T:u\longrightarrow f(x,y,z,D^Bu)$$

soit une contraction stricte dans la boule fermé $B(0,a)$ de l'algèbre de Banach $C_R^{w,M}(\Omega_R)$.

Remarque 3.1 *Si $(\gamma,\delta)\in B$ tel que, $|\gamma|+|\delta|=0$ la proposition 3.3 donne que la constante $c'_{\gamma,\delta}$ est le même constante du théorème 3.1.*

Soit $u\in B(0,a)\subset C_R^{w,M}(\Omega_R)$, vu la proposition 3.3 il en résulte que :

$$z_\sigma=D_x^\gamma D_y^\delta u,(z'_\sigma=D_x^\gamma D_y^\delta u')\ll\begin{cases} ac'_{\gamma,\delta}\xi^\gamma\zeta^\delta R^{-|\gamma|-|\delta|}\Phi_R^M(x,y), & \text{si}\quad |\gamma|+|\delta|<0\\ ac_{\gamma,\delta}\xi^\gamma\zeta^\delta\Phi_R^M(x,y), & \text{si}\quad |\gamma|+|\delta|=0\end{cases}\tag{3.22}$$

On pose $\varepsilon(R)=c'_{\gamma,\delta}\xi^\gamma\zeta^\delta R^{-|\gamma|-|\delta|}$

On a d'après le corollaire 2.2

$$\Theta_{R'}^{M}(z_\tau); \Theta_{R'}^{M}(z_\tau^{'}) \ll \begin{cases} \text{si} \quad |\gamma| + |\delta| < 0 \quad \text{alors} \\ \Theta_{R'}^{M}\left[\varepsilon(R) a \Phi_R^M(x,y)\right] \ll n\Phi_R^M(x,y) \\ \text{si} \quad |\gamma| + |\delta| = 0 \\ \Theta_{R'}^{M}\left[a c_{\gamma,\delta} \xi^\gamma \zeta^\delta \Phi_R^M(x,y)\right] \ll n'\Phi_R^M(x,y) \end{cases}$$

avec $n = max(K, \dfrac{a\varepsilon(R)M_1}{R' - a\varepsilon(R)M_1})$, $n' = max(K, \dfrac{ac_{\gamma,\delta}\xi^\gamma\zeta^\delta M_1}{R' - ac_{\gamma,\delta}\xi^\gamma\zeta^\delta M_1})$

Majorant maintenant la fonction $f(x, y, z)$ d'après 3.19 on a :

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(x,y,0) + \sum_{\sigma \in B} A_\sigma z_\sigma + \sum_{\sigma \in B} A_\sigma(y) z_\sigma + \sum_{\sigma \in B} F_\sigma(x,y,z) z_\sigma \\ &= f(x,y,0) + \sum_{\substack{\sigma \in B \\ |\gamma|+|\delta|<0}} A_\sigma z_\sigma + \sum_{\substack{\sigma \in B \\ |\gamma|+|\delta|=0}} A_\sigma z_\sigma + \sum_{\substack{\sigma \in B \\ |\gamma|+|\delta|<0}} A(y) z_\sigma \\ &+ \sum_{\substack{\sigma \in B \\ |\gamma|+|\delta|=0}} A(y) z_\sigma + \sum_{\substack{\sigma \in B \\ |\gamma|+|\delta|<0}} F_\sigma(x,y,z) z_\sigma + \sum_{\substack{\sigma \in B \\ |\gamma|+|\delta|=0}} F_\sigma(x,y,z) z_\sigma \end{aligned}$$

d'abord, En majorant tout les termes de développement de f :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\sigma \in B \\ |\gamma|+|\delta|<0}} A_\sigma z_\sigma &\ll \sum_{\substack{\sigma \in B \\ |\gamma|+|\delta|<0}} \left(A_\sigma \varepsilon(R')\right) a \Phi_R^M(x,y) \\ \sum_{\substack{\sigma \in B \\ |\gamma|+|\delta|=0}} A_\sigma z_\sigma &\ll \sum_{\substack{\sigma \in B \\ |\gamma|+|\delta|=0}} \left(A_\sigma \xi^\gamma \zeta^\delta\right) c_{\gamma,\delta} a \Phi_R^M(x,y) \ll a c_{\gamma,\delta} \rho(\xi) \Phi_R^M(x,y) \\ \sum_{\substack{\sigma \in B \\ |\gamma|+|\delta|<0}} A(y) z_\sigma &\ll \sum_{\substack{\sigma \in B \\ |\gamma|+|\delta|<0}} \varepsilon_0 \Phi_R^M(x,y) a \varepsilon(R') \Phi_R^M(x,y) \ll r\varepsilon_0 a \varepsilon(R') \Phi_R^M(x,y) \\ \sum_{\substack{\sigma \in B \\ |\gamma|+|\delta|=0}} A(y) z_\sigma &\ll \sum_{\substack{\sigma \in B \\ |\gamma|+|\delta|=0}} \varepsilon_0 \Phi_R^M(x,y) a c_{\gamma,\delta} \xi^\gamma \zeta^\delta \ll \left(a c_{\gamma,\delta} \varepsilon_0 \sum_{\substack{\sigma \in B \\ |\gamma|+|\delta|=0}} \xi^\gamma \zeta^\delta \right) \Phi_R^M(x,y) \\ \sum_{\substack{\sigma \in B \\ |\gamma|+|\delta|<0}} F_\sigma(x,y,z) z_\sigma &\ll a r \varepsilon(R,R') \varepsilon(R) n^r \Phi_R^M(x,y) \\ \sum_{\substack{\sigma \in B \\ |\gamma|+|\delta|=0}} F_\sigma(x,y,z) z_\sigma &\ll \left(a c_{\gamma,\delta} n'^r \varepsilon(R,R') \sum_{\substack{\sigma \in B \\ |\gamma|+|\delta|=0}} \xi^\gamma \zeta^\delta \right) \Phi_R^M(x,y) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
Tu = f(x,y,z) \quad &\ll \varepsilon_1(R)\Phi_R^M(x,y) + a\Bigg(\sum_{\substack{\sigma\in B\\ |\gamma|+|\delta|<0}} A_\sigma \varepsilon(R')\Bigg)\Phi_R^M(x,y) + ac_{\gamma,\delta}\rho(\xi)\Phi_R^M(x,y)\\
&+r\varepsilon_0 a\varepsilon(R')\Phi_R^M(x,y) + ac_{\gamma,\delta}\varepsilon_0\Bigg(\sum_{\substack{\sigma\in B\\ |\gamma|+|\delta|=0}} \xi^\gamma\zeta^\delta\Bigg)\Phi_R^M(x,y)\\
&+ar\varepsilon(R,R')\varepsilon(R)n^r\Phi_R^M(x,y) + \Bigg(ac_{\gamma,\delta}n'^r\varepsilon(R,R')\sum_{\substack{\sigma\in B\\ |\gamma|+|\delta|=0}} \xi^\gamma\zeta^\delta\Bigg)\Phi_R^M(x,y)\\
&\ll \Bigg[\varepsilon_1(R) + a\Bigg(c_{\gamma,\delta}\Bigg(\rho(\xi)+\varepsilon_0'\sum_{\substack{\sigma\in B\\ |\gamma|+|\delta|=0}} {}^\gamma\zeta^\delta\Bigg) + \varepsilon''(R,R')\Bigg)\Bigg]\Phi_R^M(x,y)
\end{aligned}$$

Avec

$$\varepsilon''(R,R') = max\left(r\varepsilon_0\varepsilon(R'), r\varepsilon(R,R')\varepsilon(R)n^{2r}\right) + \sum_{\substack{\sigma\in B\\ |\gamma|+|\delta|<0}} A_\sigma\varepsilon(R'), \varepsilon_0' = max(\varepsilon_0, n'^{2r}\varepsilon(R,R'))$$

Finalement l'inclusion $T(B(0,a)) \subset B(0,a)$ est satisfait pour :

$$\begin{cases}
a \le CR', \quad \text{avec} \quad C = c_{\gamma,\delta}\xi^\gamma\zeta^\delta\\
a\varepsilon(R) \le R'\\
\varepsilon_1(R) + a\Bigg(c_{\gamma,\delta}\Bigg(\rho(\xi)+\varepsilon_0'\sum_{\substack{\sigma\in B\\ |\gamma|+|\delta|=0}} \xi^\gamma\zeta^\delta\Bigg) + \varepsilon''(R,R')\Bigg) \le a
\end{cases}$$

Cherchons les conditions pour que T soit une contraction stricte :

Soit $u, u' \in B(0,a)$, les conditions 3.4 étant supposées réalisées on a :

$$z_\sigma - z_\sigma' = D^\sigma(u-u') \ll \begin{cases}
\|u-u'\|\varepsilon(R)\Phi_R^M(x,y), & |\gamma|+|\delta|<0\\
\|u-u'\|C\Phi_R^M(x,y), & |\gamma|+|\delta|=0
\end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} Tu - Tu' &= f(x,y,D^\sigma u) - f(x,y,D^\sigma u') = \sum_{\substack{\sigma\in B\\ |\gamma|+|\delta|<0}} A_\sigma(D^\sigma u - D^\sigma u') + \sum_{\substack{\sigma\in B\\ |\gamma|+|\delta|=0}} A_\sigma(D^\sigma u - D^\sigma u') \\ &+ \sum_{\substack{\sigma\in B\\ |\gamma|+|\delta|<0}} A(y)(D^\sigma u - D^\sigma u') + \sum_{\substack{\sigma\in B\\ |\gamma|+|\delta|=0}} A(y)(D^\sigma u - D^\sigma u') \\ &+ \sum_{\substack{\sigma\in B\\ |\gamma|+|\delta|<0}} G_\sigma(x,y,z,z')(D^\sigma u - D^\sigma u') + \sum_{\substack{\sigma\in B\\ |\gamma|+|\delta|=0}} G_\sigma(x,y,z,z')(D^\sigma u - D^\sigma u') \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} Tu - Tu' &\ll \|u-u'\|\Bigg(\sum_{\substack{\sigma\in B\\ |\gamma|+|\delta|<0}} A_\sigma \varepsilon(R')\Bigg)\Phi_R^M(x,y) + \|u-u'\|c_{\gamma,\delta}\rho(\xi)\Phi_R^M(x,y) \\ &+ r\varepsilon_0\varepsilon(R')\|u-u'\|\Phi_R^M(x,y) + \|u-u'\|c_{\gamma,\delta}\Bigg(\varepsilon_0 \sum_{\substack{\sigma\in B\\ |\gamma|+|\delta|=0}} \xi^\gamma\zeta^\delta\Bigg)\Phi_R^M(x,y) \\ &+ rn^{2r}\varepsilon(R)\varepsilon(R,R')\Phi_R^M(x,y) + c_{\gamma,\delta}n'^{2r}\|u-u'\|\Bigg(\varepsilon(R,R')\sum_{\substack{\sigma\in B\\ |\gamma|+|\delta|=0}} \xi^\gamma\zeta^\delta\Bigg)\Phi_R^M(x,y) \end{aligned}$$

d'où

$$Tu - Tu' \ll \|u-u'\|\Bigg(c_{\gamma,\delta}\Bigg(\rho(\xi) + \varepsilon_0' \sum_{\substack{\sigma\in B\\ |\gamma|+|\delta|=0}} \xi^\gamma\zeta^\delta\Bigg) + \varepsilon''(R,R')\Bigg)\Phi_R^M(x,y)$$

On Pose $\rho_1 = c_{\gamma,\delta}\Bigg(\rho(\xi) + \varepsilon_0' \sum_{\substack{\sigma\in B\\ |\gamma|+|\delta|=0}} \xi^\gamma\zeta^\delta\Bigg) < 1$

Alors, $\rho(\xi) + \varepsilon_0' \sum_{\substack{\sigma\in B\\ |\gamma|+|\delta|=0}} \xi^\gamma\zeta^\delta < c_{\gamma,\delta}^{-1}$

soit ρ tel que $\rho_1 < \rho < 1$.

Alors pour que T soit une contraction stricte il suffit que :

$$\rho_1 + \varepsilon''(R,R') \le \rho$$

On résume, il suffit d'avoir les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} a \le CR' \quad ; \quad a\varepsilon(R) \le R' \\ \rho_1 + \varepsilon''(R,R') \le \rho \\ \varepsilon_1 \le a(1-\rho) \end{cases}$$

Alors il existe $R_2 \in]0, R_1]$ et $R' \in]0, R'_1]$ tel que

$$\rho_1 + \varepsilon''(R, R') \leq \rho, \quad \text{pour tout} \quad R \in]0, R_2]$$

Soit R' fixé, on choisi a tel que $0 < a \leq CR'$, $(C = c_{\gamma,\delta}\xi^\gamma\zeta^\delta)$, puis $R_0 \in]0, R_2]$ suffisamment petit pour que

$$a\varepsilon(R) \leq R', \quad \varepsilon_1 \leq a(1-\rho), \quad \text{pour tout} \quad R \in]0, R_0]$$

La proposition précédente montre l'existence et l'unicité en même temps.

En effet, si u et u' deux fonctions de $C^{w,M}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q$ telles que, $u = f(x, y, D^\sigma u), u' = f(x, y, D^\sigma u')$ avec $u(0, y) = u'(0, y) = f(0, y, 0) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^q$; d'après le lemme 3.3 on résulte $u \ll \varepsilon(R)\Phi_R^M$, de même $u' \ll \varepsilon(R)\Phi_R^M$ pour tout $R > 0$ suffisamment petit ; en particulier si $R \in]0, R_0]$ tel que $\varepsilon(R) \leq a$ ce qui donne que la contraction T a deux points fixes dans $B(0, a)$, contradiction, d'où l'égalité de u et u'.

3.5 Conclusion

Ce travail est un cas particulier du probleme de Goursat non linéaire Carleman-continu et en même temps il forme une généralisation pour le cas Gevrey-holomorphe, on a démontré l'existence et l'unicité d'une solution de classe holomorphe-Carleman, en suivant le même formalisme de C.Wagschal, dans l'espace de Carleman associe à une suite logarithmétiquement convexe et une série formelle convenablement choisie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Cauchy Augustin-Louis. Mémoire sur un théorème fondamental, dans le calcul intégral. *Comptes Rendus Acad. Sci*, 14 :1020–1026, 1842.

[2] Werner Balser. *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*. Springer, 1946.

[3] Henri Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables*. Hermann, éditeurs des sciences et des arts, 6 edition, juin 1985.

[4] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP sciences, 4 edition, 2016.

[5] Goursat Edouard. Sur l'existence des fonctions intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 26 :129–134, 1898.

[6] Moncef Elghribi, Hakeem Othman, and Al-Hossain Al-Nashri. Homogeneous functions : New characterization and applications. *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*, 171, 01 2017.

[7] E. Goursat. Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre, et sur la théorie des intégrales intermédiaires. *Acta Math.*, 19 :285–340, 1895.

[8] S Iyanaga and Y Kawada. Encyclopedic dictionary of mathematics distribution of typical random variables, 1980.

[9] Persson Jan. New proofs and generalizations of two theorems by lednev for goursat problems. *Mathematische Annalen*, 178(3) :184–208, 1968.

[10] Sof'ja V Kovalevskaja. *Zur theorie der partiellen differentialgleichungen*. 1874.

[11] Andreas Kriegl, Peter W. Michor, and Armin Rainer. The convenient setting for non-quasianalytic denjoy–carleman differentiable mappings. *Journal of Functional Analysis*, 256 :3510–3544, 06 2009.

[12] Gårding Lars. Une variante de la méthode de majoration de cauchy. *Acta Mathematica*, 114(1) :143–158, 1965.

[13] Christine Laurent-Thiébaut. *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables - Une introduction*. SAVOIRS ACTUELS. EDP Sciences, 2012.

[14] Peter D Lax. Nonlinear hyperbolic equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 6 :231–258, 1953.

[15] Nikolai Andreevich Lednev. A new method for the solution of partial differential equations. *Matematicheskii Sbornik*, page 64(2) :205–266, 1948.

[16] Cauchy Augustin Louis. *Mémoire sur l'application du calcul des limites à l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles*. 1842.

[17] Cauchy Augustin Louis. *Mémoire sur l'emploi du calcul des limites dans l'intégration des équations aux dérivées partielles*. 1842.

[18] Cauchy Augustin Louis. *Mémoire sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordres quelconques, et sur leur réduction à des systèmes d'équations linéaires du premier ordre*. 1842.

[19] Chantal Moussy. Théorème du point fixe et théorème de cauchy-kowalewsky-lednev pour les systèmes semi-linéaires. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques*, 6e série, 8(3) :491–535, 1999.

[20] Federica Pieroni. On the real algebra of denjoy–carleman classes. *Selecta Mathematica, New Series*, 13 :321–351, 10 2007.

[21] W. Rudin. *Functional Analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1991.

[22] Gerhard Schindl. *Spaces of smooth functions of Denjoy-Carleman-type*. PhD thesis, University of Vienna, 01 2009.

[23] Vincent Thilliez. On quasianalytic local rings. *Expositiones Mathematicae*, pages 1–23, 02 2008.

[24] Joris van der Hoeven. Majorants for formal power series. Technical Report 2003-15, Université Paris-Sud, Orsay, France, 2003.

[25] Claude Wagschal. une généralisation du problème de goursat pour des systèmes d'équations intégro-differentielles holomorphes ou partiellement holomorphes. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, pages 147–164, 1971.

[26] Claude Wagschal. Le problème de goursat non linéaire. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, page 309–337, 1979.