République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université de Ghardaia

Département de Mathématiqude et Informatiques

Algèbre3 : Réduction des endomorphismes

Cours et Exercices

Réalisé par Dr. Guerarra Sihem

6 novembre 2023

Table des matières

Introduction

La réduction d'endomorphisme a pour objectif d'exprimer des matrices et des endomorphismes sous une forme plus simple, par exemple pour faciliter les calculs. Cela consiste essentiellement à trouver une décomposition de l'espace vectoriel en une somme directe de sous-espaces stables sur lesquels l'endomorphisme induit est plus simple.

Lorsque l'espace vectoriel E est de dimension finie, l'étude de l'endomorphisme f se ramène immédiatement à celle de sa matrice par rapport à une base donnée. La matrice obtenue est une matrice carrée. Souvent, la même base de E est considérée au départ et à l'arrivée.

Moins géométriquement, cela correspond à trouver une base de l'espace dans la quelle l'endomorphisme s'exprime simplement. l'espace vectoriel sur lequel s'applique l'endomorphisme possède des propriétés différentes selon les cas. Lorsque l'espace est de dimension finie, la structure du corps détermine l'essentiel des propriétés de réduction. Cette approche, qui fait intervenir l'anneau des polynômes associé au corps. Le cas le plus simple est celui où le corps est algébriquement clos, c'est-à-dire que tout polynôme non constant admet au moins une racine. C'est le cas des nombres complexes. Alors la réduction est particulièrement efficace. elle mène à l'étude des sous-espaces caractéristiques, qui fournit une réduction simple de l'endomorphisme, dite réduction de Jordan. Elle permet alors de comprendre pourquoi le polynôme caractéristique est un multiple du polynôme minimal, et fournit donc une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton. Elle est enfin la base d'une famille d'algorithmes souvent largement plus rapides qu'une approche par les déterminants.

La notion de valeur propre devient le bon outil dans ce contexte. Lorsqu'il existe une base de vecteurs propres, on parle de diagonalisation. cette denière est un procédé d'algèbre linéaire qui permet de simplifier la description de certains endomorphismes d'un espace vectoriel, en particulier de certaines matrices carrées. Elle consiste à rechercher et expliciter une base de l'espace vectoriel constituée de vecteurs propres, lorsqu'il en existe une. En dimension finie, la diagonalisation revient en effet à décrire cet endomorphisme à l'aide d'une matrice diagonale.

Un vecteur propre est un vecteur non nul dont l'image par f est colinéaire au vecteur d'origine. Le rapport de colinéarité est appelé valeur propre. L'ensemble constitué des vecteurs propres de valeur propre λ, et du vecteur nul, est appelé le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ. La décomposition en sous-espaces propres possède de bonnes propriétés :

- Les sous-espaces propres sont en somme directe.

- La restriction de l'endomorphisme au sous-espace propre associé à la valeur propre λ est l'homothétie de rapport λ.

- Les propriétés recherchées pour une réduction optimale sont rassemblées.

La diagonalisation d'un endomorphisme a plusieurs d'applications, elles permet un calcul rapide et simple de ses puissances et de son exponentielle, ce qui permet d'exprimer numériquement certains systèmes dynamiques linéaires, obtenus par itération ou par des équations différentielles linéaires.

Le polycopié est déstigné aux étudiant de la deuxième année licence Mathématique, il se compose de troix chapitres, dans le premier chapitre on a exposé quelques préliminaires nécessaires pour le contenu comme l'arithmetique des polynômes, la factorisation des polynomes sur le corps $\mathbb{k}$ et quelques notions très outils concernants l'algèbre lineaires comme la somme directe des sous-espaces vectoriels, la matrice associée à une application linéaire dans des bases données, la règle de changement de bases, les déterminants.

Dans le deuxième chapitre on a étudié la réduction des endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie, d'abord on a introduit quelques notions très outils concernants l'algèbre lineaires, aprés on a défini les espaces vectoriels stables par l'endomorphismes en suite, les valeurs et les vecteurs propres, on a parlé des polynômes d'endomorphismes où on a commencé par les polynômes annulateurs en général, on particuliér le théorème de cayley Hamilton et le polynôme minimal, et par conséquence on a donné la deuxième critère de la diagonalisation, aussi on a presenté les conditions de la trigonalisation des endomorphisme et la forme normale de Jordan. et le polynôme caractéristique, le polynome minimale où on a abouti à la première critère de la diagonalisation des endomorphismes.

Dans le troisième chapitre on a présenté quelques applications de la diagonalisation des endomorphismes, telles que la puissance, l'exponentielle, suites récurrentes linéaires, résolution des systèmes différentielles linéairs.

A la fin de chaque chapitre on a appuyé le document par une serie des exercices.

Notations

$\mathbb{K}$: Le corps des nombres réels ou complexes ou rationnels.

$\mathbb{N}$: L'ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{Z}$: L'anneau des entiers relatifs.

$\mathbb{Q}$: Le corps des nombres rationnels.

$\mathbb{R}$: Le corps des nombres réels.

$\mathbb{C}$: Le corps des nombres complexes.

$\mathcal{L}(E)$: L'espaces vectoriel des endomorphismes de E.

$\Bbbk[X]$: L'anneau des polynomes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

$\Bbbk_n[X]$: L'anneau des polynomes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ de degré $\leq n$.

$M^{m\times n}(\mathbb{K})$: L'espace des matrices de type $m \times n$ sur $\mathbb{K}$.

$M^n(\mathbb{K})$: L'espace des matrices carrée d'order n sur $\mathbb{K}$.

$\mathbb{R}^{m\times n}$: L'espace des matrices de type $m \times n$ sur $\mathbb{R}$.

$\mathbb{C}^{m\times n}$: L'espace des matrices de type $m \times n$ sur $\mathbb{C}$.

$GL_n(\mathbb{K})$: Le groupe des matrices inversibles d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

A^{-1} : L'inverse ordinaire de A.

A^T : La matrice transposée de A.

$\det(A)$: Le determinant de A.

$Sp(A)$ $(Sp(f))$: Le spectre de la matrice A (de l'endomorphismes f).

$rang(A)$: Le rang de A.

$\ker(A)$ $(\ker(f))$: Le noyau de la matrice A (de l'endomorphisme f).

$\mathrm{Im}(A)$: L'image de la matrice A.

$tr(A)$: La trace de la matrice A.

I_n : La matrice d'unité d'ordre n.

Id_E : L'application identique de E.

$f_{|F}$: La restriction de l'endomorphisme f sur F.

$J(\lambda, n)$: Bloc de Jordan associé à la valeur propre λ et de taille $n \times n$.

χ_A (χ_f): Le polynome caractéristique de la matrice A (de l'endomorphismes f).

μ_A (μ_f): Le polynome minimal de la matrice A (de l'endomorphismes f).

Chapitre 1

Rappel : Construction de l'anneau des polynômes

1.1 L'anneau des polynômes

Les polynômes sont des objets très simples mais aux propriétés extrêmement riches. Il y a une grande analogie entre l'arithmétique des polynômes et celles des entiers. En algèbre, l'anneau des polynômes formels (à une indéterminée) est un ensemble contenant des nombres, comme les entiers, les réels ou les complexes, et un objet supplémentaire, souvent noté X. Tous les éléments de l'anneau de polynômes s'additionnent et se multiplient. On trouve des polynômes comme $4X$, X^3, ou encore $X^2 + X - 3, \ldots.$ De plus, une propriété importante est que les polynômes 1, X, X^2, X^3... sont linéairement indépendants. Dans ce chapitre après quelques définitions on va rappeler les concepts de base concernants l'arithmétique des polynômes.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif muni des opérations usuelles (c'est-à-dire muni de l'addition $+$ et de la multiplication $\times$).qui peut être :

- le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels,

- le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels,

- le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

On note 0 et 1 les éléments neutres pour l'addition et pour la multiplication respectivement. Il nous arrivera parfois de les noter $0_{\mathbb{k}}$ et $1_{\mathbb{k}}$ pour marquer leur appartenance au corps $\mathbb{k}$.

1.1.1 L'ensemble des polynômes

Définition 1.1.1 *On appelle polynôme à une indéterminée à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *(ou plus simplement polynôme sur* $\mathbb{K}$*) une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sur* $\mathbb{K}$ *dont tous les termes à partir d 'un certain rang sont égaux à* 0*. On note* $\mathbb{K}[X]$ *l 'ensemble des polynômes à coefficients dans* $\Bbbk$*.*
Le polynôme P *s'écrit ainsi :*

$$P = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n, 0, 0, ...)$$

et les termes $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ *se nomment les coefficients du polynôme* P*.*

Définition 1.1.2 *On dit que deux polynômes* $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{K}[X]$ *sont égaux, et on note* $P = Q$*, si* $a_n = b_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

Définition 1.1.3 *Soit* $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un polynôme non nul de* $\mathbb{K}[X]$*. (On appelle degré de P, et on note* $\deg(P)$ *, le plus grand entier naturel* n *tel que* $a_n \neq 0$*. Autrement dit,*

$$\deg(P) = max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$$

(Le coefficient $a_{\deg(P)}$ *se nomme coefficient de plus haut degré de* P *et le polynôme* P *est dit normalisé (ou unitaire) si* $a_{\deg(P)} = 1$*.*

Remarque 1.1.1 *1) Le polynome nul noté par* $0_{\Bbbk[X]}$ *tel que* $0_{\Bbbk[X]}(X) = 0$*, par convention, on pose* $\deg(0_{\Bbbk[X]}) = -\infty$*.*
2) Le polynôme constant est un polynome de la forme $P(X) = a_0$*,* $a_0 \in \Bbbk$*, avec* $\deg P = 1$*.*

Exemple 1.1.1 *Soit* $P = 1 + X + X^5 \in \mathbb{C}[X]$*,* $\deg(P) = 5$*.*

Définition 1.1.4 ***(Fonction polynomiale)***
tout polynôme $P = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n, 0, 0, ...) \in \mathbb{K}[X]$ *on associe l'application* $\widetilde{P} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ *définie pour tout* $x \in \mathbb{K}$ *par*

$$\widetilde{P}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

Cette application est appelée fonction polynomiale associée à P*.*

Définition 1.1.5 ***(Polynôme dérivé)***
Soit $P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ *un polynôme de* $\mathbb{K}[X]$ *tel que* $\deg P = n \geq 1$*. On appelle polynôme dérivé de* P *le polynôme de* $\mathbb{K}[X]$ *, noté* P'*, défini par*

$$P' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1}.$$

Si le polynôme P *est de degré* 0 *alors le polynôme dérivée* P' *est* $0_{\mathbb{K}[X]}$*.*

Opérations algébriques sur les polynômes

Définition 1.1.6 ***(Addition de polynômes)***
Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux polynômes de* $\mathbb{K}[X]$ *. On appelle somme des polynômes* P *et* Q *(ou addition de* P *et* Q*) le polynôme de* $\mathbb{K}[X]$ *, noté* $P+Q$ *et défini par*

$$P + Q \overset{déf}{=} (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

On a ainsi défini une première loi (de composition)

Définition 1.1.7 ***(Multiplication de polynômes)***
Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux polynômes de* $\mathbb{K}[X]$ *. On appelle produit de* P *et* Q *le polynôme de* $\mathbb{K}[X]$ *, noté* $P \times Q$ *(ou plus simplement* PQ*), défini par* $P \times Q = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *avec*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n \overset{déf}{=} a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

1.1.2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 1.1.8 *Soient* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$*, on dit que* Q *divise* P *s'il existe* $q \in \mathbb{K}[X]$ *tel que* $P = qQ$*. On note alors* $Q \diagup P$*.*

On dit aussi que P est multiple de Q ou que P est divisible par Q.

Théorème 1.1.1 ***(Division euclidienne des polynômes)***
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$*, avec* $Q \neq 0$*, alors il existe un unique polynôme* q *et il existe un unique polynôme* r *tels que :*

$$A = qQ + r \qquad et \qquad \deg r \prec \deg Q$$

q *est appelé le quotient et* r *le reste et cette écriture est "la division euclidienne" de* P *par* Q*.*
Notez que la condition $\deg r \prec \deg Q$ *signifie* $r = 0$ *ou bien* $0 \leq \deg r \prec \deg Q$*.*
Enfin $r = 0$ *si et seulement si* $Q \diagup P$*.*

Exemple 1.1.2 *La division euclidienne de* P *par* Q *tels que :*

$$P = x^3 + 2x^2 - 3 \quad et \quad Q = x^2 - 4,$$

Donne : $x^3 + 2x^2 - 3 = (x+2)(x^2-4) + (4x+5) = qQ + r.$

Définition 1.1.9 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\deg P \geq 1$. Le polynôme **P** est dit irréductible (ou premier) dans $\mathbb{K}[X]$ s 'il n'admet pour diviseur que les polynômes $\alpha.1_{\mathbb{K}[X]}$ et $\alpha.P$ où $\alpha \in \Bbbk^*$. Autrement dit, le polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est irréductible lorsque les seuls polynômes qui le divisent sont, à un facteur multiplicatif près, $1_{\mathbb{K}[X]}$ et lui-même.*
Dans le cas contraire, on dit qu 'il est réductible.

Exemple 1.1.3 *le polynôme $P = X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.*

1.1.3 Racines d'un polynôme

Définition 1.1.10 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On dit que le scalaire α de $\mathbb{K}$ est une racine de P si $\widetilde{P}(\alpha) = 0$ où $\widetilde{P}$ désigne la fonction polynomiale associée à P.*

Proposition 1.1.1 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. L'élément α de $\mathbb{K}$ est une racine de P si et seulement si, $X - a$ divise P.*

Proposition 1.1.2 ***(Racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers)***
Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients entiers ($a_k \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$) et p, q deux entiers relatifs non nuls sans diviseur commun autre que 1 et -1 dans $\mathbb{Z}$. une condition nécessaire (mais non suffisante) pour que le nombre rationnel $\frac{p}{q}$ soit racine de P est que p divise a_0 et que q divise a_n.

Exemple 1.1.4 *Soit le polynôme*

$$P = 2x^3 - x^2 - x - 3$$

ici : $a_0 = -3$, $a_3 = 2$.
les valeurs possibles pour p sont : -3, -1, 1, 3.
les valeurs possibles pour q sont : -2, -1, 1, 2.
si P possède des racines dans $\mathbb{Q}$ cela ne peut être que les nombres rationnels suivants

$$-3, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3.$$

On trouve seulement $P\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, On en déduit que le polynôme $P = 2x^3 - x^2 - x - 3$ posséde une unique racine dans $\mathbb{Q}$ qui est $\frac{3}{2}$.

Multiplicité d'une racine

Définition 1.1.11 *Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.*
· On dit que α est une racine de multiplicité h de P s 'il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X - \alpha)^h Q \qquad et \qquad \widetilde{Q}(\alpha) \neq 0.$$

*L 'entier naturel h s 'appelle alors l '**ordre de multiplicité** (ou la multiplicité) de la racine α*
*· Dans le cas particulier où $h = 1$, la racine est appelée **racine simple** de P et dans le cas où $h \succ 1$, la racine est appelée **racine multiple** de P. Si $h = 2$ alors α est une **racine double**, si $h = 3$ alors α est une **racine triple**.*

Exemple 1.1.5 *· Le polynome $P = X^3 - 9X^2 + 15X + 25 \in \mathbb{R}[X]$ admet $X = -1$ comme racine simple et $X = 5$ comme racine double.*

$$P = X^3 - 9X^2 + 15X + 25 = (X + 1)(X - 5)^2$$

Multiplicité d'une racine et polynômes dérivés

Lemme 1.1.1 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Si α est une racine de multiplicité $h \succ 1$ de P alors α est une racine de multiplicité $h - 1$ de P'.*

Proposition 1.1.3 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Le scalaire α de $\Bbbk$ est une racine de multiplicité h de P si et seulement si,*

$$\begin{cases} \forall k \in \{0, ..., h-1\} \qquad \widetilde{P^{(k)}}(\alpha) = 0 \\ \qquad\qquad \widetilde{P^{(h)}}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

Exemple 1.1.6 *Soit le polynôme $P = X^3 - 3X + 2 \in \mathbb{R}[X]$, On a $P' = 3X^2 - 3$ et $P'' = 6X$.*
Alors $X = 1$ est un racine double car $\widetilde{P}(1) = \widetilde{P'}(1) = 0$ et $\widetilde{P''}(1) \neq 0$

Définition 1.1.12 *Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ et de degré n est dit **scindé** sur $\Bbbk$ (ou scindable sur $\mathbb{K}$) s'il existe un scalaire β de $\mathbb{K}$, $\beta \neq 0$, et n scalaires $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ non nécessairement distincts deux à deux appartenant à $\mathbb{K}$ tels que*

$$P = \beta \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$$

Exemple 1.1.7 *Le polynôme $P = X^2 - 2 = \left(X - \sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2}\right)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas scindé sur $\mathbb{Q}$.*

Relations entre coefficients et racines d'un polynôme

· Pour $n = 2$, Soit le polynôme $P = a_2X^2 + a_1X + a_0 = a_2 (X - \alpha_1) (X - \alpha_2)$. Alors,

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -\dfrac{a_1}{a_2}, \\ \alpha_1.\alpha_2 = \dfrac{a_0}{a_2} \end{cases}$$

· Pour $n = 3$, Soit le polynôme $P = a_3X^3+a_2X^2+a_1X+a_0 = a_2 (X - \alpha_1) (X - \alpha_2) (X - \alpha_3)$. Alors,

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\dfrac{a_2}{a_3}, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \dfrac{a_1}{a_3}, \\ \alpha_1.\alpha_2.\alpha_3 = -\dfrac{a_0}{a_3}. \end{cases}$$

$\vdots$

$\vdots$

· Dans le cas général, Soit le polynôme

$$\begin{aligned} P &= a_nX^n + ... + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \\ &= a_n (X - \alpha_1) (X - \alpha_2) (X - \alpha_3) .... (X - a_n) . \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ \forall k \in \{1, 2, ..., n\} \displaystyle\sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le ... \le i_k \le n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}...\alpha_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}, \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Exemple 1.1.8 *Déterminer le nombre complexe λ pour que l'équation algébrique*

$$x^3 + 2x^2 + 3x + \lambda = 0 \qquad \text{(E)}$$

ait deux de ses racines dont le produit vaut 2.

► *en effet : Soient α_1, α_2 et α_3 les trois racines de l'équation (E), et on suppose que $\alpha_1.\alpha_2 = 2$,* *donc on a :*

$$\left\{\begin{array}{c}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-2\\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=3\\ \alpha_1.\alpha_2.\alpha_3=-\lambda\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-2\\ \alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=1\\ \alpha_3=-\dfrac{\lambda}{2}\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\alpha_1+\alpha_2=-2+\dfrac{\lambda}{2}\\ (\alpha_1+\alpha_2)\,\alpha_3=1\\ \alpha_3=-\dfrac{\lambda}{2}\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow (\lambda-2)^2=0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda=2.$$

1.1.4 Polynômes de $\mathbb{C}\,[X]$

Théorème 1.1.2 ***(d'Alembert-Gauss)***
Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n\geq 1$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Il admet exactement n racines si on compte chaque racine avec sa multiplicité.

Proposition 1.1.4 *Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle.*

Factorisation (Décomposition en facteurs irréductibles)

Théorème 1.1.3 *Tout polynôme non constant $P\in\mathbb{K}[X]$ s'écrit comme un produit de polynômes irréductibles unitaires :*

$$P=\lambda P_1^{k_1}P_2^{k_2}...P_r^{k_r}.$$

où¸ $\lambda\in\mathbb{K}^*$, $r\in\mathbb{N}^*$, $k_i\in\mathbb{N}^*$, et les Pi sont des polynômes irréductibles distincts.
De plus cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Factorisation dans $\mathbb{C}$[X] et $\mathbb{R}$[X]

Théorème 1.1.4 *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.*
Donc pour $P\in\mathbb{C}[X]$ de degré $n\geq 1$ la factorisation s'écrit

$$P=\lambda\,(x-a_1)^{k_1}\,(x-a_2)^{k_2}\,...\,(x-a_r)^{k_r}$$

Où $a_1,a_2,...,a_r$ sont les racines distinctes de P et $k_1,...,k_r$ sont leurs multiplicités.

Théorème 1.1.5 *Les polynômes irréductibles de* $\mathbb{R}[X]$ *sont les polynômes de degré* 1 *ainsi que les polynômes de degré* 2 *ayant un discriminant* $\triangle \prec 0$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ *de degré* $n \geq 1$. *Alors la factorisation s'écrit*

$$P = \lambda (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} ... (x - a_r)^{k_r} Q_1^{l_1} ... Q_s^{l_s}$$

Où les a_i *sont exactement les racines réelles distinctes de multiplicité* k_i *et les* Q_i *sont des polynômes irréductibles de degré* 2.

Chapitre 2

Réduction des endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie.

2.1 Rappel sur l'Algèbre lineaire

2.1.1 Espaces vectoriels

Définitions

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps comuutatif ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Définition 2.1.1 *un $\mathbb{K}$-**espace vectoriel** est un ensemble non vide E muni :*

- *d'une loi des compositions interne, c'est-à-dire d'une application de $E \times E$ dans E*

$$E \times E \longrightarrow E$$
$$(u, v) \mapsto u + v$$

- *d'une loi de composition externe, c'est-à-dire d'une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E*

$$\Bbbk \times E \longrightarrow E$$
$$(\lambda, u) \mapsto \lambda.u$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

1. $u + v = v + u$ (pour tous $u, v \in E$)

2. $u + (v + w) = (u + v) + w$ (pour tous $u, v, w \in E$)

*3. il existe un **élément neutre** $0_E \in E$ tel que $u + 0_E = u$ (pour tout $u \in E$)*

4. tout $u \in E$ *admet un* ***symétrique*** u' *tel que* $u + u' = 0_E$*. Cet élément* u'*est noté* $-u$*.*

5. $1.u = u$ *(pour tout* $u \in E$*)*

6. $\lambda.(\mu.u) = (\lambda\mu).u$ *(pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}, u \in E$*)*

7. $\lambda.(u + v) = \lambda u + \lambda v$ *(pour tous* $\lambda \in \mathbb{K}, u, v \in E$*)*

8. $(\lambda + \mu).u = \lambda u + \mu u$ *(pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}, u \in E$*)*

· On appelle les éléments de E des **vecteurs**. Au lieu de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on dit aussi espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

· Les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés des **scalaires**.

· **L'élément neutre** 0_E s'appelle aussi le **vecteur nul**. Il ne doit pas être confondu avec l'élément 0 de $\mathbb{K}$.

Sous-espace vectoriel

Définition 2.1.2 ***(d'un sous-espace vectoriel)***

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Une partie* F *de* E *est appelée un* ***sous espace vectoriel*** *si :*

· $0_E \in F$,· $u + v \in F$ *pour tous* $u, v \in F$,

· $\lambda.u \in F$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et tout* $u \in F$.

Théorème 2.1.1 *Soient,* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* F *un sous-espace vectoriel de* E*. Alors* F *est lui-même un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel pour les lois induites par* E*.*

Intersection de deux sous-espaces vectoriels

Proposition 2.1.1 *(Intersection de deux sous-espaces vectoriels)*

Soient F, G *deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*. L'intersection* $F \cap G$ *est un sous-espace vectoriel de* E*.*

Remarque 2.1.1 *La réunion de deux sous-espaces vectoriels de* E *n'est pas en général un sous-espace vectoriel de* E*. Prenons par exemple* $E = \mathbb{R}^2$*. Considérons les sous-espaces vectoriels* $F = \{(x, y)/x = 0\}$ *et* $G = \{(x, y)/y = 0\}$*. Alors* $F \cup G$ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$*. Par exemple,* $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1)$ *est la somme d'un élément de* F *et d'un élément de* G*, mais n'est pas dans* $F \cup G$*.*

Famille libre

Définition 2.1.3 *Une famille $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ de E est une **famille libre** ou **linéairement indépendante** si tout combinaison linéaire nulle*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_p v_p = 0$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls c'est-à-dire

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad ... \ \lambda_p = 0.$$

*Dans le cas contraire, c'est-à-dire il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls, on dit que la famille est **liée** ou **linéairement dépendante**. Une telle combinaison linéaire s'appelle alors une **relation de dépendance linéaire** entre les v_j.*

Famille génératrice

Définition 2.1.4 *Soient $\{v_1, ..., v_p\}$ des vecteurs de E. La famille $\{v_1, ..., v_p\}$ est une **famille génératrice** de l'espace vectoriel E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, ..., v_p$.*
Ce qui peut s'écrit aussi :

$$\forall v \in E \qquad \exists \lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{K} \qquad v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p$$

*On dit aussi que la famille $\{v_1, ..., v_p\}$ **engendre** l'espace vectoriel E.*

Cette notion est bien sûr liée à la notion de sous-espace vectoriel engendré : les vecteurs $\{v_1, ..., v_p\}$ forment une famille génératrice de E si et seulement si $E = Vect(v_1, ..., v_p)$.

Base

Définition 2.1.5 *(Base d'un espace vectoriel)*
*Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $B = \{v_1, ..., v_n\}$ de vecteurs de E est une **base** de E si B est une famille libre **et** génératrice.*

Théorème 2.1.2 *Soit $B = (v_1, ..., v_n)$ une base de l'espace vectoriel E. Tout vecteur $v \in E$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de B. Autrement dit, il **existe** des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ **uniques** tels que :*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n.$$

Dimension d'un espace vectoriel

Définition 2.1.6 *Soit B une base d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E, la dimension de E noté* $\dim E$ *est $|B|$ (le cardinal de B)*
Si $|B| \prec \infty$, on dit que E est de dimension finie, l'autre cas on dit que E est de dimension infini

Convontion. On convient d'attribuer à l'espace vectoriel $\{0\}$ la dimension 0.
Les espaces vectoriels étudiés sont tous de dimension finie sauf exeption.

Théorème 2.1.3 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.*
1. Alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie,
2. $\dim F \leq \dim E$,
3. $E = F \Longrightarrow \dim E = \dim F$.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 2.1.7 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont supplémentaires si et seulement si ils vérifient :*
- $F \cap G = \{0_E\}$,
- $F + G = E$. *c à d : ($\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists!(x_1, x_2) \in F \times G : x = x_1 + x_2$ (c'est-à-dire,* ***tout*** *vecteur de E se décompose de manière* ***unique*** *comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.))*

On note alors $F \oplus G = E$.

on dit que F et G sont en somme direct.

Théorème 2.1.4 ***Caractérisation de la supplémentarité en termes de bases***
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et F, G deux sous-espaces vectoriels de E munis d'une base, $e_1, ..., e_p$, pour F et d'une base, $f_1, ..., f_q$, pour G. On a équivalence entre :
1 F et G sont supplémentaires dans E : $E = F \oplus G$.
2 $B = (e_1, ..., e_p, f_1, ..., f_q)$ est une base de E.

Théorème 2.1.5 *(Formule de Grassmann, théorème des quatre dimensions) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G des sous-espaces vectoriels de E. Alors :*

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Corollaire 2.1.1 *Si $E = F \oplus G$, alors* $\dim E = \dim F + \dim G$.

2.1.2 Applications linéaires

Définition 2.1.8 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application f de E dans F est une* ***application linéaire*** *si elle satisfait aux deux conditions suivantes :*
1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$, pour tous $u, v \in E$,
2. $f(\lambda u) = \lambda f(u)$, pour tout $u, \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Autrement dit : une application est linéaire si elle « préserve » les deux lois d'un espace vectoriel.

Notation 2.1.1 *L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$, l'ensemble des applications linéaires de E dans E est noté $\mathcal{L}(E)$.*

Proposition 2.1.2 *(caractérisation d'une application linéaire)*
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F. L'application f est linéaire si et seulement si, pour tous vecteurs u et v de E, et pour tous scalaires λ et μ de $\mathbb{K}$,

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Noyau et image d'une application linéaire

Définition 2.1.9 *(Définition du noyau)*
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Le ***noyau*** *de f, noté $\ker(f)$, est l'ensemble des éléments de E dont l'image est 0_F :*

$$\ker(f) = \{x \in E\,;\, f(x) = 0_F\}$$

Autrement dit, le noyau est l'image réciproque du vecteur nul de l'espace d'arrivée : $\ker(f) = f^{-1}\{0_F\}$.

Définition 2.1.10 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. l'image de l'application linéaire f et est noté $\operatorname{Im} f$.*

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in E\} \subset F$$

Proposition 2.1.3 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F.*
1. Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.
2. $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Théorème 2.1.6 *(Caractérisation des applications linéaires injectives)*
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Alors :
1. f injective$\Longleftrightarrow \ker(f) = \{0_E\}$
2. f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Remarque 2.1.2 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*
*· Une applications linaires de E dans F est aussi appelée **morphisme** ou **homomorphisme** d'espaces vectoriels. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.*
*· Une application linéaire de E dans E est appelée **endomorphisme** de E. L'ensemble des **endomorphismes** de E est noté $\mathcal{L}(E)$.*
*· Une application linéaire **bijective** de E sur F est appelée **isomorphisme** d'espaces vectoriels. Les deux espaces vectoriels E et F sont alors dits **isomorphes**.*
*· Un endomorphisme bijectif de E (c'est-à-dire une application linéaire bijective de E dans E) est appelé **automorphisme** de E. L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$.*

Rang d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On rappelle que l'on note $f(E)$ par $\operatorname{Im}(f)$, c'est-à-dire $\operatorname{Im}(f) = \{f(x)/\ x \in E\}$. $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Si E est de dimension finie, alors :

· $\operatorname{Im}(f) = f(E)$ est un espace vectoriel de dimension finie.

· Si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E, alors $\operatorname{Im}(f) = Vect(f(e_1), ..., f(e_n))$.

La dimension de cet espace vectoriel $\operatorname{Im}(f)$ est appelée **rang de** f :

$$rg(f) = \dim \operatorname{Im}(f) = \dim Vect(f(e_1), ..., f(e_n))$$

Théorème du rang

Théorème 2.1.7 *(Théorème des rang)*
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E étant de dimension finie. Alors

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$$

2.1.3 Matrices

Matrice associée à une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soient p la dimension de E et $B = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. Soient n la dimension de F et $B' = (u_1, u_2, ..., u_n)$ une base de F. Soit enfin $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

Définition 2.1.11 *La* ***matrice de l'application linéaire*** *f par rapport aux bases B et B' est la matrice $(a_{i,j}) \in M^{n\times p}(\mathbb{K})$ dont la j-éme colonne est constituée par les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $B' = (u_1, u_2, ..., u_n)$:*

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

En termes plus simples : c'est la matrice dont les vecteurs colonnes sont l'image par f des vecteurs de la base de départ B, exprimée dans la base d'arrivée B'. On note cette matrice $Mat_{B,B'}(f)$.

Inverse d'une matrice

Théorème 2.1.8 *Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.*

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

Nous lui associons la matrice C des cofacteurs, appelée **comatrice,** est notée $Com(A)$:

$$C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 2.1.9 *Soient A une matrice inversible, et C sa comatrice. On a alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^{\top}$$

Proposition 2.1.4 *Si A est inversible alors :*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}, \quad \det(A^\top) = \det A$$

Théorème 2.1.10 *(Matrice inversible et rang)*
Une matrice carrée de taille n est inversible si et seulement si elle est de rang n.

Changement de bases

Matrice de passage d'une base à une autre Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On sait que toutes les bases de E ont n éléments.

Définition 2.1.12 *Soit B une base de E. Soit B' une autre base de E.*
On appelle ***matrice de passage*** *de la base B vers la base B'. et on note $P_{B,B'}$, La matrice carrée de taille $n \times n$ dont la j-ème colonne est formée des coordonnées du j-ème vecteur de la base B', par rapport à la base B.*

On résume en :

La matrice de passage $P_{B,B'}$ contient -en colonnes-les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base B' exprimés dans l'ancienne base B.

Proposition 2.1.5 *1. La matrice de passage d'une base B vers une base B' est inversible et son inverse est égale à la matrice de passage de la base B' vers la base B :*

$$P_{B',B} = (P_{B,B'})^{-1}$$

2. Si B, B' et B'' sont trois bases alors :

$$P_{B,B''} = P_{B,B'} \times P_{B',B''}$$

Formule de changement de base

Théorème 2.1.11 *(Formule de changement de base)*
· Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finie.
· Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
· Soient B_E, B'_E deux bases de E.
· Soient B_F, B'_F deux bases de F.

· *Soit* $P = P_{B_E, B'_E}$ *la matrice de passage de* B_E *à* B'_E.

· *Soit* $Q = P_{B_F, B'_F}$ *la matrice de passage de* B_F *à* B'_F.

· *Soit* $A = Mat_{B_E, B_F}(f)$ *la matrice de l'application linéaire* f *de la base* B_E *vers la base* B_F.

· *Soit* $B = Mat_{B'_E, B'_F}(f)$ *la matrice de l'application linéaire* f *de la base* B'_E *vers la base* B'_F.

$$B = Q^{-1}AP$$

Corollaire 2.1.2 *(cas particulier d'un endomorphisme) :*

· *Soit* $f : E \longrightarrow F$ *une application linéaire.*

· *Soient* B, B' *deux bases de* E.

· *Soit* $P = P_{B,B'}$ *la matrice de passage de* B *à* B'.

· *Soit* $A = Mat_B(f)$ *la matrice de l'application linéaire* f *de la base* B.

· *Soit* $B = Mat_{B'}(f)$ *la matrice de l'application linéaire* f *de la base* B'. *Alors :*

$$B = P^{-1}AP$$

Matrice semblables Les matrices considérées dans ce paragraphe sont des matrices carrées, éléments de $M^n(\mathbb{K})$.

Définition 2.1.13 *Soient* A *et* B *deux matrices de* $M^n(\mathbb{K})$. *On dit que la matrice* B *est semblable à la matrice* A *s'il existe une matrice inversible* $P \in M_n(\mathbb{K})$ *telle que* $B = P^{-1}AP$.

2.1.4 Déterminants

Déterminant en dimension 2 **et** 3 **Matrice** 2×2

En dimension 2, le déterminant est trés simple à calculer :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Matrice 3×3

Soit $A \in M_3(\mathbb{K})$ une matrice 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

La formule **"règle de sarrus"** pour le déterminant :

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Déterminants des matrices particulières

Proposition 2.1.6 *Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) est égal au produit des termes diagonaux.*

Corollaire 2.1.3 *Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des termes diagonaux.*

Propriétés des déterminants Soient A, A_1, A_2 des matrices carrés d'ordre $n \times n$, tels que A_1 est obtunue par la multiplication de la colonne j de la matrice A par un scalair λ, et A_2 est obtunue par la multiplication d'une colonne j et une ligne i de la matrice A par des scalairs λ et μ

Proposition 2.1.7 *1.* $\det(A_1 \times A_2) = \det A_1 \times \det A_2$*,*
2. $\det A_1 = \lambda \times \det A$*,*
3. $\det A_2 = \lambda \times \mu \times \det A$*,*
4. $\det(\lambda A) = \lambda^n \times \det A$*,*
5. Si A inversible, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Déterminant et matrice élémentaires

pour chacune des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice A, on associe une matrice élémentaire E, telle que la matrice obtenue par l'opération élémentaire sur A soit $A' = A \times E$.

1. $C_i \longleftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$: $E_{C_i \longleftarrow \lambda C_i}$
2. $C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{k}$ (et $i \neq j$) : $E_{C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j}$
3. $C_i \longleftrightarrow : C_j$: $E_{C_i \longleftrightarrow C_j}$

Nous allons détailler le cas de chaque opération et son effet sur le déterminant :

Voici le détail pour les opérations élémentaires sur les lignes ou bien sur les colonnes :

1. $L_i \longleftarrow \lambda L_i$, $C_i \longleftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$: le déterminant est multiplié par $\frac{1}{\lambda}$.
2. $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$, $C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{k}$(et $j \neq i$) : le déterminant ne change pas.
3. $L_i \longleftrightarrow L_j$, $C_i \longleftrightarrow C_j$: le déterminant change de signe.

Développement suivant une ligne ou une colonne

Cofacteur

Définition 2.1.14 *Soit* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrées.*

· *On note* A_{ij} *la matrice extraire, obtenue en effaçant la ligne* i *et la colonne* j *de* A.

· *Le nombre* $\det A_{ij}$ *est un* ***mineur d'ordre n-1*** *de la matrice* A.

· *Le nombre* $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ *est le* ***cofacteur*** *de* A *relatif au coefficient* a_{ij}.

Théorème 2.1.12 *(Développement suivant une ligne ou une colonne).*
Formule de développement par rapport à la ligne i *:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Formule de développement par rapport à la colonne j *:*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

2.2 Sous-espaces stables (invariants) par un endomorphisme

Définition 2.2.1 *Soit* f *un endomorphisme d'un espace vectoriel* E. *Un sous-espace vectoriel* F *est dit stable par* f *si*

$$\forall v \in F,\ f(v) \subset F$$

Autrement dit, F *est stable par* f *si* $f(F) \subset F$.
L'application $v \mapsto f(v)$ *de* F *dans* F *est un endomorphisme de* F *appelé endomorphisme de* F *induit par* f *(on dit aussi que c'est l'endomorphisme de* F *déduit de* f *par restriction).*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, f un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une base de F que l'on complète en une base $\beta = (e_1, ..., e_n)$ de E. Alors F est **stable** par f si et seulement si la matrice de f dans la base β est de la forme $\begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$ c'est à dire une matrice triangulaire en blocs

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq p} \in M^n(\mathbb{K})$ la matrice associé à $f_{|F}$ dans la base $(e_1, ..., e_p)$, alors la matrice de f dans base $\beta = (e_1, ..., e_n)$ sera sous la forme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & b_{11} & \cdots & b_{1,n-p} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & b_{p1} & \cdots & b_{p,n-p} \\ 0 & \cdots & 0 & d_{11} & \cdots & d_{1,n-p} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-p,1} & \cdots & d_{n-p,n-p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

Remarque 2.2.1 *Si $E = F_1 \oplus F_2$ et que F_1 et F_2 sont tous les deux stables par f, alors la matrice de f est diagonale par blocs :*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 & d_{11} & \cdots & d_{1,n-p} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \\ 0 & & 0 & d_{n-p,1} & \cdots & d_{n-p,n-p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

Alors si $E = F_1 \oplus F_2 \oplus .... \oplus F_s$, tels que F_1, $F_2, ...,$ F_s sont des sous espaces stables par f, alors la matrice de f est sous la forme

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & & & A_4 \end{bmatrix}$$

Exemple 2.2.1 *Soit e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit r_θ la rotation d'axe e_3 et d'angle θ. L'endomorphisme r_θ de $\mathbb{R}^3$ laisse invariants les sous espaces : $Vect(e_1, e_2)$ et $Vect(e_3)$ sa matrice dans la base e_1, e_2, e_3 est la matrice :*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les droites invariantes sont appelées droites propres, ce sont les droites engendrées par les vecteurs propres.

Proposition 2.2.1 *Si les endomorphismes f et g commutent, alors* $\operatorname{Im} g$ *et* $\ker g$ *sont stables par f.*

Preuve. · Soit $v \in \ker g$. On a $g(v) = 0$, d'où $g(f(v)) = f(g(v)) = f(0) = 0$, donc $f(v) \in \ker g$.
· Soit $u \in \operatorname{Im} g$. Il existe $v \in E$ tel que $u = g(v)$, d'où $f(u) = f(g(v)) = g(f(v))$, donc $f(y) \in \operatorname{Im} g$.
■

2.3 Valeurs et vecteurs propres, polynôme caractéristique

Définition 2.3.1 *Soit $E : \mathbb{K} - e.v$, $f \in \mathcal{L}(E)$,*
- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$, est une valeur propre de f s'il existe un vecteur v non nul de E, tel que

$$f(v) = \lambda v.$$

- Et on dit que v est un vecteur propre associe à la valeur propre λ.
- L'espace propre associé a la valeur propre λ est l'ensemble de tous les vecteurs propres de f associes a λ auquel on ajoute 0, il est noté par E_λ .

$$E_\lambda = \{v \in E,\ f(v) = \lambda v\} \cup \{0\}$$

- Le spectre de f , noté $Sp(f)$, est l'ensemble des valeurs propres de f

$$Sp(f) = \{\lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \text{ est une valeur propre de } f\}.$$

- Une matrice réelle admet donc un spectre réel et un spectre complexe. en particulier le spectre réel de A est inclus dans son spectre complexe.
En effet, Soit λ une valeur propre réelle de A. Alors : $\exists v \neq 0$, $Av = \lambda v$. le vecteur v peut etre considéré comme une matrice colonne de $M^{n\times 1}(\mathbb{R})$, et comme v est non nul donc, $v \in M^{n\times 1}(\mathbb{R}) \subset M^{n\times 1}(\mathbb{C})$, alors il existe une matrice colonne non nulle v, à coefficients complexes telle que : $Av = \lambda v$, ce qui implique que $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$

Pour quoi le vecteur propre v doit être non nul ?

On a : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(0) = \lambda 0 = 0$, c'est à dire pour le vecteur propre nul il existe un nombre infini des valeurs propres λ, qui n'est pas vrais comme dans la proposition ci-dessous.

Proposition 2.3.1 *Pour chaque vecteur propre $v \in E$, il existe une unique valeur propre λ, mais le contraire n'est pas vraie , c'est à dire pour chaque valeur propre λ il existe au moins un vecteur propre non nul*

Preuve. Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres associées au vecteur propre v. Donc,

$f(v) = \lambda_1 v$, $f(v) = \lambda_2 v$, d'où

$f(v) - f(v) = 0 = \lambda_1 v - \lambda_2 v$, d'où $(\lambda_1 - \lambda_2) v = 0$, ce qui implique que $\lambda_1 = \lambda_2$, car v est non nul. ■

Exemple 2.3.1 *Soient $E = \mathbb{R}^3$, $f = r_\theta$ la rotation d'axe e_3 et d'angle θ. Alors $r_\theta(e_3) = e_3$. Donc e_3 est un vecteur propre de r_θ ; la valeur propre associée est* 1.

Exemple 2.3.2 *Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$ l'espace des polynômes complexes de degré $\leq n$. Soit*

$$f : E \to E, \;\; P(X) \longmapsto P'(X)$$

Pour des raisons de degré, $P' = \lambda P \Rightarrow \lambda = 0$ et P constant.
De plus, tout polynôme constant non nul est un vecteur propre de f de valeur propre associée 0*, donc $Sp(f) = \{0\}$.*

Exemple 2.3.3 *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Le complexe $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ est une valeur propre de A. En effet :

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$$

Question : Comment trouver les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice parmi tous les éléments de $\mathbb{K}$? »

2.3.1 Polynôme caractéristique

Définition 2.3.2 *(polynôme caractéristique)*
Soit $A \in M^n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$$

Remarque 2.3.1 *- La matrice $XI_n - A$ est à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$ donc son déterminant $\chi_A(X) \in \mathbb{K}[X]$.*
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \chi_A(\lambda).$$

Exemple 2.3.4 *1. cas $n = 2$*
Pour toute $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= X^2 - (a+d)X + (ad - bc) \\ &= X^2 - (trA)X + \det A \end{aligned}$$

Exercice 2.3.1 ***Polynôme caractéristique d'un produit***
Soient m, n *des entier* ≥ 1. *Si* $A \in M^{m \times n}(\mathbb{K})$ *et* $B \in M^{n \times m}(\mathbb{K})$, *alors :*

$$AB \in M^m(\mathbb{K}) \text{ et } BA \in M^n(\mathbb{K})$$

et

$$X^n \chi_{AB}(X) = X^m \chi_{BA}(X)$$

dans $\mathbb{K}[X]$.

Remarque 2.3.2 *Si* A, $A' \in M^n(\mathbb{K})$ *sont des matrices semblables i.e. si*

$$\exists P \in GL_n(\Bbbk), \ A = PA'P^{-1}$$

Alors,

$$\chi_A(X) = \chi_{PA'P^{-1}}(X) = \chi_{A'}(X).$$

Autrement dit deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. En conséquence, on peut définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme :

Définition 2.3.3 *Supposons que* E *est de dimension finie. Si* f *est un endomorphisme de* E, *alors toutes les matrices de* f *dans une base de* E *sont semblables donc ont le même polynôme caractéistique. Ce polynôme caractéristique commun est le polynôme caractéristique de* f, *noté* $\chi_f(X)$.

Proposition 2.3.2 *Soient* $A \in M^n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors :*

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } A \Longleftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\lambda \text{ n'est une valeur propre de } A &\Longleftrightarrow \forall v \in \mathbb{K}^n - \{0\}, Av \neq \lambda v.i.e : (A - \lambda I_n) v \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \ker (A - \lambda I_n) = \{0\} \\ &\Longleftrightarrow A - \lambda I_n \ \text{ est injective} \\ &\Longleftrightarrow A - \lambda I_n \ \text{ est inversible} \\ &\Longleftrightarrow \det (A - \lambda I_n) \neq 0\end{aligned}$$

■

Théorème 2.3.1 *(fondamental de l'algèbre (ou théorème d'Alembert)) Tout polynôme complexe non constant admet une racine dans* $\mathbb{C}$*.*

Corollaire 2.3.1 *Toute matrice* $A \in M^n(\mathbb{C})$*,* $n \geq 1$*, tout endomorphisme* f *d'un espace vectoriel* ***complexe*** *de* ***dimension finie*** *admet au moins une valeur propre.*

Preuve. Le polynôme caractéristique de A (ou de f) est un polynôme complexe non constant donc admet (au moins) une racine $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors, λ est une valeur propre de A (ou de f). ■

Corollaire 2.3.2 *Soit* A *une matrice réelle. Alors,* A *possède un sous espace invariant de dimension* 1 *ou* 2*.*

Preuve. Soit $n \geq 1$. Comme $A \in M^n(\mathbb{R}) \subset M^n(\mathbb{C})$, A possède une valeur propre $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, a, b réels, et un vecteur propre associé $Z = X + iY \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ où $X, Y \in \mathbb{R}^n$.
Alors,

$$\begin{aligned}AZ = \lambda Z &\Leftrightarrow AX + iAY = (aX - bY) + i(bX + aY) \\ &\Leftrightarrow AX = aX - bY \ \text{ et } \ AY = bX + aY.\end{aligned}$$

et en particulier le sous-espace (réel) $Vect(X, Y)$ est stable par A. Or X ou $Y \neq 0$ donc $Vect(X, Y)$ est de dimension 1 ou 2. ■

2.3.2 Sous espaces propres

Définition 2.3.4 *Soit* $A \in M^n(\mathbb{K})$ *(ou soit* f *un endomorphisme de* E*). Soit* $\lambda \in \mathbb{K}$ *une valeur propre de* A *(ou de* f*). l'ensemble des vecteurs propres de* A*(de* f*) associés à la valeur propre* λ *est l'ensemble noté :*

$$E_\lambda = \ker (A - \lambda I_n) = \{X \in \mathbb{K}^n, \ AX = \lambda X\}$$

$$(E_\lambda = \ker(f - \lambda Id_E) = \{X \in E,\ f(X) = \lambda X\})$$

appelé "le sous espace propre associé à λ"

Exemple 2.3.5 *Soit la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in M^3(\mathbb{R})$$

Le polynome caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = (2 + X)^2 (2 - X).$$

D'où les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$.
- L'espace propre associé à $\lambda_1 = -2$:

$$v(x, y, z) \in E_{-2} \Longleftrightarrow (A + 2I_3) v = 0_{\mathbb{R}^3}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donc

$$E_{-2} = Vect(v_1(-1, 1, 0), v_2(-1, 0, 1))$$

- L'espace propre associé à $\lambda_2 = 2$:

$$v(x, y, z) \in E_2 \Longleftrightarrow (A - 2I_3) v = 0_{\mathbb{R}^3}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donc

$$E_2 = Vect(v(1, 0, 1))$$

Proposition 2.3.3 *Soit $A \in M^n(\mathbb{K})$ (ou soit f un endomorphisme de E), $\lambda \in Sp(f)$, l'ensemble E_λ (E_λ) est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ (de E)*

Preuve. 1)

$$\begin{aligned} v \text{ est un vecteur propre de } A &\Longleftrightarrow \exists! \lambda \in \mathbb{K},\ Av = \lambda v \\ &\Longleftrightarrow (A - \lambda I_n)\, v = 0 \\ &\Longleftrightarrow v \in \ker(f - \lambda Id_E) \\ &\Longleftrightarrow E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n) \neq \emptyset \end{aligned}$$

2) $\forall v_1, v_2 \in E_\lambda,\ Av_1 = \lambda v_1,\ Av_2 = \lambda v_2$

D'où $A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$

D'où $(v_1 + v_2) \in E_\lambda$.

3) $\forall \alpha \in \Bbbk, \forall v \in E_\lambda,\ A(\alpha v) = \alpha(Av)$

$$\begin{aligned} &= \alpha(\lambda v) \\ &= \lambda(\alpha v) \end{aligned}$$

Donc E_λ est un s-e-vectoriel de $\Bbbk^n$. ■

Remarque 2.3.3 *L'espace propre E_λ est invariant par A.*
En effet :

$$X \in \ker(A - \lambda I_n) \Rightarrow A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) \Rightarrow AX \in \ker(A - \lambda I_n)$$

Proposition 2.3.4 *Soit f un endomorphisme de E et soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de f. Alors*

$$E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$$

Preuve. En effet soit $v \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$. Il verifie

$$f(v) = \lambda_1 v \text{ et } f(v) = \lambda_2 v.$$

Ainsi

$$0 = \lambda_1 v - \lambda_2 v = (\lambda_1 - \lambda_2)\, v.$$

Comme par hypothèse $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on en déduit $v = 0$ et donc

$$E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}.$$

■

Corollaire 2.3.3 *Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ l'ensemble des valeurs propres distinctes de f. Alors*

$$E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_k}$$

est bien définie et forme un sous-espace vectoriel de E.

Preuve. Rappelons que dire que les sous-espaces E_{λ_i}, $i = 1, ..., k$ sont en somme directe signifie que tout vecteur non nul de E_{λ_i} ne peut s'écrire comme une somme de vecteurs appartenant aux autres E_{λ_j}, $j \neq i$. Nous allons montrer ce corollaire en faisant une récurrence sur le nombre de sous-espaces propres utilisées. Si $p = 2$, on consid ere deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2. D'aprés la proposition précédente, $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$ et donc la somme de ces deux sous-espaces est directe : $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$ est un sous-espace de E.
Soit p tel que $2 < p \leq k - 1$. Supposons que la somme $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + ... + E_{\lambda_p}$ soit directe : $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_p}$ est un sous-espace de E.
Considérons la somme

$$\left(E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_p}\right) \cap E_{\lambda_{p+1}}$$

Soit $v \in \left(E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_p}\right) \cap E_{\lambda_{p+1}}$: Il vérifie

$$f(v) = \lambda_{p+1} v \text{ et } v = v_1 + v_2 + ... + v_p,\ v_i \in E_{\lambda_i}$$

Donc

$$f(v) = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p$$

et

$$f(v) = \lambda_{p+1}(v_1 + v_2 + ... + v_p)$$

On en déduit

$$(\lambda_1 - \lambda_{p+1})v_1 + ... + (\lambda_p - \lambda_{p+1})v_p = 0$$

Comme la somme $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_p}$ est directe, le vecteur nul n'a que des composantes nulles et donc $\lambda_1 - \lambda_{p+1} = 0$ ce qui est contraire à l'hypoyhèse. ■

Définition 2.3.5 ***(ordre de multiplicité d'une valeur propre)***
Soit $A \in M^n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in Sp(A)$. On appelle ordre de multiplicité de λ notée $m(\lambda)$ sa multiplicité comme racine de $\chi_A(\lambda)$ (racine de $\chi_f(\lambda)$)

$$m_A(\lambda) = \max\left\{k \in \mathbb{N},\ (x-\lambda)^k \textit{ divise } \chi_A(\lambda)\right\}.$$
$$m_f(\lambda) = \max\left\{k \in \mathbb{N},\ (x-\lambda)^k \textit{ divise } \chi_f(\lambda)\right\}.$$

Proposition 2.3.5 *Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, et $A \in M^n(\mathbb{K})$ une matrice associée à f, et $\lambda \in Sp(f)$, on a*

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq m_f(\lambda)$$

Preuve. Notons α la dimension de E_λ, et soit f endomorphisme de E associe à la matrice A, Puisque λ est valeur propre de f, $E_\lambda \neq \{0\}$ donc $\alpha \geq 1$.
Choisissons une base $(e_1, ..., e_\alpha)$ de E_λ, que l'on complète en une base $\beta = (e_1, ..., e_n)$ de E. Puisque $f(e_i) = \lambda e_i$ pour $i \in [1, \alpha]$, la matrice de f dans β est de la forme

$$A = \begin{bmatrix} \lambda I_\alpha & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

et on a donc

$$\chi_f(X) = \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} XI_\alpha - \lambda I_\alpha & B \\ 0 & XI_{n-\alpha} - C \end{vmatrix} = (X-\lambda)^\alpha \chi_C(X)$$

Ainsi, $(X-\lambda)^\alpha$ divise χ_f et $\alpha \leq m_f(\lambda)$. ■

Proposition 2.3.6 *Soit A une matrice de $M^n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique*

$$\chi_A(X) = (-)^n (X-\lambda_1)^{n_1} ....(X-\lambda_p)^{n_p}.$$

où n_i désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i dans le polynôme caractéristique. Alors,
i) $tr(A) = n_1\lambda_1 + ... + n_p\lambda_p$,
ii) $\det(A) = \lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}.....\lambda_p^{n_p}$
Plus généralement, pour tout entier $k \geq 1$, on a
iii) $tr(A^k) = n_1\lambda_1^k + ... + n_p\lambda_p^k$,
iv) $\det(A^k) = \lambda_1^{kn_1}\lambda_2^{kn_2}.....\lambda_p^{kn_p}$.

Exemple 2.3.6 *Soit la matrice de la rotation du plan vectoriel*

$$r_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

on a le polynôme caractéristique de r_θ est

$$\chi_{r_\theta}(X) = \left(X - e^{i\theta}\right)\left(X - e^{-i\theta}\right).$$

D'où

$$Sp\left(r_\theta\right) = \left\{e^{i\theta},\, e^{-i\theta}\right\}$$

Alors, d'après la proposition précédente

$$tr\left(r_\theta\right) = 2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$$
$$\det\left(r_\theta\right) = 1 = e^{i\theta}.e^{-i\theta}.$$

Rappelons que **Polynôme scindé** sur le corps $\mathbb{K}$ est tout polynôme $P(X)$ s'écrit :

$$P(X) = a_d(X - \lambda_1)...(X - \lambda_d)$$

pour certains $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et un $a_d \in \mathbb{K}$. Souvent, on regroupe les racines égales et on écrit :

$$P(X) = a_d(X - \lambda_1)^{m_1}...(X - \lambda_r)^{m_r}$$

avec les λ_i deux à deux distinctes et des entiers $m_i \geq 1$. (Voir Définition 1.1.12 du chapitre1).

Exemple 2.3.7 *D'après le théorème d'Alembert, tous les polynômes sont scindés sur $\mathbb{C}$.*

2.4 Diagonalisation des endomorphismes,

(I) Problème de diagonalisation des matrices

Donnée : $A \in M^n(\mathbb{K})$.

Question : Trouver une matrice inversible P de $M^n(\mathbb{K})$, telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Nous verrons qu'il existe de nombreuses autres situtations dans lesquelles ce problème intervient.

(II) Problème de diagonalisation des endomorphismes.

On peut donner une autre formulation de ce problème.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Donnée : f un endomorphisme de E représenté par une matrice A dans une base β de E.

Question : Trouver une base β' de E, telle que la matrice D associée à f dans la base β' soit diagonale.

Deux matrices semblables représentant le même endomorphisme dans des bases différentes, la version matricielle de ce problème correspond au problème (I) : si P désigne la matrice de passage de la base β à la base β', on a la relation :

$$D = P^{-1}AP$$

Lorsque la matrice D est une matrice diagonale, i.e. de la forme :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

on dit que l'endomorphisme f est diagonalisable. Les vecteurs $(e_1, ..., e_n)$ de la base β ont une propriété remarquable, ils satisfont, pour tout $i \in [1, n]$, $f(ei) = \lambda_i e_i$.

Nous verrons que ce problème n'admet pas toujours de solution : un endomorphisme n'est pas toujours diagonalisable. Cependant, nous verrons qu'il est toujours possible de trouver un changement de base tel que la matrice s'exprime dans cette base comme une matrice diagonale par blocs.

2.4.1 Premier critère de diagonalisabilité :

Pour énoncer un premier critère de diagonalisation des endomorphismes on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 2.4.1 *Soit f un endomorphisme de E (de dimension finie). On suppose aussi qu'il existe un sous-espace F de E laissé stable (invariant) par f . Notons $\chi_{f_{|F}}$ le polynôme caractéristique de la restriction de f à F. Alors : $\chi_{f_{|F}}(X)$ divise $\chi_f(X)$ dans $\mathbb{K}[X]$.*

Preuve. On considère une base $(e_1, ..., e_p)$ de F, et on la complète en une base $(e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ de E. La matrice de f dans cette base est de la forme

$$A = \begin{bmatrix} C & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

où $C \in M^p(\mathbb{K})$ est la matrice de $f_{|F}$ dans la base $(e_1, ..., e_p)$. On a alors

$$\begin{aligned} \chi_f &= \det(XI_n - A) \\ &= \begin{vmatrix} XI_p - C & B \\ 0 & XI_{n-p} - D \end{vmatrix} \\ &= \det(XI_p - C) \times \det(XI_{n-p} - D) \\ &= \chi_{f_{|F}}(X) \times Q(X) \end{aligned}$$

ce qui implique que $\chi_{f_{|F}}(X)$ divise $\chi_f(X)$. ■

Théorème 2.4.1 *Soit $A \in M^n(\mathbb{K})$ (respectivement f un endomorphisme de E avec E de dimension finie). Alors :*

$$A \text{ (respectivement } f\text{) est diagonalisable sur } \Bbbk \Leftrightarrow \begin{cases} i)\ \chi_A(X) \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ ii)\ \forall\lambda, \text{ valeur propre de } A,\ m_A(\lambda) = \dim E_\lambda. \end{cases}$$

Preuve. 1) $\Longrightarrow$: Supposons f diagonalisable. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f. Comme (Corollaire (2.3.3)) :

$$\ker(f - \lambda_1 Id_E) \oplus ... \oplus \ker(f - \lambda_r Id_E) = E$$

D'après le Lemme (3.3.1), si on choisit des bases β_1 de $\ker(f - \lambda_1 Id_E)$, ..., β_r de $\ker(f - \lambda_r Id_E)$, on obtient une base $\beta_1 \cup ... \cup \beta_r$ de E dans laquelle la matrice de f est :

$$Mat\,(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r I_{n_r} \end{bmatrix}$$

où $ni = \dim E_{\lambda_i}$ pour tout i. Donc :

$$\chi_f(X) = (X - \lambda_1)^{n_1} ... (X - \lambda_r)^{n_r}.$$

Par conséquent le polynôme $\chi_f(X)$ est scindé sur $\Bbbk$ et :

$$\forall i,\ m_A(\lambda_i) = n_i = \dim E_{\lambda_i}.$$

2) $\Longleftarrow$: Supposons que : $\chi_f(X) = (X - \lambda_1)^{n_1} ... (X - \lambda_r)^{n_r}$ pour certains $\lambda_i \in \Bbbk$, deux à deux distincts et certains entiers $n_i \geq 1$. Comme :

$$\ker(f - \lambda_1 Id_E) + ... + \ker(f - \lambda_r Id_E) = \ker(f - \lambda_1 Id_E) \oplus ... \oplus \ker(f - \lambda_r Id_E) \subseteq E$$

on a :

$$\dim\left(\ker(f - \lambda_1 Id_E) + ... + \ker(f - \lambda_r Id_E)\right) \leq \dim E$$

Or, pour tout i, $\dim E_{\lambda_i} = m_A(\lambda_i) = n_i$ et $n_1 + ... + n_r = \deg \chi_f = \dim E$, par conséquence :

$$\dim(\ker(f - \lambda_1 Id_E) + ... + \ker(f - \lambda_r Id_E)) = \dim E$$

et forcément,

$$\ker(f - \lambda_1 Id_E) + ... + \ker(f - \lambda_r Id_E) = E.$$

■

Le théorème précédent peut s'écrire sous la façon suivante, que l'on retiendra comme un critère de diagonalisation des matrices carrées.

Théorème 2.4.2 *Soit A une matrice carrée de $M^n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable, si et seulement si*
(1) A admet n valeurs propres distinctes ou confondues, ce qui est equivalent a dire que le polynôme caractéristique admet la factorisation

$$\chi_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{n_1} ... (X - \lambda_r)^{n_r}$$

avec $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq ... \neq \lambda_r$ et $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$
(2) $\dim E_{\lambda_i} = n_i$ *pour $i = 1, ..., r$.*

Ainsi, si ces deux conditions sont remplies, il existe une matrice P telle que $D = P^{-1}AP$ s'écrive

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

les valeurs propres égales étant regroupées. Le premier bloc diagonal est d'ordre n_1, le deuxième d'ordre n_2 ainsi de suite. Sous cette forme, la matrice P est constituée dans l'ordre d'une base de E_{λ_1} , d'une base de E_{λ_2} et d'une base de E_{λ_r}, bases qu'il faudra déterminer.

Condition suffisante de diagonalisation

Proposition 2.4.1 ***(Condition suffisante de diagonalisation)***
Soit A une matrice de $M^n(\mathbb{K})$. Si le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{K}$ et possède toutes ses racines simples, alors A est diagonalisable dans $M^n(\mathbb{K})$.

Preuve. Supposons que le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ soit scindé à racines simples :

$$\chi_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)....(X - \lambda_n)$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$. Pour tout $i \in [1, n]$, λ_i étant valeur propre de A, il existe un vecteur propre v_i de A associé. D'aprés le corollaire 2.3.3, les sous-espaces propres de A formant une somme directe, la famille $(v_1, v_2, ..., v_n)$ est libre. Elle possède n éléments, c'est donc une base de $\mathbb{K}^n$. ■

On en déduit le résultat suivant :

Corollaire 2.4.1 *Toute matrice de $M^n(\mathbb{K})$ qui admet n valeurs propres distinctes est diagonalisable.*

Remarque 2.4.1 ***Attention***, *la réciproque du corollaire 2.4.1 est fausse en général. Par exemple, la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

est diagonalisable, alors qu'elle n'admet que deux valeurs propres distinctes, son spectre est $Sp(A) = \{1, 7\}$

Exemple 2.4.1 *Si* $n \geq 2$, *la matrice :*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

n'est jamais diagonalisable car $(\lambda = 0)$ $\dim E_0 = 1 < m_A(0) = n$.

Exemple 2.4.2 *Considérons la matrice de* $M^3(\mathbb{R})$ *suivante*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

On calcule son polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = -(X-2)^2(X-3)$$

et, par ailleurs, on a

$$A - 3I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il est immédiat que

$$rang(A - 3I_3) = rang(A - 2I_3) = 2$$

D'après le théorème du rang , on en déduit que $\dim E_3 = 1$ *et* $\dim E_2 = 1$. *Ainsi, la matrice* A *n'est pas diagonalisable, car la somme directe de tous les sous espaces propres* $E_2 \oplus E_3$ *est de dimension* 2. *Il ne peut donc pas exister de base de* $\mathbb{R}^3$ *formée de vecteurs propres de* A.

Exemple 2.4.3 *Calculer les valeurs propre de la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Montrer qu'elle n'est pas diagonalisable.

Exemple 2.4.4 *Soit la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

On a

$$\chi_A(X) = -(X-3)(X-1)(X-2)$$

Le polynôme caractéristique de A est scindé et possède toutes ses racines simples, alors A est diagonalisable dans $M^3(\mathbb{K})$.

Exemple 2.4.5 ***Matrices symétriques.***
Toute matrice symétrique réelle d'ordre n, admet n valeurs propres distinctes ou confondues est diagonalisable.

Algorithme de diagonalisation

Soit A une matrice carrée complexe $n \times n$. Pour la diagonaliser :

1) On calcule d'abord son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$,

2) On cherche les racines de $\chi_A(X)$: ce sont les valeurs propres de A,

3) Pour toute valeur propre λ de A, on cherche une base de $\ker(A - \lambda I_n)$,

i.e. on cherche une base de l'espace des solutions du système

$$AX = \lambda X$$

Si pour toute valeur propre λ de A, $\dim(\ker(A - \lambda I_n)) = m_A(\lambda)$, A est diagonalisable et une réunion des bases des espaces propres forme une base de vecteurs propres.

2.5 Trigonalisation des matrices

2.5.1 Matrices trigonalisables

Définition 2.5.1 *Une matrice A de $M^n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable dans $M^n(\mathbb{K})$, si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de $M^n(\mathbb{K})$. C'est-à-dire, s'il existe une matrice inversible P de $M^n(\mathbb{K})$ et une matrice triangulaire supérieure T à coefficients dans $\mathbb{K}$ telles que*

$$T = P^{-1}AP$$

On notera que toute matrice triangulaire supérieure étant semblable à une matrice triangulaire inférieure, une matrice est trigonalisable dans $M^n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, elle est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

Théorème 2.5.1 *Soit $A \in M^n(\mathbb{K})$. Alors A est trigonalisable $\Longleftrightarrow \chi_A(X)$ est scindé sur $\mathbb{K}$.*

Preuve. $\Longrightarrow$: Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique donc il suffit de montrer que $\chi_T(X)$ est scindé pour toute matrice triangulaire supérieure T ; ce qui est facile.
$\Longleftarrow$: On raisonne aves f un endomorphisme de E (et on suppose E de dimension finie). Par récurrence sur $\dim E$. Si $\dim E = 1$, il n'y a rien à démontrer. Si $\dim E > 1$, alors comme $\chi_f(X)$ est scindé,

$$\chi_f(X) = (X - \lambda_1)....(X - \lambda_n)$$

où $n = \dim E$ et où les $\lambda_i \in \mathbb{K}$ ne sont pas forcément distincts. Soit e_1 un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1. On complète e_1 en une base : $e_1, ..., e_n$. Dans cette base, la matrice de f est de la forme :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & l \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

où $B \in M^{n-1}(\mathbb{K})$ et $l \in M^{1,n-1}(\mathbb{K})$. En particulier,

$$\chi_f(X) = (X - \lambda_1)\chi_B(X) \Rightarrow \chi_B(X) = (X - \lambda_2)....(X - \lambda_n)$$

est scindé sur $\mathbb{K}$. Par hypothèse de récurrence, il existe $S \in M^{n-1}(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure et $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ une matrice inversible telles que :

$$B = QSQ^{-1}$$

alors, on peut vérifier que :

$$Mat\,(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & l \\ 0 & QSQ^{-1} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & lQ \\ 0 & S \end{bmatrix} P^{-1}$$

pour la matrice inversible

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

Donc la matrice de f dans la base $e_1, ..., e_n$ est semblable à une matrice triangulaire

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & lQ \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

supérieure : donc f est trigonalisable. ■

Corollaire 2.5.1 *Toute matrice $A \in M^n\,(\mathbb{C})$ est trigonalisable.*

Exemple 2.5.1 *La matrice suivante de $M^n\,(\mathbb{R})$*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

admet pour polynôme caractéristique

$$\chi_A\,(X) = (X^2 + 1)^2$$

Ce polynôme n'est pas scindé dans $\mathbb{R}\,[X]$, la matrice A n'est donc pas trigonalisable dans $M^4(\mathbb{R})$.
Cependant, il est scindé dans $\mathbb{C}\,[X]$:

$$\chi_A\,(X) = (X - i)^2\,(X + i)^2\,.$$

On cherche les vecteurs propres
Pour $\lambda_1 = i$, $E_i = Vect\,((1, -i, 0, 0))$,
Pour $\lambda_2 = -i$, $E_{-i} = Vect\,((1, i, 0, 0))$
donc on va completer $v_1\,(1, -i, 0, 0)$, $v_2\,(1, i, 0, 0)$ à une base de trigonalisation dans $M^4(\mathbb{C})$
Posons

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -i & 0 & i & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 0 & i \end{bmatrix}$$

d'où

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i & 0 & \frac{1}{2}i\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i\end{bmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned}T &= P^{-1}AP\\ &= \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i & 0 & \frac{1}{2}i\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ -i & 0 & i & i\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -i & 0 & i\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}i & 1 & 0 & 0\\ 0 & i & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i & 1\\ 0 & 0 & 0 & -i\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Exemple 2.5.2 *Soit la matrice*

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -4\\ 0 & -1 & 6\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

Son polynome caractéristique est

$$\chi_A(X)=(X-2)(X-1)^2$$

est scindé sur $\mathbb{R}$*, donc* A *est trigonalisable sur* $\mathbb{R}$

Les valeurs propres sont $\lambda_1=1$*, racine double et* $\lambda_2=2$*, racine simple. L'espace propre associ à* $\lambda_2=2$ *est* $E_2=Vect(v_1(0,2,1))$*. L'espace propre associ à* $\lambda_1=1$ *est* $E_1=Vect(v_2(1,0,0))$ *, avec* $\dim E_2=\dim E_1=1$.

pour trigonaliser la matrice A *il faut completer* $\{v_1,v_2\}$ *à une base de* $\mathbb{R}^3$*, soit le vecteur* $v_3(0,1,0)$ *(ce choix est loin d'être unique). La famille* $\{v_1,v_2,v_3\}$ *est bien une base. La matrice de changement de base est*

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Donc la matrice triangulaire semblable à A est

$$T = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5.2 Blocs de Jordan

Soient E : $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

Objectif : (si E est de dimension finie) construire une base β telle que :

$$Mat_\beta(f) = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & T_p \end{bmatrix}$$

où les Ti sont des blocs triangulaires supérieures avec diagonale constante.

Définition 2.5.2 *Un bloc de Jordan de la taille $n \times n$ pour la valeur propre λ est une matrice de la forme :*

$$J(\lambda, n) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in M^n(\mathbb{K})$$

Définition 2.5.3 *Une matrice de Jordan est une matrice diagonale par blocs de la forme :*

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_r \end{bmatrix}$$

où les J_i $i = 1, ..., r$ sont des blocs de Jordan.

Les blocs de Jordan peuvent être de tailles différentes, les valeurs propres dans J_r sont quelconques (certaines d'entre elles peuvent être égales).

Exercice 2.5.1 *Une matrice de Jordan est diagonalisable si et seulement si ses blocs sont tous de taille* 1×1.

Exemple 2.5.3 *Soit cette matrice de Jordan*

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

- *Elle est formée d'un bloc de Jordan* 2×2 *associé à la valeur propre* -3,
- *un bloc de Jordan* 3×3 *associé à la valeur propre* -1,
- *un bloc de Jordan* 1×1 *associé à la valeur* 4,
- *un bloc de Jordan* 1×1 *associé à la valeur* 6,
- *un bloc de Jordan* 2×2 *associé à la valeur propre* $\sqrt{5}$.

Théorème 2.5.2 *Si* $A \in M^n(\mathbb{K})$ *a son polynôme caractéristique scindé sur* $\mathbb{K}$, *alors* A *est semblable (sur* $\mathbb{K}$*) à une matrice de Jordan. Il existe donc* $P \in GL_n(\mathbb{K})$ *telle que*

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_r \end{bmatrix}$$

où les J_i *sont des blocs de Jordan. Ce théorème se reformule aussi comme*

Théorème 2.5.3 *Soit* f *un endomorphisme de* E *dont le polynôme caractéristique* $\chi_f(X)$ *est scindé sur* $\mathbb{K}$. *Il existe une base* β *de* E *où la matrice de* f *est de Jordan, c'est-à-dire :*

$$Mat_\beta(f) = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_r \end{bmatrix}$$

2.5.3 La forme normal de Jordan (La réduite de Jordan)

La forme réduite de la matrice A dans le théorème (3.2.3) est appelée la réduite de Jordan ou (la forme normale de Jordan) si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. Les qui apparaissent dans les blocs de Jordan, sont les valeurs propres de A (ou de f) et donc les racines du polynôme caractéristique.

2. Une même valeur propre λ peut apparaître dans plusieurs blocs différents.

3. En particulier, ce théorème s'applique à toutes les matrices complexes.

4. La décomposition de Jordan est unique dans le sens où le nombre et la taille des blocs de Jordan ne dépendent que de A (ou de f). Par contre, on s'autorise à permuter les blocs de Jordan entre eux.

5. Le nombre de blocs associés à la valeur propre λ est égal à la dimension du sous-espace propre E_λ.

6. La somme des tailles des blocs de Jordan associés à λ est la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique.

7. La taille du plus grand bloc de Jordan associé à λ est la multiplicité de λ comme racine du polynôme minimal.

Changement de base

trouver $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_r \end{bmatrix}$$

Pour chaque vecteur propre de la base, on construit le bloc de Jordan associé :

- Si $v_1 \in E$ est un vecteur propre de la base de E , alors on cherche $v_2 \in \mathbb{K}^n$ tel que $(A-\lambda I_n)v_2 = v_1$.

- Puis on cherche s'il existe $v_3 \in \mathbb{k}^n$ tel que $(A - \lambda I_n)v_3 = v_2$, et ainsi de siut ....

alors on obtient

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda v_1 \\ (A - \lambda I_n)v_2 &= v_1 \\ (A - \lambda I_n)v_3 &= v_2 \\ &\vdots \\ (A - \lambda I_n)v_p &= v_{p-1} \end{aligned}$$

- Donc, dans le sous-espace engendré par ces $(v_1, v_2, ..., v_p)$ la matrice associé à A, dans cette base, est exactement le bloc de Jordan :

$$J(\lambda) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Av_1 & Av_1 & Av_1 & Av_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \end{array}$$

- On recommence avec les autre valeurs propres, et on procède de suite le mème alghorithme pour les vecteurs propres de la base de ces nouveaux E_λ.

- Enfin la matrice P est construit par tout ces vecteurs propres cherchés correspondants à tous les valeurs propres de A.

Exemple 2.5.4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(X) = (X-2)(X-1)^2$$

$$Sp(A) = \{1, 2\}$$

• *La valeur propre* $\lambda_2 = 2$ *est de multiplicité* 1. *Le sous-espace propre associé est* $E_2 = Vect(v_1(0,2,1))$ *est de dimension* 1. *Comme la multiplicité de* λ_2 *comme racine de* $\chi_A(X)$ *est* 1, *alors la valeur propre* λ_2 *sera juste associée à un bloc de Jordan de taille* 1×1.

• *La valeur propre* $\lambda_1 = 1$ *est de multiplicité* 2. *le sous-espace propre associé est* $E_1 = Vect(v_2(1,0,0))$. *Comme* E_1 *est un espace vectoriel de dimension* 1, *et comme* λ_1 *est racine*

de multiplicité 2 dans $\chi_A(X)$, alors la matrice A n'est pas diagonalisable et on sait alors que la valeur propre $\lambda_1 = 1$ sera associée un bloc de Jordan de taille 2×2.
Donc la réduit de Jordan est

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si on cherche une nouvelle base telle que A est réduit à une forme normal de jordan :
On cherche le deuxième vecteur propre associé à $\lambda_1 = 1$, càd on complete la base $\{v_1, v_2\}$ à une base de $\mathbb{R}^3$,

$$(A - I_3)\, v_3 = v_2 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow v_2 = \begin{cases} 2y - 4z = 1 \\ -2y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow z = 1/2, y = 3/2,\ x \text{ quelconque}$$

$$\text{si on choisie } x = 0 \text{ on trouve } v_3 = (1, 3/2, 1/2)$$

donc,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ d'où } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

alors

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemple 2.5.5 *Soit la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 5 & -6 & 3 \\ -4 & 0 & 5 & -6 & 4 \\ -2 & -3 & 7 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

On a :

$$\chi_A(X) = (X+1)^2 (X-2)^3$$
$$\mu_A(X) = (X+1)^2 (X-2)^3$$
$$Sp(A) = \{-1, 2\}$$

donc A admet deux valeurs propres $\lambda_1 = -1$ *de multiplicité* 2 *dans le polynôme caractéristique et minimal*
et $\lambda_2 = 2$ *de multiplicité* 3 *dans le polynôme caractéristique et minimal.*
le sous espace propre associé à $\lambda_1 = -1$ *est* $E_{-1} = Vect(v_1(1,1,0,0,1))$, *d'où* $\dim E_{-1} = 1$
le sous espace propre associé à $\lambda_2 = 2$ *est* $E_2 = Vect(v_1(1,0,0,0,1))$, *d'où* $\dim E_2 = 1$
donc la réduite de Jordan de la matrice A est :

$$J_1 = J(-1,2) \oplus J(2,3) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & & & \\ & & 2 & 1 & 0 \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

Exemple 2.5.6 *Soit la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 & 9 \\ -2 & 2 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(X) = X(X-1)^3$$
$$\mu_A(X) = X(X-1)^2$$
$$Sp(A) = \{0, 1\}$$

avec $E_0 = Vect(v_1(1,1,0,0,))$, $\dim E_0 = 1$
et $E_1 = Vect(v_2(3,0,0,1), v_3(-2,-1,1,0))$, $\dim E_1 = 2$
la réduite de Jordan de la matrice A est

$$J_1 = J(0,1) \oplus J(1,2) \oplus J(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 2.5.7 *Soit la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

On a

$$\chi_A(X) = (X-3)^5$$
$$et \;\; \mu_A(X) = (X-3)^3$$

La matrice A admet une seule valeur propre $\lambda = 3$ de multiplicité 5 dans le polynome caractéristique et de multiplicité 3 dans le polynome minimal. donc le plus grand bloc sera de taille 3. *le sous espace propre associé à $\lambda = 3$ est $E_3 = vect\left(v_1\left(1,0,0,0,0\right),\, v_2\left(0,1,0,0,0\right)\right)$, d'où* $\dim E_3 = 2$.*donc la réduite de Jordan de la matrice A est :*

$$J_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2.6 Polynômes d'endomorphismes

La caractérisation des matrices diagonalisables donnée par le Théorème (3.3.2) porte sur la dimension des sous-espaces propres : une matrice de $M^n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si, et seulement si, l'espace $\mathbb{K}^n$ se décompose en une somme directe de sous-espaces propres de A.

Dans ce chapitre, nous abordons une nouvelle caractérisation, de nature algébrique, qui porte uniquement sur les coefficients de la matrice. Précisément, nous allons montrer qu'une matrice A de $M^n(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $M^n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, il existe un polynôme g à coefficients dans , $\mathbb{K}$non nul, scindé, n'ayant que des racines simples et tel que A soit racine de g, i.e., $g(A) = 0$.

2.6.1 Polynômes d'endomorphismes

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Soit $A \in M^n(\mathbb{K})$.

Définition 2.6.1 *Soient $E : \mathbb{K}-e.v$, $f \in \mathcal{L}(E)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Nous définissons f^n l'endomorphisme de E par récurrence :*

$$\begin{cases} f^0 = Id_E \\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ f^k = f \circ f^{k-1} \end{cases}$$

On remarque que f^n est bien d'un endomorphisme puisque $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est une $\mathbb{k}$-algèbre.

Définition 2.6.2 *Soient $E : \mathbb{K}-e.v$, $f \in \mathcal{L}(E)$, P le polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Nous noterons $P(f)$, et nous appellerons ***polynôme d'endomorphisme****, l'endomorphisme défini par*

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$$

Remarque 2.6.1 *Nous définirions de même un* ***polynôme de matrice*** *$P(A)$ avec $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si de plus A est la matrice représentative de l'endomorphisme f dans une base β de E, $A = Mat_\beta(f)$, alors $P(A) = Mat_\beta(P(f))$.*

Proposition 2.6.1 *Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $P, Q \in \mathbb{K}[x]$. Alors*

$$(PQ)(A) = P(A)Q(A)$$

De même, pour $f \in \mathcal{L}(E)$,

$$(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$$

Sachant en plus que, pour tous, μ, $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda P + \mu Q)(A) = \lambda P(A) + \mu Q(A)$, alors on dit en termes savants que l'application

$$\begin{aligned} \Phi_A : \quad \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \quad M_n(\mathbb{K}) \\ P(X) &\longmapsto \quad P(A) \end{aligned}$$

est un ***morphisme d'algèbres*** *($A \in M_n(\mathbb{K})$ est fixé).*

Remarque 2.6.2 *Généralement le produit des matrices n'est pas commutatif, mais c'est pas le cas des polynômes des endomorphismes, En particulier, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, les matrices $P(A)$ et $Q(A)$ commutent :*

$$P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$$

De même, les endomorphismes $P(f)$ et $Q(f)$ commutent.

Exemple 2.6.1 ***Polynôme d'une matrice diagonale :***

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Alors pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ on a

$$P(D) = \begin{bmatrix} P(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & P(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

Exemple 2.6.2 ***polynôme et conjugaison*** *: Si Q est inversible, si $A = QA^{'}Q^{-1}$, alors pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$,*

$$P(A) = QP(A^{'})Q^{-1}.$$

2.6.2 Polynômes annulateurs

Définition 2.6.3 ***Polynômes annulateurs.***
Un polynôme non nul q de $\mathbb{K}[X]$ est dit annulateur d'une matrice A de $M^n(\mathbb{K})$, si la matrice $q(A)$ est nulle ; on dit aussi que A est racine du polynôme q.

Proposition 2.6.2 *Toute matrice possède un polynôme annulateur.*

Preuve. Soit A une matrice de $M^n(\mathbb{K})$. Le $\Bbbk$-espace vectoriel $M^n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2. Par suite, toute famille de n^2+1 matrices de $M^n(\mathbb{K})$ est liée ; c'est le cas en particulier de la famille

$$(I_n, A, A^2, ..., A^{n^2})$$

Il existe donc des scalaires a_0, ..., a_{n^2} non tous nuls, tels que

$$a_0 I_n + a_1 A + ... + a_{n^2} A^{n^2} = 0$$

Le polynôme

$$P = a_0 + a_1 x + ... + a_{n^2} x^{n^2}$$

est ainsi non nul et annulateur de la matrice A. ■

Proposition 2.6.3 *Soient A une matrice de $M^n(\mathbb{K})$ et P un polynôme annulateur de A. Alors, toute valeur propre de A est racine du polynôme P.*

Preuve. Soit
$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m$$
un polynôme annulateur de A. La matrice $P(A)$ est nulle :
$$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_m A^m = 0 \qquad (*)$$
Soient λ une valeur propre de A et v un vecteur propre associé, i.e., $Av = \lambda v$. D'après l'équation (*), on a
$$(a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_m A^m)v = 0$$
Or $Av = \lambda v$, d'où pour tout entier naturel k, $A^k v = \lambda^k v$ et
$$(a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + ... + a_m \lambda^m)v = 0$$
Comme le vecteur v est non nul, on en déduit que $P(\lambda)$ est nul. ■

Remarque 2.6.3 ***Attention****, la réciproque de ce résultat est fausse en général ; toutes les racines d'un polynôme annulateur de A ne sont pas toujours valeurs propres de A. Par exemple, la matrice identité I_n est racine du polynôme $x(x-1)$, car $I_n^2 = I_n$, alors que 0 n'est pas une valeur propre de la matrice identité.*

Lemme des noyaux

Proposition 2.6.4 *Soit A une matrice de $M^n(\mathbb{K})$ et soient f_1, f_2 deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. Alors*
$$\ker(f_1 f_2)(A) = \ker f_1(A) \oplus \ker f_2(A)$$
Si de plus, le polynôme $f_1 f_2$ est annulateur de A, on a
$$\mathbb{k}^n = \ker f_1(A) \oplus \ker f_2(A)$$

Preuve. Les polynômes f_1 et f_2 étant premiers entre eux, d'après l'identité de Bézout, il existe des polynômes $h1$ et $h2$ de $\mathbb{K}[X]$ tels que : $\ker(f_1 f_2)(A)$
$$f_1 h_1 + f_2 h_2 = 1$$
En conséquence, nous avons la relation matricielle suivante :
$$f_1(A)h_1(A) + f_2(A)h_2(A) = I_n \qquad (**)$$

Montrons l'égalité $\ker(f_1f_2)(A) = \ker f_1(A) \oplus \ker f_2(A)$. Le noyau $\ker f_2(A)$ est contenu dans $\ker(f_1(A)f_2(A))$, de la même façon $\ker f_1(A)$ est contenu dans $\ker(f_1(A)f_2(A)) = \ker(f_2(A)f_1(A))$, car les polynômes $f_1(A)$ et $f_2(A)$ commutent entre eux. Ainsi $\ker f_1(A) + \ker f_2(A) \subseteq \ker(f_1f_2)(A)$. Inversement, si $x \in \ker(f_1f_2)(A)$, alors d'après la relation (**), il existe une décomposition

$$x = f_1(A)h_1(A)\,(x) + f_2(A)h_2(A)\,(x)$$

On a

$$f_2(A)f_1(A)h_1(A)(x) = h_1(A)(f_1f_2)(A)(x) = 0$$

La première égalité découle du fait que les polynômes en A commutent entre eux, la seconde du fait que x est un vecteur de $\ker(f_1f_2)(A)$ par hypothèse. Ainsi $f_1(A)h_1(A)\,(x)$ est un vecteur de $\ker f_2(A)$. De la même façon, on montre que $f_2(A)h_2(A)\,(x)$ est un vecteur de $\ker f_1(A)$.
Reste à montrer que la somme

$$\ker f_1(A) + \ker f_2(A) = \ker(f_1f_2)(A)$$

est directe. Si $x \in \ker f_1(A) \cap \ker f_2(A)$, d'après la relation (**), on a

$$x = f_1(A)h_1(A)\,(x) + f_2(A)h_2(A)\,(x)$$

Donc

$$x = h_1(A)f_1(A)(x) + h_2(A)f_2(A)(x)$$

soit $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Si l'on suppose de plus que le polynôme f_1f_2 est annulateur de A, on a $(f_1f_2)(A) = 0$, d'où $\ker(f_1f_2)(A) = \Bbbk^n$. Ce qui montre la deuxième assertion :

$$\Bbbk^n = \ker f_1(A) \oplus \ker f_2(A)$$

■

Exemple 2.6.3 *Soit A une matrice de $M^2(\mathbb{R})$ satisfaisant*

$$(A - \alpha I_2)(A - \beta I_2) = 0 \tag{*}$$

où a et b sont deux réels distincts. D'après la proposition précédente, on a

$$\mathbb{R}^2 = E_\alpha \oplus E_\beta,$$

où E_α et E_β sont les deux sous-espaces propres associés à la matrice A.

Exercice 2.6.1 *Considérons la matrice réelle*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1) Montrer que

$$(A - 2I_4)(A - I_4) = 0.$$

2) Déterminer les sous espaces propres et appliquer la proposition (3.1.4).

Théorème 2.6.1 ***(Généralisation du Lemme des noyaux)***
Soient A une matrice de $M^n(\mathbb{K})$ et $f_1,...,f_p$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux. Alors,

$$\ker((f_1...f_p)(A)) = \ker(f_1(A)) \oplus ... \oplus \ker(f_p(A))$$

Si de plus, le polynôme $f_1 f_2 ... f_p$ est annulateur de A, on a

$$\mathbb{k}^n = \ker(f_1(A)) \oplus ... \oplus \ker(f_p(A))$$

Ce théorème est une formulation générale de celle dans proposition (3.1.4), avec un produit fini quelconque de polynômes. La preuve se déroule sur le même principe qu'en présence de deux polynômes (proposition (3.1.4)).

Corollaire 2.6.1 *Soit A une matrice de $M^n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est*

$$\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^{n_1} (X - \lambda_2)^{n_2} ..... (X - \lambda_p)^{n_p}$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$. Les polynômes $(x - \lambda_i)^{ni}$ sont premiers entre eux deux à deux, du lemme des noyaux, nous déduisons la décomposition

$$\mathbb{k}^n = \ker((A - \lambda_1 I_n)^{n_1}) \oplus ... \oplus \ker((A - \lambda_p I_n)^{n_p}).$$

2.6.3 Sous-espaces caractéristiques

Définition 2.6.4 *Soit A une matrice de $M^n(\mathbb{K})$. Soit λ une valeur propre de A et m sa multiplicité en tant que racine de χ_A . Le* ***sous-espace caractéristique*** *de A pour la valeur propre λ est*

$$N_\lambda = \ker((A - \lambda I_n)^m)$$

Pour λ valeur propre, on a $E_\lambda \subset N_\lambda$, car $\ker(A - \lambda_1 I_n) \subset \ker(A - \lambda_1 I_n)^k$ quel que soit $k \geq 1$.

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est l'endomorphisme associé à la matrice A, alors on peut reformuler cette définition comme :

Définition 2.6.5 *Soit λ une valeur propre de f . Le* ***sous-espace caractéristique*** *de f pour la valeur propre λ est :*

$$N_\lambda = \{v \in E,\ \exists m \geq 0,\ (f - \lambda Id_E)^m(v) = 0\}$$

c'est un sous-espace de E stable par f.

Exemple 2.6.4 *Soit la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(X) = (X-1)(X+2)^2$$

La valeur propre $\lambda_1 = 1$ est de multiplicité 1, la valeur propre $\lambda_2 = -2$ est de multiplicité 2.

• *Sous-espace caractéristique associé à $\lambda_1 = 1$.*

Comme la multiplicité de cette valeur propre est 1 alors le sous-espace caractéristique est aussi le sous-espace propre : $N_1 = \ker(A - I_n) = E_1$. Ainsi

$$\begin{aligned} N_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (A - I_3)(x,y,z) = (0,0,0)\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (A - I_3)(x,y,z) = (0,0,0)\right\} \\ &= Vect\left(v_1(-1,1,1)\right) = E_1 \end{aligned}$$

• *Sous-espace caractéristique associé à $\lambda_2 = -2$*

La multiplicité de cette valeur propre est 2, donc $N_{-2} = \ker(A + 2I_3)^2$. On a :

$$A + 2I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (A + 2I_3)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \text{ Ainsi}$$

$$\begin{aligned} N_{-2} &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (A - I_3)^2(x,y,z) = (0,0,0)\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y - z\right\} \\ &= Vect\left(v_2(-1,1,0),\ v_3(-1,0,1)\right) \end{aligned}$$

Théorème 2.6.2 *Soit f un endomorphisme de E, soit $A \in M^n(\mathbb{K})$ la matrice de f dans une telle base, tel que $\chi_A(X)$ est scindé (toutes ses racines sont dans $\Bbbk$). Notons*

$$\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^{m_1}....(X - \lambda_r)^{m_r}$$

pour $1 \leq i \leq r$, N_i le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i , alors :

1. Chaque N_i est stable par f

2. $E = N_{\lambda_1} \oplus N_{\lambda_2} \oplus ..... \oplus N_{\lambda_r}$.

3. $\dim N_{\lambda_i} = m$

Preuve. 1. Soit $v \in N_{\lambda_i} \Longrightarrow v \in \ker(f - \lambda_i Id_E)^{m_i} \Longrightarrow (f - \lambda Id_E)^{m_i}(v) = 0$
on a : $f \circ (f - \lambda Id_E)^{m_i}(v) = (f - \lambda Id_E)^{m_i} \circ f(v) = 0$, d'où $f(v) \in N_{\lambda_i}$.
2. Par le Lemme des noyaux, on obtient

$$E = \ker(A - \lambda_1 I_n)^{m_1} \oplus ... \oplus \ker(A - \lambda_p I_n)^{m_r} = N_{\lambda_1} \oplus N_{\lambda_2} \oplus ..... \oplus N_{\lambda_r}.$$

3. Notons $g_i = f\,|_{N_{\lambda_i}}$ pour $1 \leq i \leq r$. Pour $i \neq j, N_{\lambda_i} \cap N_{\lambda_j} = \{0\}$. Or, $E_{\lambda_i} \subset N_{\lambda_i}$, donc la seule valeur propre possible de g_i est λ_i. Le polynôme caractéristique de g_i est scindé (car il divise celui de f) et sa seule racine est la seule valeur propre, c'est-à-dire λ . Ainsi $\chi_{g_i}(X) = \pm(X - \lambda_i)^{ni}$ (où $ni = \dim N_{\lambda_i}$). Or,

$$\pm(X - \lambda_1)^{m_1}....(X - \lambda_r)^{m_r} = \chi_f(X) = \chi g_1(X)....\chi g_r(X) = \pm(X - \lambda_1)^{n_1}....(X - \lambda_r)^{n_r}$$

D'où, en identifiant les exposants des facteurs irréductibles :

$$n_i = \dim N_{\lambda_i} = m_i$$

pour $1 \leq i \leq r$. ■

Exercice 2.6.2 *Soit A une matrice de $M^4(\mathbb{R})$ de trace nulle, admettant $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = i$ comme valeurs propres.*

1. Déterminer toutes les autres valeures propres de A.

2. Montrer que

$$\mathbb{R}^4 = \ker(A - I_n)^2 \oplus \ker(A + I_n)^2.$$

Lemme 2.6.1 *i) Si $\dim N_\lambda < \infty$, alors il existe une base de N_λ où la matrice de la restriction $f_{|N_\lambda}$ est triangulaire supérieure avec λ sur la diagonale :*

$$\begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{bmatrix}$$

Preuve. i) Soit $k = \dim N_\lambda$. Notons $V_i = \ker(f - \lambda Id_E)^i$ pour tout $i \geq 0$. (Donc $V_0 = \{0\}$). Soit $m \geq 0$ le plus petit entier tel que $V_m = V_{m+1}$, Alors :

$$0 = V_0 \subsetneqq V_1 \subsetneqq .... \subsetneqq V_m = V_{m+1}$$

de plus :

$$\begin{aligned} v \in V_{m+2} &\Leftrightarrow (f - \lambda Id_E)^{m+2} v = 0 \\ &\Leftrightarrow (f - \lambda Id_E) v \in V_{m+1} \\ &\Leftrightarrow (f - \lambda Id_E) v \in V_m \\ &\Leftrightarrow v \in V_{m+1} \end{aligned}$$

$$\text{donc } V_m = V_{m+1} = V_{m+2} = V_{m+3} = ... = N_\lambda$$

Soit $e_1, ..., e_{k_1}$ une base de $V_1 = \ker(f - \lambda Id_E)$ que l'on complète en une base $e_1, ..., e_{k_2}$ de $V_2 = \ker(f - \lambda Id_E)^2$, que l'on complète en ......etc, que l'on complète en $e_1, ..., e_{k_m}$ une base de N_λ.
On a alors : $k_1 < k_2 < ... < k_m = k$ et pour tout $0 \leq i \leq m$: $V_i = Vect\,(e_1, ..., e_{k_i})$.
Or pour tout $i \geq 1$:

$$(f - \lambda Id_E)(V_i) \subseteq V_{i-1}$$

et la matrice de la restriction $f_{|N_\lambda}$ dans la base $e_1, ..., e_{k_m}$ est triangulaire de la forme :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

■

2.6.4 Théorème de Cayley-Hamilton

Le théorème suivant montre que le polynôme caractéristique d'une matrice est annulateur d'une matrice. Ainsi, du polynôme caractéristique on pourra déduire le polynôme
minimal.

Théorème 2.6.3 ***(Théorème de Cayley-Hamilton)****. Toute matrice est racine de son polynôme caractéristique.i e :*

$$\chi_A(A) = 0.$$

Preuve. Notons $B(X) \in M^n(\mathbb{K}[X])$ la transposée de la comatrice de $XI_n - A$. Tous les coefficients de la matrice $B(X)$ sont des polynômes à coefficients dans $\Bbbk$ de degré $\leq n-1$. Il existe donc des matrices :

$$B_0,...,B_{n-1} \in M^n(\mathbb{K})$$

telles que :

$$B(X) = B_0 + XB_1 + ... + X_{n-1}B_{n-1}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} B(X)(XI_n - A) &= \det(XI_n - A)I_n \\ &= (B_0 + XB_1 + ... + X_{n-1}B_{n-1})(XI_n - A) \\ &= \chi_A(X)I_n \qquad \text{on développe la partie gauche} \\ &= -B_0A + X(B_0 - B_1A) + X^2(B_1 - B_2A) + ... + X^{n-1}(B_{n-2} - B_{n-1}A) + X^nB_{n-1} \qquad (*) \\ &= \chi_A(X)I_n \end{aligned}$$

Notons $c_0, ..., c_n \in \mathbb{K}$ les coefficients du polynôme caractéristique :

$$\chi_A(X) = c_0 + ... + c_nX^n$$

$(c_0 = \pm \det A,\ \ c_n = 1)$. On a donc d'après (*) :

$$\begin{aligned} -B_0A &= c_0I_n \\ B_0 - B_1A &= c_1I_n \\ &\ldots\ldots. \\ B_{n-1} &= c_nI_n \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \chi_A(A) &= c_0I_n + c_1A + ... + c_nA_n \\ &= -B_0A + (B_0 - B_1A)A + (B_1 - B_2A)A^2 + ... + (B_{n-2}A^{n-1} - B_{n-1})A^{n-1} + B_{n-1}A^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

car « tout se simplifie » . ■

Exemple 2.6.5 *Soit la matrice* $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = X^3 + 3X^2 - 4 = (X-1)(X+2)^2$$

On a

$$\begin{aligned} \chi_A(A) &= (A - I_3)(A + 2I_3)^2 \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Application du Théorème de Kayley Hamilton : Inverse d'une matrice

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. On note

$$\chi_A(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_n X^n$$

Comme A est inversible alors $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de A, ce qui implique que

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_n X^n \neq X.Q(X)$$

où $Q(x)$ est un polynome de degré $n-1$, ce qui implique nécessairement que $a_0 \neq 0$.

Alors d'aprée le théorème de Kayley Hamilton on a :

$$\begin{aligned} \chi_A(A) = 0_n &\iff a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_n A^n = 0_n \\ &\iff A\left(a_1 I_n + a_2 A + ... + a_n A^{n-1}\right) = -a_0 I_n \\ &\iff I_n = A\left(\frac{-1}{a_0}\left(a_1 I_n + a_2 A + ... + a_n A^{n-1}\right)\right) \\ &\iff A^{-1} = \frac{-1}{a_0}\left(a_1 I_n + a_2 A + ... + a_n A^{n-1}\right) \end{aligned}$$

Exercice 2.6.3 *Cas* $n = 2$, *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(X) = X^2 - 2X - 3$$

On a :

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\left(-2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

Exercice 2.6.4 *Cas $n = 3$, Soit*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= X^3 + 3X^2 - 4 \\ &= \frac{-1}{a_0}\left(a_1 I_n + a_2 A + ... + a_n A^{n-1}\right) \end{aligned}$$

Alors,

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\left(3\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^2\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

2.6.5 Polynôme minimal

Définition 2.6.6 ***(polynôme minimal)*** *Soit $A \in M^n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme minimal de A, le polynôme annulateur de degré minimum et unitaire (c'est- a-dire dont le coefficient de plus haut degré egal à 1). On le note $\mu_A(X)$.*

Exemple 2.6.6 *1 Soit $A = I_n$ la matrice d'identité. Alors*

$$\mu_A(X) = X - 1.$$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, alors $\mu_A(X) = (X - 1)$

3. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, alors $\mu_A(X) = (X + 2)(X - 1)$

Remarque 2.6.4 *Si un polynôme non nul Q satisfait $Q(f) = 0$ (ou $Q(A) = 0$), alors* $\deg(Q)$ *est au degré du polynôme minimal (diviser Q par son coéffcient dominant).*

Un cas particulier important : Si le polynôme caractéristique est $\pm(X - \lambda)^n$, alors le polynôme minimal est $(X - \lambda)^d$ avec $1 \leq d \leq n$.

Exemple 2.6.7 *Soient les matrices*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a :
1) $\chi_{A_1}(X) = X^4$, $\mu_{A_1}(X) = X^2$
2) $\chi_{A_1}(X) = X^4$, $\mu_{A_1}(X) = X^3$
3) $\chi_{A_1}(X) = X^4$, $\mu_{A_1}(X) = X^4$

Théorème 2.6.4 *Soient $A \in M^n(\mathbb{K})$ une matrice (non nulle) et $\mu_A(X)$ son polynôme minimal. Un scalaire λ est une valeur propre de A si, et seulement si, il est racine du polynôme minimal $\mu_A(X)$.*

Preuve. Le polynôme χ_A est annulateur de A, il admet donc le polynôme μ_A comme diviseur. Il existe un polynôme g de $\Bbbk[X]$ tel que

$$\chi_A = g.\mu_A$$

Par suite, toute racine du polynôme μ_A est racine de χ_A, donc est valeur propre de A. Inversement, le polynôme μ_A est annulateur de A, donc, d'après la proposition (2.6.3), toute valeur propre de A est racine de μ_A. ■

Proposition 2.6.5 *Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.*

Preuve. Soit A le polynôme caractéristique et B le polynôme minimal. On fait la division euclidienne du premier par le second :

$$A = BQ + R$$

où $\deg(R) < \deg(B)$. On a alors, par le théorème de **Cayley-Hamilton**, et par définition du polynôme minimal :

$$0 = A(f) = B(f)Q(f) + R(f) = R(f)$$

et on doit avoir $R = 0$ par minimalité du degré du polynôme minimal. ■

Corollaire 2.6.2 *Si le polynôme caractéristique est scindé le polynôme minimal aussi.*

2.6.6 Deuxième critère de diagonalisabilité

Théorème 2.6.5 *Une matrice $A \in M^n(\mathbb{K})$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.*

Preuve. $\Longrightarrow$: Si A est diagonalisable, A est semblable à une diagonale. Or deux matrices semblables ont le même polynôme minimal
Donc il suffit de calculer le polynôme minimal d'une matrice diagonale.
$\Longleftarrow$: Si

$$\mu_A(X) = (X - \lambda_1)....(X - \lambda_r)$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, la décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{1}{\mu_A(X)}$ donne :

$$\frac{1}{\mu_A(X)} = \frac{a_1}{X - \lambda_1} + ... + \frac{a_r}{X - \lambda_r}$$

où $a_i = \dfrac{1}{\mu_A'(X)}$ pour tout i.
Donc

$$1 = a_1 Q_1(X) + ... + a_r Q_r(X)$$

où pour tout i :

$$Q_i(X) = \frac{\mu_A(X)}{X - \lambda_i} = \prod_{j=1, j\neq 1}^{r} (X - \lambda_j)$$

est un polynôme. Si on applique cette égalité à la matrice A, on trouve :

$$I_n = a_1 Q_1(A) + ... + a_r Q_r(A)$$

donc si $Z \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$Z = a_1 Q_1(A)(Z) + ... + a_r Q_r(A)(Z)$$

or, pour tout $1 \prec i \prec r$, $Q_i(A)(Z) \in \ker(A - \lambda_i I_n)$ car :

$$(A - \lambda_i I_n)(Q_i(A)(Z)) = \mu_A(A)(Z) = 0$$

Par conséquent

$$\oplus_{i=1}^{r} \ker(A - \lambda_i I_n) = \mathbb{k}^n$$

et A est diagonalisable. ■

Corollaire 2.6.3 *Une matrice $A \in M^n(\mathbb{K})$ est diagonalisable sur $\mathbb{k}$ si et seulement si elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.*

Corollaire 2.6.4 *Soit f un endomorphisme de E diagonalisable sur $\mathbb{K}$. Si F est un sous-espace de E stable par f, alors la restriction $f_{|F}$ est encore diagonalisable.*

Preuve. En effet, $\mu_f(f) = 0 \Rightarrow \mu_f\left(f_{|F}\right) = 0 \Rightarrow \mu_{f_{|F}}$ divise μ_f mais si μ_f est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$, tous ses diviseurs le sont aussi. ■

2.7 Trigonalisation des matrices

2.7.1 Matrices trigonalisables

Définition 2.7.1 *Une matrice A de $M^n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable dans $M^n(\mathbb{K})$, si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de $M^n(\mathbb{K})$. C'est-à-dire, s'il existe une matrice inversible P de $M^n(\mathbb{K})$ et une matrice triangulaire supérieure T à coefficients dans $\mathbb{K}$ telles que*

$$T = P^{-1}AP$$

On notera que toute matrice triangulaire supérieure étant semblable à une matrice triangulaire inférieure, une matrice est trigonalisable dans $M^n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, elle est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

Théorème 2.7.1 *Soit $A \in M^n(\mathbb{K})$. Alors A est trigonalisable $\Longleftrightarrow \chi_A(X)$ est scindé sur $\mathbb{K}$.*

Preuve. $\Longrightarrow$: Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique donc il suffit de montrer que $\chi_T(X)$ est scindé pour toute matrice triangulaire supérieure T ; ce qui est facile.

$\Longleftarrow$: On raisonne aves f un endomorphisme de E (et on suppose E de dimension finie). Par récurrence sur $\dim E$. Si $\dim E = 1$, il n'y a rien à démontrer. Si $\dim E > 1$, alors comme $\chi_f(X)$ est scindé,

$$\chi_f(X) = (X - \lambda_1) .... (X - \lambda_n)$$

où $n = \dim E$ et où les $\lambda_i \in \mathbb{K}$ ne sont pas forcément distincts. Soit e_1 un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1. On complète e_1 en une base : $e_1, ..., e_n$. Dans cette base, la matrice de f est de la forme :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & l \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

où $B \in M^{n-1}(\mathbb{K})$ et $l \in M^{1,n-1}(\mathbb{K})$. En particulier,

$$\chi_f(X) = (X - \lambda_1)\chi_B(X) \Rightarrow \chi_B(X) = (X - \lambda_2)....(X - \lambda_n)$$

est scindé sur $\mathbb{K}$. Par hypothèse de récurrence, il existe $S \in M^{n-1}(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure et $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ une matrice inversible telles que :

$$B = QSQ^{-1}$$

alors, on peut vérifier que :

$$Mat(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & l \\ 0 & QSQ^{-1} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & lQ \\ 0 & S \end{bmatrix} P^{-1}$$

pour la matrice inversible

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

Donc la matrice de f dans la base $e_1, ..., e_n$ est semblable à une matrice triangulaire

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & lQ \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

supérieure : donc f est trigonalisable. ■

Corollaire 2.7.1 *Toute matrice $A \in M^n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.*

Exemple 2.7.1 *La matrice suivante de* $M^n(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

admet pour polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = (X^2+1)^2$$

Ce polynôme n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$*, la matrice* A *n'est donc pas trigonalisable dans* $M^4(\mathbb{R})$*.*
Cependant, il est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ *:*

$$\chi_A(X) = (X-i)^2(X+i)^2.$$

On cherche les vecteurs propres
Pour $\lambda_1 = i$, $E_i = Vect((1,-i,0,0))$,
Pour $\lambda_2 = -i$, $E_{-i} = Vect((1,i,0,0))$
donc on va completer $v_1(1,-i,0,0)$, $v_2(1,i,0,0)$ *à une base de trigonalisation dans* $M^4(\mathbb{C})$
Posons

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -i & 0 & i & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 0 & i \end{bmatrix}$$

d'où

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i & 0 & \frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{bmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} T &= P^{-1}AP \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i & 0 & \frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -i & 0 & i & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 0 & i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exemple 2.7.2 *Soit la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Son polynome caractéristique est

$$\chi_A(X) = (X-2)(X-1)^2$$

est scindé sur $\mathbb{R}$*, donc* A *est trigonalisable sur* $\mathbb{R}$
Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$*, racine double et* $\lambda_2 = 2$*, racine simple. L'espace propre associ à* $\lambda_2 = 2$ *est* $E_2 = Vect(v_1(0,2,1))$*. L'espace propre associ à* $\lambda_1 = 1$ *est* $E_1 = Vect(v_2(1,0,0))$ *, avec* $\dim E_2 = \dim E_1 = 1$*.*
pour trigonaliser la matrice A *il faut completer* $\{v_1, v_2\}$ *à une base de* $\mathbb{R}^3$*, soit le vecteur* $v_3(0,1,0)$ *(ce choix est loin d'être unique). La famille* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *est bien une base. La matrice de changement de base est*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc la matrice triangulaire semblable à A est

$$T = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.7.2 Blocs de Jordan

Soient E : $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

Objectif : (si E est de dimension finie) construire une base β telle que :

$$Mat_{\beta}(f) = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & T_p \end{bmatrix}$$

où les Ti sont des blocs triangulaires supérieures avec diagonale constante.

Définition 2.7.2 *Un bloc de Jordan de la taille $n \times n$ pour la valeur propre λ est une matrice de la forme :*

$$J(\lambda, n) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in M^n(\mathbb{k})$$

Définition 2.7.3 *Une matrice de Jordan est une matrice diagonale par blocs de la forme :*

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_r \end{bmatrix}$$

où les J_i $i = 1, ..., r$ sont des blocs de Jordan.

Les blocs de Jordan peuvent être de tailles différentes, les valeurs propres dans J_r sont quelconques (certaines d'entre elles peuvent être égales).

Exercice 2.7.1 *Une matrice de Jordan est diagonalisable si et seulement si ses blocs sont tous de taille* 1×1.

Exemple 2.7.3 *Soit cette matrice de Jordan*

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

- *Elle est formée d'un bloc de Jordan* 2×2 *associé à la valeur propre* -3,
- *un bloc de Jordan* 3×3 *associé à la valeur propre* -1,
- *un bloc de Jordan* 1×1 *associé à la valeur* 4,
- *un bloc de Jordan* 1×1 *associé à la valeur* 6,
- *un bloc de Jordan* 2×2 *associé à la valeur propre* $\sqrt{5}$.

Théorème 2.7.2 *Si* $A \in M^n(\mathbb{K})$ *a son polynôme caractéristique scindé sur* $\mathbb{K}$, *alors* A *est semblable (sur* $\mathbb{K}$*) à une matrice de Jordan. Il existe donc* $P \in GL_n(\mathbb{K})$ *telle que*

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_r \end{bmatrix}$$

où les J_i *sont des blocs de Jordan. Ce théorème se reformule aussi comme*

Théorème 2.7.3 *Soit* f *un endomorphisme de* E *dont le polynôme caractéristique* $\chi_f(X)$ *est scindé sur* $\mathbb{K}$. *Il existe une base* β *de* E *où la matrice de* f *est de Jordan, c'est-à-dire :*

$$Mat_\beta(f) = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_r \end{bmatrix}$$

2.7.3 La forme normal de Jordan (La réduite de Jordan)

La forme réduite de la matrice A dans le théorème (3.2.3) est appelée la réduite de Jordan ou (la forme normale de Jordan) si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. Les qui apparaissent dans les blocs de Jordan, sont les valeurs propres de A (ou de f) et donc les racines du polynôme caractéristique.

2. Une même valeur propre λ peut apparaître dans plusieurs blocs différents.

3. En particulier, ce théorème s'applique à toutes les matrices complexes.

4. La décomposition de Jordan est unique dans le sens où le nombre et la taille des blocs de Jordan ne dépendent que de A (ou de f). Par contre, on s'autorise à permuter les blocs de Jordan entre eux.

5. Le nombre de blocs associés à la valeur propre λ est égal à la dimension du sous-espace propre E_λ.

6. La somme des tailles des blocs de Jordan associés à λ est la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique.

7. La taille du plus grand bloc de Jordan associé à λ est la multiplicité de λ comme racine du polynôme minimal.

Changement de base

trouver $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_r \end{bmatrix}$$

Pour chaque vecteur propre de la base, on construit le bloc de Jordan associé :

- Si $v_1 \in E$ est un vecteur propre de la base de E , alors on cherche $v_2 \in \mathbb{K}^n$ tel que $(A-\lambda I_n)v_2 = v_1$.

- Puis on cherche s'il existe $v_3 \in \mathbb{K}^n$ tel que $(A - \lambda I_n)v_3 = v_2$, et ainsi de siut ....

alors on obtient

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda v_1 \\ (A - \lambda I_n)v_2 &= v_1 \\ (A - \lambda I_n)v_3 &= v_2 \\ &\vdots \\ (A - \lambda I_n)v_p &= v_{p-1} \end{aligned}$$

- Donc, dans le sous-espace engendré par ces $(v_1, v_2, ..., v_p)$ la matrice associé à A, dans cette base, est exactement le bloc de Jordan :

$$J(\lambda) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Av_1 & Av_1 & Av_1 & Av_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \end{array}$$

- On recommence avec les autre valeurs propres, et on procède de suite le mème alghorithme pour les vecteurs propres de la base de ces nouveaux E_λ.

- Enfin la matrice P est construit par tout ces vecteurs propres cherchés correspondants à tous les valeurs propres de A.

Exemple 2.7.4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(X) = (X-2)(X-1)^2$$

$$Sp(A) = \{1, 2\}$$

• *La valeur propre* $\lambda_2 = 2$ *est de multiplicité* 1*. Le sous-espace propre associé est* $E_2 = Vect(v_1(0,2,1))$ *est de dimension* 1*. Comme la multiplicité de* λ_2 *comme racine de* $\chi_A(X)$ *est* 1*, alors la valeur propre* λ_2 *sera juste associée à un bloc de Jordan de taille* 1×1*.*

• *La valeur propre* $\lambda_1 = 1$ *est de multiplicité* 2*. le sous-espace propre associé est* $E_1 = Vect(v_2(1,0,0))$*. Comme* E_1 *est un espace vectoriel de dimension* 1*, et comme* λ_1 *est racine*

de multiplicité 2 dans $\chi_A(X)$, alors la matrice A n'est pas diagonalisable et on sait alors que la valeur propre $\lambda_1 = 1$ sera associée un bloc de Jordan de taille 2×2.
Donc la réduit de Jordan est

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si on cherche une nouvelle base telle que A est réduit à une forme normal de jordan :
On cherche le deuxième vecteur propre associé à $\lambda_1 = 1$, càd on complete la base $\{v_1, v_2\}$ à une base de $\mathbb{R}^3$,

$$(A - I_3)\, v_3 = v_2 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow v_2 = \begin{cases} 2y - 4z = 1 \\ -2y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow z = 1/2, y = 3/2, \ x \text{ quelconque}$$

si on choisie $x = 0$ on trouve $v_3 = (1, 3/2, 1/2)$

donc,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ d'où } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

alors

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemple 2.7.5 *Soit la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 5 & -6 & 3 \\ -4 & 0 & 5 & -6 & 4 \\ -2 & -3 & 7 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

On a :

$$\chi_A(X) = (X+1)^2 (X-2)^3$$
$$\mu_A(X) = (X+1)^2 (X-2)^3$$
$$Sp(A) = \{-1, 2\}$$

donc A admet deux valeurs propres $\lambda_1 = -1$ de multiplicité 2 dans le polynôme caractéristique et minimal
et $\lambda_2 = 2$ de multiplicité 3 dans le polynôme caractéristique et minimal.
le sous espace propre associé à $\lambda_1 = -1$ est $E_{-1} = Vect(v_1(1,1,0,0,1))$, d'où $\dim E_{-1} = 1$
le sous espace propre associé à $\lambda_2 = 2$ est $E_2 = Vect(v_1(1,0,0,0,1))$, d'où $\dim E_2 = 1$
donc la réduite de Jordan de la matrice A est :

$$J_1 = J(-1,2) \oplus J(2,3) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & & & \\ & & 2 & 1 & 0 \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

Exemple 2.7.6 *Soit la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 & 9 \\ -2 & 2 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(X) = X(X-1)^3$$
$$\mu_A(X) = X(X-1)^2$$
$$Sp(A) = \{0, 1\}$$

avec $E_0 = Vect(v_1(1,1,0,0,))$, $\dim E_0 = 1$
et $E_1 = Vect(v_2(3,0,0,1), v_3(-2,-1,1,0))$, $\dim E_1 = 2$
la réduite de Jordan de la matrice A est

$$J_1 = J(0,1) \oplus J(1,2) \oplus J(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 2.7.7 *Soit la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

On a

$$\chi_A(X) = (X-3)^5$$
$$\text{et } \mu_A(X) = (X-3)^3$$

La matrice A admet une seule valeur propre $\lambda = 3$ de multiplicité 5 dans le polynome caractéristique et de multiplicité 3 dans le polynome minimal. donc le plus grand bloc sera de taille 3. *le sous espace propre associé à $\lambda = 3$ est $E_3 = vect(v_1(1,0,0,0,0), v_2(0,1,0,0,0))$, d'où* $\dim E_3 = 2$.*donc la réduite de Jordan de la matrice A est :*

$$J_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2.8 Exercices

Exercice 2.8.1 *Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ representé dans la base canonique par :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Le Plan P d'équation $y + z = 0$ est-il invariant par f ?

2) La droite $[(1,1,1)]$ est-elle invariant par f ?

3) Déterminer les sous espaces invariant par l'endomorphisme représenté par la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.8.2 *Soit* $A \in M^n(\mathbb{R})$, $k \geq 2$,

1) Montrer que si λ *est une valeure propre de* A *pour vecteur propre* v, *alors* λ^k *est une valeure propre de* A^k *pour vecteur propre* v.

2) Montrer que si λ *est une valeure propre d'une matrice inversible* $A \in M^n(\mathbb{R})$, *alors* λ^{-1} *est une valeure propre de* A^{-1}. *Trouver un vecteure propre correspondant.*

Exercice 2.8.3 *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes et dites si elles sont diagonalisables, (*$a \in \mathbb{R}$*).*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.8.4 *Soit la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

qui représente l'endomorphisme f *dans la base canonique* β *de* $\mathbb{R}^3$.

1) Determiner les valeures propres de A *et on deduire qu'on peut diagonaliser* A *?*

2) Determiner une base β' *des vecteurs propres tel que la matrice* D *de* f *dans la base* β' *soit diagonale.*

Exercice 2.8.5 *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a-2 & 2 \end{bmatrix}$$

1) Pour quelles valeurs de a *la matrice* A *est-elle diagonalisable ?*

2) Lorsque A *est diagonalisable, déterminer une base de vecteurs propres de* A.

Exercice 2.8.6 *Expliquer sans calculs pourquoi les matrices suivantes ne sont pas diagonalisables :*

$$A_1 = \begin{bmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.8.7 *Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynomes de degré $\leq n$, et soit φ l'endomorphisme de E défini par $\varphi(P) = P - (X+1)P'$. Justifier que φ est diagonalisable et donner les valeurs propres de φ.*
Indication : la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\beta = \{1,\ X,\ X^2,....., X^n\}$.

Exercice 2.8.8 *Déterminer les matrices $A \in M^n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $tr(A) = 0$.*

Exercice 2.8.9 *Supposons :*

$$P(x) = (x-1)(x+1)^2(x-3)^3$$

est un polynôme annulateur d'une matrice $A \in M^3(\mathbb{R})$.
1) Que peut on dire des polynômes minimals de A?
2) On considère deux polynômes annulateurs pour une matrice donnée $A \in M^3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} & P_1(x) = (x-1)^3(x+2)(x-2)^2(x-5) \\ \text{et} \qquad & P_2(x) = (x-1)(x+1)(x+2)^4(x-5)^2 \end{aligned}$$

- Préciser tous les expressions possibles du polynôme minimal ainsi que du polynôme caractéristique de A.
- Justifier que A est diagonalisable.

Exercice 2.8.10 *Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes ou $a \neq b$*

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Exercice 2.8.11 *Déterminer suivant la valeur du parametre m le polynôme minimal de la matrice*

$$A_m = \begin{bmatrix} 2m-5 & 1 & 1 & 4-m \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 5-m & -1 & m-1 & m-4 \\ 2m-10 & 2 & 2 & 8-m \end{bmatrix}$$

Exercice 2.8.12 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A \in M^3(\mathbb{R})$ la matrice suivante*

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

1. Factoriser le polynôme caractéristique.

2. Déterminer selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.

3. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.

4. Déterminer selon la valeur de α le polynôme minimal de A_α.

Exercice 2.8.13 *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Calculer les puissance de $A - I_3$.

2) Donner $\mu_A(\lambda)$, et calculer A^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3) Calculer A^{-1}, puis calculer A^{-n}, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.8.14 *Montrer que A est trigonalisable , A est elle diagonalisable ? donner la réduite de Jordan de A et déterminer son polynôme minimal dans les cas suivantes :*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.8.15 *Déterminer les formes canoniques de Jordan des matrices :*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.8.16 *Determiner toutes les formes canoniques possibles de Jordan des matrices dont le polynôme caracteristique et le polynôme minimal sont :*

1) $\chi_A(\lambda) = (7-\lambda)^5, \quad \mu_A(\lambda) = (7-\lambda)^2.$

2) $\chi_A(\lambda) = (3-\lambda)^4 (5-\lambda)^4, \quad \mu_A(\lambda) = (3-\lambda)^2 (5-\lambda)^2$

3) $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^3, \quad \mu_A(\lambda) = (\lambda-1)^2$

4) $\chi_A(\lambda) = (1+\lambda)^6 (2-\lambda)^3, \quad \mu_A(\lambda) = (1+\lambda)^3 (2-\lambda)^2.$

Chapitre 3

Applications aux systèmes différentielles linéaires.

3.1 Puissances d'une matrice diagonalisable

On considère le corp $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Rappelons que une matrice A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale D, c'est à dire il existe une matrice inversible P formée par les vecteurs propres de A tel que

$$D = P^{-1}AP$$

Proposition 3.1.1 *Soit $A \in M^n(\mathbb{K})$ et $D = P^{-1}AP$ une matrice semblable. On a alors*

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

Preuve. On va démontrer par récurrence
1.Initiation :(le cas $k = 0$ est trivial) pour $k = 1$, on a ; $A = PDP^{-1}$
2. Héridité : on suppose que la propriété est vrais pour k et on montre la verité pour $k + 1$
On a

$$A^{k+1} = AA^k = APD^kP^{-1} = \left(PDP^{-1}\right)\left(PD^kP^{-1}\right) = PD^{k+1}P^{-1}$$

Donc la propriété est vraie $\forall k \in \mathbb{N}$. ■

Exemple 3.1.1 *Soit la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

On a

$$\chi_A(X) = (X-3)(X-1)(X-2)$$

Le polynôme caractéristique de A est scindé et possède toutes ses racines simples, alors A est diagonalisable dans $M^3(\mathbb{k})$, on cherche les vecteurs propres de A. On a : $E_3 = Vect\,(1,0,2)$, $E_2 = Vect\,(1,-1,1)$, $E_1 = Vect\,(1,0,0)$

On pose

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ d'où } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Donc la forme diagonale de A est

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Par exemple pour $k = 10$,

$$\begin{aligned} A^{10} &= PD^{10}P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 0 \\ 0 & 0 & 59\,049 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 28\,501 & 29\,524 \\ 0 & 1024 & 0 \\ 0 & 58\,025 & 59\,049 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.2 Suites récurrentes linéaires

Définition 3.2.1 *Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels est une suite récurrente linéraire si elle vérifie une relation de récurrence du type suivant*

$$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n \tag{*}$$

pour tout $n \geq 0$, où α et β sont des nombres réels donnés.

L'objectif : Si α et β sont des nombres réels donnés**,** on veut déterminer toutes les suites récurrentes linéaires vérifiant la relation (*) ci-dessus.

Proposition 3.2.1 *L'ensemble des solutions de (*) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2.*

Preuve. La suite récurrente vérifie

$$u_{n+1} = \alpha u_n + \beta u_{n-1}.$$

Considérons la suite (v_n) définie, pour $n \geq 1$ par

$$v_n = u_{n-1}$$

On obtient le système

$$\begin{cases} u_{n+1} = \alpha u_n + \beta v_n \\ v_{n+1} = u_n \end{cases}$$

que nous pouvons écrire matriciellement sous la forme

$$U_{n+1} = MU_n$$

où M est la matrice

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$U_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$$

On déduit

$$U_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}$$

et

$$U_{n+1} = M^n U_1.$$

On est donc conduit a calculer M^n. ■

Exemple 3.2.1 *On va étudier la suite récurrente linéaire*

$$u_{n+1} = -u_n + 2u_{n-1}$$

et on va déterminer la solution correspondant à $u_1 = 1$ et $u_0 = 0$.
On a

$$\left\{\begin{array}{c} u_{n+1} = -u_n + 2u_{n-1} \\ v_{n+1} = u_n \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} u_{n+1} = -u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \textit{tel que } U_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$$

alors on va diagonaliser la matrice $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, le spectre de A est $Sp = \{1, \ -2\}$ et les vecteurs propres correspondants sont :pour $\lambda_1 = 1$ est $v_1 = (1,1)$ pour $\lambda_2 = -2$ est $v_2 = (-2,1)$, d'où la forme diagonale de M est

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

d'où la solution est

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} &= M^n \begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3}(-2)^n + \frac{1}{3}\right) u_1 + \left(\frac{2}{3}(-2)^n - \frac{2}{3}\right) u_0 \\ \left(\frac{1}{3}(-2)^n - \frac{1}{3}\right) u_1 + \left(\frac{1}{3}(-2)^n + \frac{2}{3}\right) u_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dans le cas particulier $u_1 = 1$ et $u_0 = 0$ la solution est

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(-2)^n + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}(-2)^n - \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

3.3 Exponentielle d'une matrice diagonalisable

Définition 3.3.1 *Soit $A \in M^n(\mathbb{K})$. On appelle Exponentielle de la matrice A la somme de la série de puissances de A :*

$$e^A = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + ... + \frac{1}{p!}A^p + ... \tag{I}$$

Cette définition a bien un sens car la série (I) est convergente.

Exemple 3.3.1 *1. soit 0_n la matrice nulle alors*

$$e^{0_n} = I_n$$

2. Soit I_n la matrice d'identité alors

$$e^{I_n} = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix} = diag\,(e, e, ..., e)$$

3.3.1 Exponentielle d'une matrice diagonale

Proposition 3.3.1 *Soit D la matrice diagonale*

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Alors $\exp D$ est la matrice diagonale

$$e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

3.3.2 Exponentielle d'une matrice diagonalisable

Proposition 3.3.2 *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable et soit $D = P^{-1}AP$ une matrice diagonale semblable a A. Alors*

$$e^A = P\left(e^D\right)P^{-1}$$

Preuve. Soit

$$\sum_k = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + ... + \frac{1}{k!}A^k$$

la somme partielle de la serie e^A. et on a $A = PDP^{-1}$ et donc

$$\sum_k = I_n + PDP^{-1} + \frac{1}{2!}\left(PDP^{-1}\right)^2 + ... + \frac{1}{k!}\left(PDP^{-1}\right)^k$$

Comme $\left(PDP^{-1}\right)^k = PD^kP^{-1}$, d'où

$$\sum_k = I_n + PDP^{-1} + \frac{1}{2!}PD^2P^{-1} + ... + \frac{1}{k!}PD^kP^{-1} = P\left(I_n + D + \frac{1}{2!}D^2 + ... + \frac{1}{k!}D^k\right)P^{-1}$$

On en déduit par la limite

$$e^A = P\left(I_n + D + \frac{1}{2!}D^2 + ... + \frac{1}{k!}D^k\right)P^{-1} = P\left(e^D\right)P^{-1}$$

■

Exemple 3.3.2 *Soit la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = (X-2)(X+1)^2$$

D'où le spectre de A est $Sp(A) = \{2, -1\}$, et $E_2 = Vect(v_1(1,1,1))$, $E_{-1} = Vect(v_2(-1,1,0), v_3(-1,0,1$ cette matrice est diagonalisable car $\dim E_{-1} = 2$ *c'est la multiplicité de $\lambda = -1$ dans $\chi_A(X)$, et la forme diagonale de A soit*

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
e^{A} &= P\left(e^{D}\right)P^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-1}+\frac{1}{3}e^{2} & \frac{1}{3}e^{2}-\frac{1}{3}e^{-1} & \frac{1}{3}e^{2}-\frac{1}{3}e^{-1} \\ \frac{1}{3}e^{2}-\frac{1}{3}e^{-1} & \frac{2}{3}e^{-1}+\frac{1}{3}e^{2} & \frac{1}{3}e^{2}-\frac{1}{3}e^{-1} \\ \frac{1}{3}e^{2}-\frac{1}{3}e^{-1} & \frac{1}{3}e^{2}-\frac{1}{3}e^{-1} & \frac{2}{3}e^{-1}+\frac{1}{3}e^{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

3.4 Systèmes différentiels linéaires

Définition 3.4.1 *Un système différentiel linéaire homogène est un système d'équations différentielles de la forme :*

$$
\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + ... + a_{1n}x_n(t) \\ \qquad\vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + ... + a_{nn}x_n(t) \end{cases} \tag{S}
$$

où les $a_{ij}(1 \leq i,\, j \leq n)$ sont des coefficients constants réels ou complexes.

On pose

$$
X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}
$$

Avec cette notation matricielle, le système différentiel (S) devient :

$$
X'(t) = AX(t) \tag{S_1}
$$

La résolution du système linéaire $X'(t) = AX(t)$, avec $A \in M^n(\mathbb{K})$ une matrice constante, c'est donc trouver $X(t)$ dérivable tel que $X'(t) = AX(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3.4.1 Cas d'une matrice diagonale

Exemple 3.4.1 *Si A est diagonale, alors le système S s'écrit*

$$\begin{cases} x_1'(t) = \lambda_1 x_1(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = \lambda_n x_1(t) \end{cases}$$

On résout indépendamment chaque équation $x_i'(t) = \lambda_i x_i(t)$, dont les solutions sont les $x_i(t) = k_i e^{\lambda_i t}$, $k_i \in \mathbb{R}$.
Les solutions $X(t)$ sont donc les fonctions

$$X(t) = \begin{bmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

où $k_1, ..., k_n$ sont des constantes réelles.

3.4.2 Cas d'une matrice diagonalisable

Dire que A est diagonalisable signifie qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que l'on ait $A = PDP^{-1}$.
Rappelons que les colonnes de P sont formées des composantes d'une base de vecteurs propres, les éléments diagonaux correspondants de D étant les valeurs propres associées. L'idée est de ramener la résolution du système $X' = AX$ à celle d'un système $U' = DU$, où D est diagonale.
Posons

$$U(t) = P^{-1}X(t).$$

Puisque P est une matrice constante, on a $U'(t) = P^{-1}X'(t)$. On trouve alors

$$U'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = P^{-1}PDP^{-1}X(t) = DP^{-1}X(t) = DU(t)$$

Or, puisque la matrice D est diagonale, on sait résoudre le système $U'(t) = DU(t)$ (voir Exemple 3.4.1) On revient aux solutions du système initial en utilisant la relation

$$X(t) = PU(t).$$

Conclusion Si $U(t)$ est la solution générale de $U'(t) = DU(t)$, la solution générale de $X' = AX$ est $X(t) = PU(t)$.

Remarque 3.4.1 *Pour trouver la solution générale de $X^{'} = AX$, il faut trouver les matrices D et P, mais il n'est pas nécessaire de calculer la matrice P^{-1}.*

Autre présentation de la solution générale

Il résulte facilement de ce qui précède que, si $(v_1, v_2, ..., v_n)$ est une base de vecteurs propres de A, le vecteur v_i étant associé à la valeur propre λ_i, les fonctions

$$e^{\lambda_i t} v_i, \text{ pour } (i = 1, ..., n)$$

forment une base de l'espace des solutions. La solution générale de $X^{'} = AX$ s'écrit donc

$$X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + ... + \alpha_n e^{\lambda_n t} v_n$$

où les α_i, $(i = 1...n)$ sont des constantes réelles.

Conditions initiales

Pour $t = 0$, la solution prend la valeur initiale $X_0 = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. Autrement dit les constantes $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ sont les composantes de la valeur initiale X_0 dans la base de vecteurs propres $(v_1, v_2, ..., v_n)$.En fait, la condition initiale X_0 est en général donnée dans la base canonique, sous la forme

$$\begin{cases} x_1(0) = c_1 \\ \quad\vdots \\ x_n(0) = c_n \end{cases} \tag{2}$$

Les constantes $\alpha_1, ..., \alpha_n$ peuvent se calculer par la formule de changement de base

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Le calcul de P^{-1} peut donc être utile quand on veut imposer à la solution des conditions initiales données.

Dans la pratique, si on doit trouver une seule solution avec les conditions initiales (2) imposées, chercher les constantes $\alpha_1, ..., \alpha_n$ telles que

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

revient à résoudre un système d'équations linéaires d'ordre n.

Exemple 3.4.2 *Soit le système*

$$\begin{cases} x_1^{'} = x_1 + x_3 \\ x_2^{'} = 2x_2 \\ x_3^{'} = x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ *a pour valeurs propres* $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$. *Des vecteurs propres correspondants sont* $v_1\,(1, 0, 2)$, $v_2\,(1, -1, 1)$, $v_3\,(1, 0, 0)$

La solution générale du système s'écrit donc

$$X\,(t) = \begin{bmatrix} x_1\,(t) \\ x_2\,(t) \\ x_3\,(t) \end{bmatrix} = \alpha e^{3t} v_1 + b e^{2t} v_2 + c e^{t} v_3 = \alpha e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + b e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On l'écrit plutot sous la forme :

$$\begin{cases} x_1\,(t) = \alpha e^{3t} + b e^{2t} + c e^{t} \\ x_2\,(t) = -b e^{2t} \\ x_3\,(t) = 2\alpha e^{3t} + b e^{2t} \end{cases}$$

Cherchons la solution vérifiant : $x_1\,(0) = 0$, $x_2\,(0) = 1$, $x_3\,(0) = 2$

En faisant $t = 0$ *dans le système ci-dessus, on obtient le système (non différentiel)*

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

La solution cherchée est donc

$$\begin{cases} x_1\,(t) = \frac{1}{2} e^{3t} + e^{2t} - \frac{3}{2} e^{t} \\ x_2\,(t) = -e^{2t} \\ x_3\,(t) = e^{3t} + e^{2t} \end{cases}$$

3.4.3 Equation differentielle linéaire

Exemple 3.4.3 *Déterminer la solution générale de l'équation différentielle linéaire :*

$$y^{'''} - 5y^{''} - y^{'} + 5y = 0 \tag{I}$$

où y est une fonction réelle d'une variable réelle t.

► *Pour toute fonction réelle d'une variable réelle y, dérivable deux fois*

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \psi(t) = \begin{pmatrix} y^{"}(t) \\ y^{'}(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned} y \text{ est une solution de (I)} \Longleftrightarrow \psi^{'}(t) &= \begin{bmatrix} y^{'''}(t) \\ y^{''}(t) \\ y^{'}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5y^{''}(t) + y^{'}(t) - 5y(t) \\ y^{''}(t) \\ y^{'}(t) \end{bmatrix} \\ \Longleftrightarrow \psi^{'}(t) &= \begin{bmatrix} 5 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{''}(t) \\ y^{''}(t) \\ y^{'}(t) \end{bmatrix} \\ \Longleftrightarrow \psi^{'}(t) &= A\psi(t) \end{aligned}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs et les vecteure propres de A sont $\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right\} \leftrightarrow -1, \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\} \leftrightarrow 1, \left\{ \begin{array}{c} 25 \\ 5 \\ 1 \end{array} \right\} \leftrightarrow 5$

Pour résoudre (I) on diagonalise la matrice A et on applique comme le problème précédent, on obtient la solution générale de l'équation differentielle (I) est

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \alpha e^{-t} v_1 + b e^{t} v_2 + c e^{5t} v_3 \\ &= \alpha e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c e^{5t} \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha e^{-t} + b e^{t} + 25 c e^{5t} \\ -\alpha e^{-t} + b e^{t} + 5 c e^{5t} \\ \alpha e^{-t} + b e^{t} + c e^{5t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.5 Exercices

Exercice 3.5.1 *Soit la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Déterminer le Spectre de A et les sous espaces propres associés.

2) A est elle diagonalisable ?

3) Determiner une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.

4) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$, puis calculer A^n.

Exercice 3.5.2 *Soit A la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

1. Diagonaliser la matrice A.

2. Calculer A^n en fonction de n.

3. Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par u_0, v_0 et w_0 et les relations :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$

Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n, pour $n \geq 0$. En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 3.5.3 *Soit la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

1) Diagonaliser la matrice A,

2) Résoudre le système différentiel $X^{'} = AX$,

3) calculer $\exp A$.

Exercice 3.5.4 *Résoudre l'équation differentielle : $y + 5y^{'} + 3y^{''} - y^{'''} = 0$*

Bibliographie

[1] X. Gourdon, Algèbre, $2^{\text{ème}}$ édition, 2009.

[2] R. Mansuy, Algèbre linéaire, réduction des endomorphismes cours et exercices corrigés, Vuibert, 2012.

[3] R. Mansuy, Mathématiques MPSI, Vuibert , 2013.

[4] F. Liret et D. Martinais, Algèbre 1^{er} année MIAS-MASS-SM, $2^{\text{ème}}$ édition, 2003.

[5] L. Amyotte, Introduction à L'algèbre Linéaire et ses Applications, Luc Amyotte, 2015.

[6] S. Balac, F. Sturm, Algèbre et Analyse, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2ème édition 2008.

[7] J. Grifone, Algèbre linéaire. Cépaduès Éditions, Toulouse, 2011. 4ème édition.

[8] A. Tchoudjem, Algèbre-III : Réduction des endomorphismes, Université Lyon I, 2011.

[9] C. Reutenauer, Algèbre linéaire 2, Université du Quebec, 2020.