الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة غرداية

Université de Ghardaïa

N° d'enregistrement
/…../…../…../…../…..

كلية العلوم والتكنولوجيا

Faculté des Sciences et de la Technologie

قسم الرياضيات واعلام الي

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude, en vue de l'obtention du diplôme

Master

Domaine: Science et de la Technologie

Filière: Mathématique

Spécialité: Analyse Fonctionnelle et Application

Thème

Etude de quelques propriétés sur les distributions nilpotentes de classe 2

Présenté par :

Ouladlaid zahia

Devant le jury composé de:

M.Brahim Merabet	M.C.B	Université de Ghardaïa	Président
Mme.Yasmina Khellaf	M.A.A	Université de Ghardaïa	Encadrant
M.AbdelOuahab Chikh Salah	M.C.B	Université de Ghardaïa	Examinateur

Année universitaire2022/2021

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail à ceux qui m'ont soutenu au long de mes études, qui m'ont toujours poussé vers le chemin du savoir, à ma source d'amour et d'affection, les deux êtres les plus chères au monde.

À L'homme mon précieux offre du dieu,qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect mon cher père : Naimi

offre du dieu,qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect : ma chére mère : zohra

à mes soeurs : fatima, naouia, rahma, souad

À mes frères : mohammed, abdel hamid , Abdel aziz

À ma grande famille oulad laid

À mes amies : Aicha,Asma,

À mes amis de l'université de GHARDAIA.

À tous les étudiants de math & info .

À mes collèges de CEM chnini ahmed ben bakar

ouladlaid zahia 2022

Remerciements

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à DIEU tout puissant, de m'avoir donner le courage et la force de mener à terme ce projet. Qui m'a ouvert les portes du savoir.

Je remercie ma encadreuse Madame : Yasmina Khellaf pour le sujet qu'il m'a proposé et pour l'attention et la disponibilité dont il a su faire preuve au long de la préparation de ce mémoire.

Je remercie sincèrement les membres de jury Mes sieurs Brahim Merabet et Abdel Ouahab Chikh Salah pour avoir accepté du juger ce modeste travail.

Je remercie les enseignants de département des mathématiques et Informatiques qui nous ont encadré depuis notre première année universitaire.

Merci à tous ceux qui m'ont enseigné en primaire, collège, lycée, université et ailleurs, et tous les personnels de ces établissements, Merci à tous les mathématiciens...

Merci mes parents , mes amis, ma famille et mes cousines merci à tout ceux qui ont contribué de près ou de loin dans ce travail.

الملخص

في هذه الرسالة نحن مهتمون بدراسة بعض خصائص توزيع عدم الاختيار في R^m.

بحث $[X^2, Y^2]$ الهدف هو استخدام هذه الخاصية للتحقق من عدم التبادلية $D = span\{X, Y\}$

الكلمات المفتاحية:

التوزيع، ناقلات الحقول ، ربط.

Résumé

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'étude de quelques propriétés de distribution niloptente dans $\mathbb{R}^m$.

l'objective est d'utilisé cette propriété pour vérifier la non commutativité de $[X^2, Y^2]$ tel que $\mathcal{D} = \text{span}\{X, Y\}$.

mots de clés : distribution ,champs des vecteurs ,crochet de lie

Abstract

In this thesis we are interested in the study of some niloptent distribution properties in $\mathbb{R}^m$.

the objective is to use this property to check the non commutativity of $[X^2, Y^2]$ such that $\mathcal{D} = \text{span}\{X, Y\}$.

Keywords :distribution ,vector fields ,lie bracket

Table des matières

Notation

$\mathscr{V}_x$: voisinage ouvert de x dans M

$[X, Y]$: le crochet de Lie de X et Y.

$\Delta_X = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} X_i^2$:l'opérateur sous elliptique

T_xM : l'espace tangent de dimension m.

$B(0.1)$: boule ouvert de centre 0et rayon 1

Introduction

la théorie des opérateur sous elliptiques $L = X_1^2 + \ldots + X_m^2$ dans $\mathbb{R}^m$ avec $X_1 \ldots . X_m$ sont des champs de vecteurs jouent un role primordial dans la géomètrie sous-Riemannienne, [4] la question importante dans ce mémoire est la théorie de trouver les noyaux de la chaleur[3], la méthode de trouver les noyaux de la chaleur dépendent de commutativité de carrée des champs de vecteurs $X_1 \ldots . X_m$ si les opérateurs commutent donc la valeur du noyaux de la chaleur est le produit des noyau de la chaleur des opérateurs[6], sinon la formule de Toranter sera présentée en utilisant la méthode des intégrales par partie. [2]

Dans ce travail, nous allons présenter d'O.Callin et de D.Cher chan, qui vérifient la non-commutativité de deux carrés de deux champs de vecteurs $X. \ Y$ dans une distribution$\mathcal{D} = \mathrm{span}\{X, Y\}$nilpotente de classe 2. Ce résultat offre une excellente et description de trouver le noyau de la chaleur $L = x_1^2 + \ldots + x_m^2$.

Notre travail s'articule autour de trois points.

- 1er chapitre : il est consacré au rappels des notions de base essentielles à la compréhension de la géométrie sous-Riemannienne, nous rappelons les définitions de la structure sous-Riemannienne, distribution, crochet de Lie, opérateur sous elliptique,...distribution nilpotente.

- 2 ème chapitre : il est consacré à préciser définir la relation entre le crochet de Lie [x ;y]et la non-commuatativité de l' opérateur $[X^2, Y^2]$ précisément nous allons montrer que dans $\mathbb{R}^m$ l'équivalence n'est pas vraie.

- 3 ème chapitre : il constitue le coe du travail dont nous allons présenter sous forme de théorème la condition suffisante de la non-commutativité de $[X^2, Y^2] \neq 0$.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Distribution

Dans ce chapitre on note M une variété lisse de dimension $n > 2$.

Une distribution Δ de rang $m \leq n (m \geq 1)$ sur M est un sous-fibré de rang m du fibré tangent TM, c'est-à-dire une application lisse qui associe à chaque point x de M un sous-espace linéaire $\Delta(x)$ de l'espace tangent T_xM de dimension m.[1]

En d'autres termes, pour chaque $x \in M$, il existe un voisinage ouvert $\mathscr{V}_x$ de x dans M et m champs de vecteurs lisses $X_x^1, \ldots, X_x^m$ linéairement indépendant de $\mathscr{V}_x$ tel que

$$\Delta(y) = \operatorname{Span}\left\{X_x^1(y), \ldots, X_x^m(y)\right\} \quad \forall y \in \mathscr{V}_x$$

Une telle famille de champs de vecteurs lisses est appelée base local dans $\mathscr{V}_x$ pour la distribution Δ.

Toutes les distributions qui seront considérées ultérieurement seront lisses de rang constant $m \in [1, n]$.

Exemple 1.1.

Dans $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z), la distribution Δ générée par les champs de vecteurs X et Y, soit

$$\Delta(x, y, z) = \operatorname{Span}\{X(x, y, z), Y(x, y, z)\} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

où

$$X = \partial_x - \frac{y}{2}\partial_z \text{ et } Y = \partial_y + \frac{x}{2}\partial_z,$$

est une distribution de rang 2 sur $\mathbb{R}^3$.

Proposition 1.1. [1]

Toute distribution sur $\mathbb{R}^n$ admet une base globale.

Preuve Montrons d'abord comment construire une section non nulle d'une distribution donnée sur $\mathbb{R}^n$.

Lemme 1.1.

Soit Δ être une distribution de rang m sur $\mathbb{R}^n$.

Alors il existe un champ vecteur lisse non nul X tel que $X(x) \in \Delta(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration. (Preuve du Lemme 1.1) Définissons l'application multivaluée $\delta : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ par

$$\delta(x) = \{v \in \Delta(x) || v |= 1\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Par construction, δest localement Lipschitzienne par rapport à la distance de Hausdorff sur des sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$. Par compacité de$\bar{B}\left(0_n, 2\right)$, il y a $\varepsilon \in (0,1)$ telle que pour tout $x, y \in \bar{B}\left(0_n, 2\right)$ avec $|x-y| < \varepsilon$,et n'importe quel $v \in \delta(x)$,il y a $w \in \delta(y)$ tel que $|v-w| < 1$.

Soit $N \geq 2$ un entier tel que la suite croissante de boules $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_N$ Définies par

$$\mathscr{B}_i = B\left(0_n, i\varepsilon\right) \quad \forall i = 1, \ldots, N,$$

satisfait $\bar{B}\left(0_n, 1\right) \subset \mathscr{B}_N$.

Pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$,on note $\mathrm{Proj}_{\delta(x)}$ la projection sur la sphère de dimension $(m-1)$ $\delta(x)$.Notez que le map page $\mathrm{Proj}_{\delta(x)}$est bien défini et "lisse" sur l'ensemble ouvert

$$\mathscr{O}_x = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w\rangle \neq 0 \text{ for some } v \in \delta(x)\}$$

Pour chaque $i \in \{1, \ldots, N-1\}$, considérons une cartographie lisse $P_i : \mathscr{B}_{i+1} \to \mathscr{B}_i$ tel que

$$|P_i(x) - x| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathscr{B}_{i+1},$$

tel que $\bar{w} \in \delta(0)$ est fixé.

On définit le champ vectoriel $X : \bar{B}(0_n, 1) \to \mathbb{R}^n$ comme suit :

Nous fixons d'abord

$$X_1(x) = \mathrm{Proj}_{\delta(x)}(\bar{w}) \quad \forall x \in \mathscr{B}_1.$$

Puis, étant donné $X_i : \mathscr{B} \to \mathbb{R}^n$, nous définissons $X_{i+1} : \mathscr{B}_+ \to \mathbb{R}^n$ sur

$$X_{i+1}(x) = \mathrm{Proj}_{\delta(x)}\left(X_i\left(P_i(x)\right)\right) \quad \forall x \in \mathscr{B}\mathscr{B}_{i+1} \tag{1.1}$$

Par construction (par (1.1) et la définition de ε), $X_i\left(P_i(x)\right)$ appartient à $\mathscr{O}_X$pour toute $x \in \mathscr{B}_{i+1}$.

En conclusion, $X = X_N$est lisse sur $\bar{B}(0_n, 1)$ et satisfait $0_n \neq X(x) \in \delta(x)$pour toute $x \in B(0_n, 1)$.

Répétition de la construction sur les annulés $B(0_n, 2) \setminus B(0_n, 1), B(0_n, 3) \setminus B(0_n, 2), \ldots$, on obtient une section non nulle de Δ sur $\mathbb{R}^n$.

On prouve maintenant la proposition 1.1 par récurrence sur m. Soit Δ une distribution de rang $(m+1)$ sur $\mathbb{R}^n$. D'après le lemme 1.2, elle admet une section non nulle X sur $\mathbb{R}^n$. La cartographie multivaluée $\tilde{\Delta} : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ Défini par

$$\tilde{\Delta}(x) = \Delta(x) \cap \{X(x)\}^{\perp} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

est une distribution de rang m lisse (ici $\{X(x)\}^{\perp}$ désigne l'espace qui est orthogonal à $X(x)$ par rapport au produit scalaire euclidien). Ainsi par induction, il existe des champs de vecteurs lisses $X^1, \ldots, X^m$ qui engendrent $\tilde{\Delta}$ sur $\mathbb{R}^n$. La famille $\{X^1, \ldots, X^m, X\}$ est un cadre global pour Δ.

Par construction (par (1.1) et la définition de ε), $X_i\left(P_i(x)\right)$ appartient à $\mathscr{O}_X$ pour toute$x \in$

$\mathscr{B}_{i+1}$. En conclusion, $X = X_N$est lisse sur $\bar{B}\left(0_n, 1\right)$ et satisfait $0_n \neq X(x) \in \delta(x)$pour toute $x \in B\left(0_n, 1\right)$. Répétition de la construction sur les annulés $B\left(0_n, 2\right) \backslash B\left(0_n, 1\right), B\left(0_n, 3\right) \backslash B\left(0_n, 2\right), \ldots$, on obtient une section non nulle de Δ sur $\mathbb{R}^n$. □

On prouve maintenant la proposition 1.1 par récurrence sur m.

Proposition 1.2. [1]

Soit Δ une distribution de rang $m \leq n$ sur M. Alors il existe $k = m(n+1)$ champs de vecteurs lisses $X^1, \ldots, X^k$ tels que $\left\{X^1, \ldots, X^k\right\}$ est une famille génératrice pour Δ.[1]

Preuve Par définition, pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert $\mathscr{V}_x$ de x dans M et m champs de vecteurs lisses $X_x^1, \ldots, X_x^m$ linéairement indépendant de $\mathscr{V}_x$ tel que

$$\Delta(y) = \operatorname{Span}\left\{X_x^1(y), \ldots, X_x^m(y)\right\} \quad \forall y \in \mathscr{V}_x$$

Puisque M est par a compact, il existe un revêtement localement fini $\mathscr{V} = \{\mathscr{V}_i\}_{i \in I}$ où chaque ensemble ouvert $\mathscr{V}_i$ est égal à $\mathscr{V}_{x_i}$ pour certains $x_i \in M$

Remarque 1.1. [1]

Une famille finie de champs de vecteurs lisses $\left\{X^1, \ldots, X^k\right\}$ est appelée famille génératrice pour Δ sur M s'il y a :

$$\Delta(x) = \operatorname{Span}\left\{X^1(x), \ldots, X^k(x)\right\} \quad \forall x \in M.$$

Remarque 1.2. [1]

les champs de vecteurs d'une famille génératrice ne sont pas nécessairement linéairement indépendants.

1.2 Crochets de Lie de champs des vecteurs

[12]

On notera $\mathfrak{X}^\infty(M)$ l'espace des champs de vecteurs C^∞ sur M. Soient X et Y deux champs de vecteurs définis sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, φ^t et ψ^t leurs flots respectifs, supposés définis pour tout temps.

Ces flots ne commutent généralement pas, $\varphi^t \circ \psi^s \neq \psi^s \circ \varphi^t$, comme on le voit sur l'exemple suivant :

$$X(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y(x,y) = x^2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Alors $\varphi^t(x,y) = (x+t, y)$ et $\psi^s(x,y) = (x, y + sx^2)$ d'où $\varphi^t \circ \psi^s(x,y) = (x+t, y+sx^2)$ tandis que $\psi^s\varphi^t(x,y) = (x+t, y+s(x+t)^2)$.

On veut en général mesurer cette "non-commutativité" au premier ordre. Posons pour deux champs de vecteurs X, Y définis sur une variété M.

Définition 1.1.

On pose $[X,Y] = \frac{d}{d}\left(\psi^t\right) * (X)\Big|_{t=0}$. On appelle le champ de vecteurs $[X,Y]$ le crochet de Lie de X et Y.

Proposition 1.3.

(A) Si D_X est la dérivation associée à X, on a $D_X D_Y - D_Y D_X = D_{[X,Y]}$.

(B) $[X,Y] = 0$ si et seulement si les champ de X et de Y commutent.

(C) $[X,Y] = -[Y,X], [X, Y+Z] = [X,Y] + [X,Z]$, (antisymétrie et bilinéarité).

(D) $[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0, \quad$ (identité de Jacobi).

Démonstration.

- Pour le premier point $\left(\frac{d}{dt}\left(\psi^t\right)_* D_X\right)_{|t=0} = \left(\frac{d}{dt} D_{(\psi^t)_* X}\right)_{|t=0} = D_{\left(\frac{d}{dt}\left(\psi^t\right)_* X\right)_{|t=0}} = D_{[X,Y]}$.

Mais on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\left(\psi^t\right)_* D_X f\right)_{|t=0} &= \frac{d}{dt}\left(D_X\left(f\circ\left(\psi^t\right)\right)\circ\left(\psi^t\right)^{-1}\right)_{|t=0}\\
&= D_X\left(\frac{d}{dt} f\circ\left(\psi^t\right)\right)_{|t=0} + \frac{d}{dt}\left(D_X(f)\circ\left(\psi^t\right)^{-1}\right)_{|t=0}\\
&= D_X D_Y f - D_Y D_X f.
\end{aligned}$$

car si ψ^t est le flot de $Y, \left(\psi^t\right)^{-1}$ est le flot de $-Y$ vu que
$0 = \frac{d}{dt}\psi^t\left(\psi^t\right)^{-1}_{|t=0} = \left(\frac{d}{dt}\psi^t\right)_{t=0} + \left(\frac{d}{dt}\left(\psi^t\right)^{-1}\right)_{|t=0} = Y(x) + \frac{d}{dt}\left(\psi^t\right)^{-1}_{|t=0}.$

- Pour le second point supposons $[X,Y]=0$, alors

$$\frac{d}{dt}\left(\psi^t\right)_*(X)\Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}\left(\psi^{t+t_0}\right)_*(X)\Big|_{t=0} = \left(\psi^{t_0}\right) * \frac{d}{dt}\left(\psi^t\right)_*(X)\Big|_{t=0} = \left(\psi^{t_0}\right)_*([X,Y]) = 0.$$

Cela montre que $\left(\psi^t\right), (X)$ est indépendant de t, donc égal à Y.

L'égalité de leurs flots s'écrit $\psi^t\circ\varphi^s\circ\left(\psi^t\right)^{-1} = \varphi^*$ ce qui signifie que les flots de X et Y commutent. Inversement si X et Y commutent, $\psi^t\circ\varphi^n\circ\left(\psi^t\right)^{-1} = \varphi^n$, et l'égalité des générateurs infinitésimaux de ces flots s'écrit $\left(\psi^t\right) * (X) = Y$. Il est alors clair que $[X,Y]=0$.

- Le troisième point résulte immédiatement de (A). Puisque $\left(\psi^t\right)*$ est linéaire, sa dérivée par rapport à t l'est aussi, d'où $[X, Y+Z] = [X,Y] + [X,Z]$

- L'identité de Jacobi résulte de la formule (A).

$\square$

Proposition 1.4.

Le crochet n'est pas associative.

Remarque 1.3.

Si X, Y sont des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$[X, Y] = dY(x)X(x) - dX(x)Y(x).$$

Remarque 1.4. (Expression locale du crochet de deux champs de vecteurs).

Dans un système de coordonnées locales (x^i), les composantes du champ $[X, Y]$ s'écrivent :

$$[X, Y]^k = X^j \partial_j Y^k - Y^j \partial_j X^k. \tag{1.2}$$

1.3 Varité de Hörmander

Une variété M est dite de Hormander s'ils existent $2n$ champs de vecteurs $X_1, X_2 \ldots X_{2n}$ sont définis (localement) dans M où la condition de Hormander est vérifié

$(*)$ Tout les champs de vecteurs $X_1, X_2 \ldots X_{2n}$ avec leurs crochets itérés $[X_i, Y_i]$,$[X_i, [X_j, Y_k]]$ génèrent l'espace tangent en tout point de M.

- Hormander a prouvé que si $(*)$ est vérifiée, alors l'opérateur $L = 1/2(X_1^2 + \ldots + X_{2n}^2)$ est hypoelliptique.

-Si le nombre maximal des crochet de Lie qui génèrent l'espace tangent en tout point est égal à $k-1$, alors l'opérateur L est dite de degré k.

- Si le dégré $k = 2$ la variété de Hormander est dite la variété de Heisenberg.

- La condition $(*)$ est connue dans la géométrie sous-Riemannienne par le théorème de Chow [14]

1.4 Distribution non holonomique

Une distribution Δ sur M est dite totalement non holonomique sur M si pour chaque $x \in M$, il existe un voisinage ouvert $\mathscr{V}_x$ de x dans M et une base local $(X_x^1, \ldots, X_x^m)$ sur $\mathscr{V}_x$ qui

satisfait la condition de Hörmander sur $\mathscr{V}_x$. De plus, on appelle degré de non-holonomie (ou simplement degré) de Δ en x le plus petit entier $r = r(x) \geq 1$ tel que :

$$\mathrm{Lie}^r \left\{X^1, \ldots, X^m\right\}(x) = T_X M.$$

Ces définitions sont intrinsèques, elles ne dépendent pas du choix du cadre local $X_x^1, \ldots, X_x^m$. Ceci est une conséquence du résultat suivant : [1]

Proposition 1.5. [1]

Soit $\{X^1, \ldots, X^m\}, \{Y^1, \ldots, Y^m\}$ deux familles de champs de vecteurs lisses linéairement indépendants qui génèrent la même distribution sur un ensemble ouvert $\mathscr{O} \subset M$. Alors il vaut pour tout entier $k \geq 1$,

$$\mathrm{Lie}^k \left\{X^1, \ldots, X^m\right\}(x) = \mathrm{Lie}^k \left\{Y^1, \ldots, Y^m\right\}(x) \quad \forall x \in \mathscr{O}.$$

Exemple 1.2. [1]

La distribution donnée dans l'exemple 1.1 est totalement non holonomique. On vérifie facilement que

$$[X, Y] = \partial_z \quad \forall i, j = 1, \ldots, n,$$

ce qui signifie que Δ a le degré 2 .

1.5 Distribution nilpotence de classe c^k

Nous incluons cette section ici pour clarifier la confusion qui peut se produire parfois entre la classe de nilpotence d'une distribution, nous allons montrer que ce n'est pas toujours la même chose. la classe de nilpotence décrit la nature fonctionnelle de la distribution (type polynomial ,type exponentiel, etc) alors que le pas décrit la non holomonie de la distribution pour les groupes de lie nilpotents ces deux notions coïncident .

Nous définissent les ensembles commutateurs itérés :

$$\mathcal{C}^{(1)} = \{[X, Y]; X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})\}$$

$$\mathcal{C}^{(2)} = \{[[X, Y], Z]; X, Y, Z \in \Gamma(\mathcal{D})\}$$

$$\mathcal{C}^{(2)} = \{[(C)^{(1)}, Z]; Z \in \Gamma(\mathcal{D})\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{C}^{(n+1)} = \{[\mathcal{C}^{(n)}, Z]; Z \in \Gamma(\mathcal{D})\},$$

$\mathcal{C}^{(n}$est l'ensemble des champs de vecteurs.

définition la distribution $\mathcal{D}$ est dite nilpotente s'il existe un entier $n \geq 1$, tel que $\mathcal{C}^{(n)} = 0$ c'est à dire : toutes les n crochet de lie itérées s'annulent. Le plus petit entier n ayant cette propriété est appelé la classe de nilpotence de Distribution $\mathcal{D}$.[4]

1.6 Opérateurs sous-elliptiques

Définition 1.2. [10]

Soit

$$X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}, X_m,$$

est m des champs de vecteurs linéairement indépendants sur $\mathbb{R}^n$, avec $m < n$.

l'opérateur de la somme des carrés :

$$\Delta_X = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} X_i^2,$$

est un opérateur sous-elliptique avec $n - m$ directions manquantes.[8]

Chapitre 2

Relation entre la non commutativité des opérateurs$[X^2, Y^2]$ et le crochet de lie$[X, Y]$

Soient X et Y deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$.

2.1 Distribution de classe $C^{(k)}$ et exemple

Définition 2.1. Deux champs vecteur X et Y satisfont à la condition $\mathfrak{N}_k$ au point p si $[x^k, y^k]_p \neq 0$

[14] la distribution $\mathcal{D} = \operatorname{span} X, Y$ est dite $\mathfrak{N}_2$ distribution si $[X^2, Y^2]_p \neq 0$

[9]

exemple 2.1 les champs de vecteurs

$$X = \partial_x, \quad Y = \partial_y + x\partial_z$$

satisfont à la condition $(\mathfrak{N}_2)$ partout sur $\mathbb{R}^3$. Ceci découle des relations

$$[X, Y] = \partial_z \neq 0$$

$$X^2 = \partial_z^2$$

$$Y^2 = \partial_y^2 + 2x\partial_y\partial_z + x^2\partial_z^2$$

$$\left[X^2, Y^2\right] = 4\partial_x\partial_y\partial_z + 2\partial_z^2 + 4x\partial_x\partial_z^2 \neq 0.$$

couvrent une distribution nilpotente avec une classe de nilpotence $k = 2$

$$[X, [X, Y]] = 0, \quad [Y, [X, Y]] = 0, \quad \text{but } [X, Y] \neq 0.$$

Considérons l'opérateur différentiel d'ordre n obtenu en itérant le même champ vectoriel k fois $X^k = X \dots X$.

Commençons par observer que si les champs de vecteurs X et Y commutent, alors les opérateurs X^k et Y^k commutent également.

[6] Cela peut être écrit comme l'inclusion d'ensemble suivante

$$\{p; [X, Y]_p = 0\} \subseteq \left\{p; \left[X^k, Y^k\right]_p = 0\right\}. \tag{2.1}$$

Si les champs de vecteurs X et Y commutent alors X^k et Y^k commutent

2.2 démonstration de la propriété

On commence par le cas où $n = 2$

utilisant $XY = YX$

[8] on a :

$$\begin{aligned} X^2Y^2 &= XXYY \\ &= XYXY \\ &= YXXY \\ &= YXYX \\ &= Y^2X^2 \end{aligned}$$

pour $n = k$,

$$\begin{aligned} X^kY^k &= X \dots XY \dots Y. \\ &= X \dots YX \dots X. \\ &\vdots \\ &= Y \dots YX \dots X. \quad = Y^kX^k \end{aligned}$$

.

Exemple 2.1. Considérons les champs de vecteurs

$$X = \partial_x \quad Y = Y\partial_y$$

on a

$$\begin{aligned} X^2 &= \partial_x^2 \\ Y^2 &= Y^2\partial_y^2 \\ \{[X, Y]\} &= 0 \\ \{\left[X^2, Y^2\right]\} &= \left[\partial_x^2, Y^2\partial_y^2\right] = 0 \end{aligned}$$

La contrapose de propriété

on a

$$\left\{p; \left[X^k, Y^k\right]_p \neq 0\right\} \subset \{p; [X, Y]_p \neq 0\}$$

i.e

Si X et Y sont$(\mathfrak{N}_k)$-champs vecteur implique que si les champs vecteurs, alors X et Y ne commuter pas.

Exemple 2.2.

les champs de vecteurs

$$X = \partial_x, \quad Y = \partial_y + x\partial_z$$

satisfont la condition $(\mathfrak{N}_2)$ partout sur $\mathbb{R}^3$.

Ceci découle des relations

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \partial_z \neq 0 \\ X^2 &= \partial_z^2 \\ Y^2 &= \partial_y^2 + 2x\partial_y\partial_z + x^2\partial_z^2 \\ \left[X^2, Y^2\right] &= 4\partial_x\partial_y\partial_z + 2\partial_z^2 + 4x\partial_x\partial_z^2 \neq 0. \end{aligned}$$

2.3 Remarque

Le contraire de la propriété n'est pas toujours vrai.

contre exemple

les champs de vecteurs

$$X = \partial_x, \quad Y = (1 + x^2)\partial_z$$

satisfont la condition $(\mathfrak{N}_2)$ partout sur $\mathbb{R}^3$.

Ceci découle des relations

$$[X, Y] = 2x\partial_y$$

et :

$$\left[X^2, Y^2\right] = 8x(1 + x^2)\partial_x\partial_y^2 + (4x^2 + 8x + 4)\partial_y^2$$

Dans le points $(0, y, z)$

on a

$[X, Y]_p = 0$ et $[X^2, Y^2]_p \neq 0$

Chapitre 3

Condition suffisante de la non commutativité de $[X^2, Y^2] \neq 0$

Dans cette partie nous allons présenter sous forme de théorème une condition suffisante de la non-commutativité de $[X^2, Y^2] \neq 0$.

3.1 Condition suffisante de la non -commutativité de $[X^2, Y^2] \neq 0$

Théorème 3.1. [13]

Tout distribution $\mathcal{D} = \mathrm{span}\{X, Y\}$ avec une classe de nilpotence 2 est un $(\mathfrak{N}_2)$-distribution.

3.2 démonstration du théorème

Démonstration.

Puisque la classe de nilpotence de la distribution est 2 , nous avons

$$[X, [X, Y]] = 0, \quad [Y, [Y, X]] = 0, \quad [X, Y] \neq 0. \tag{3.1}$$

Les deux premières relations de (3.1) deviennent avec une classe de nilpotence 2 est un

$$X^2Y + YX^2 = 2XYX \tag{3.2}$$

$$Y^2X + XY^2 = 2YXY \tag{3.3}$$

En multipliant à droite la relation (3.2) par Y et la relation (3.3) par X on obtient

$$X^2Y^2 + YX^2Y = 2(XY)^2 \tag{3.4}$$

$$Y^2X^2 + XY^2X = 2(YX)^2 \tag{3.5}$$

et en soustrayant, on obtient

$$\begin{aligned}\left[X^2, Y^2\right] = X^2Y^2 - Y^2X^2 &= \left(2(XY)^2 - XY^2X\right) - \left(2(YX)^2 - YX^2Y\right) \\ &= 2\left\{(XY)^2 - (YX)^2\right\} + \left(YX^2Y - XY^2X\right)\end{aligned}$$

En comparant (3.4) et (3.5) on obtient

$$XY^2X - YX^2Y = YX^2Y - XY^2X \Longleftrightarrow XY^2X = YX^2Y, \tag{3.6}$$

et donc les relations (3.4) et (3.5) deviennent

$$\left[X^2, Y^2\right] = 2\left\{(XY)^2 - (YX)^2\right\} \tag{3.7}$$

Si on note $A = XY$ et $B = YX$, utilisons (3.6) et (3.7) les opérateurs A et B commutent

$$AB = (XY)(YX) = XY^2X = YX^2Y = (YX)(XY) = BA$$

et ensuite nous pouvons factoriser la différence des carrés $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$. Alors la relation (3.7) devient par factorisation relation (3.7)

$$\left[X^2, Y^2\right] = 2(XY - YX)(XY + YX) \tag{3.8}$$

Nous allons montrer que Xet$Y$ sont $(\mathfrak{N}_2)$-les champs, c'est-à-dire. $[X^2, Y^2] \neq 0$. Nous allons poursuivre une preuve par contradiction en supposant que $[X^2, Y^2] = 0$. Alors la relation (3.8) fournit

soit : $XY - YX = 0$, i.e., $[X, Y] = 0$, ce qui est en contradiction avec la dernière des relations (3.1). ou : $XY + YX = 0$, c'est-à-dire,

$$XY = -YX \tag{3.9}$$

Le reste de la preuve consiste à montrer que (3.9) ne peut pas être vrai. Par contradiction, nous supposons que (3.9) est vrai. Alors

$$[X, Y] = XY - YX = 2XY = -2YX \tag{3.10}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} [X, [X, Y]] = 0 \Longrightarrow [X, XY] = 0 \Longrightarrow X^2Y = XYX \\ [Y, [Y, X]] = 0 \Longrightarrow [Y, YX] = 0 \Longrightarrow Y^2X = YXY \end{aligned} \tag{3.11}$$

En utilisant (3.10) et (3.11), nous avons

$$X[X, Y] = X(XY - YX) = X^2Y - XYX = 0$$

$$Y[X, Y] = Y(XY - YX) = YXY - Y^2X = 0$$

En combinant les deux dernières relations, on obtient

$$\begin{aligned}[X,Y]^2 &= [X,Y][X,Y] = (XY - YX)[X,Y] \\ &= X(Y[X,Y]) - Y(X,[X,Y]) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, $[X,Y] = 0$, ce qui est une contradiction. Il s'avère que (3.9) ne peut pas tenir. Il résulte que les champs de vecteurs X et Y span a $(\mathfrak{N}_2)$-distribution.

□

3.3 contre exemple et exemple sur le théorme

Contre-exemple :

Nous remarquons que le contraire du théorème précédent ne tient pas, comme le montre le contre-exemple suivant.

Soit $X = \partial_x$et $Y = e^x \partial_y$.

Puisque

$$[X,Y] = e^x \partial_y \neq 0, \quad \left[X^2, Y^2\right] = 4e^{2x}\left(\partial_y^2 + \partial_x \partial_y^2\right) \neq 0$$

la distribution span$\{X,Y\}$est un $(\mathfrak{N}_2)$-distribution.

Cependant, cette distribution n'est pas nilpotente puisque

$$[X, \ldots [X,[X,Y]]] = e^x \partial_y$$

Exemple 3.1.

Une classe importante de distributions avec la classe de nilpotence 2 sont les distributions de type Heisenberg. Considérons les champs de vecteurs X, Y, T sur $\mathbb{R}^3$. Si

$$[X,Y] = T, \quad [X,T] = 0, \quad [Y,T] = 0$$

nous disons que $\mathcal{D} = \operatorname{span}\{X, Y\}$ est une distribution tridimensionnelle de type Heisenberg. Puisque

$$[[X, Y], X] = [T, X] = 0, \quad [[X, Y], Y] = [T, Y] = 0,$$

il en résulte que $\mathcal{D}$ est une distribution nilpotente avec la classe de nilpotence 2 .

D'après le théorème précédent, la distribution susmentionnée est une $(\mathfrak{N}_2)$-distribution, c'est-à-dire.

$[X^2, Y^2] \neq 0$.

L'un des exemples classiques de champs de vecteurs ayant ces propriétés est le suivant

$$X = \partial_x + 2y\partial_z, \quad Y = \partial_y - 2x\partial_z, \quad T = -4\partial_z.$$

Dans ce cas, nous avons également que X^2 et Y^2 ne sont pas commutés. Le kemel de chaleur du Laplacien de Heisenberg $\frac{1}{2}\left(X^2 + Y^2\right)$ a été calculée dans [5] et [7].

Développements ultérieurs. Une question naturelle est de savoir si nous pouvons généraliser le théorème au cas de plus de deux champs de vecteurs. Une autre question est d'étudier le cas de $(\mathfrak{N}_k)$-distributions.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce travail un outil très important dans la géométrie différentielle,distribution nilpotence.

Nous avons d'abord donné un rappel sur quelques aspects que nous avons jugé utiles afin de permettre au lecteur du présent document une meilleure compréhension.
C'est un nouveau domaine dans la géométrie différentielle Très important

Bibliographie

[1] Agrachev, A., Barilari, D., Boscain, U. : Introduction to Riemannian and sub-Riemannian geometry. To appear

[2] R. Beals, B. Gaveau and P. C. Greiner, On a geometric formula for the fundamental| solution of subelliptic Laplacians, Math. Nachr., 181 (1996), 81-163

[3] R. Beals, B. Gaveau and P. C. Greiner, Hamilton-Jacobi theory and the heat kernel on Heisenberg groups, J. Math. Pures Appl., 79(7) (2000), 633-689.

[4] O. Calin and D. C. Chang, Sub-Riemannian Geometry, General Theory and Examples, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge University Press, Vol. 126, 2009

[5] B. Gaveau, Systemes Dynamiques Associ ´ es a Certains Op ´ erateurs Hypoelliptiques, ´ Bull. Sc. Math., 102 (1978), 203-229.

[6] O. Calin and D. C. Chang, Geometric Mechanics on Riemannian Manifolds : Applications to Partial Differential Equations, Applied and Numerical Analysis. Birh auser, ¨ Boston, 2004

[7] A. Hulanicki, The distribution of energy in the Brownian motion in the Gausssian field and analytic hypoellipticity of certain subelliptic operators on the Heisenberg group, Studia Mathematica, 56 (1976), 165-173.

[8] L. Hormander, Hypo-elliptic second order differential equations, ¨ Acta Math., 119 (1967), 147-171.

[9] A. Agrachev, B. Bonnard, M. Chyba, and I. Kupka. Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case. ESAIM : Control, Optimisation and Cal- culus of Variations, 2 :377–448, 1997.

[10] Calin, O., Chang, Geometric Mechanics on Riemannian Manifolds, Birkhauser, 2005.

[11] Calin, O, Chang D.C., Sub-Riemannian Geometry, General Theory and Applications, Cambridge Press, 2009.

[12] O,On the radical of a Lie algebra, Proc. Amer. Math. Soc., l (]950), pp. 14-17.

[13] O.vidiu calin and der.c.chang ,taiwanese journal of mathematics,Vol. 15, No. 2, pp. 875-881, 2011

[14] CHOW, W.L. : Uber Systeme van Linearen Parbiellen Differentidgleichungen erster Otdnung, Math. Ann, vol 117, 98-105