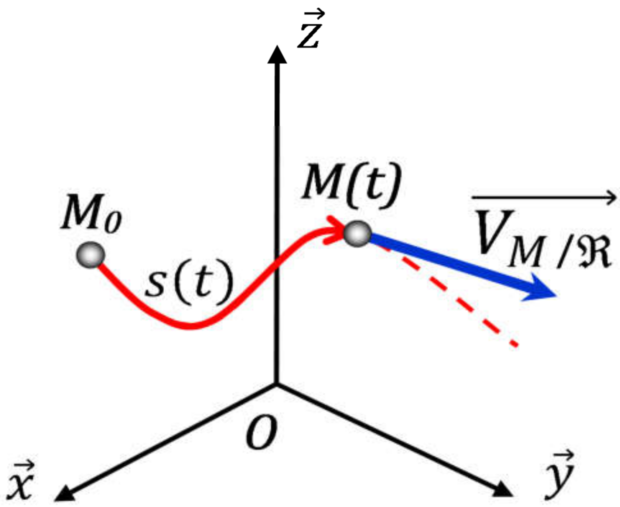
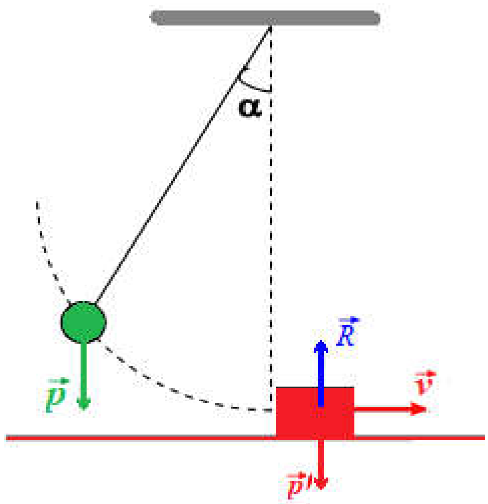
UNIVERSITE DE GHARDAIA

Polycopie de cours mécanique du point matériel (Physique_1)

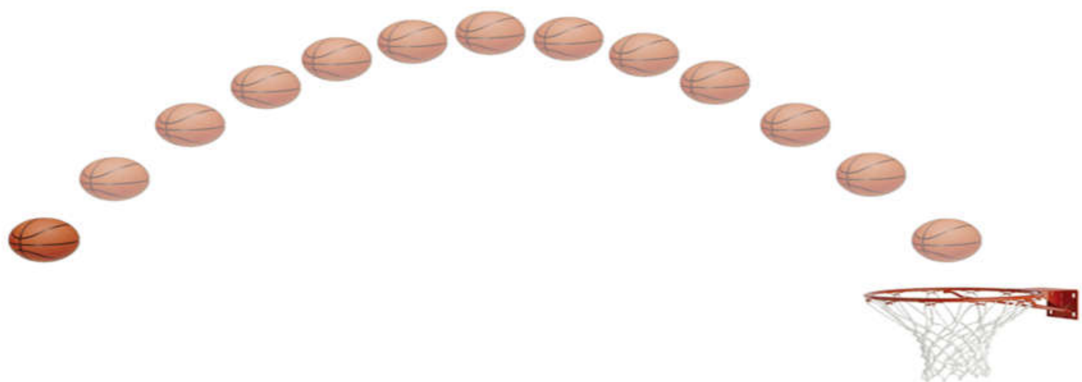
Dr CHOUIA Fayçal

Co-Auteurs: Dr BENHALIMA Ouissem, Pr HADJOUDJA Bouzid





Correspondance d'auteur : f_chouia@yahoo.fr



Ce document est destiné aux étudiants du premier cycle LMD ST & SM

Semestre: 1
Unité d'enseignement: UEF 1.1
Matière 2: Physique 1 **Canevas LMD ST**
VHS: 67h30 (Cours: 3h00, TD: 1h30)
Crédits: 6
Coefficient: 3

Objectifs de l'enseignement

Initier l'étudiant aux bases de la physique Newtonienne à travers trois grandes parties : la Cinématique, la Dynamique et le Travail et Energie.

Connaissances préalables recommandées

Notions de mathématiques et de Physique.

Contenu de la matière:

Rappels mathématiques **(2 Semaines)**

1- Les équations aux dimensions

2- Calcul vectoriel : produit scalaire (norme), produit vectoriel, Fonctions à plusieurs variables, dérivation. Analyse vectorielle : les opérateurs gradient, rotationnel, ...

Chapitre 1. Cinématique **(5 Semaines)**

1- Vecteur position dans les systèmes de coordonnées (cartésiennes, cylindrique, sphérique, curviligne)- loi de mouvement – Trajectoire. 2- Vitesse et accélération dans les systèmes de coordonnées. 3- Applications : Mouvement du point matériel dans les différents systèmes de coordonnées. 4- Mouvement relatif.

Chapitre 2. Dynamique : **(4 Semaines)**

1- Généralité : Masse - Force - Moment de force –Référentiel Absolu et Galiléen. 2- Les lois de Newton. 3- Principe de la conservation de la quantité de mouvement. 4- Equation différentielle du mouvement. 5- Moment cinétique. 6- Applications de la loi fondamentale pour des forces (constante, dépendant du temps, dépendant de la vitesse, force centrale, etc.).

Chapitre 3. Travail et énergie **(4 Semaines)**

1- Travail d'une force. 2- Energie Cinétique. 3- Energie potentiel – Exemples d'énergie potentielle (pesanteur, gravitationnelle, élastique). 4- Forces conservatives et non conservatives - Théorème de l'énergie totale.

Mode d'évaluation:

Contrôle continu: 40% ; Examen: 60%.

Références bibliographiques:

1. A. Gibaud, M. Henry ; Cours de physique - Mécanique du point - Cours et exercices corrigés; Dunod, 2007.
2. P. Fishbane et al. ; Physics For Scientists and Engineers with Modern Physics, 3rd Ed. ; 2005.
3. P. A. Tipler, G. Mosca ; Physics For Scientists and Engineers, 6th Ed., W. H. Freeman Company, 2008.

Université
CPNDST

Avant-propos

Ce cours de mécanique classique s'adresse plus particulièrement aux étudiants de premier cycle universitaire, licence LMD et SM. Ce cours couvre en premier lieu tout ce qui concerne le mouvement d'un point matériel dans un référentiel Galiléen et non galiléen (mouvement relatif) puis on donne les aspects fondamentaux de la mécanique newtonienne en deux chapitres (trois et quatre): notion de force, lois de Newton, point de vue énergétique (les théorèmes des énergies : cinétique, potentielle et mécanique), ainsi que le moment cinétique, les forces d'inertie …etc.

On a essayé le plus possible d'illustrer les différentes notions par des schémas explicites et des exemples simples. Mais pour un entraînement plus poussé, nous invitons les lecteurs et plus précisément nos chers étudiants à fournir un peu plus d'efforts pour plus approfondir dans toutes ces notions.

les Auteurs

Table des matières

Contenu du polycopie

CHAPITRE I

Rappel mathématique

Contenu du Chapitre

I. Analyse dimensionnelle

I.1 Dimension (Equation aux dimensions)

Toute grandeur physique est caractérisée par sa dimension qui est une propriété associée à une unité. La dimension de la grandeur G se note $[G]$. La dimension nous informe sur la nature physique de la grandeur. Par exemple, si G à la dimension d'une masse, on dit qu'elle est homogène à une masse. La relation $[G] = M$ correspond à l'équation aux dimensions de la grandeur G. Il existe sept grandeurs fondamentales: la longueur (L), la masse (M), le temps (T), l'intensité du courant électrique (I), la température (θ), l'intensité lumineuse (J) et la quantité de matière (N). Toutes les autres sont liées à ces grandeurs fondamentales. Par exemple, une aire A étant le produit de deux longueurs, sa dimension est comme suit :

$$[A] = [l \times l] = [l^2] = [l]^2 = L^2$$

Toute relation doit être homogène en dimension, c'est-à-dire que ses deux membres doivent êtres de la même dimension. Par exemple si on prend l'équation $A = B + kD$ n'a de sens que si les dimensions de A et de $(B + kD)$ sont identiques. $[A] = [B + kD]$

I.2 Propriétés

➢ Le produit (division): $[C \times D] = [C][D]$, $\left[\frac{C}{D}\right] = \frac{[C]}{[D]} = [C][D]^{-1}$;

➢ La somme (soustraction): $[A + B] = [A] + [B]$, $[A - B] = [A] - [B]$; dans ce cas il faut noter qu'on ne peut faire l'addition ou la soustraction de deux dimensions que sauf si les deux grandeurs A et B sont de même dimension($[A] = [B]$.

➢ La constante: $[Constant] = 1$, ex. $[10^{-2}] = 1$, $[\pi] = 1$

➢ Les fonctions trigonométriques : $sinf$, $cosf$, $tanf$ ….., $logf$, e^f sont sans dimension donc égal à 1.

Généralisation

Toute équation aux dimensions d'une grandeur G peut se mettre sous la forme :

$$[\boldsymbol{G}] = \boldsymbol{L^a} \times \boldsymbol{M^b} \times \boldsymbol{T^c} \times \boldsymbol{I^d} \times \boldsymbol{\theta^e} \times \boldsymbol{J^f} \times \boldsymbol{N^g} \qquad (1)$$

I.3 Grandeurs dérivées

Une grandeur dérivée est une grandeur physique qui est définie à partir d'autres grandeurs qui sont déjà connues. Par ex. la vitesse (v) est une grandeur dérivée des deux grandeurs langueur (l) et temps (t).

I.3.1 Système d'unité

Les quatre unités fondamentales ainsi choisies définissent le système ***MKSA*** dont les initiales signifient respectivement mètre, kilogramme, seconde et Ampère. Avant l'adoption de ce système, un autre système dans lequel la longueur se mesurait en centimètre, la masse en gramme et le temps en seconde existait déjà, c'est le système ***CGS***. Le système international (***SI***) est constitué par les unités du système MKSA et comporte des définitions complémentaires de l'unité de température et de l'unité de l'intensité lumineuse voir Tableau.1.

Tableau.1 : Grandeurs et leurs unités en système (SI)

Nom de la grandeur	***Symbole***	***Unité du système (SI)***
Longueur	[**L**ongueur]= **L**	Mètre (*m*)
Masse	[**M**asse]= **M**	Kilogramme (*kg*)
Temps	[**T**emps]= **T**	Seconde (*s*)
Intensité électrique	[**I**ntensité]= **I**	Ampère (*A*)
Température	[Température]= **θ**	Kelvin (*k*°)
Quantité de la matière	Nombre de mole [n]= **N**	Mole (*mol*)
Luminescence	[luminescence]= **J**	Candéla (*Cad*)

I.3.2 Exemples

- Surface: la surface étant le produit de deux longueurs, sa grandeur physique est :

$$S = l^2 \Longrightarrow [S] = [l^2] = [l]^2 = [l] \times [l] = L \times L \Longrightarrow [S] = L^2$$

L'unité de la surface est le mètre carré (m^2).

- Vitesse: distance parcourue par unité de temps. On déduit

$v = \frac{dx}{dt}$ où $v = \frac{l}{t}$

Ou sa dimension : $[v] = \left[\frac{l}{t}\right] = \frac{[l]}{[t]} = \frac{L}{T} \Longrightarrow [v] = LT^{-1}$

L'unité de la vitesse est (ms^{-1}).

- L'accélération: par définition

$$a = \frac{dv}{dt} \text{ où } a = \frac{v}{t} \ (a = \frac{l}{t^2})$$

Sa dimension $[a] = \left[\frac{l}{t^2}\right] = \frac{[l]}{[t]^2} = \frac{L}{T^2} \Longrightarrow [a] = LT^{-2}$, son unité est ($ms^{-2}$)

- La force : on prend comme exemple une force appliquée à une masse la fait accélérer $F = ma$, d'où sa dimension est $[F] = [ma] = [m][a] \Longrightarrow [F] = MLT^{-2}$, l'unité est donc $(kg.m.s^{-2})$ appelée (***Newton***)
- La pression : force appliquée par unité de surface: $P = \frac{F}{S}$, sa dimension est :

$[P] = \left[\frac{F}{S}\right] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} \Longrightarrow [P] = ML^{-1}\,T^{-2}$, l'unité est $(kgm^{-1}\,s^{-2})$ dite pascal (***Pas***).

II. Calcul des incertitudes

Une grandeur physique est tout ce qui prend, dans des conditions bien déterminées, une valeur numérique définie qui peut varier (augmenter ou diminuer) si ces conditions elles-mêmes varient.

❖ ***Notion de mesure :***

Une mesure d'une grandeur physique ne peut résulter qu'une valeur approchée et ce pour les raisons des différentes erreurs commises lors de cette mesure suivantes.

II.1 Erreur de mesure

Quel que soit la précision de la mesure d'une grandeur X, nous n'obtenons qu'une valeur approchée x. La différence entre la valeur exacte x_0 et la valeur approchée s'appelle erreur absolue qu'on désigne par δ*x* sa valeur se désigne par:

$$|\delta x| = |x_0 - x| \qquad (2)$$

II.2 Incertitude absolue

Nous pouvons toujours nous assurer que l'erreur commise ne dépasse pas une valeur limite absolue connue sous le nom de : incertitude absolue de la grandeur *X*, il est écrit sous la formule suivante :

$$\Delta x = max|\delta x| = max|x_0 - x| \qquad (3)$$

L'incertitude absolue de la grandeur X est donc la plus grande erreur commis$\Delta x \geq |\delta x|$. Donc la valeur exacte est comprise entre deux valeurs limites connues et on peut écrire :

$$x - \Delta x \leq x \leq x + \Delta x \qquad (4)$$

❖ **Détermination d'une incertitude pour les Grandeurs mesurables**

Dans le cas d'une série de mesures, l'incertitude est évaluée de la façon suivante: On procède à n mesures indépendantes d'une même grandeur physique X avec les mêmes conditions expérimentales. On désigne par x_i les valeurs numériques obtenues avec n variant de 1 à n. La valeur numérique de la mesure de la grandeur X appelée valeur moyenne (x_0) est alors égale à la moyenne arithmétique de l'ensemble des valeurs obtenues:

$x_0 = \frac{x_1+x_2+\cdots\ldots+x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (5)

II.3 Incertitude relative

On appelle incertitude relative d'une grandeur X le rapport entre l'incertitude absolue et la valeur approchée, soit : $\frac{\Delta x}{x_0}$ et elle est égale au module de la différentielle logarithmique :

$\frac{\Delta x}{x_0} = \left|\frac{dx}{x}\right|$ (6)

II.3.1 Calcul de l'incertitude relative

a) Grandeurs indépendantes :

L'incertitude relative d'un produit ou d'un quotient dont les grandeurs sont indépendantes les unes des autres est égal à la somme arithmétique des incertitudes relatives sur chaque terme Si on prend une grandeur physique G tel que

$G = f(x, y, z) = k\frac{x^n y^m}{z^p}$ (7)

Ou x, y, z sont des valeurs mesurable et indépendants entre elles, avec incertitude absolue Δx, Δy et Δz respectivement et k, n, m et p sont des constantes. Pour déterminer l'incertitude relative on a deux méthodes, la méthode de la ***différentielle totale*** et celle ***logarithmique***

- **Méthode de la différentielle totale:**

On dérive totalement l'équation de G

$$dG = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz$$

Puis on divise sur G

$$\frac{dG}{G} = \frac{\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}}{k\frac{x^n y^m}{z^p}}dx + \frac{\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}}{k\frac{x^n y^m}{z^p}}dy + \frac{\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}}{k\frac{x^n y^m}{z^p}}dz$$

On fait toute simplification possible

Enfin, on remplace les éléments différentiels par les incertitudes sur les grandeurs associées et on transforme tous les signes négatifs en signes positifs.

$$\begin{cases}(d) \to (\Delta)\\(-) \to (+)\end{cases}$$

$$\frac{\Delta G}{G} = \left|\frac{\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}}{k\frac{x^n y^m}{z^p}}\right|\Delta x + \left|\frac{\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}}{k\frac{x^n y^m}{z^p}}\right|\Delta y + \left|\frac{\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}}{k\frac{x^n y^m}{z^p}}\right|\Delta z$$

Pour $G = f(x, y, z) = k\frac{x^n y^m}{z^p}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = k\dfrac{y^m(nx^{n-1})}{z^p} \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = k\dfrac{x^n(my^{m-1})}{z^p} \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = k\dfrac{x^ny^m}{z^p} = kx^ny^mz^{-p} = kx^ny^m(-pz^{-p-1}) = (-p)\dfrac{kx^ny^m}{z^{p+1}} \end{cases}$$

$$\frac{dG}{G} = \frac{k\dfrac{y^m(nx^{n-1})}{z^p}}{k\dfrac{x^ny^m}{z^p}}dx + \frac{k\dfrac{x^n(my^{m-1})}{z^p}}{k\dfrac{x^ny^m}{z^p}}dy + \frac{(-p)\dfrac{kx^ny^m}{z^{p+1}}}{k\dfrac{x^ny^m}{z^p}}dz$$

On fait toute simplification possible pour trouver :

$$\frac{dG}{G} = nx^{-1}dx + my^{-1}dy + \frac{-p}{z}dz \Longrightarrow$$

$$\frac{\Delta G}{G} = \left|\frac{n}{x}\right|\Delta x + \left|\frac{m}{y}\right|\Delta y + \left|\frac{-p}{z}\right|\Delta z$$

$$\frac{\Delta G}{G} = n\frac{\Delta x}{x} + m\frac{\Delta y}{y} + p\frac{\Delta z}{z} \qquad (8)$$

- **Méthode logarithmique:**

Toujours on suppose $G = f(x,y,z) = k\frac{x^ny^m}{z^p}$

On applique la fonction logarithme à cette équation

$$logG = \log(k\frac{x^ny^m}{z^p})$$

$$logG = \log\left(k\frac{x^ny^m}{z^p}\right) = \log k + \log(x^ny^m) - \log(z^p)$$

$$= \log k + n\log(x) + m\log(y) - p\log(z)$$

Par dérivation des deux membres de cette équation sachant que : $d(logh) = \frac{dh}{h}$

$$\frac{dG}{G} = \frac{dk}{k} + n\frac{dx}{x} + m\frac{dy}{y} - p\frac{dz}{z}$$

$k = Cst \Longrightarrow dk = 0$ et prend $\begin{cases}(d) \to (\Delta) \\ (-) \to (+)\end{cases}$ d'où $\frac{dG}{G} = n\frac{dx}{x} + m\frac{dy}{y} - p\frac{dz}{z} \Longrightarrow$

$$\frac{\Delta G}{G} = n\frac{\Delta x}{x} + m\frac{\Delta y}{y} + p\frac{\Delta z}{z}$$

b) Cas des grandeurs dépendantes les unes des autres

Supposons G une grandeur physique dépendant des grandeurs mesurables (u, v, t)

$$G = g(u,v,t) = C\frac{u^av^b}{(u+v)^pt^k}$$

En suivant la même démarche que précédemment nous obtenons:

Par exemple : par la méthode logarithmique :

$$logG = \log\left(C\frac{u^a v^b}{(u+v)^p t^k}\right) = \log C + \log(u^a v^b) - \log((u+v)^p t^k)$$

$$= \log C + a\log(u) + b\log(v) - p\log(u+v) - k\log(t)$$

On dérive les deux membres de l'équation on obtient :

$$\frac{dG}{G} = \frac{dC}{C} + a\frac{du}{u} + b\frac{dv}{v} - p\left(\frac{du}{u+v}\right) - p\left(\frac{dv}{u+v}\right) - k\frac{dt}{t}$$

$$\frac{dG}{G} = \frac{dC}{C} + a\frac{du}{u} + b\frac{dv}{v} - p[\left(\frac{du}{u+v}\right) - p\left(\frac{dv}{u+v}\right) - k\frac{dt}{t}$$

$$\begin{cases}(d) \to (\Delta)\\ (-) \to (+)\end{cases} \quad avec \quad dC = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta G}{G} = \left(\frac{a}{u} + \frac{p}{u+v}\right)\Delta u + \left(\frac{b}{v} + \frac{p}{u+v}\right)\Delta v + k\frac{\Delta t}{t} \qquad (9)$$

II.4 Application:

Calculer l'incertitude relative puis l'incertitude absolue de l'énergie électrique exprimée par la formule : $U = R\,I\,t^2$

Réponse

On choisit la méthode la plus simple celle de la différentielle logarithmique

$$logU = \log(R\,I\,t^2) = logR + LogI + 2Logt$$

On dérive cette équation pour obtenir l'incertitude relative, sachant que $d(logf) = \frac{df}{f}$:

$$\frac{dU}{U} = \frac{dR}{R} + \frac{dI}{I} + 2\frac{dt}{t}$$

$$\begin{cases}(d) \to (\Delta)\\ (-) \to (+)\end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta I}{I} + 2\frac{\Delta t}{t}$$

L'incertitude absolue est donc : $\Delta U = U(\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta I}{I} + 2\frac{\Delta t}{t})$

Pour l'application on prend: $R = (2.0 \pm 0.2)\Omega, I = (0.10 \pm 0.002)A\ et\ t = (10.00 \pm 0.01)s$

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{0.2}{2.0} + \frac{0.002}{0.10} + 2\frac{0.01}{10} = 0.1 + 0.020 + 0.002$$

$$\frac{\Delta U}{U} = 0.122 \Rightarrow la\ tolérance\ est\ de\ 12.2\%$$

L'incertitude absolue : $\Delta U = U(0.302)$

$$U = 2.0 \times\ 0.10 \times 10^2 = 20\,Joule\ \Rightarrow$$

$$\Delta U = U(0.302) = 20 \times 0.122 = 2.44\, joule$$

III. Calcul vectoriel

En physique, on utilise deux types de grandeurs : les grandeurs scalaires et les grandeurs vectorielles.

✓ Une ***grandeur physique scalaire*** est entièrement définie par un nombre et une unité appropriée comme la masse m d'un corps associé de l'unité (kg), la longueur l d'un objet d'unité (m), l'énergie E d'un système mesurée en (kgm^2s^{-2}),….etc.

✓ Une ***grandeur physique vectorielle*** est une quantité spécifiée par un nombre et une unité appropriée plus une direction et un sens. Géométriquement, elle est représentée par un vecteur ayant une direction, un sens et un module. On peut citer la vitesse, la force, l'accélération, le champ électrique,….etc.

III.1 Vecteur

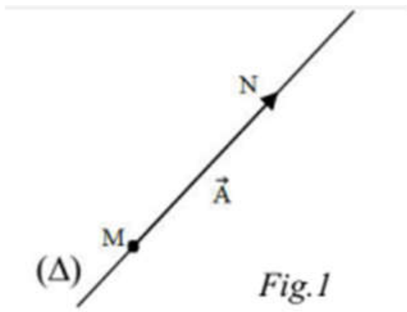


Fig.1

Un vecteur $\overrightarrow{MN}$ (*fig.1*) est un segment orienté qui possède:

- Une origine M;
- Une direction : celle de la droite $(MN \equiv \Delta)$;
- Un sens : de M vers N.
- Un module $|\overrightarrow{MN}|$: qui représente la longueur du segment $[MN] = A$;

On peut désigner un vecteur par une seule lettre, par exemple $\overrightarrow{MN} = \vec{A}$.

➢ **Vecteur unitaire:**

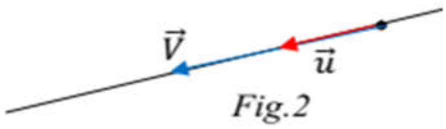


Fig.2

Le vecteur unitaire est un vecteur $\vec{u}$ (*fig.2*) de module égal à l'unité (le nombre un). On peut exprimer un vecteur parallèle au vecteur unitaire sous la forme :

$\vec{V} = |\vec{V}|\,.\vec{u}.$, d'où on peut écrire :

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}. \qquad (10)$$

III.2 Opérations sur les vecteurs

III.2.1 Addition et soustraction

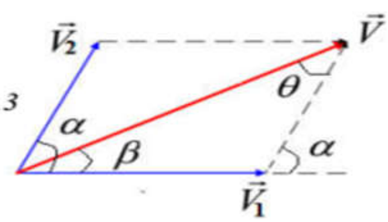


Fig.3

a) Somme de deux vecteurs :

C'est une opération commutative. On calcule le module du vecteur résultant à partir de la ***loi des sinus***.

$$\frac{V}{\sin\alpha} = \frac{V_1}{\sin\theta} = \frac{V_2}{\sin\beta} \qquad (11)$$

Comme il est illustré dans la fig.3

$$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{(\vec{V})^2} = \sqrt{(\vec{V_1} + \vec{V_2})^2} = \sqrt{(\vec{V_1})^2 + (\vec{V_2})^2 + 2\vec{V_1}.\vec{V_2}} \Rightarrow$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{{V_1}^2 + {V_2}^2 + 2V_1.V_2\cos(\widehat{\vec{V_1},\vec{V_2}})} \qquad (12)$$

b) Soustraction

$$\vec{V} = \vec{V_1} - \vec{V_2}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{(\vec{V})^2} = \sqrt{(\vec{V_1} - \vec{V_2})^2} = \sqrt{(\vec{V_1})^2 + (\vec{V_2})^2 - 2\vec{V_1}.\vec{V_2}} \Rightarrow$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{{V_1}^2 + {V_2}^2 - 2V_1.V_2\cos(\widehat{\vec{V_1},\vec{V_2}})} \qquad (13)$$

❖ Lorsque le nombre de vecteurs à additionner est supérieur à deux on applique la méthode géométrique qui consiste à les placer bout à bout comme indiqué sur la fig.4 puis faire l'addition deux à deux.

$$\vec{R} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3} + \vec{V_4} + \cdots + \vec{V_n} \qquad (14)$$

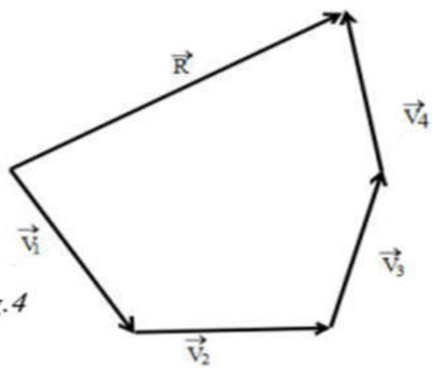


Fig.4

c) Propriétés :

- Commutativité : $\vec{V_1} + \vec{V_2} = \vec{V_2} + \vec{V_1}$
- Associativité de l'addition des vecteurs

$\vec{V_1} + (\vec{V_2} + \vec{V_3}) = (\vec{V_1} + \vec{V_2}) + \vec{V_3}$

- Le produit part un scalaire :

$a(\vec{V_1}.\vec{V_2}) = (a.\vec{V_1}).\vec{V_2} = \vec{V_1}.(a.\vec{V_2})$

$a(b.\vec{V_2}) = (a.b).\vec{V_2} = b.(a.\vec{V_2})$

- Distributivité :

$(a + b)\vec{V_1} = a\vec{V_1} + b\vec{V_1}$

$a.(\vec{V_1} + \vec{V_2}) = a\vec{V_1} + a\vec{V_2}$

Soit $\vec{V}$ un vecteur et α un scalaire, le produit. $\alpha.\vec{V}$ est un vecteur de même direction que $\vec{V}$ si α est positif et de sens contraire si α est négatif (*fig.5*). Si $\alpha = 0 \quad \alpha.\vec{V} = \vec{0}$.

Fig.5

III.2.2 Composantes d'un vecteur (Association à un repère)

Soit $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthonormé direct d'origine O et de base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

Dans cette base le vecteur $\vec{A} = \overrightarrow{OM}$ se décompose d'une manière unique sous la forme:

$$\vec{A} = \overrightarrow{OM} = x_M\vec{\imath} + y_M\vec{\jmath} + z_M\vec{k} \qquad (15)$$

Où

$$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k} \qquad (16)$$

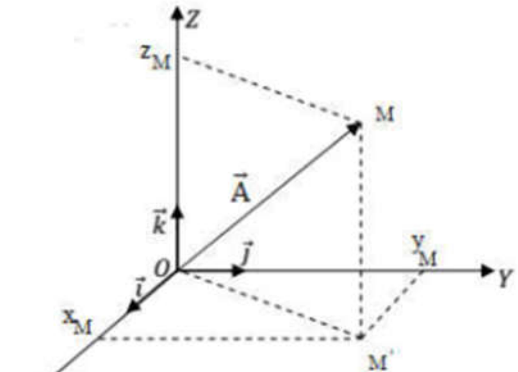


Fig.6

Comme il est montré dans la fig.6, les grandeurs algébriques (A_x, A_y, A_z) s'appellent les composantes du vecteur $\vec{A}$, tandis que (x_M, y_M, A_z) sont les coordonnées cartésiennes du point M dans le système $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Les vecteurs unitaires $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ forment une base orthonormée appelée la base cartésienne, il est à noter qu'il existe d'autres bases qu'on peut utiliser pour décrire les vecteurs comme la base polaire, cylindrique ou sphérique qu'on va voir par la suite.

III.2.3 Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ noté $\vec{A}.\vec{B}$, est le **scalaire** défini par:

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}| \times |\vec{B}| \cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}}) \qquad (17)$$

Si on note θ l'angle entre les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ soit $(\widehat{\vec{A},\vec{B}} = \theta)$

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}| \times |\vec{B}|.\cos\theta$$

✓ ***Approche géométrique***

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}| \times \underbrace{|\vec{B}|.\cos\theta}_{\vec{B}_A}$$

$\vec{B}_A$ est la projection du vecteur $\vec{B}$ sur le vecteur $\vec{A}$ (fig.7)

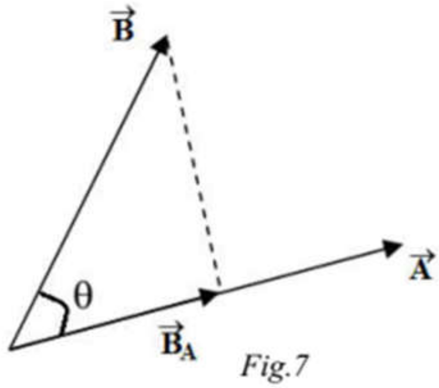


Fig.7

i) Propriétés:

- Le produit scalaire est commutatif et distributif par rapport à l'addition

$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

$\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}.\vec{B}) + (\vec{A}.\vec{C})$

- $\vec{A}.\vec{B} = 0$ si les deux vecteurs sont perpendiculaires ou l'un des deux est nul.
- Le produit scalaire d'un vecteur par lui-même est égal à son module carré : $\vec{A}.\vec{A} = A^2$
- Le produit scalaire deux à deux des vecteurs unitaire de la base d'un repère orthonormé direct est nul tandis que le produit scalaire d'un vecteur unitaire en lui-même est égal à 1.

$$\vec{\imath}.\vec{k} = 0, \quad \vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0, \quad \vec{\jmath}.\vec{k} = 0$$

$$\vec{\imath}.\vec{\imath} = 1, \quad \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = 1, \quad \vec{k}.\vec{k} = 1$$

ii) Méthode analytique du produit scalaire

Soient les deux vecteurs $\vec{A}$et $\vec{B}$ exprimés dans la base cartésienne tel que :

$\vec{A} = A_x\,\vec{\imath} + A_y\,\vec{\jmath} + A_z\,\vec{k}$

$\vec{B} = B_x\,\vec{\imath} + B_y\,\vec{\jmath} + B_z\,\vec{k}$

Le produit scalaire $\vec{A}.\,\vec{B}$ est :

$\vec{A}.\vec{B} = \left(A_x\,\vec{\imath} + A_y\,\vec{\jmath} + A_z\,\vec{k}\right).\left(B_x\,\vec{\imath} + B_y\,\vec{\jmath} + B_z\,\vec{k}\right) = A_xB_x(\vec{\imath}.\vec{\imath}) + A_yB_x(\cancel{\vec{\jmath}.\vec{\imath}}) + A_zB_x(\cancel{\vec{k}.\vec{\imath}}) + A_xB_y(\cancel{\vec{\imath}.\vec{\jmath}}) + A_yB_y(\vec{\jmath}.\vec{\jmath}) + A_zB_y(\cancel{\vec{k}.\vec{\jmath}}) + A_xB_z(\cancel{\vec{\imath}.\vec{k}}) + A_yB_z(\cancel{\vec{\jmath}.\vec{k}}) + A_zB_z(\vec{k}.\vec{k})$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x(\vec{\imath}.\vec{\imath}) + A_yB_y(\vec{\jmath}.\vec{\jmath}) + A_zB_z(\vec{k}.\vec{k}) \Longrightarrow$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (18)$$

De la même façon nous pouvons donc déduire le module d'un vecteur $\vec{A}$:

$$\vec{A}.\vec{A} = A^2 = A_xA_x + A_yA_y + A_zA_z = {A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2 \Longrightarrow$$

$$A = \sqrt{A^2} = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2} \qquad (19)$$

III.2.4 Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, est un vecteur $\vec{C}$, noté :

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} \tag{20}$$

Le vecteur résultant $\vec{C}$ est perpendiculaire au plan contenant les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$. Géométriquement on peut schématiser ce vecteur comme il est montré dans la fig.8

• La direction telle que:

$\vec{C} \perp \vec{A}$

$\vec{C} \perp \vec{B}$

• Le sens tel que le trièdre$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ soit direct

• Le module de $\vec{C} = S$ tel que :

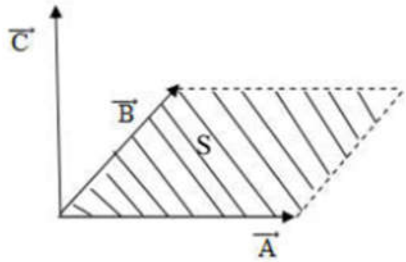


Fig. 8

$$|\vec{C}| = |\vec{A} \wedge \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\left|\sin(\widehat{\vec{A}, \vec{B}})\right| \tag{21}$$

$$\vec{C} = \vec{A}.\vec{B} \sin(\widehat{\vec{A}, \vec{B}})\vec{n} \tag{22}$$

Où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{C}$.

La valeur de $\vec{C}$ représente la surface (S) du parallélogramme formé des trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$et $\vec{C}$ voir fig.8.

i) Propriétés

• Le produit vectoriel est anticommutatif:

$\vec{A} \wedge \vec{B} = -(\vec{B} \wedge \vec{A})$

• Le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition :

$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{D}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) + (\vec{A} \wedge \vec{D})$

• Si les deux vecteurs sont colinéaires et $\left(\widehat{\vec{A}, \vec{B}}\right) = 2k\pi$ où l'un des deux est nul

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

Remarque :

Dans une base d'un repère orthonormé direct :

• Le produit vectoriel d'un vecteur unitaire

en lui-même est nul : $\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

• Le produit vectoriel deux à deux des vecteurs unitaires de la base d'un repère orthonormé direct Selon la règle des trois doigts de la « main droite ».

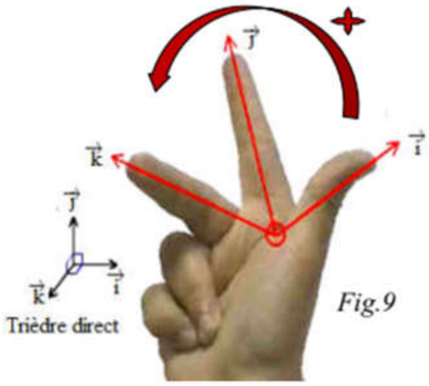


Fig.9

On suit le sens positif selon la flèche (fig.9):

$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}\,,\quad \vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath} \quad et \quad \vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$

Dans le sens inverse on obtient

$\vec{k} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{\imath}\,,\quad \vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} = -\vec{k} \quad et \quad \vec{\imath} \wedge \vec{k} = -\vec{\jmath}$

ii) Forme analytique du produit vectoriel:

Soient les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ exprimés dans la base cartésienne tel que:

$\vec{A} = A_x\,\vec{\imath} + A_y\,\vec{\jmath} + A_z\,\vec{k}$

$\vec{B} = B_x\,\vec{\imath} + B_y\,\vec{\jmath} + B_z\,\vec{k}$

Le produit vectoriel:

$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_x\,\vec{\imath} + A_y\,\vec{\jmath} + A_z\,\vec{k}) \wedge (\,B_x\,\vec{\imath} + B_y\,\vec{\jmath} + B_z\,\vec{k})$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}\vec{k} \Longrightarrow$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\vec{\imath} - \left(A_xB_z - A_zB_x\right)\vec{\jmath} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\vec{k} \qquad (23)$$

III.2.5 Produit mixte

La valeur scalaire obtenue, du produit mixte de trois vecteurs ($\vec{A}\,,\vec{B}\ et\ \vec{C}$) est égal au volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs (fig.10)

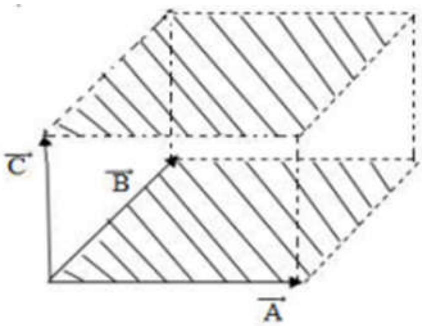


Fig. 10

$$\vec{A}\,.(\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\,.(\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} A_x - \begin{vmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{vmatrix} A_y + \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix} A_z \Longrightarrow$$

$$\vec{A}\,.(\vec{B} \wedge \vec{C}) = \left(B_yC_z - B_zC_y\right)A_x - \left(B_xC_z - B_zC_x\right)A_y + \left(B_xC_y - B_yC_x\right)A_z \qquad (24)$$

❖ **Propriétés**

- $V = \left|\vec{A}\,.(\vec{B} \wedge \vec{C})\right| = \left|\vec{C}\,.(\vec{A} \wedge \vec{B})\right| = \left|\vec{B}\,.(\vec{C} \wedge \vec{A})\right|$

- Si les trois vecteurs sont coplanaires, alors le volume $V = 0$.

IV. Analyse vectorielle (Les Opérateurs)

IV.1 Opérateurs « Nabla » $\vec{\nabla}$

On définit une grandeur vectorielle appelée « ***opérateur nabla*** » $\vec{\nabla}$ en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{\nabla}= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{k} \qquad (25)$$

Donc on peut écrire:

$$\vec{\nabla}= (\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$$

❖ $\vec{\nabla}$ peut agir sur des champs de vecteurs et sur des champs de scalaire.

IV.2 Opérateurs « gradient » $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$

Soit $f(x,y,z)$ une fonction scalaire. On appelle gradient de f noté $\vec{\nabla}f$ ou $\overrightarrow{grad}f$ le champ de vecteur suivants:

$$\vec{\nabla}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{k} \qquad (26)$$

IV.3 Opérateurs « divergence » div

Soit $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$un champ de vecteurs. On appelle $div\vec{A}$ le produit scalaire de l'opérateur

$$\boldsymbol{div}\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \qquad (27)$$

IV.4 Opérateur « rotationnel » $\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}$

Le rotationnel d'un champ de vecteur $\vec{A}$ est défini comme le produit vectoriel entre $\vec{\nabla}$ et $\vec{A}$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_y & A_z \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_z \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_x & A_y \end{vmatrix}\vec{k} \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y})\vec{k} \qquad (28)$$

IV.5 Opérateur « Laplacien » $\nabla^2 = \Delta$

Le produit scalaire $(\vec{\nabla}.\vec{\nabla})$ donne un opérateur du second ordre appelé Laplacien. Celui-ci agit sur un champ de vecteur ou sur un champ de scalaire.

$$\nabla^2 = \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \quad (29)$$

IV.6 Propriétés

- $\overrightarrow{grad}(f+g) = \overrightarrow{grad}(f) + \overrightarrow{grad}(g)$;
- $\overrightarrow{grad}(f \times g) = g.\overrightarrow{grad}(f) + f.\overrightarrow{grad}(g)$;
- $div(\overrightarrow{grad}f) = \Delta(f)$;
- $div(\overrightarrow{rot}(\vec{A})) = 0$;
- $div(\Delta(\vec{A})) = \Delta div\vec{A}$;
- $div(f.\vec{A}) = f.div(\vec{A}) + \vec{A}.\overrightarrow{grad}f$;
- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}f) = \vec{0}$;
- $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = \overrightarrow{grad}div(\vec{A}) - \Delta\vec{A}$;
- $div(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B}.\overrightarrow{rot}(\vec{A}) - \vec{A}.\overrightarrow{rot}(\vec{B})$

V. Application

Soient les trois vecteurs suivants$\vec{A}$, $\vec{B}$et $\vec{C}$ tel que :

$\vec{A} = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{B} = -3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 4\vec{k}$ et $\vec{C} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$

Calculer :

1) $(\vec{A}.\vec{B})$, $(\vec{A} \wedge \vec{B})$ et $|\vec{A} \wedge \vec{B}|$;

2) $\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C})$, $\vec{C}.(\vec{A} \wedge \vec{B})$ et $\vec{B}.(\vec{C} \wedge \vec{A})$, que remarquez-vous ?

3) Que représente la valeur calculée dans la question 2 ?

4) Déduire l'angle $(\widehat{(\vec{A} \wedge \vec{B}), \vec{A}})$.

Réponse

1- (a) Le produit scalaire : $\vec{A}.\vec{B}$

$$\vec{A}.\vec{B} = (-\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}).(-3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 4\vec{k}) = (-1)(-3) + (-2)(1) + (1)(4)$$

$$\vec{A}.\vec{B} = 5(u).$$

(b) le produit vectoriel : $\vec{A} \wedge \vec{B}$

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -1 & -2 & 1\\ -3 & 1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}\vec{\imath}+(-1)\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -3 & 4\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -3 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=[(-2)(4)-(1)(1)]\vec{\imath}-[(-1)(4)-(-3)(1)]\vec{\jmath}+[(-1)(1)-(-3)(-2)]\vec{k}$$

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{V}=-9\vec{\imath}+\vec{\jmath}-7\vec{k}$$

c) le module $|\vec{A}\wedge\vec{B}|$

$$|\vec{A}\wedge\vec{B}|=\vec{V}=\sqrt{(-9)^2+(1)^2+(-7)^2}=\sqrt{81+1+49}\Rightarrow|\vec{A}\wedge\vec{B}|=\sqrt{131}(u)$$

2) le produit mixte $\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C})$

$$\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=\begin{vmatrix}-1 & -2 & 1\\ -3 & 1 & 4\\ -1 & 2 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & -3\end{vmatrix}(-1)+(-1)\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -1 & -3\end{vmatrix}(-2)+\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}(1)$$

$$=[(1)(-3)-(2)(4)](-1)-[(-3)(-3)-(-1)(4)](-2)$$

$$+[(-3)(2)-(-1)(1)](1)\Rightarrow\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=32\ (u)$$

De la même façon on trouve $\vec{C}.\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)$ et $\vec{B}.\left(\vec{C}\wedge\vec{A}\right)$

- On remarque que : $\left|\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)\right|=\left|\vec{C}.\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)\right|=\left|\vec{B}.\left(\vec{C}\wedge\vec{A}\right)\right|$

3) La valeur de $\left|\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)\right|$ représente le volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs $\vec{A},\vec{B}\ et\ \vec{C}$.

4) Déduction de l'angle $(\widehat{(\vec{A}\wedge\vec{B}),\vec{A}})$:

On a le produit scalaire $\vec{A}.\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)=\vec{A}.\vec{V}=|\vec{A}||\vec{V}|\cos\left(\widehat{\vec{A},\vec{V}}\right)\Rightarrow\cos\left(\widehat{\vec{A},\vec{V}}\right)=\frac{\vec{A}.\vec{V}}{|\vec{A}||\vec{V}|}$

$$\vec{A}.\vec{V}=(-1)(-9)+(-2)(1)+(1)(-7)=0\Rightarrow\cos\left(\widehat{\vec{A},\vec{V}}\right)=0\Rightarrow\cos^{-1}0=\widehat{\vec{A},\vec{V}}\Rightarrow$$

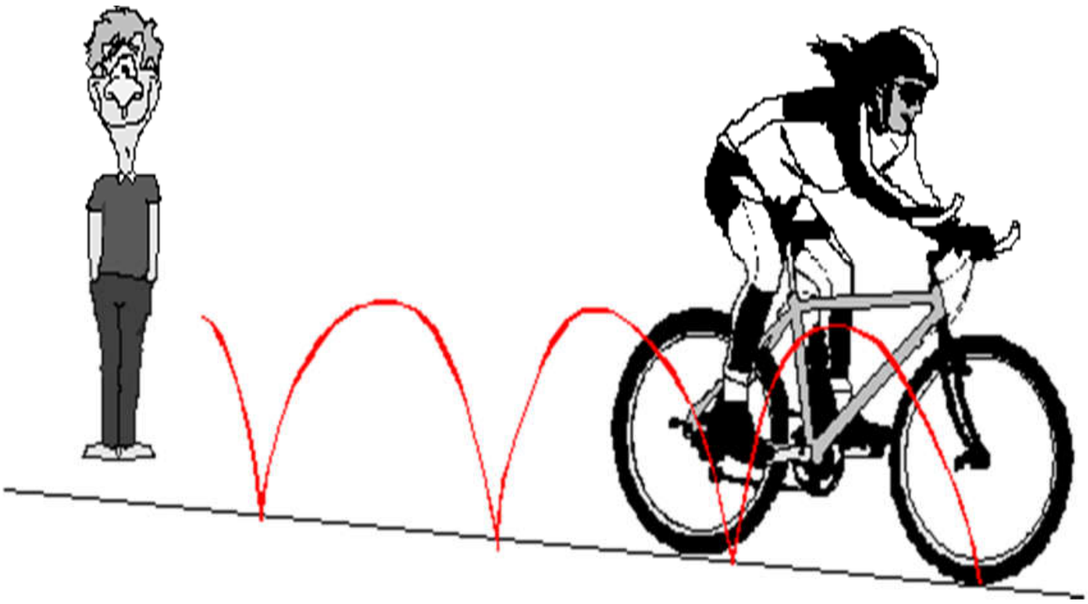
$$\left(\widehat{\vec{A},\vec{V}}\right)=\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\vec{A}\perp\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)$$

$$Donc\ le\ vecteur\ résultant\ \vec{A}\wedge\vec{B}\ est\ Perpendiculaire\ à\ \vec{A}\ et\ à\ \vec{B}$$

CHAPITRE II

Cinématique du point matériel

Contenu du Chapitre



I. Introduction

La cinématique étudie le mouvement d'un point matériel (objet en mouvement) indépendamment des causes qui donnent naissance à ce mouvement. Elle repose sur une description euclidienne de l'espace et d'un temps absolu. Où nous pouvons illustrer les notions de vitesse et d'accélération.

Afin de déterminer la position instantanée d'un point matériel, nous devons choisir d'abord un repère parmi les différents repères les plus utiles.

I.1 Repère d'inertie (galiléen)

Pour déterminer la position d'un mobile dans l'espace, nous devons choisir avant tout un corps solide, que nous appelons référentiel, auquel nous associons des axes de coordonnées. Tout ensemble de systèmes d'axes de coordonnées, lié à un corps solide S qui est le référentiel constitue un repère lié à ce corps solide S (fig.1).

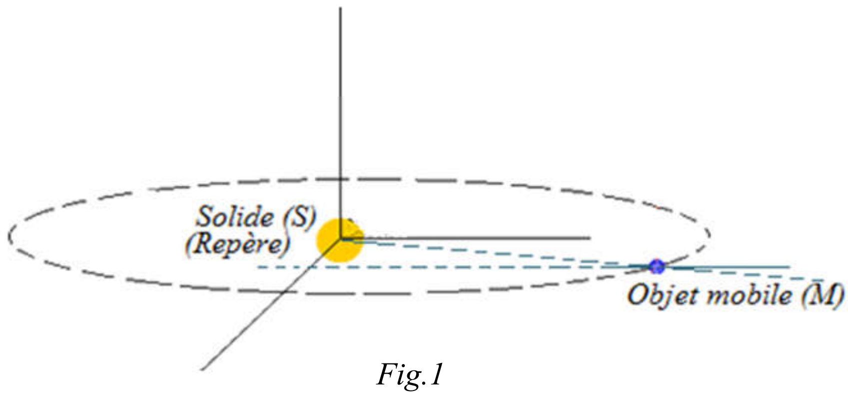


Fig.1

Dans un référentiel galiléen R donné, on repère une position ponctuelle M à l'aide de trois coordonnées spatiales (X, Y, Z), ces dernières sont eux-mêmes repérés dans le référentiel temporel par une coordonnée temporelle (t), donc la position est définie par quatre nombres réels comme par exemple(X(t), Y(t), Z(t)).

I.2 Notion du point matériel

Les mouvements des corps sont souvent très complexes, c'est pour cela que chaque corps est réduit en un point matériel, ce dernier est défini comme étant un objet sans dimension spatiales. En réalité on étudie le mouvement du centre de masse de ce corps, point sur lequel toute la masse est concentrée en son centre de gravité (Fig.2).

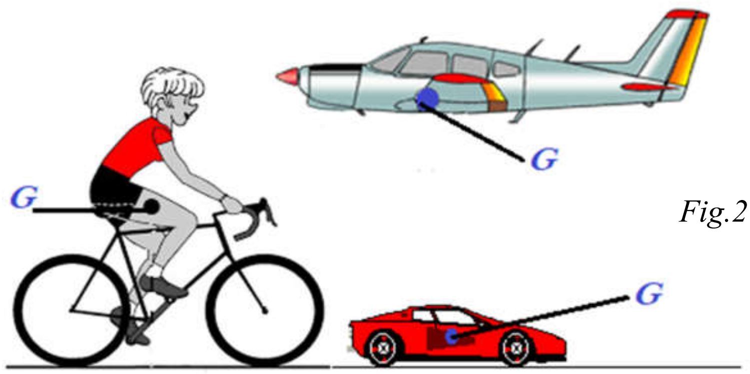


Fig.2

I.3 Trajectoire

On appelle trajectoire d'un mobile l'ensemble des positions successives qu'il occupe au cours du temps (fig.3).

❖ **Equation du mouvement (ou équation Horaire)** : C'est la relation qui lie le chemin parcouru, au temps nécessaire à le parcourir (On a choisi des coordonnées cartésiennes, mais on aurait pu choisir n'importe quelles autres coordonnées). Ces coordonnées peuvent être notées par:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = f(t) \\ z = f(t) \end{cases} \tag{30}$$

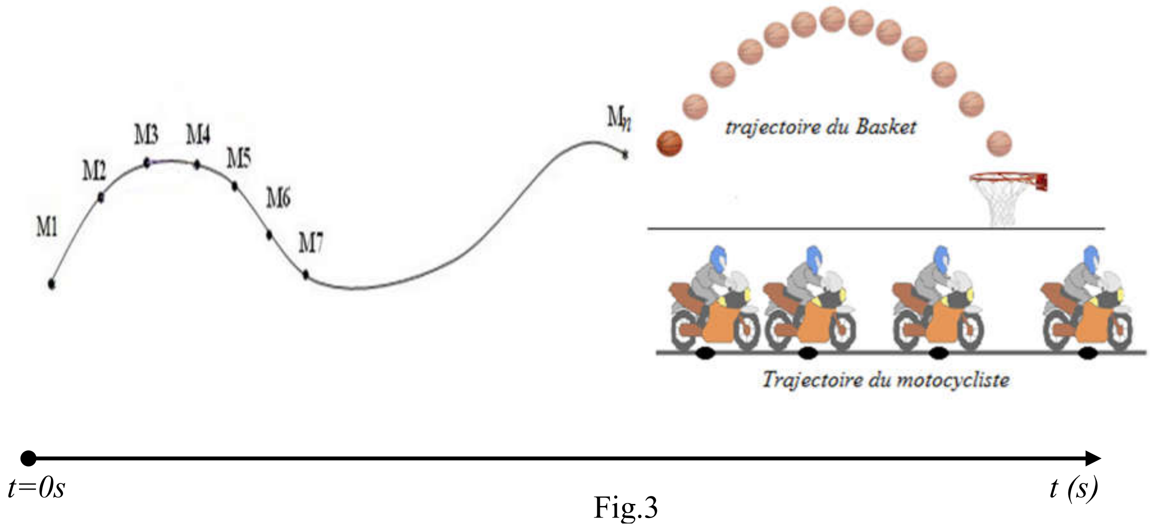


Fig.3

I.4 Repérage d'un point

Pour résoudre tout problème de physique et notamment de mécanique, il est nécessaire de repérer un point M dans l'espace.

II. Vecteur Position

Considérons un point M décrivant une trajectoire au cours de son mouvement par rapport à un référentiel R. L'équation horaire est l'équation qui permet de repérer le point M à chaque instant (t) dans le référentiel (R).

Donc il faut connaître les composantes du vecteur de position $\overrightarrow{OM}$ et des vecteurs qui pourront être définis à partir de celui-là.

II.1. Systèmes de coordonnées

II.1.1 Coordonnées cartésiennes

Si le mouvement s'effectue dans l'espace, il est possible de repérer la position du mobile ponctuel M dans le repère $R(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\,)$ (fig.4) à l'aide du vecteur de position $\overrightarrow{OM}$ ou bien à l'aide des coordonnées cartésiennes (Fig.5) qui sont :

$$\begin{cases} x : abscisse \\ y : Ordonnée \\ z : altitude \end{cases}$$

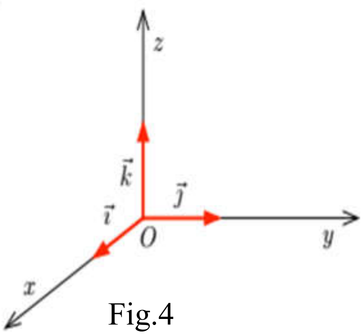


Fig.4

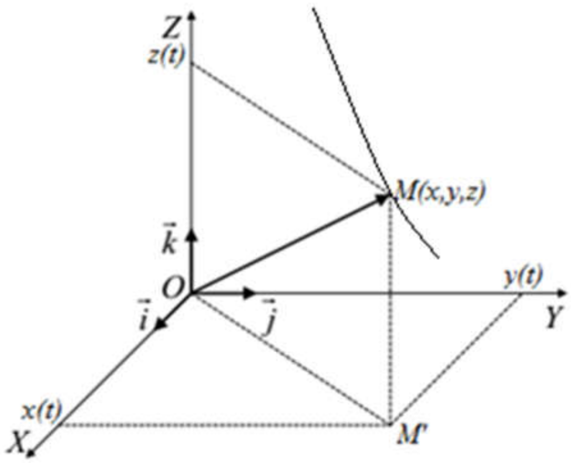
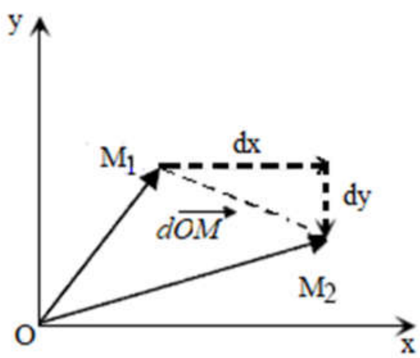


Fig.5

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k} \qquad (31)$$

- **Vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes**

Fig.6



Dans un repère plan (xOy) (fig.6) le vecteur déplacement s'écrit

$d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath}$

On peut écrire dans les repères à trois dimensions

$$d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k} \qquad (32)$$

II.1.2 Coordonnées polaires

Ce système de coordonnées est approprié pour étudier les mouvements plans à symétrie de rotation. Le repérage s'effectue relativement à un axe polaire (Ox), d'origine O appelée pôle. On peut alors repérer la position (Fig.7) de tout point M du plan contenant (Ox) par :

$$\begin{cases} \text{le rayon polaire: } \rho = \left|\overrightarrow{OM}(t)\right| \\ \text{l'angle polaire: } \theta(t) = \left(\widehat{\overrightarrow{OM}(t), \overrightarrow{Ox}}\right) \end{cases}$$

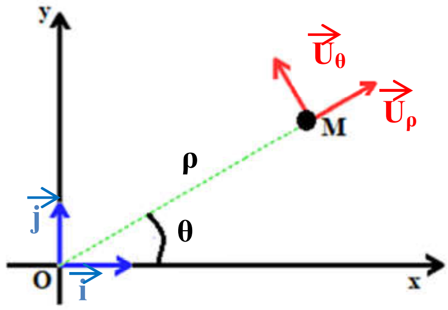


Fig.7

On peut écrire le vecteur de position comme suit :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{\rho(t)} = \rho\,\vec{U}_\rho \qquad (33)$$

Dans ce système on utilise la base constituée par les vecteurs unitaires:

- $\vec{U}_\rho$ ayant la direction et le sens de $\overrightarrow{OM}$;
- $\vec{U}_\theta$ obtenu par rotation de $\vec{U}_\rho$ d'un angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique

Les coordonnées polaires ρ et θ du point M sont liées aux coordonnées cartésiennes (fig. 8) par les relations suivantes:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{x}{y} \end{cases}$$

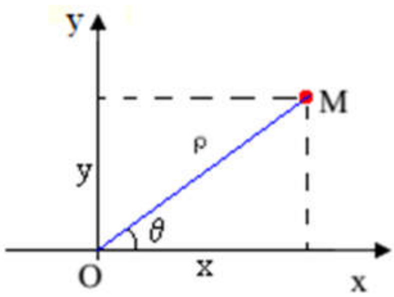


Fig.8

Pour recouvrir tout le plan (xoy):

$$0 \leq \rho \leq +\infty \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

- **Ecriture de la base polaire dans la base cartésienne**

La base $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta)$ est liée au point M, et de ce fait les directions des vecteurs unitaires peuvent varier avec le temps. Leurs dérivées vérifient un certain nombre de relations, notamment, on

La base polaire (fig.9) peut être écrite à l'aide de la base cartésienne

$$\begin{cases} \vec{U}_\rho = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \vec{U}_\theta = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases} \quad (34)$$

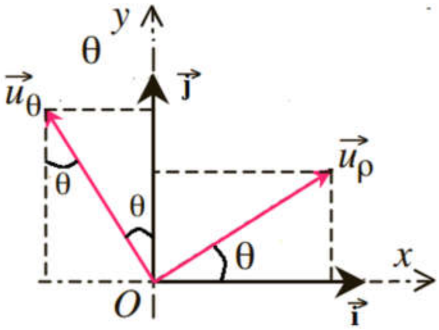


Fig. 9

$$\frac{d\,\vec{U}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{d\theta}\frac{d\,\vec{U}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\,\vec{U}_\rho}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt}\,\vec{U}_\theta = \dot{\theta}\,\vec{U}_\theta \quad (35)$$

$$\frac{d\,\vec{U}_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\theta}\frac{d\,\vec{U}_\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\,\vec{U}_\theta}{d\theta} = -\frac{d\theta}{dt}\,\vec{U}_\rho = -\dot{\theta}\,\vec{U}_\rho \quad (36)$$

- **Vecteur déplacement élémentaire en coordonnées polaires**

Le déplacement élémentaire d'un point mobile M vers la position M' (fig.10), s'écrit comme il est montré dans l'équation suivante :

$$d\overrightarrow{OM}(t) = d\rho\,\vec{U}_\rho + \rho d\theta\,\vec{U}_\theta \quad (37)$$

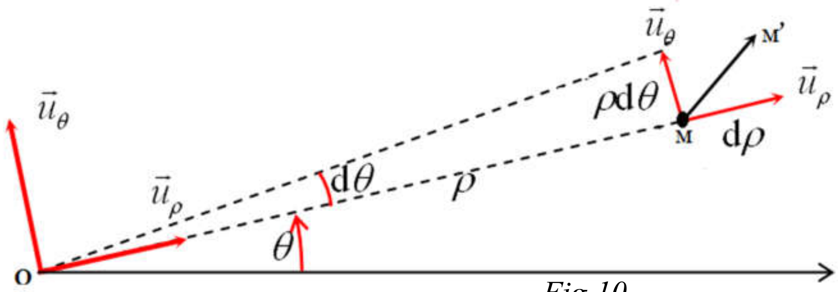
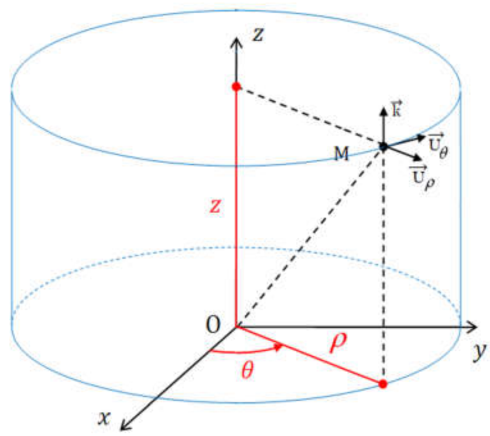


Fig.10

II.1.3 Coordonnées cylindriques

On appelle coordonnées cylindriques les coordonnées relatives à une base tournante $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta, \vec{k})$ autour de l'axe z dans le référentiel R (Fig.11). Les coordonnées sont dites cylindriques si elles font intervenir une coordonnée *z* en dehors du plan (*xOy*) et polaires dans le cas contraire.

Fig.11



Le vecteur de position s'écrit ainsi :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \rho\,\vec{U}_\rho + z\vec{k} \quad (38)$$

La base $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta, \vec{k})$ peut être représenté au point M considéré, mais elle peut tout aussi bien être placée en O.

- **Vecteur déplacement dans la base cylindrique**

Le vecteur déplacement élémentaire dans les coordonnées cylindriques (fig.12) est défini par la relation suivante :

$$d\overrightarrow{OM} = d\rho\, \vec{U}_\rho + \rho d\theta\, \vec{U}_\theta + dz\, \vec{k} \qquad (39)$$

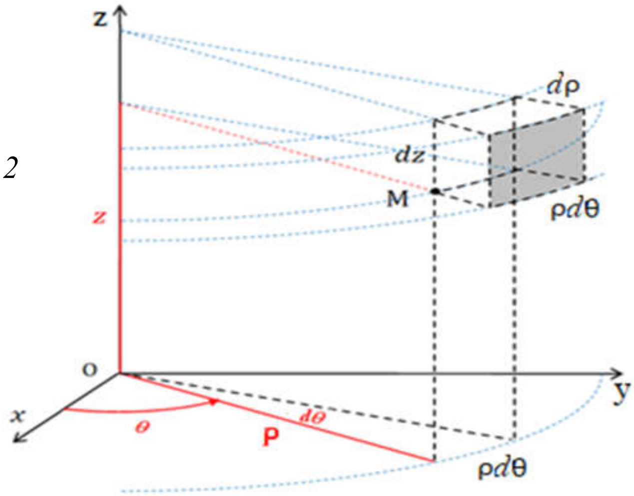


Fig.12

II.1.4 Coordonnées sphériques

Le point M est repéré par

$$\begin{cases} \mathrm{r}\text{: la distance entre l'originr du repère O et point mobile M tel que } \mathrm{r} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right| \\ \theta\text{: l'angle entre l'axe (oz)et le vecteur position } \overrightarrow{\mathrm{OM}} \\ \varphi\text{: l'angle entre l'axe (ox)et la projection du vecteur } \overrightarrow{\mathrm{OM}} \text{ sur le plan } (xOy) \\ \quad \text{tel que: } 0 \le \mathrm{r} \le +\infty, \quad 0 \le \theta \le \pi \text{ et } 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

Les variables $(\mathrm{r}, \theta, \varphi)$ sont appelées les coordonnées sphériques (fig.13)

Le vecteur de position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{r(t)} = r\,\vec{U}_r \qquad (40)$$

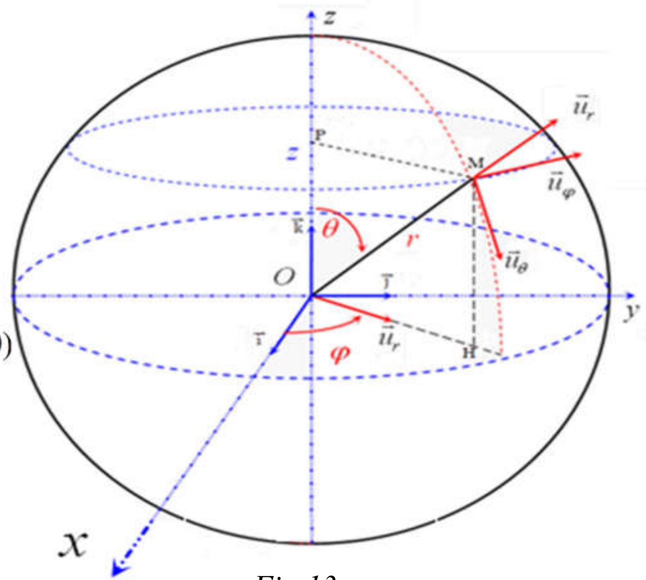


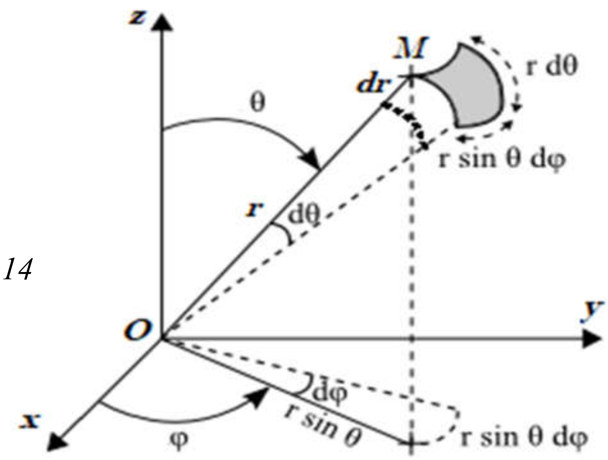
Fig.13

➢ **Vecteur déplacement dans la base sphérique**

Comme il est illustré dans la (fig.14) le déplacement élémentaire d'un point matériel M s'écrit :

$$d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{U}_r + rd\theta\,\vec{U}_\theta + r\sin\theta d\varphi\,\vec{U}_\varphi \tag{41}$$

Fig.14



III. Mouvement rectiligne

Le choix de ce mouvement est motivé par sa simplicité : sa description est facile et il est décrit par des équations simples

C'est un mouvement pour lequel la trajectoire suivie est une droite. Le repère peut alors être réduit à une origine O et un axe (*Ox*) porté par la trajectoire (fig.15).

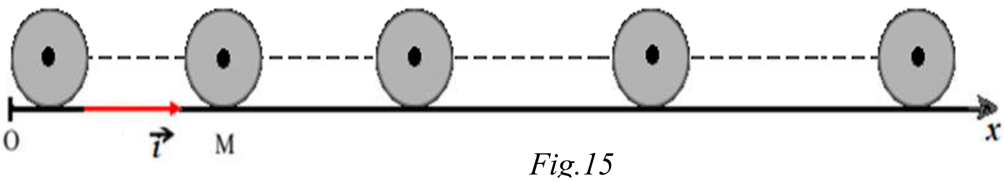


Fig.15

La position M du mobile est repérée par le vecteur de position :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{i} \tag{42}$$

La relation $x = f(t)$ est l'**équation horaire du mouvement**.

Exemple

$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$ est l'équation du mouvement pour une bille qui tombe verticalement avec une vitesse initiale (à $t = 0: v = v_0\ et\ x = x_0$) sur un axe (*ox*) orienté vers le bas.

Le diagramme de la trajectoire de ce mouvement est représenté dans (la fig.16)

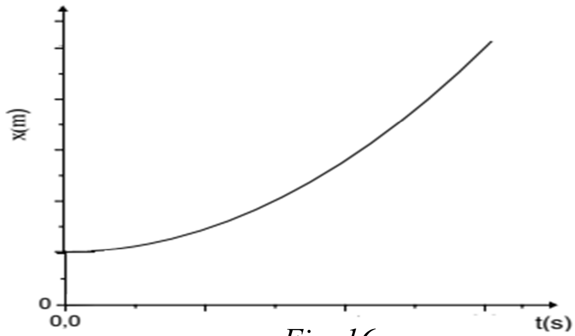


Fig. 16

III.1 Vecteur déplacement

Soient M_1 et M_2 deux positions du mobile sur l'axe (Ox) (Fig.17) aux instants t_1 et t_2 respectivement. Le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est appelé vecteur déplacement entre les deux instants t_1 et t_2

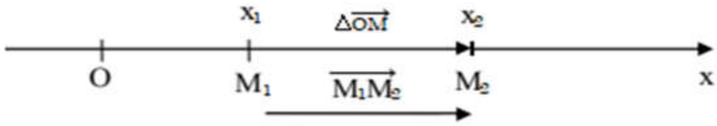


Fig.17

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2} \quad (43)$$

La relation entre ce vecteur déplacement et les vecteurs positions est alors:

$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \Delta\overrightarrow{OM}$, alors dans le cas de mouvement rectiligne $\Delta x = x_2 - x_1$

Pour $\Delta x = x_2 - x_1 \lll \Rightarrow \Delta\overrightarrow{OM} \to d\overrightarrow{OM}$ et $\Delta x \to dx$

Donc le vecteur déplacement d'un mobile en mouvement rectiligne sur un sel axe est :

$$d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{\imath} \quad (44)$$

III.2 Vecteur position

Puisque le déplacement du point matériel se fait sur un seul axe donc :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{\imath} \quad (45)$$

III.3 Vitesse

III.3.1 Vitesse moyenne

La vitesse moyenne d'un mobile entre deux instants t_1 et t_2 correspondant aux positions M_1et M_2 est définie par le rapport :

$$\vec{V}_M\Big]_{M_1}^{M_2} = \vec{V}_M\Big]_{t_1}^{t_2} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2-t_1} = \frac{\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}}{t_2-t_1} = \frac{\Delta\,\overrightarrow{OM}}{\Delta t} \qquad (46)$$

Dans le cas actuel où le mouvement est rectiligne sur un axe (Ox) :

$$\vec{V}_M\Big]_{M_1}^{M_2} = \vec{V}_M\Big]_{t_1}^{t_2} = \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1} = \frac{\Delta\,x}{\Delta t} \qquad (47)$$

Le scalaire de la vitesse moyenne

$$V_M = \frac{distance\ \ parcourue}{temps\ mis}$$

III.3.2 Vitesse instantanée

Il arrive que l'on s'intéresse à la vitesse d'une particule à un instant particulier *t* correspondant à une position donnée.

- ***Définition***

On appelle vecteur vitesse instantanée du point M par rapport au référentiel R le vecteur

$$\vec{V}_i = \vec{V} = lim_{\Delta t\to 0}\,\vec{V}_M = lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{OM}_2-\overrightarrow{OM}_1}{\Delta t} = lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t)-\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \qquad (48)$$

Le vecteur vitesse est donc la dérivée du vecteur position. Il en résulte que le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire. La norme du vecteur vitesse se mesure en ($m.s^{-1}$)

- **Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes**

On a le vecteur position $\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{\imath}$ et on a dit que la vitesse instantanée est $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

Donc

$$\vec{V} = \frac{d\,x(t)}{dt}\vec{\imath} = \dot{x}\,\vec{\imath}$$

$\vec{V} = v_x\,\vec{\imath}$ alors

$$v_x = \frac{d\,x(t)}{dt} = \dot{x}$$

III.4 Accélération

Le vecteur accélération est une grandeur d'évolution qui mesure la variation du vecteur vitesse, en norme et en direction

On appelle vecteur accélération moyen du point M par rapport au référentiel *R* le vecteur

$$\vec{a}_M = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{V}(t_2) - \vec{V}(t_1)}{\Delta t} \quad (49)$$

L'accélération instantanée du point M s'obtient l'lorsque l'intervalle $[t_1, t_2]$ est très petit ($\Delta t \to 0$)

$$\vec{a}_i = \vec{a} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{\Delta t} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (50)$$

On vu de l'équation (48) nous pouvons déduire le vecteur de l'accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \quad (51)$$

III.4.1 Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

On a le vecteur vitesse du mouvement rectiligne est : $\vec{V} = \dot{x}\,\vec{\imath} \Longrightarrow$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\dot{x}\,\vec{\imath})}{dt} \Longrightarrow$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{\imath}$$

IV. Exemples de mouvement rectiligne

Le mouvement d'un point matériel est dit rectiligne si la ***trajectoire est rectiligne***

IV.1 Mouvement rectiligne uniforme

Un mouvement d'un point matériel est dit **rectiligne uniforme** si le point matériel se déplace à vecteur vitesse uniforme ou constant.

Donc :

$$\vec{V} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\,x(t)}{dt}\vec{\imath} = (Cst)\vec{\imath} = v\,\vec{\imath}$$

IV.1.1 Equation horaire du mouvement rectiligne

L'équation horaire du mouvement entre les deux positions *x* et x_0 et entre les deux instants $t=0$ et t_0 est donc comme suit :

$$\frac{d\,x(t)}{dt} = v \Rightarrow d\,x(t) = vdt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t vdt \Rightarrow x]_{x_0}^{x} = vt]_0^t \Rightarrow x - x_0 = vt$$

$$x = v\,t + x_0 \quad (52)$$

D'autre part l'accélération est nul puisque

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{V}}{dt} = 0\,\vec{\imath}$$

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{V}}{dt} = \frac{d^2(vt + x_0)}{dt^2}\vec{\imath} = \frac{d\,(v)}{dt}\vec{\imath} = 0\,\vec{\imath}$$

IV.1.2 Diagrammes d'un mouvement (RU)

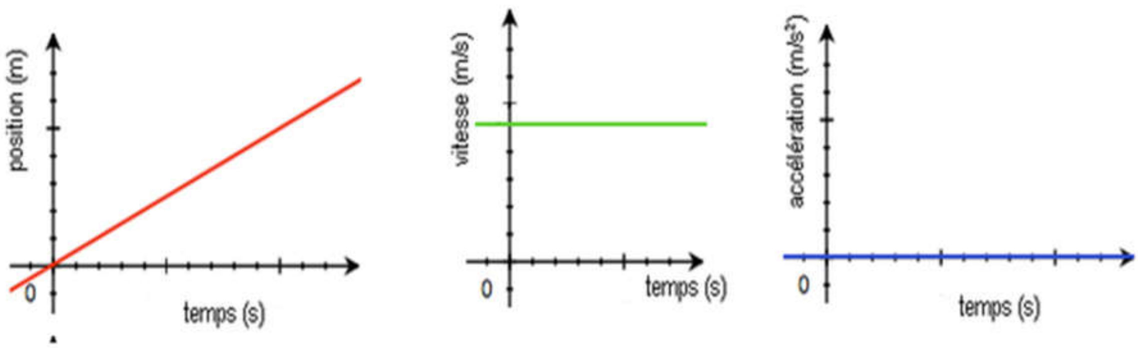


Fig. 18 : diagrammes (a) de la position, (b) de la vitesse et (c) de l'accélération

IV.2 Mouvement rectiligne uniformément variée

Le mouvement d'un point matériel est rectiligne ***uniformément varié*** si sa trajectoire est une ***droite*** et son accélération est ***constante*** (positif ou négatif).

IV.2.1 Equation de la vitesse

En considérant les conditions initiales $t = 0$ la vitesse est égale à la vitesse initiale ($v = v_0$), et partant des définitions précédentes, et en intégrant on peut écrire :

$$a = \frac{d\,v}{dt} \Rightarrow dv = adt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt \Rightarrow v]_{v_0}^{v} = a.t]_0^t \Rightarrow v - v_0 = a(t - 0)$$

A la fin on obtient l'équation de la vitesse instantanée qui est une fonction du temps de premier degré:

$$v = at + v_0 \qquad (53)$$

IV.2.2 Equation horaire du mouvement (UV)

Si on considère que à $t = 0$ l'abscisse vaux l'abscisse initiale $x = x_0$ donc on peut écrire :

$$v = \frac{d\,x}{dt} = at + v_0 \Rightarrow dx = (at + v_0)dt$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (at + v_0)dt \Rightarrow x]_{x_0}^{x} = (a\frac{t^2}{2} + v_0 t)]_0^t \Rightarrow x - x_0 = a\frac{t^2}{2} + v_0 t$$

On peut obtenir l'équation horaire du mouvement :

$$x = a\frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0 \qquad (54)$$

IV.2.3 Diagrammes d'un mouvement (RUVA)

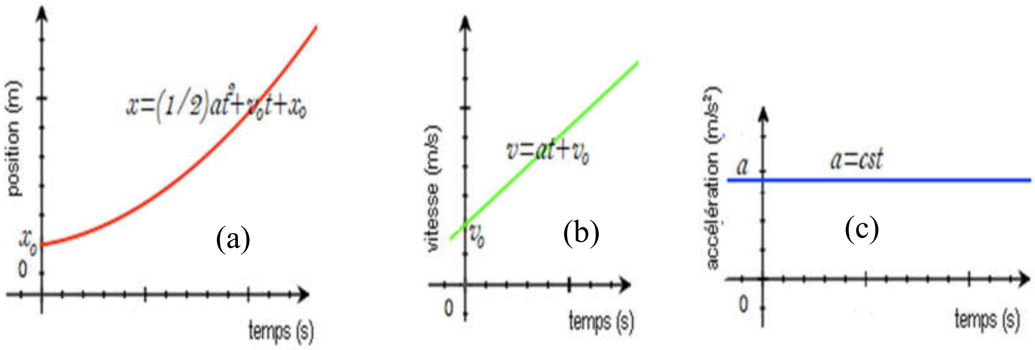


Fig.19 diagrammes (a) la position, (b) de la vitesse et (c) de l'accélération

Remarque1 : dans le cas général entre deux instants t et t_0 on peut trouver une relation indépendante du temps qui relie les abscisses (x et x_0) et les vitesses (v et v_0)

Donc de l'équation de la vitesse $v = at + v_0$ on peut déduire

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

On remplace dans l'équation horaire précédente

$$x_2 - x_1 = a\frac{(\frac{v - v_0}{a})^2}{2} + v_0(\frac{v - v_0}{a})$$

$$x - x_0 = \frac{(v - v_0)^2}{2a} + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) = \frac{v^2 + {v_0}^2 - 2vv_0}{2a} + \frac{2(vv_0 - {v_0}^2)}{2a}$$

$$x - x_0 = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2a} \Rightarrow$$

$$2a(x - x_0) = v^2 - {v_0}^2 \qquad (55)$$

Remarque 2:

Si le mouvement se fait dans un espace (repère R) de trois dimension et non pas sur un seul axe

La vitesse instantanée et l'accélération s'écrivent donc suivant la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

- *La vitesse*

$\vec{V} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\,x(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{d\,y(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{d\,z(t)}{dt}\vec{k} = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k}$

- *L'accélération*

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dv_z(t)}{dt}\vec{k} = \frac{d^2\,\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\,x(t)}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2\,y(t)}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2\,z(t)}{dt^2}\vec{k}$$

$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{\imath} + \ddot{y}\,\vec{\jmath} + \ddot{z}\,\vec{k} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$

Remarque 3

- Le mouvement est dit mouvement rectiligne accéléré (MRUVA) si $\vec{a}.\vec{v} > 0$
- Le mouvement est rectiligne décéléré (retardé) (MRUVD) si $\vec{a}.\vec{v} < 0$
- Si le produit scalaire $\vec{a}.\vec{v} = 0$ on dit que le mouvement est uniforme.

V. Mouvement curviligne

Un mouvement est dit curviligne lorsque sa trajectoire est une courbe quelconque. Pour décrire le mouvement curviligne d'un mobile, il faut choisir une origine O. Sa position est repérée à chaque instant par le vecteur position

$$\vec{r} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k} \tag{56}$$

V.1 Abscisse curviligne

L'abscisse curviligne S est la mesure algébrique de l'arc $\widehat{\mathrm{MM}'}$ (Fig.20). Il est à noter que pour pouvoir utiliser l'abscisse curviligne, il faut connaître la trajectoire du mobile.

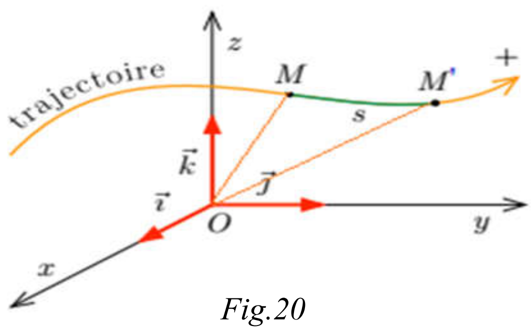


Fig.20

V.2 Le vecteur déplacement

Le vecteur déplacement est représenté dans la fig.21

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \Delta\overrightarrow{OM} = \Delta\vec{r}$

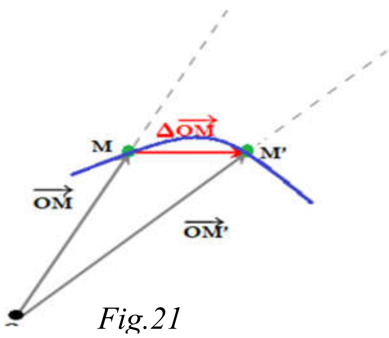


Fig.21

V.3 Vitesse moyenne

$$\vec{V}_M = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t} = \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{t'-t} = \frac{\Delta\,\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

V.4 Vitesse instantanée

$$\vec{V} = lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_M = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(S)}{dt} \vec{U}_T \qquad (57)$$

Où S est l'abscisse curviligne et $\vec{U}_T$ le vecteur unitaire porté par le tangent à la trajectoire au point M

V.5 Accélération moyenne

Entre les instants t et t' le vecteur accélération moyenne est défini par :

$$\vec{a}_M = \frac{\vec{V'} - \vec{V}}{t' - t} = \frac{\Delta \vec{V}(t)}{\Delta t}$$

V.6 Accélération instantanée

Le vecteur accélération instantanée est définit comme étant la dérivée du vecteur vitesse instantanée par rapport au temps :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Remarque 1 :

- Le vecteur vitesse instantanée $\vec{V}$ est porté par la tangente à la trajectoire au point M ; il est toujours orienté dans le sens du mouvement.

***Remarque 2*:**

- Le vecteur accélération est toujours dirigé vers la partie concave de la trajectoire.
- Le vecteur accélération décrit les variations de la vitesse en grandeur et en direction.

V.7 Repère intrinsèque de Frenet

Dans le cas d'un mouvement curviligne on peut étudier le mouvement en coordonnées cartésiennes mais de préférence (pour faciliter l'étude) d'utiliser un autre repère appelé repère de frenet de base $(\vec{U}_T, \vec{U}_N)$ et on va écrire les vecteurs vitesse et accélération dans cette base.

- Le vecteur unitaire $\vec{U}_T$ est tangent à la trajectoire
- Le vecteur unitaire $\vec{U}_N$ est dirigé vers le centre de la courbure de la trajectoire

❖ Le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}$ est toujours porté par la tangente à la trajectoire au point M; il est orienté toujours dans le sens du mouvement (Fig.22)

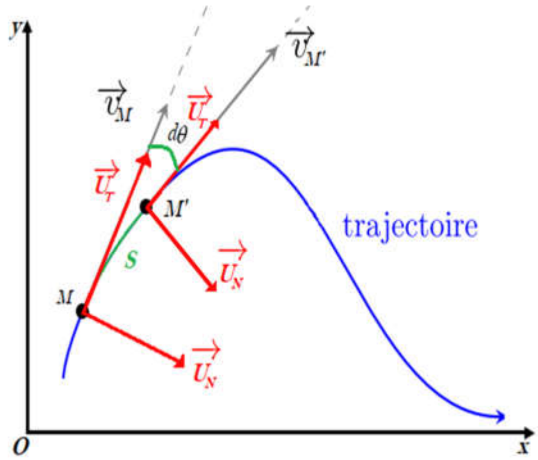


Fig.22

On peut écrire donc

$$\vec{v} = v\,\vec{U}_T \tag{58}$$

D'autre part on a

$$v = \frac{ds}{dt} \Longrightarrow \vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{U}_T \tag{59}$$

On peut déduire le vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{dt} = \frac{d(v.\vec{U}_T)}{dt} \Longrightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{U}_T + v\frac{d(\vec{U}_T)}{dt}$$

Sachant que :

$$\begin{cases} \dfrac{d(\vec{U}_T)}{dt} = \dfrac{d(\vec{U}_T)}{dt}\dfrac{d(\theta)}{d\theta} = \dfrac{d(\vec{U}_T)}{d\theta}(\dfrac{d(\theta)}{dt}) = \dot{\theta}\vec{U}_N \\ \dfrac{d(\vec{U}_\theta)}{dt} = \dfrac{d(\vec{U}_\theta)}{dt}\dfrac{d(\theta)}{d\theta} = \dfrac{d(\vec{U}_\theta)}{d\theta}\left(\dfrac{d(\theta)}{dt}\right) = -\dot{\theta}\vec{U}_T \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{U}_T + v\dot{\theta}\,\vec{U}_N$$

D'après la figure. 23

$$S = \rho\theta \Longrightarrow \frac{d(S)}{dt} = \rho\frac{d(\theta)}{dt} \Longrightarrow$$

$$v = \rho\dot{\theta} \;\Longrightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{\rho} \tag{38}$$

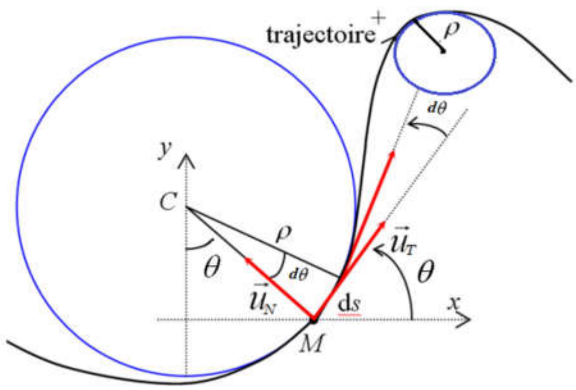


Fig.23

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{U}_T + v(\frac{v}{\rho})\,\vec{U}_N \Longrightarrow$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{U}_T + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{U}_N \tag{60}$$

$$\vec{a} = a_T\,\vec{U}_T + a_N\,\vec{U}_N \tag{61}$$

Comme les deux vecteurs $\vec{U}_T$ et $\vec{U}_N$ sont orthogonaux le module de l'accélération est:

$|\vec{a}| = a = \sqrt{{a_T}^2 + {a_N}^2}$ (62)

$\vec{a}_T$: Vecteur ***tangent*** à la trajectoire appelé ***accélération tangentielle***, elle indique la variation du *module de la vitesse* au cours du temps.

$\vec{a}_N$: Vecteur ***normale*** à la trajectoire appelé ***accélération normale***, elle nous donne idée sur la ***direction du vecteur vitesse*** au cours du temps.

ρ: Le rayon de courbure de la trajectoire curviligne, le point (C) (fig.23) est le centre de cette courbure. Le rayon et le centre de courbure changent au cours du mouvement.

V.8 Exemples de mouvement curviligne

V.8.1 Mouvement circulaire

Un point matériel décrit un mouvement circulaire si sa trajectoire est un cercle. On fixe arbitrairement une origine M_0 sur la trajectoire circulaire d'un mobile (fig. 24). La position du point mobile M peut être repérée par l'angle $\theta(t) = \widehat{M_0OM}$ appelé abscisse angulaire.

$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$ où R est le rayon de la trajectoire circulaire.

et l'abscisse curviligne S est :

$S = \widehat{M_0M} = R\,\theta$, l'angle θ est exprimé en radians.

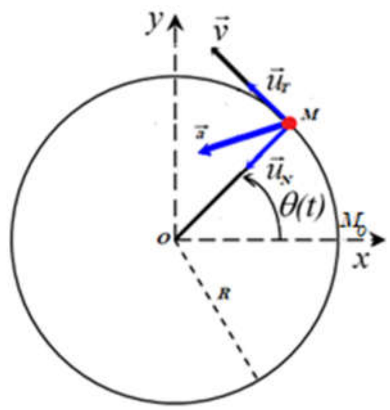


Fig.24

On a vu avant que la vitesse algébrique est la dérivée de l'abscisse curviligne par rapport au temps. De même façon nous pouvons faire apparaître un autre paramètre appelé ***la vitesse angulaire*** de rotation du point mobile *M* sur le cercle et qui est la dérivée de l'abscisse angulaire θ.

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\,\theta)}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$\dot{\theta} = \omega = \frac{v}{R}$ (63)

a) Mouvement circulaire uniforme

Le mouvement circulaire est uniforme si la vitesse linéaire est constante. Il en suit que la vitesse angulaire est également constante :

$$v = Cst$$

$$\dot{\theta} = \omega = Cst$$

L'abscisse angulaire est obtenue en intégrant la vitesse angulaire par rapport au temps et on supposons que à $t = 0\ l'$abscisse angulaire $\theta = \theta_0$:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \Longrightarrow d\theta = \omega dt \Longrightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \omega dt \Longrightarrow \theta - \theta_0 = \omega t$$

$$\theta = \omega t + \theta_0 \tag{64}$$

Remarques:

➢ Le mouvement circulaire uniforme est périodique de ***période*** T . La période est le temps nécessaire pour décrire un tour complet et s'exprime en seconde (s). Nous avons :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v} \tag{65}$$

➢ Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, $a_T = 0\ (puisque\ v = Cst, \frac{dv}{dt} = 0)$ et l'expression du vecteur accélération dans la base de Frenet se réduit à :

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\,\vec{U}_N = \omega^2 R\,\vec{U}_N$$

VI. Etude du mouvement d'un point matériel dans différentes systèmes de coordonnées

VI.1 Mouvement en coordonnées polaires

VI.1.1 Vecteur position

Le vecteur position dans la base polaire s'écrit donc comme suit (équ.33) :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{U}_\rho$$

VI.1.2 Vitesse

Par définition

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(\rho\vec{U}_\rho)}{dt} = \frac{d(\rho)}{dt}\vec{U}_\rho + \rho\frac{d(\vec{U}_\rho)}{dt}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{U}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{U}_\theta \tag{66}$$

$$\begin{cases} v_\rho = \dot{\rho} & : \text{composante radial} \\ v_\theta = \rho\dot{\theta} & : \text{composante transversale} \end{cases}$$

VI.1.3 Accélération

Par définition

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\dot{\rho}\vec{U}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{U}_\theta\right)}{dt} = \frac{d(\dot{\rho})}{dt}\vec{U}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\left(\vec{U}_\rho\right)}{dt} + \frac{d(\rho)}{dt}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \rho\frac{d(\dot{\theta})}{dt}\vec{U}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\left(\vec{U}_\theta\right)}{dt}$$

$$= \ddot{\rho}\vec{U}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{U}_\theta + \rho\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\vec{U}_\rho\right)$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{U}_\rho + (\rho\ddot{\theta}+2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{U}_\theta \qquad (67)$$

VI.2 Mouvement en coordonnées cylindriques

VI.2.1 Vecteur position

Dans la base mobile $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta, \vec{k})$, la position du point M est définie par le vecteur (Eq.38):

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{U}_\rho + z\vec{k}$$

VI.2.2 Vitesse

En coordonnées cylindriques, il suffit de rajouter la troisième composante suivant l'axe Oz

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\left(\rho\vec{U}_\rho + z\vec{k}\right)}{dt} = \frac{d(\rho)}{dt}\vec{U}_\rho + \rho\frac{d\left(\vec{U}_\rho\right)}{dt} + \frac{d(z)}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{U}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{z}\vec{k} \qquad (68)$$

VI.2.3 Accélération

$$\vec{a} = \frac{d\left(\dot{\rho}\vec{U}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{z}\vec{k}\right)}{dt} = \frac{d(\dot{\rho})}{dt}\vec{U}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\left(\vec{U}_\rho\right)}{dt} + \frac{d(\rho)}{dt}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \rho\frac{d(\dot{\theta})}{dt}\vec{U}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\left(\vec{U}_\theta\right)}{dt}$$

$$= \ddot{\rho}\vec{U}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{U}_\theta - \rho\dot{\theta}^2\vec{U}_\rho$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{U}_\rho + (\rho\ddot{\theta}+2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{U}_\theta + \ddot{z}\vec{k} \qquad (69)$$

VI.3 Mouvement en coordonnées sphériques

VI.3.1 Vecteur position

Le vecteur position dans les coordonnées sphériques s'écrit comme suit (Eq.40) :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{U}_r$$

VI.3.2 Vitesse

Par définition

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(r\vec{U}_r)}{dt} = \frac{d(r)}{dt}\vec{U}_r + r\frac{d(\vec{U}_r)}{dt}$$

Sachant que :

$$\begin{cases} \frac{d(\vec{U}_r)}{dt} = \dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{\varphi}sin\theta\vec{U}_\varphi \\ \frac{d(\vec{U}_\theta)}{dt} = -\dot{\theta}\vec{U}_r + \dot{\varphi}cos\theta\vec{U}_\varphi \\ \frac{d(\vec{U}_\varphi)}{dt} = -\dot{\varphi}(sin\theta\vec{U}_r + cos\theta\vec{U}_\theta) \end{cases} \quad (70)$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{U}_r + r(\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{\varphi}sin\theta\vec{U}_\varphi) = \dot{r}\,\vec{U}_r + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta + r\dot{\varphi}sin\theta\vec{U}_\varphi \quad (71)$$

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \\ v_\varphi = r\dot{\varphi}sin\theta \end{cases}$$

VI.3.3 Accélération

$$\vec{a} = \frac{d(\dot{r}\,\vec{U}_r + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta + r\dot{\varphi}sin\theta\,\overrightarrow{U_\varphi})}{dt}$$

$$= \frac{d(\dot{r})}{dt}\vec{U}_\rho + \dot{r}\frac{d(\vec{U}_r)}{dt} + \frac{d(r)}{dt}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + r\frac{d(\dot{\theta})}{dt}\vec{U}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d(\vec{U}_\theta)}{dt} + \frac{d(r)}{dt}\dot{\varphi}sin\theta\vec{U}_\varphi$$

$$+ \frac{d(\dot{\varphi})}{dt}rsin\theta\vec{U}_\varphi + r\dot{\varphi}\frac{d(sin\theta)}{dt}\vec{U}_\varphi + rsin\theta\frac{d(\overrightarrow{U_\varphi})}{dt}$$

$$= \ddot{r}\vec{U}_r + \dot{r}(\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{\varphi}sin\theta\vec{U}_\varphi) + \dot{r}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{U}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{U}_r + \dot{\varphi}cos\theta\vec{U}_\varphi)$$

$$+ \dot{r}\dot{\varphi}sin\theta\vec{U}_\varphi + r\ddot{\varphi}sin\theta\vec{U}_\varphi + r\dot{\varphi}(\dot{\theta}cos\theta\vec{U}_\varphi)$$

$$+ r\dot{\varphi}sin\theta(-\dot{\varphi}(sin\theta\vec{U}_r + cos\theta\vec{U}_\theta)$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{U}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{r}\dot{\varphi}sin\theta\vec{U}_\varphi + \dot{r}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{U}_\theta - r(\dot{\theta})^2\vec{U}_r + r\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\theta\vec{U}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}sin\theta\vec{U}_\varphi$$
$$+ r\ddot{\varphi}sin\theta\vec{U}_\varphi + r\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\theta\vec{U}_\varphi - r\dot{\varphi}^2(sin\theta)^2\vec{U}_r - r(\dot{\varphi})^2\,(sin\theta cos\theta)\vec{U}_\theta$$

$$\vec{a} = [\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 - r(\dot{\varphi})^2(sin\theta)^2]\vec{U}_r + [r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r(\dot{\varphi})^2 sin\theta cos\theta]\vec{U}_\theta + [2r\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\theta + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})sin\theta]\,\vec{U}_\varphi \quad (72)$$

$$\vec{a} = a_r\,\vec{U}_r + a_\theta\,\vec{U}_\theta + a_\varphi\,\vec{U}_\varphi$$

Les composantes du vecteur accélération sont :

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 - r(\dot{\varphi})^2(sin\theta)^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r(\dot{\varphi})^2 sin\theta cos\theta \\ a_\varphi = 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\theta + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})sin\theta \end{cases}$$

VII. Application

Exercice1

On donne le diagramme de la vitesse d'un point matériel en mouvement rectiligne (fig.25).

Déterminer :

1. De combien de phases se compose ce mouvement ?
2. La nature du mouvement entre l'instant $t = 0$ et $t = 0.5s$, (trouver l'accélération et l'équation de la vitesse)
3. La distance parcourue au cours de la période [*0.5 , 7.5s*].
4. Quel est la distance parcourue par le mobile au cours de son mouvement

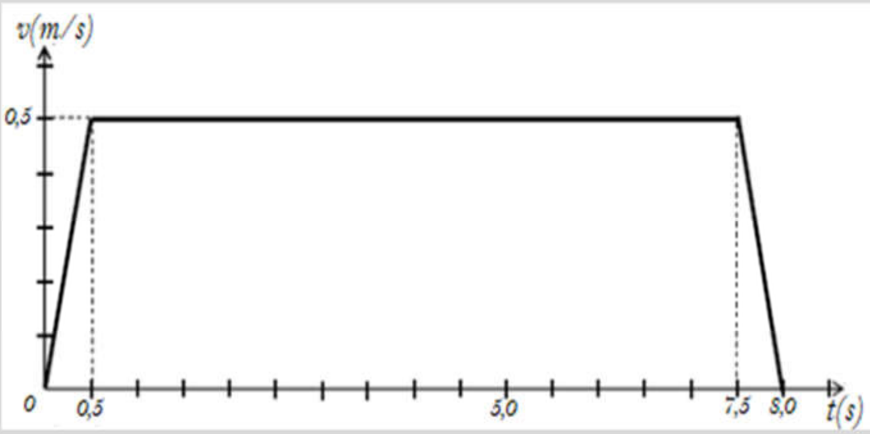


Fig. 25

Réponse

1. Détermination de nombre de phases

D'après le diagramme de la vitesse le mouvement se compose de trois phase un (MRUVA) entre [*0, 0.5s*] où la vitesse est sous la forme $v = at + v_0$ et $v_0 = 0$, un (MRU) entre [*0.5 , 7.5s*] puisque $v = Cst$ et (MRUVD) entre [*7.5 , 8,0s*] la vitesse décroit en fonction du temps.

2. La nature du mouvement entre [*0, 0.5s*] ;

On peut confirmer que la nature du mouvement est (MRUVA) par la déduction de l'accélération du diagramme :

$$v = at + v_0 \Longrightarrow \frac{v - v_0}{t - t_0} = a \; avec \; (\text{à}\; t = 0, v_0 = 0) \Longrightarrow a = \frac{v}{t - 0} = \frac{0.5}{0.5} = 1\, m.s^{-2} = Cst$$

$$a = 1\, m.s^{-2}$$

Donc l'équation de la vitesse est : $v = at \Longrightarrow \quad v = t$

3. La distance parcourue dans la 2eme phase :

Puisque la vitesse est constante $v = Cst = 0.5\ m.s^{-1}$

L'équation horaire du mouvement est : $x = vt + x_0$

On peut prendre l'un de ces deux mesures, soit on commence

$$x - x_0 = v(\Delta t) = 0.5 \times 7s = 3.5\ m$$

La distance parcourue dans la 2eme phase est $l = 3.5\ m$

4. La distance totale parcourue au cours du mouvement

$$L = l_1 + l_2 + l_3$$

- La distance parcourue dans la 1ere étape du mouvement :

$v^2 - {v_0}^2 = 2a(x_1 - x_0)$ entre les deux extrémités de cette étape

$$x_1 - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{(0.5)^2 - 0}{2(1)} = \frac{0.25}{2} = 0.125 \Longrightarrow l_1 = (x_1 - x_0) = 0.125\ m$$

- La distance parcourue dans la 3eme étape du mouvement :

$${v_3}^2 - {v_2}^2 = 2a(x_3 - x_2)$$

Avec l'accélération $a_3 = \frac{v_3 - v_2}{t} = \frac{0-0.5}{0.5} = -1\ m.s^{-2}$

$$x_3 - x_2 = \frac{v_3^2 - v_2^2}{2a} = \frac{(0)^2 - (0.5)^2}{2(-1)} = \frac{-0.25}{-2} = 0.125 \Longrightarrow l_3 = (x_3 - x_2) = 0.125\ m$$

Il en résulte $L = l_1 + l_2 + l_3 = 0.125 + 3.5 + 0.125 = 3.75\ m$

Exercice2

Dans un repère de coordonnées polaires on donne le vecteur position d'point matériel

$\overrightarrow{OM} = \rho_0 \cos\theta\, \vec{U}_\rho$ avec $\theta = 3t + \theta_0$

Trouver

- Le vecteur de la vitesse et déduire son module
- Le vecteur de l'accélération et déduire son module.
- Déduire la nature du mouvement.

Réponse :

- Le vecteur de la vitesse

$$\vec{v} = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} = \frac{d(\rho_0 \cos\theta\, \vec{U}_\rho)}{dt} = \rho_0 \frac{d(\cos\theta)}{dt} \vec{U}_\rho + \rho_0 \cos\theta \frac{d(\vec{U}_\rho)}{dt}$$

$$= \rho_0\, \dot{\theta}(-\sin\theta)\, \vec{U}_\rho + \rho_0 \cos\theta\, (\dot{\theta}\vec{U}_\theta) = \rho_0\dot{\theta}(-\sin\theta\, \vec{U}_\rho + \cos\theta\, \vec{U}_\theta)$$

$$\vec{v} = \rho_0\dot{\theta}(-\sin\theta\, \vec{U}_\rho + \cos\theta\, \vec{U}_\theta)$$

Sachant que $\dot{\theta} = 3 \Longrightarrow \vec{v} = 3\rho_0(-\sin\theta\, \vec{U}_\rho + \cos\theta\, \vec{U}_\theta)$

➢ Le module de la vitesse

$$|\vec{v}| = \sqrt{{v_\rho}^2 + {v_\theta}^2} = \sqrt{(-3\rho_0 \sin\theta)^2 + (3\rho_0 \cos\theta)^2} = 3\rho_0\sqrt{(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2}$$

$$v = 3\rho_0\, ms^{-1}$$

- Le vecteur de l'accélération

$$\vec{a} = \frac{d(\vec{v})}{dt} = \frac{d(-3\rho_0 \sin\theta\, \vec{U}_\rho + 3\rho_0 \cos\theta\, \vec{U}_\theta)}{dt}$$

$$= -3\rho_0 \frac{d(\sin\theta)}{dt} \vec{U}_\rho - 3\rho_0 \sin\theta \frac{d(\vec{U}_\rho)}{dt} + 3\rho_0 \frac{d(\cos\theta)}{dt} \vec{U}_\theta + 3\rho_0 \cos\theta \frac{d(\vec{U}_\theta)}{dt}$$

$$= -9\rho_0\, (\cos\theta)\, \vec{U}_\rho - 9\rho_0 \sin\theta\, (\vec{U}_\theta) - 9\rho_0(\sin\theta)\vec{U}_\theta - 9\rho_0 \cos\theta\, (\vec{U}_\rho)$$

$$\vec{a} = -18\rho_0\, (\cos\theta\, \vec{U}_\rho + \sin\theta\, \vec{U}_\theta)$$

➢ Le module de l'accélération :

➢ $|\vec{a}| = \sqrt{(-18\rho_0 \cos\theta)^2 + (-18\rho_0 \sin\theta)^2} = 18\rho_0$

$$a = 18\, \rho_0\ \ ms^{-2}$$

- La nature du mouvement :

On a $\begin{cases} v = 3\rho_0 = Cst \\ a_T = 0 \end{cases}$ donc le mouvement est mouvement ***circulaire uniforme***.

VIII. Mouvement relatif et changement de repère

Le mouvement d'un point matériel peut être réparti en deux mouvements distincts, un mouvement par rapport à un repère fixe qu'on nommera repère ***Absolu*** et l'autre mouvement par rapport à un repère mobile qu'on nommera repère ***relatif***.

- ***Définitions :***

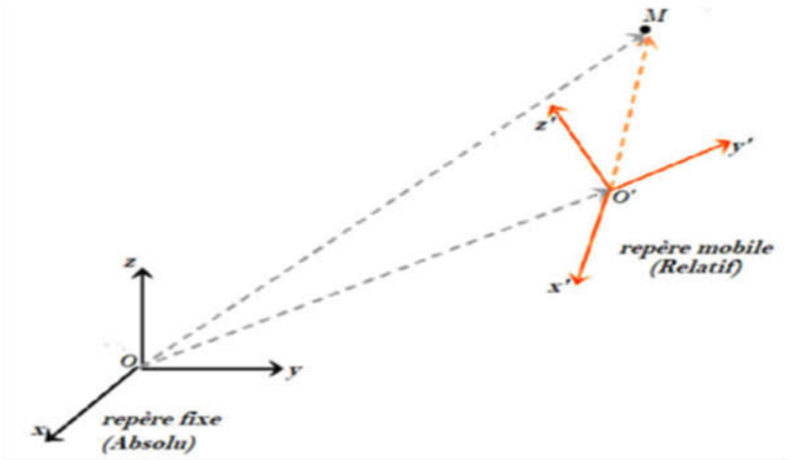
❖Un mouvement est dit relatif s'il est défini par rapport à un repère ou un référentiel relatif. Un repère relatif est un repère qui bouge dans l'univers.

❖Un mouvement est dit absolu s'il est défini par rapport à un repère ou un référentiel absolu. Un repère absolu est un repère qui est au repos absolu dans l'univers. La terre est en mécanique industrielle un bon repère absolu.

Toutes les grandeurs (position, vitesses et accélération) seront identifiées par rapport au repère approprié.

VIII.1 Position du problème

Soient deux repères R et R', auxquels on associe respectivement les référentiels $R(O,x,y,z)$et $R'(O',x',y',z')$. Pour déterminer le mouvement de R' par rapport à R, il va falloir déterminer à tout instant la position dans



VIII.2 Vecteurs positions

La position du point M dans R est la position absolue et sa position dans R' c'est sa position relative ces deux positions sont décrit respectivement comme suit :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{O'M} = x'\,\vec{i'} + y'\,\vec{j'} + z'\,\vec{k'}$$

Se basons sur la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

VIII.3 Vitesse

La vitesse du point mobile dans le référentiel absolu est appelée vitesse absolue de M par rapport à R

$$\overrightarrow{V_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(x\,\vec{\imath}+y\,\vec{\jmath}+z\,\vec{k})}{dt}\right|_R \Rightarrow \overrightarrow{V_a} = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k} \qquad (73)$$

Cette vitesse peut être calculée d'une autre façon ;

$$\overrightarrow{V_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M})}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_R$$

$$= \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d(x'\vec{\imath'} + y'\vec{\jmath'} + z'\vec{k'})}{dt}\right|_R$$

$$= \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \left.\frac{dx'}{dt}\right|_R \vec{\imath'} + x'\left.\frac{d\vec{\imath'}}{dt}\right|_R + \left.\frac{dy'}{dt}\right|_R \vec{\jmath'} + y'\left.\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right|_R + \left.\frac{dz'}{dt}\right|_R \vec{k'} + z'\left.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right|_R$$

$$= \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \left(\dot{x}'\vec{\imath'} + \dot{y}'\vec{\jmath'} + \dot{z}'\vec{k'}\right) + x'\left.\frac{d\vec{\imath'}}{dt}\right|_R + y'\left.\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right|_R + z'\left.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right|_R$$

On pose $\overrightarrow{V_r}$, la vitesse du point mobil e dans le référentiel mobile (relatif)

$$\overrightarrow{V_r} = \dot{x}'\vec{\imath'} + \dot{y}'\vec{\jmath'} + \dot{z}'\vec{k'} = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R'} \qquad (74)$$

La partie $\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + x'\left.\frac{d\vec{\imath'}}{dt}\right|_R + y'\left.\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right|_R + z'\left.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right|_R$ représente la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{V_e}$

$$\left.\frac{d\vec{\imath'}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{\imath'}}{dt}\right|_{R'} + \vec{\omega}\wedge\vec{\imath'} = \vec{\omega}\wedge\vec{\imath'} ; puisque\ \vec{\imath'}\ est\ constant\ dans\ R', \left.\frac{d\vec{\imath'}}{dt}\right|_{R'} = \vec{0}$$

$$\left.\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right|_{R'} + \vec{\omega}\wedge\vec{\jmath'} = \vec{\omega}\wedge\vec{\jmath'} ; puisque\ \vec{\jmath'}\ est\ constant\ dans\ R', \left.\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right|_{R'} = \vec{0}$$

$$\left.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right|_{R'} + \vec{\omega}\wedge\vec{k'} = \vec{\omega}\wedge\vec{k'} ; puisque\ \vec{k'}\ est\ constant\ dans\ R', \left.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right|_{R'} = \vec{0}$$

Donc :

$$\vec{V_e} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + x'(\vec{\omega} \wedge \vec{\imath'}) + y'(\vec{\omega} \wedge \vec{\jmath'}) + z'(\vec{\omega} \wedge \vec{k'})$$

$$= \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \vec{\omega} \wedge \left(\underbrace{x'\vec{\imath'} + y'\vec{\jmath'} + z'\vec{k'}}_{\overrightarrow{O'M}}\right)$$

$$\vec{V_e} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \tag{75}$$

La vitesse du point matériel M est :

$$\vec{V_a} = \underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R'}}_{\vec{V_r}} + \underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\vec{V_e}} \tag{76}$$

La formule s'appelle la loi de ***composition des vitesses***

$$\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e} \tag{77}$$

$\vec{V_a}$: La vitesse absolue, est la vitesse du mobile M par rapport au repère Absolu (fixe) R.

$\vec{V_r}$: La vitesse relative, est la vitesse du mobile M par rapport au repère relatif (mobile) R.

$\vec{V_e}$: La vitesse d'entrainement, est la vitesse du repère mobile R' par rapport au repère fixe R.

VIII.4 Accélération

L'accélération du point mobile dans le référentiel absolu est appelée vitesse absolue de M par rapport à R sécrit par définition :

$$\vec{\gamma_a} = \left.\frac{d\vec{V_a}}{dt}\right|_R \; ; \; \vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e} \Longrightarrow$$

$$\vec{\gamma_a} = \left.\frac{d(\vec{V_r} + \vec{V_e})}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{V_r}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\vec{V_e}}{dt}\right|_R$$

Important :

La dérivée d'un vecteur, écrit dans la base du repère mobile (R'), par rapport au repère fixe (R), s'écrit :

$$\left.\frac{d\vec{A'}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{A'}}{dt}\right|_{R'} + \boldsymbol{\vec{\omega} \wedge \vec{A'}} \tag{78}$$

- $\left.\frac{d\vec{V_r}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{V_r}}{dt}\right|_{R'} + \vec{\omega} \wedge \vec{V_r}$

- $$\left.\frac{d\overrightarrow{V_e}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\left(\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\wedge\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_R$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R'} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{V_e}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\wedge(\overrightarrow{V_r} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M})$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{V_e}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) + (\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{V_r})$$

Donc l'accélération s'écrit :

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt}\right|_{R'}}_{\overrightarrow{\gamma_r}} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{V_r} + \underbrace{\left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)}_{\overrightarrow{\gamma_e}} + (\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{V_r})$$

$$\overrightarrow{\gamma_r} = \left.\frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt}\right|_{R'} \tag{80}$$

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) \tag{81}$$

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{V_r} \tag{82}$$

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt}\right|_{R'}}_{\overrightarrow{\gamma_r}} + \underbrace{\left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)}_{\overrightarrow{\gamma_e}} + \underbrace{2(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{V_r})}_{\overrightarrow{\gamma_c}}$$

La formule de composition des accélérations s'écrit :

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_r} + \overrightarrow{\gamma_e} + \overrightarrow{\gamma_c} \tag{83}$$

$\overrightarrow{\gamma_a}$: est l'accélération absolue du point mobile M dans le repère absolu R.

$\overrightarrow{\gamma_r}$: est l'accélération relative du point mobile dans le repère relatif R'.

$\overrightarrow{\gamma_e}$: est l'accélération d'entrainement du repère relatif R' par rapport au repère absolu R.

$\overrightarrow{\gamma_C}$: L'accélération de Coriolis est due à la rotation du repère R'par rapport au repère absolu R'.

VIII.5 Cas particuliers

VIII.5.1 Repère R′ est en translation pur par rapport au repère fixe R

R′ est en translation pur par rapport au repère fixe R, donc il n'y a pas de rotation $\vec{\omega} = \vec{0}$

Et les axes des deux repères sont toujours parallèles deux à deux :

La vitesse et l'accélération absolu(e) s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{i} \parallel \vec{i'} \\ \vec{j} \parallel \vec{j'} \\ \vec{k} \parallel \vec{k'} \end{cases} \Rightarrow \vec{V_e} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R \Rightarrow \vec{V_a} = \underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R'}}_{\vec{V_r}} + \underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R}_{\vec{V_e}}$$

$$\vec{\gamma_e} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R = \left.\frac{d\vec{V_e}}{dt}\right|_R, \qquad \vec{\gamma_c} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V_r} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\gamma_a} = \underbrace{\left.\frac{d\vec{V_r}}{dt}\right|_{R'}}_{\vec{\gamma_r}} + \underbrace{\left.\frac{d\vec{V_e}}{dt}\right|_R}_{\vec{\gamma_e}}$$

VIII.5.2 Repère R′ est en rotation pur par rapport au repère fixe R

Dans le cas où le repère mobile R′ est en rotation pure par rapport au repère fixe R c'est-à-dire : $\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$ $(O \equiv O')$ ou $|\overrightarrow{OO'}| = Cst$:

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R = \vec{0} \Rightarrow \vec{V_e} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \Rightarrow$$

$$\vec{V_a} = \underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R'}}_{\vec{V_r}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\vec{V_e}}$$

$$\vec{\gamma_e} = \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{\gamma_a} = \underbrace{\left.\frac{d\vec{V_r}}{dt}\right|_{R'}}_{\vec{\gamma_r}} + \underbrace{\left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}_{\vec{\gamma_e}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{V_r}}_{\vec{\gamma_c}}$$

VIII.6 Application

Les coordonnées d'une particule mobile dans un référentiel fixe R sont données en fonction du temps par :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t + 1 \\ y(t) = -2t^4 \\ z(t) = 3t^2 \end{cases}$$

Dans un deuxième référentiel R', dont les axes sont parallèles deux à deux à ceux de R, elles ont pour expressions :

$$\begin{cases} x'(t) = t^2 + t + 2 \\ y'(t) = -2t^4 + 5 \\ z'(t) = 3t^2 - 7 \end{cases}$$

Calculer :

1) Les vitesses $\overrightarrow{V_a}$ et $\overrightarrow{V_r}$ puis déduire $\overrightarrow{V_e}$
2) Les accélérations: absolue $\overrightarrow{\gamma_a}$, relative $\overrightarrow{\gamma_r}$ d'entrainement $\overrightarrow{\gamma_e}$ et de coriolis $\overrightarrow{\gamma_C}$.

Solution

1) Les vitesses

- La vitesse absolue $\overrightarrow{V_a}$

$$\overrightarrow{V_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k})}{dt}\right|_R \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{V_a}\begin{cases}\dot{x}(t) = 2t - 4\\ \dot{y}(t) = -8t^3\\ \dot{z}(t) = 6t\end{cases}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{V_a} = (2t - 4)\,\vec{\imath} + (-8t^3)\,\vec{\jmath} + (6t)\,\vec{k}}$$

- La vitesse relative $\overrightarrow{V_r}$

$$\overrightarrow{V_r} = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(x'\,\overrightarrow{\imath'} + y'\,\overrightarrow{\jmath'} + z'\,\overrightarrow{k'})}{dt}\right|_R$$

$$\overrightarrow{V_r}\begin{cases}\dot{x}'(t) = 2t + 1\\ \dot{y}'(t) = -8t^3\\ \dot{z}'(t) = 6t\end{cases}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{V_r} = (2t + 1)\,\vec{\imath} + (-8t^3)\,\vec{\jmath} + (6t)\,\vec{k}}$$

- La vitesse d'entrainement $\overrightarrow{V_e}$

On a $\vec{\imath} \parallel \overrightarrow{\imath'}$, $\vec{\jmath} \parallel \overrightarrow{\jmath'}$ et $\vec{k} \parallel \overrightarrow{k'}$ $(\vec{\imath} = \overrightarrow{\imath'}, \vec{\jmath} = \overrightarrow{\jmath'} et\ \vec{k} = \overrightarrow{k'})$

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_r} + \overrightarrow{V_e} \Longrightarrow \overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V_a} - \overrightarrow{V_r} \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V_a} - \overrightarrow{V_r} : \begin{cases}V_{ex} = (2t - 4) - (2t + 1) = -5\\ V_{ey} = (-8t^3) - (-8t^3) = 0\\ V_{ez} = 6t) - (6t) = 0\end{cases}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{V_e} = (-5)\,\vec{\imath}}$$

2) Les accélérations

- L'accélération Absolue

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \left.\frac{d\overrightarrow{V_a}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d[(2t-4)\vec{\imath} + (-8t^3)\,\vec{\jmath} + (6t)\vec{k}]}{dt}\right|_R \Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{\gamma_a} = (2)\vec{\imath} + (-24\,t^2)\,\vec{\jmath} + (6)\vec{k}}$$

- L'accélération relative $\overrightarrow{\gamma_r}$

$$\overrightarrow{\gamma_r} = \left.\frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt}\right|_{R\prime} = \left.\frac{d[(2t+1)\overrightarrow{\imath'} + (-8t^3)\,\overrightarrow{\jmath'} + (6t)\overrightarrow{k'}]}{dt}\right|_{R\prime} \Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{\gamma_r} = (2)\vec{\imath} + (-24\,t^2)\,\vec{\jmath} + (6)\vec{k}}$$

- acceleration d'entrainement $\overrightarrow{\gamma_e}$

Puisque il n'y a pas de rotation ($\vec{\omega} = \vec{0}$)

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \frac{d\overrightarrow{V_e}}{dt}\bigg|_R = \frac{d[(-5)\vec{\imath}]}{dt}\bigg|_R \Longrightarrow \overrightarrow{\gamma_e} = \vec{0}$$

- l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{\gamma_C}$

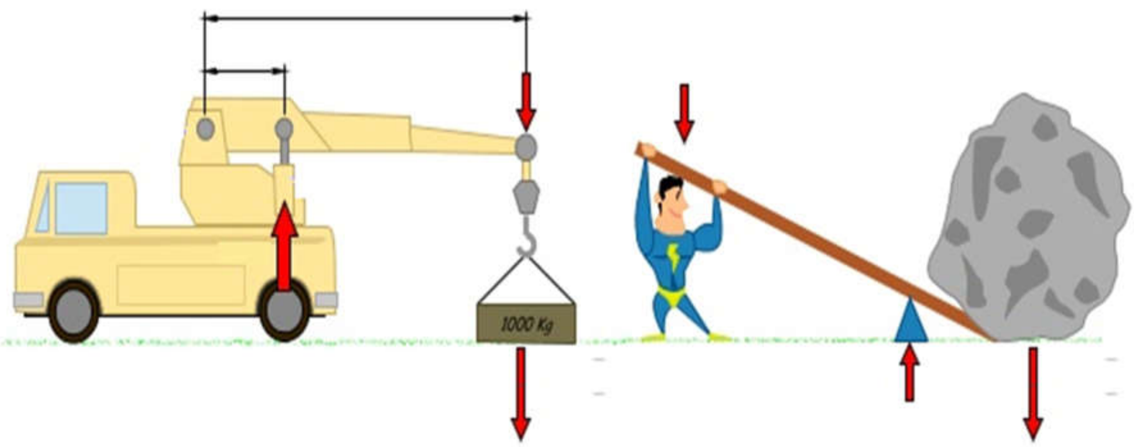
Le repère R' est en mouvement de translation pure par rapport à R: $\vec{\omega} = \vec{0}$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\gamma_C} = 2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{V_r} = \vec{0}}$$

CHAPITRE III

Dynamique du point matériel

Contenu du Chapitre



I. Introduction

I.1 Définition

La **dynamique** est une discipline de la mécanique classique qui étudie les corps (systèmes) en mouvement sous l'influence des actions mécaniques qui leur sont appliquées. Elle combine la statique qui étudie l'équilibre des corps au repos, et la cinématique qui étudie le mouvement.

C'est Issac Newton (1643-1727) qui a met en place ces lois en se basant sur les hypothèses de Galilée.

Nous appellerons **système matériel** un ensemble de points matériels. Nous distinguerons deux sortes de systèmes matériels :

- **Système matériel indéformable**: tous les points matériels constituant le système restent fixes les uns par rapport aux autres. Ceci correspond à la définition d'un solide en mécanique.
- **Système matériel déformable**: tous les systèmes ne correspondant pas à la définition d'un solide. À titre d'exemple, deux solides, sans liens entre eux, forment un système déformable lorsque chacun des solides se déplace indépendamment de l'autre.

Lorsqu'il ne subit aucune action venant de l'extérieur, un système matériel est dit isolé (ou fermé). C'est le cas d'un solide seul dans l'espace, loin de toute autre masse. Si des actions extérieures agissant sur un système se compensent, alors on dit que le système est pseudo-isolé, c'est-à-dire que tout se passe comme s'il était isolé.

Sur la Terre, il n'est pas possible de rencontrer des systèmes rigoureusement isolés. C'est pour cela par la suite, par mesure de simplification, nous utiliserons le terme «***isolé***» pour tout système effectivement isolé ou seulement ***pseudo-isolé***.

I.2 Référentiel Galiléen

Un référentiel Galiléen est un référentiel par rapport auquel un point matériel qui n'est soumis à aucune force suit un mouvement rectiligne uniforme (éventuellement de vitesse constante ou nulle). Il existe une infinité de référentiels Galiléen: ils sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Caractéristique du référentiel Galiléen

- $\vec{\gamma}_c = \vec{0}$ pas de rotation du référentiel relatif par rapport au repère fixe.
- $\vec{\gamma}_e = \overrightarrow{Cst} \Longrightarrow \vec{\gamma}_e = \vec{0}$ référentiel mobile en translation uniforme par rapport au repère fixe ⇒ Référentiel mobile Galiléen $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r$

Le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen pour des mouvements de courte durée par rapport à la rotation terrestre. Son origine est au centre de la Terre, avec des axes en rotation. Tout autre référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre peut aussi être considéré comme galiléen. Outre le référentiel terrestre, les deux autres référentiels galiléens les plus utilisés en physique newtonienne sont : le référentiel de ***Copernic*** lié au système solaire et le référentiel ***géocentrique*** lié au centre de la terre. Le principe d'inertie qu'on va voir n'est vérifié que dans des référentiels dits «galiléens».

Un système mécanique sera par la suite assimilé à un point matériel si son état (position, mouvement) est complètement décrit à l'aide de trois coordonnées spatiales au maximum.

De plus, un point matériel se caractérise par une propriété dynamique: la masse inerte notée (m) mesurant l'inertie du mouvement

La mécanique newtonienne repose sur un concept clé: le *point matériel*. En effet, on admet que tout système mécanique peut, à partir d'une certaine échelle, se décomposer en points matériels.

I.3 Généralités

I.3.1 Masse

La masse d'un système caractérise la quantité de matière qu'il renferme. Elle est invariable dans la mécanique newtonienne. Dans le système international d'unités, l'unité de masse est le kilogramme (kg) (fig.1).

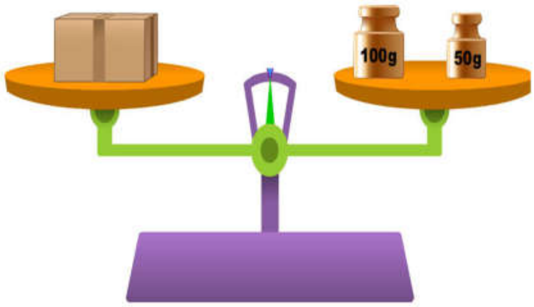


fig.1

I.3.2 Centre d'inertie (Centre de masse)

Le centre d'inertie d'un objet, ou centre de masse, est le point de l'espace où l'on applique les effets d'inertie. Le centre d'inertie peut être confondu avec le centre de gravité. On le note de fait G (fig2).

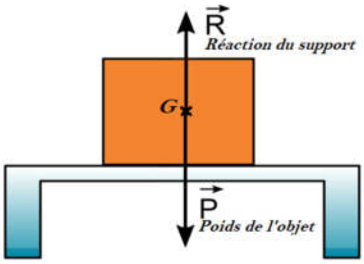


fig.2

Si on considère le système comme point matériel, sa masse est concentrée au centre de gravité ou centre d'inertie « G ». Dans le cas d'un système de plusieurs corps, de masses (m_i), il faut trouver le point de centre de masse (C_G)

Le centre de masse d'un système composé de deux particules de masses m_1 et m_2:

$$\begin{cases} X_{C_G} = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \\ Y_{C_G} = \dfrac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2} \\ Z_{C_G} = \dfrac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

Où

(x_1, y_1, z_1): *coordonées de la particule de masse* m_1 *et* (x_1, y_1, z_1)*celles de la particule* m_2

Dans le cas d'un système de plusieurs particules (objets) de masses (m_i) (fig.3), la position de centre de masse du système est :

$$\begin{cases} X_{C_G} = \frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots.+m_ix_i}{m_1+m_2} \\ Y_{C_G} = \frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots.+m_iy_i}{m_1+m_2} \\ Z_{C_G} = \frac{m_1z_1+m_2z_2+\cdots.+m_iz_i}{m_1+m_2+\cdots.+m_i} \end{cases} \quad (84)$$

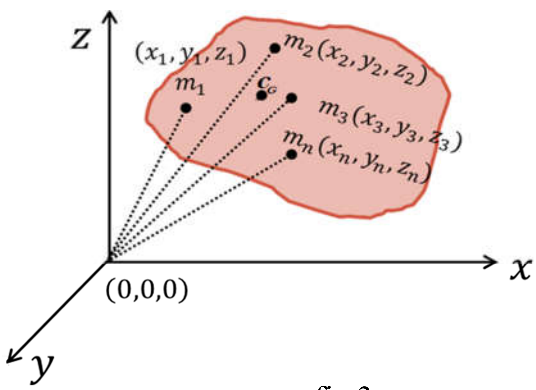


fig.3

II. Forces

Un point matériel *G* est rarement mécaniquement isolé mais subit des actions. Ces actions sont appelées forces**.** Lorsqu'on parle de force, il est important de voir que cela suppose l'existence d'un « acteur » (celui qui exerce la force) et un « receveur » (celui qui subit la force). « Un corps *(A)* exerce une force sur un corps (*B)*» chaque force est caractérisée par :

- la droite d'action (la direction),
- le sens,
- le point d'application (centre d'inertie ou de masse),
- l'intensité.

Les forces sont les causes du mouvement ; ce sont des grandeurs vectorielles Notées $\vec{F}$. On distingue deux types de forces : les forces fondamentales à distance, et les forces dites de contact, qui, contrairement aux précédentes, existent, comme leur nom l'indique, parce qu'il y a un contact entre le point (l'objet) considéré M et son environnement proche.

II.1 Forces à distance

Les forces fondamentales agissent à distance comme la force de gravitation, la force de Lorenz ou force électromagnétique (électrostatique) ; la force nucléaire forte et la force nucléaire faible.

II.1.1 Forces de gravitation

La force de gravitation est celle que subit un point matériel M_1 (ou d'un objet) de la part d'un autre point M_2 (deuxième objet) (fig.4) la force du poids ($\vec{P}$) est une force de gravitation.

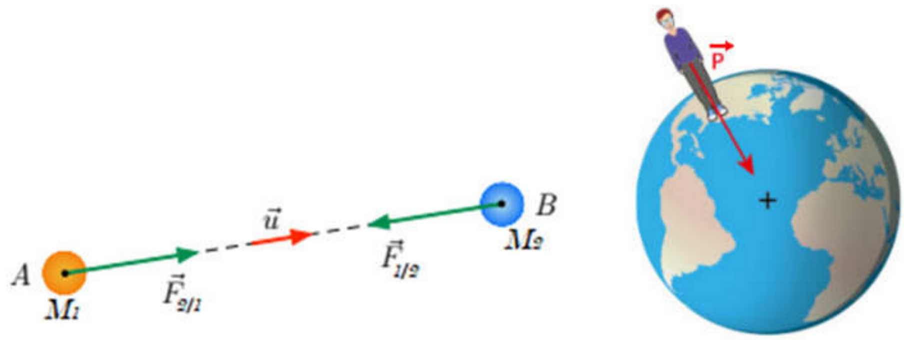


fig.4

- La formule de la force de gravitation entre deux masses :

$$\vec{F}_{1/2} = \vec{F}_{2/1} = G\frac{M_1.M_2}{r_{1,2}^2}\vec{u} \qquad (85)$$

$$\text{où } G = 6.67 \times 10^{-11}\ (Nm^2/kg^2)$$

- La formule de la force de gravitation entre deux charges appelée force électrostatique :

$$\vec{F}_{1\to 2} = K\frac{q_1.q_2}{r_{1,2}^2}\vec{u} \tag{86}$$

$$\text{où } K = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \left(\frac{Nm^2}{C^2}\right) \; et \; \varepsilon_0 = 8.854\;10^{-12}(Fm^{-1})$$

La force électromagnétique

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \tag{87}$$

II.1.2 Forces nucléaires

Ce genre de forces se divise en deux types : les forces nucléaires faibles responsables de la radioactivité bêta qui se fait à l'échelle atomique. Le deuxième type est les forces nucléaires fortes sont plus puissantes des interactions connues : c'est elles qui fixent les nucléons dans les noyaux atomiques.

II.2 Forces de contact

Il s'agit des forces qui ont lieu entre les objets une fois le contact est établie entres eux. On peut citer quelques une.

II.2.1 Réaction d'un support (Action-Réaction)

Action d'un support sur lequel repose le système et qui l'empêche de s'enfoncer. Cette action est souvent appelée réaction du support.

Considérons un solide posé sur un support horizontal (fig.5).

fig.5

L'action de la surface est d'empêcher la masse de s'enfoncer vers le bas sous l'action de son poids. Cette action qui est une réaction de la surface sur la masse est en équilibre avec le poids, d'où l'immobilité de la masse. Donc on peut écrire :

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \overrightarrow{R_n} = \vec{0} \Longrightarrow \quad \vec{P} = -\overrightarrow{R_n} \qquad (88)$$

II.2.2 Forces de frottement

Les forces de frottement sont des forces qui apparaissent soit lors du mouvement d'un objet soit si cet objet est soumis à une force qui tend à vouloir le déplacer. Dans tous les cas, la force de frottement s'oppose au déplacement que l'on cherche à engendrer. Il est important de distinguer deux types de frottement: le frottement visqueux (contact solide-fluide) et le frottement solide (contact solide-solide).

a) Force de frottement visqueux (solide-fluide)

C'est une force qui s'établie lorsqu'un corps solide et un fluide se mettent en contact entre eux lors de leur mouvement (fig.6). Cette force s'exprime en fonction de la vitesse ainsi que la forme de l'objet solide pour donner, dans le régime linéaire, ce qu'en appel la loi de Stokes suivant :

$$\vec{F} = -k.\eta.\vec{v} \qquad (89)$$

Où :

$\vec{v}$: La vitesse du solide

k : Coefficient qui caractérise la géométrie du solide

η : la viscosité du fluide

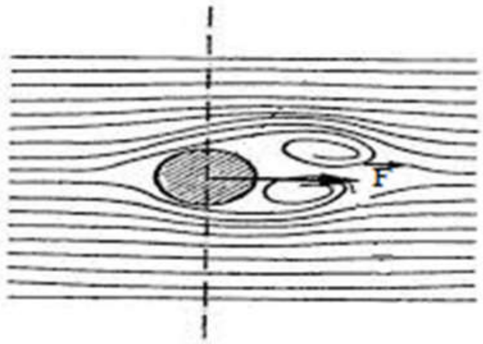


fig.6

b) Frottement sec (solide-solide)

Ce sont des forces exercées par la surface d'un objet solide sur un autre objet, soit lors du mouvement, soit cet objet est soumis à une force qui tend à vouloir le déplacer. Le frottement s'oppose au déplacement des objets en mouvement. On distingue deux formes de frottement sec

- ***Frottement statique***

Soit un bloc au repos sur un plan incliné, de surface rugueuse, faisant un angle avec l'horizontale.

$$\sum \vec{F} = \vec{F} + \vec{P} = \vec{P} + \overrightarrow{F_N} + \overrightarrow{F_T} = \vec{0}$$

Si le solide est ***immobile (à l'état statique)***on peut écrire :

La composante tangentielle de la force de frottement devient la force de frottement statique $\overrightarrow{F_s}$ (fig.7)

$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F_s} = \vec{0}$

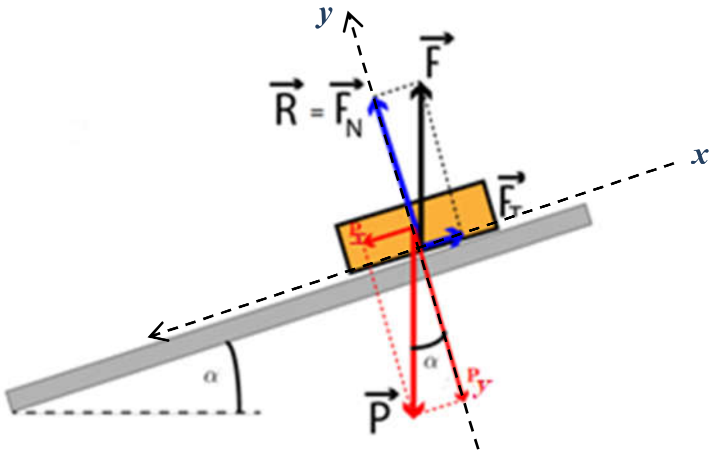


fig.7

Par projection sur les deux axes (Ox) et (Oy) on obtient:

$$\begin{cases} P_x - F_s = 0 \;\; suivant\ l'axe\ (Ox) \\ -P_y + R = 0\ suivant\ l'axe\ (Oy) \end{cases}$$

$\begin{cases} P\ sin\alpha = F_s \\ P\ cos\alpha = R \end{cases}$; D'où : $F_s = (Tan\alpha).R$

On augmente l'inclinaison jusqu'au moment où le bloc commence à glisser ($\alpha = \alpha_{max}$).

$$F_s = F_{max} = (Tan\alpha_{max}).R = \mu_s.R \Longrightarrow \mu_s = Tan(\alpha_{max}) \tag{90}$$

μ_s: Appelé ***coefficient de frottement statique***, il dépend de la nature et de l'état des matériaux en contact.

- ***Frottement cinétique (dynamique)***

En faisant croitre θ au-delà de la valeur maximale le bloc se met à glisser avec un mouvement uniformément accéléré :

La composante tangentielle de la force de frottement devient la force de frettement dynamique $\overrightarrow{F_d}$ (ou Cinétique $\overrightarrow{F_c}$) fig.8

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} + \overrightarrow{F_c} = m\,\vec{a} \qquad (91)$$

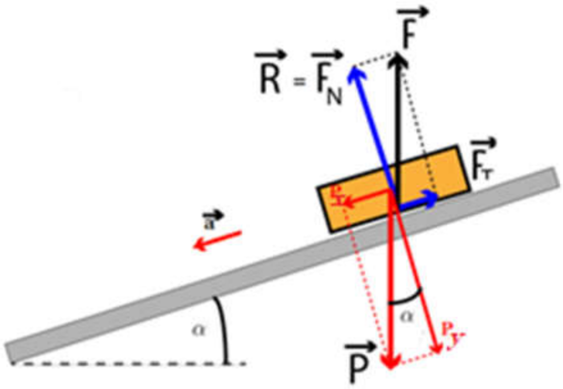


fig.8

Par projection sur les deux axes (Ox) et (Oy) on obtient:

$$\begin{cases} P_x - F_d = m\,a \;\; suivant\ l'axe\ (Ox) \\ -P_y + R = 0 \qquad suivant\ l'axe\ (Oy) \end{cases}$$

$$F_d = (Tan\alpha_{max}).R = \mu_d.R \Longrightarrow \mu_d = \frac{F_d}{R} \qquad (92)$$

μ_d: Appelé ***coefficient de frottement dynamique***.

Donc on peut distinguer deux cas :

$$\begin{cases} l'objet\ est\ au\ ropos\ (\vec{v} = \vec{0}) \Longrightarrow F_{frot} \leq F_s = F_{frot}^{max} = \mu_s R \\ l'objet\ est\ en\ mouvement(\vec{v} \neq \vec{0}) \;\Longrightarrow F_{frot} > F_s \Longrightarrow F_{frot} = F_d = \mu_d R \end{cases}$$

Remarque

Dans tout ce qui précède, il faut que le contact reste établi donc qu'il existe une réaction normale, ce qui se traduit par la condition suivante : $R > 0$ Dès que la composante normale de la réaction s'annule $(R = 0)$, le contact cesse.

❖ ***Application***

Soit un bloc de glace de $m = 2kg$ sur une surface horizontale (fig.9) pour laquelle$\mu_s = 0.2$.

On le tire en exerçant une force $\vec{F}$ de module $F = \sqrt{2}N$ orientée avec un angle $\alpha = 45°$ par rapport à l'horizontale.

1- Trouver le module de la force de frottement statique maximale sur le bloc

2- Calculer la composante tangentielle de la force $\vec{F}$, Que peut-on conclure ?

3- Quelle est la valeur que doit avoir la force pour que le bloc commence à bouger ?

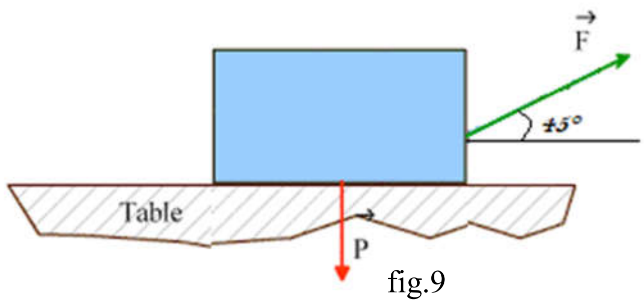


fig.9

Réponse

1) Le module de la force de frottement statique maximale est donnée par :

$$F_s = \mu_s R$$

Il faut trouver la valeur de la force de réaction R ?

On a : $\vec{R} + \vec{P} + \vec{F_s} = \vec{0}$ par projection sur les axes (ox) et (oy) (fig.10)

$$\begin{cases} Fcos45 - F_s = ma & (1) \\ R + Fsin45 - P = 0 & (2) \end{cases}$$

De l'équation (2) $R = mg - Fsin45$

$$R = 2.10 - \sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 20 - 1 = 19\ N$$

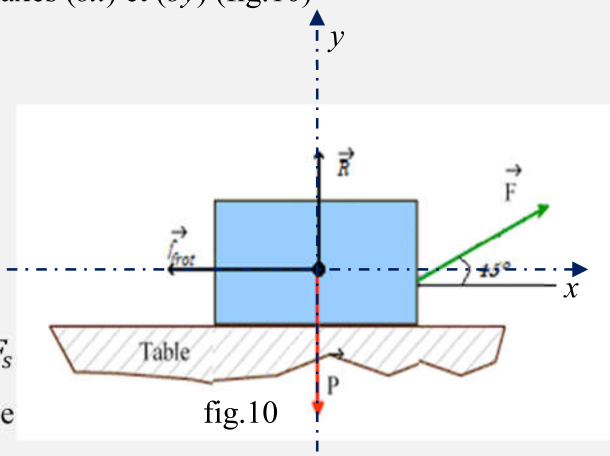


fig.10

Donc la force de frottement statique vaux : F_s

2) La composante tangentielle de la force

$$F_T = Fcos\ 45 = \sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 1\ N$$

Conclusion : on remarque que F_T responsable du déplacement du bloc de glace est inférieur à la force de frottement statique F_s on peut déduire que le bloc en état statique ($F_s > F_T$, 3,8 >

1) , le bloc ne bouge pas. Pour qu'il bouge il faut qu'il soit $(F_S < F_T)$ pour cela il faut que $F_T > 3{,}8$

$$F_T = Fcos\,\alpha > 3{,}8 \Longrightarrow F > \frac{3{,}8}{cos\alpha} \Longrightarrow F > \frac{3{,}8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Longrightarrow F > 5{,}374\,N$$

II.2.3 Forces de tension

Lorsqu'un opérateur tire sur une extrémité d'un fil ou d'un ressort (l'autre extrémité étant fixe), celui-ci se tend. Simultanément, le fil (le ressort) exerce une résistance, c'est-à-dire une action sur l'opérateur (qui la ressent bien). Cette action du fil sur l'opérateur est appelée tension du fil. Elle n'existe que si le fil est tendu sous l'effet d'une action extérieure (fig.11). Si le fil ou le ressort sont élastique elle s'écrit :

$$\vec{F} = -k.\overrightarrow{\Delta l} \tag{93}$$

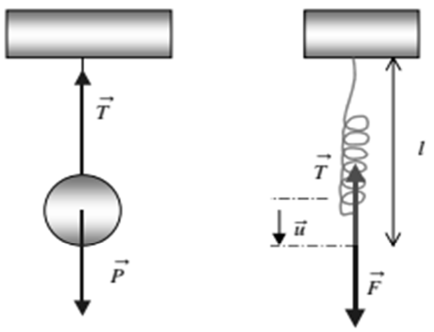


fig.11

III. Moment d'une force

Le moment d'une force $M_{\vec{F}/_O}$ par rapport à un point (O), donné est une grandeur physique vectorielle traduisant l'aptitude de cette force à faire tourner un système mécanique autour de ce point (fig.12).

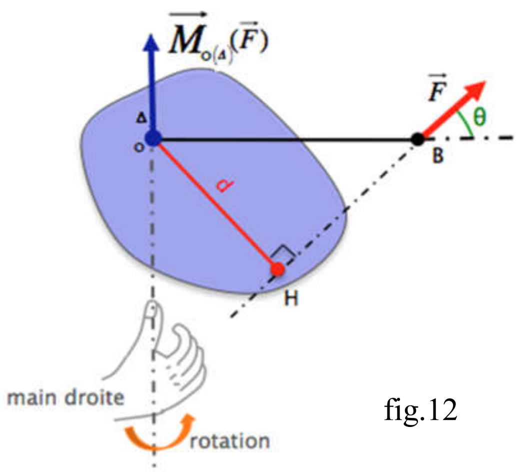


fig.12

$$\overrightarrow{M_{\vec{F}/_O}} = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F} = OB.F.\sin\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\vec{F}}\right).\vec{n}$$

$$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\vec{F}}\right) = \theta$$

$$\mathrm{OB}.\sin\theta = OH = d$$

$$M(\vec{F})/_o = F.d \tag{94}$$

IV. Lois de Newton

IV.1 Principe d'inertie (1ère loi de Newton)

Dans un référentiel (R) galiléen, le centre d'inertie de tout système matériel mécaniquement isolé (ou pseudo isolé), est soit au repos soit en mouvement rectiligne uniforme. Les systèmes pseudo-isolés sont définis comme les systèmes pour lesquels la somme des forces qui s'exercent sur eux est nulle:

$$\sum_i \vec{F_i} = \vec{0}$$

IV.2 Principe fondamental de la dynamique (2eme loi de Newton) :

Dès qu'un système subit des actions provenant de l'extérieur il n'est plus isolé. Les conséquences en sont une possible déformation ou bien une modification de mouvement.

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement du système.

$$\sum_i \overrightarrow{F_{i_{ext}}} = m.\vec{a} \tag{95}$$

Quel que soit le système considéré, on est ramené à l'étude du mouvement d'un point matériel qui correspond au centre d'inertie (fig.13).

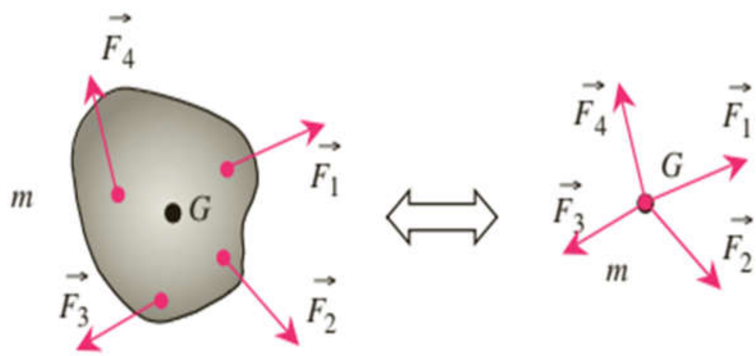


fig.13

On écrit :

$$\sum_i \overrightarrow{F_{i_{ext}}} = m.\overrightarrow{a_G} \tag{96}$$

IV.2.1 **Quantité de mouvement:**

Le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel de masse m et se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ est définit par le vecteur $\vec{P}$ donné par :

$$\vec{P} = m\,\vec{v} \tag{97}$$

Le principe d'inertie peut s'énoncer de la façon suivante:

- Une particule libre, se déplace avec une quantité de mouvement constante dans un repère Galiléen.
- La quantité de mouvement totale du système se conserve si le principe d'inertie est vérifié.

La somme des forces appliquées à une particule (ou un système) est égale à la variation de sa quantité de mouvement donc la 2eme loi de Newton s'écrit:

$$\sum_i \overrightarrow{F_{i_{ext}}} = m.\overrightarrow{a_G} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m.\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\sum_i \overrightarrow{F_{i_{ext}}} = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{98}$$

IV.2.2 **Théorème du moment cinétique**

Le moment cinétique par rapport au point O d'une particule de masse *m* se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ (fig.14), de quantité de mouvement $\vec{P} = m.\vec{v}$, est défini par le produit vectoriel

$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \vec{r} \wedge \vec{P} = \vec{r} \wedge (m.\vec{v}) = m.\vec{r} \wedge \vec{v} \tag{99}$$

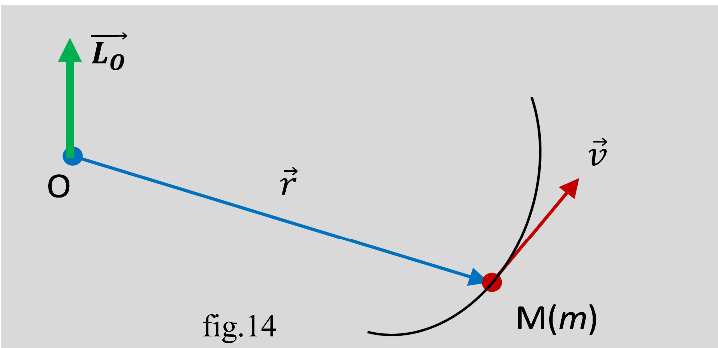


fig.14

Le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ change de grandeur et de direction quand la particule se déplace. Cependant, il garde la même direction quand la particule se déplace dans un plan et que le point O est dans le plan.

- ***Cas du mouvement circulaire***

Dans le cas d'un mouvement circulaire de centre O (fig.15) où $\vec{v} \perp \overrightarrow{OM}$:

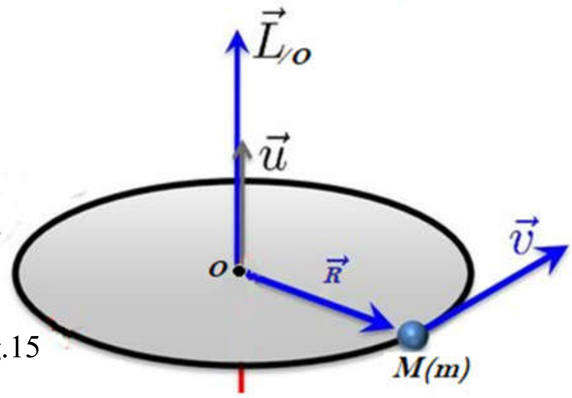


fig.15

$$\overrightarrow{L_O} = \vec{R} \wedge \vec{P} = R.m.v.\sin(\pi/2)\,\vec{u} = R.m.v\,\vec{u}$$

$$v = R\omega \Longrightarrow \overrightarrow{L_O} = R.m.(R\omega)\vec{u} = m.R^2.\omega\,\vec{u}$$

$$\overrightarrow{L_O} = m\,R^2.\vec{\omega} \qquad (100)$$

- ***Cas du mouvement curviligne***

Si le mouvement est curviligne, on peut décomposer la vitesse suivant ses composantes radiales et transversales:

$$\vec{v} = v_r\overrightarrow{U_r} + v_\theta\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\overrightarrow{L_O} = \vec{r} \wedge \vec{P} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v} = m\,\vec{r} \wedge \left(v_r\overrightarrow{U_r} + v_\theta\overrightarrow{U_\theta}\right) = m(\,v_r\left(\vec{r} \wedge \overrightarrow{U_r}\right) + v_\theta\left(\vec{r} \wedge \overrightarrow{U_\theta}\right)$$

$$\vec{r} \wedge \overrightarrow{U_r} = \vec{0}\; puisque\; (\,\vec{r} \parallel \overrightarrow{U_r})$$

$\overrightarrow{L_O} = \mathrm{m}.v_\theta\,\left(\vec{r} \wedge \overrightarrow{U_\theta}\right) = \mathrm{m}.v_\theta r\left(\overrightarrow{U_r} \wedge \overrightarrow{U_\theta}\right)$ on a $\overrightarrow{U_r} \wedge \overrightarrow{U_\theta} = \vec{k}\; et\; v_\theta = r\,\omega$

$$\overrightarrow{L_O} = \mathrm{m}.r^2\omega\,\vec{k} = \mathrm{m}.r^2\,\vec{\omega} \qquad (101)$$

- **Cas général**

On peut trouver le moment cinétique dans le cas général où le rayon $\vec{r}$ n'est pas constant comme suit:

$$\overrightarrow{L_O} = \vec{r} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} \tag{102}$$

- ***La dérivation du moment cinétique (théorème du moment cinétique)***

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \wedge \vec{P})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{P} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{P} + \vec{r} \wedge (m.\frac{d\vec{v}}{dt}) = \vec{v} \wedge \vec{P} + \vec{r} \wedge \vec{F}$$

On a : $\vec{v} \wedge \vec{P} = \vec{0}$ puisque ($\vec{v} \parallel \vec{P}$) donc

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{M(\vec{F})/_o} \tag{103}$$

Dans le cas où il y a plusieurs forces qui agissent sur le système, le théorème du moment cinétique s'écrit

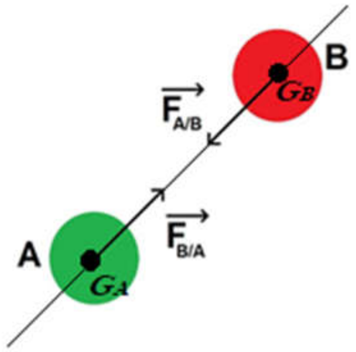
$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \vec{r} \wedge \sum_i \vec{F_i} = \sum_i \overrightarrow{M(\vec{F_i})/_o} \tag{104}$$

Si $\sum_i \overrightarrow{M(\vec{F_i})/_o} = \vec{0}$ le moment cinétique $\overrightarrow{L_O} = Cst$ on dit qu'il y a conservation de la quantité de mouvement $\vec{P} = Cst$.

IV.3 Principe des actions réciproques ($3^{ème}$ loi de Newton)

C'est le même principe vu déjà dans la réaction d'un support mais dans les deux types de forces soit à distance ou de contact l'énoncé du principe est «*L'action est toujours égale à la réaction, c'est-à-dire que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et de sens contraires.*» fig.16

$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}}$$



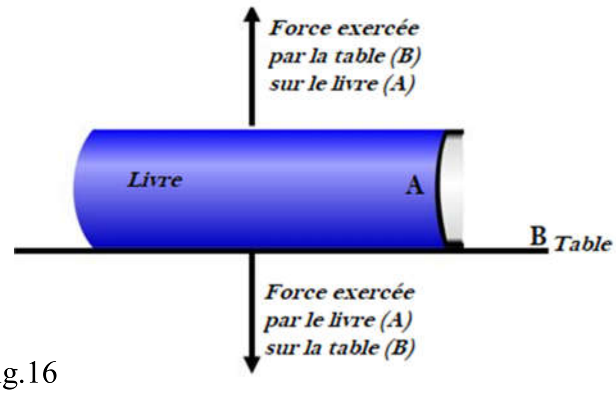


fig.16

V. Principe de la conservation de la quantité de mouvement

D'après la loi fondamentale de la dynamique (eq.23), on peut déduire le principe de la conservation de la quantité de de mouvement pour les systèmes isolé ou pseudo-isolé. « En l'absence de forces extérieures, ou si leur résultante est nulle, la quantité de mouvement d'un système matériel est donc une constante du mouvement ».

$$\sum_i \overrightarrow{F_{i_{ext}}} = \vec{0} \Longrightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \qquad (105)$$

VI. Les équations différentielles du mouvement

$$\sum_i \overrightarrow{F_{i_{ext}}} = m.\overrightarrow{a_G} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \qquad (106)$$

VII. Application : le pendule simple

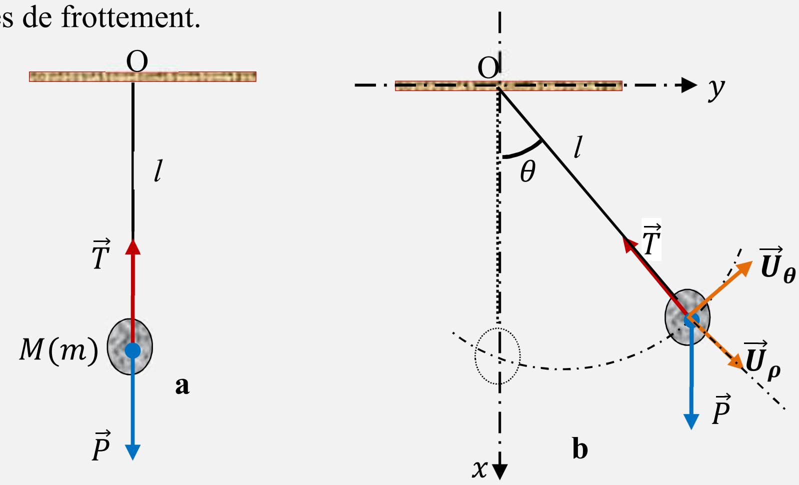
Un pendule simple est constitué d'une masse m considérée ponctuelle fixée à l'extrémité libre M d'un fil (l'autre extrémité O étant fixe par rapport à la Terre). La longueur du fil est *l*.

1) Déterminer la position d'équilibre du système
2) On écarte la masse de sa position d'équilibre avec un petit angle(θ) et on la lâche sans lui donner de vitesse (vitesse initiale nulle).

- Donner l'équation du mouvement de la masse on utilisant la loi fondamentale de la dynamique et avec le principe du moment cinétique

***Solution*:**

Le système est le point matériel M de masse m. Le référentiel est le référentiel terrestre galiléen dans lequel le point O est fixe. Bilan des forces extérieures appliquées sur M : Le poids (force à distance) et une seule force de contact la tension du fil $\vec{T}$ (voir fig.17). On néglige les forces de frottement.



❖ Le principe fondamental de la dynamique appliqué au système conduit à :

$$\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a} \quad *$$

où $\vec{a}$ est le vecteur accélération du point M

1. *Position d'équilibre (voir figure(a)):*

$$\vec{P}+\vec{T}=\vec{0}\Longrightarrow\vec{T}=-\vec{P}=-m\vec{g}$$

La tension du fil à la même direction que le poids de M. Dans la position d'équilibre le fil prend donc la direction verticale.

2. *En mouvement (voir figure(b)) :*

L'équation traduisant le principe fondamental de la dynamique est une équation vectorielle. Il est nécessaire de choisir une base pour projeter cette relation, on peut choisir un repère cartésien (xOy). Mais, la trajectoire de la masse correspond obligatoirement à une portion de cercle de centre « O » et de rayon « l ». Le système de coordonnées polaires est donc bien approprié et la base utilisée sera $(\vec{U}_\rho,\vec{U}_\theta)$. En exprimant le vecteur accélération $\vec{a}$, la tension $\vec{T}$ et le poids $\vec{P}$ dans cette base on peut écrire :

- *L'accélération*

$$\vec{a}=\ a_\rho\vec{U}_\rho+a_\theta\vec{U}_\theta=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\vec{U}_\rho+(\rho\ddot{\theta}+2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{U}_\theta$$
$$\rho=l\Longrightarrow\dot{\rho}=\ddot{\rho}=0$$

$$\vec{a} = (-l\dot{\theta}^2)\vec{U}_\rho + (l\ddot{\theta})\vec{U}_\theta$$

- *La tension* $\vec{T} = -T\,\vec{U}_\rho$
- *Le poids* $\vec{P} = P_\rho\vec{U}_\rho - P_\theta\vec{U}_\theta$

$$P_\rho = P\cos\theta = mg\cos\theta$$

$$P_\theta = P\sin\theta = mg\sin\theta$$

La projection de l'équation $(*)$ $\begin{cases} P_\rho - T_\rho = ma_\rho \\ -P_\theta + T_\theta = ma_\theta \end{cases}$

$$\begin{cases} mg\cos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2 & \sim(1) \\ -mg\sin\theta + 0 = ml\ddot{\theta} & \sim(2) \end{cases}$$

De la première équation on peut déduire la tension :

$$m\,(g\cos\theta + l\dot{\theta}^2) = T$$

De la seconde équation, il est possible d'écrire l'équation différentielle du mouvement de la masse *m*:

$$\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

Cette équation est une équation différentielle *non linéaire* à cause de la présence du terme en sinus. La solution n'est donc pas facile à obtenir sauf si dans certaines conditions l'équation peut être assimilée à une équation linéaire. Cette condition est satisfaite dans le cas où l'angle θ est petit c'est-à-dire lorsque ($\sin\theta \approx \theta$). Dans ce cas, l'équation différentielle devient:

$$\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

En posant $\omega^2 = \frac{g}{l}$, l'équation donc s'écrit : $\boldsymbol{\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0}$

La solution de cette équation, sera l'équation du mouvement, est écrit:

$$\boldsymbol{\theta = \theta_{max}\sin(\omega t + \varphi)}$$

❖ L'équation différentielle précédente aurait pu être obtenue directement par le théorème des moments calculés en O soit

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum \overrightarrow{M(\vec{F}_{ext})/_o}$$

$$\overrightarrow{M(\vec{T})/_o} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = l\,\overrightarrow{U_\rho} \wedge \left(-T\overrightarrow{U_\rho}\right) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{M(\vec{P})/_o} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = l\,\overrightarrow{U_\rho} \wedge \left(mg\cos\theta\vec{U}_\rho - mg\sin\theta\vec{U}_\theta\right) = -l\,mg\sin\theta\left(\overrightarrow{U_\rho} \wedge \vec{U}_\theta\right)$$

$$= -l\,mg\sin\theta\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = l\,\overrightarrow{U_\rho} \wedge m\vec{v}$$

La vitesse en coordonnées polaires $\vec{v} = \dot{\rho}\overrightarrow{U_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} = l\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}$

$$\overrightarrow{L_O} = l\,\overrightarrow{U_\rho} \wedge (ml\dot{\theta})\,\overrightarrow{U_\theta}$$

$$\overrightarrow{L_O} = ml^2\dot{\theta}\left(\overrightarrow{U_\rho} \wedge \overrightarrow{U_\theta}\right) = ml^2\dot{\theta}\,\vec{k}$$

Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \frac{d(ml^2\dot{\theta}\,\vec{k})}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\,\vec{k} = \sum \overrightarrow{M(\vec{F}_{ext})/_o} = \overrightarrow{M(\vec{T})/_o} + \overrightarrow{M(\vec{P})/_o} = \vec{0} - l\,mgsin\theta\,\vec{k}$$

$$ml^2\ddot{\theta}\,\vec{k} = -l\,mgsin\theta\,\vec{k}$$

$$\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0}$$

Pour les petits angles $sin\theta \approx \theta$ l'équation sera $\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$ et la solution est :

$$\boldsymbol{\theta = \theta_{max}\sin(\omega t + \varphi)}$$

VIII. Collisions

VIII.1 Description du problème

Il existe des situations dans lesquelles des corps matériels interagissent entre eux seulement lorsqu'ils sont très proches. Par ailleurs, il arrive souvent que cette interaction soit difficile à expliciter. Dans ce cas, le point de vue le plus simple consiste à dire que les particules subissent un choc: on suppose alors qu'ils n'interagissent pas avant ni après et que l'interaction se produit sur une durée très courte.

Le terme collision est à prendre au sens large, il n'y a pas forcément contact physique entre les corps (interaction répulsive). On emploiera néanmoins indifféremment les mots collision ou choc. Ce qui est intéressant n'est pas l'interaction qui produit la collision : on considèrera que celle-ci se produit à courte portée et pendant un temps très court.

Nous ne voulons pas connaître la nature de cette interaction mais uniquement les **caractéristiques des corps avant et après collision**.

❖ ***Définition***

On dit qu'il y a collision ou choc entre deux ou plusieurs particules quand ces objets subissent une interaction mutuelle de courte durée et de courte portée. Le choc est localisé dans le temps et l'espace. En règle générale, les forces d'interaction sont négligeables quand les particules sont suffisamment éloignées. On peut donc distinguer un « avant » et un « après » la collision (fig.18.)

Nous allons nous intéresser au cas où les deux corps qui entrent en collision ne subissent pas de forces extérieures.

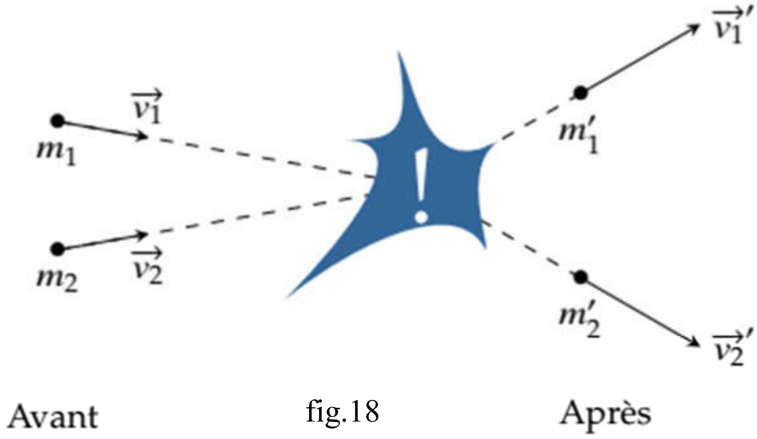


fig.18

❖ **Grandeurs conservées**

Malgré notre connaissance partielle du problème, on peut obtenir certaines informations grâce aux lois de conservation et/ou de symétrie. Désignons par $\vec{P}$ la quantité de mouvement des particules formants le système mécanique. On considère ce système isolé de l'extérieur ($\overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$). Enfin, l'analyse est effectuée dans un référentiel galiléen.

a) Conservation de la quantité de mouvement du système

D'après le théorème du centre d'inertie on a :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0} \qquad (107)$$

La quantité de mouvement du système est donc conservée.

$$\vec{P}_{avant} = \vec{P}_{après} \qquad (108)$$

b) Conservation de l'énergie

Si les forces d'interaction dérivent d'une énergie potentielle d'interaction $E_p(int)$, alors l'énergie totale du système s'écrit :

$$E_{avant} = E_{après} \qquad (109)$$

On distingue deux types de collisions (chocs) inélastiques (mou) et élastiques.

VIII.2 *Collisions inélastiques (mou)*

Définition : On dit qu'une collision est inélastique lorsqu'une partie de l'énergie cinétique initiale du système s'est transformée en d'autres formes d'énergie. La collision s'accompagne alors d'une variation d'énergie interne et/ou d'une modification du nombre de particules (fig.19), certaines pouvant être créées par fragmentation ou par équivalence masse-énergie. Les exemples sont nombreux :

- Lorsqu'on laisse tomber une boule en pâte à modeler, celle-ci ne rebondit pas ;
- Les réactions chimiques sont en fait le résultat d'une ou plusieurs collisions inélastiques. Par exemple, le processus élémentaire biomoléculaire ;
- Les réactions nucléaires.

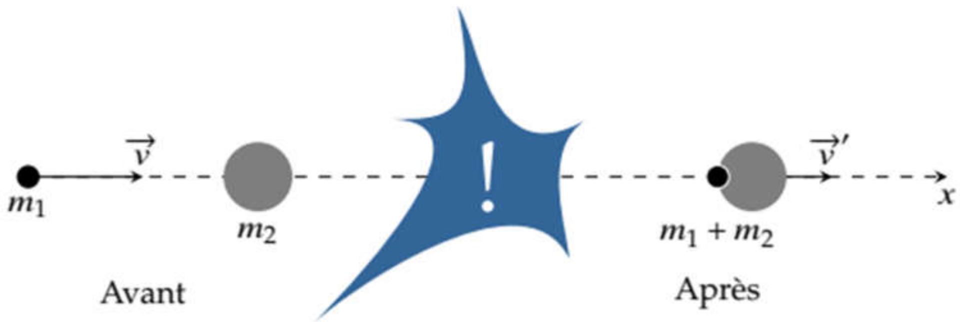


fig.19

On considèrera pour ce qui suit que la masse des corps est constante et que leur nombre ne varie pas.

VIII.3 Collisions élastiques

- ***Définition***

On dit qu'il y a collision élastique lorsque le nombre de particules reste constant et que l'énergie interne de chaque particule reste inchangée avant et après le choc. En d'autres termes, les particules ne se déforment pas ni changent de nature. Les lois de conservation sont donc/

$$m_i = m'_i \Rightarrow m_1 = m'_1 \, et \, m_2 = m'_2$$

$$\vec{P}_{avant} = \vec{P}_{après} \Rightarrow \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} = \overrightarrow{P'_1} + \overrightarrow{P'_2} \Rightarrow m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = m_1\overrightarrow{v'_1} + m_2\overrightarrow{v'_2}$$

$$E_{avant} = E_{après}$$

Citons quelques exemples:

- collision entre boules de pétanque (boules dures indéformables) ;
- diffusion de Rutherford (diffusion d'un noyau).

- **Collision élastique unidimensionnelle**

Traitons l'exemple d'une collision frontale élastique entre deux corps assimilables à deux points matériels. Notons, $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ les vitesses avant le choc et $\overrightarrow{v'_1}, \overrightarrow{v'_2}$ les vitesses après le choc. On se place dans le cas où toutes les vitesses sont colinéaires.

Le problème est donc à une dimension et présente deux inconnues (v'_1 et v'_2). Ainsi, les deux lois de conservation devraient suffire à décrire complètement le système après le choc (fig.20).

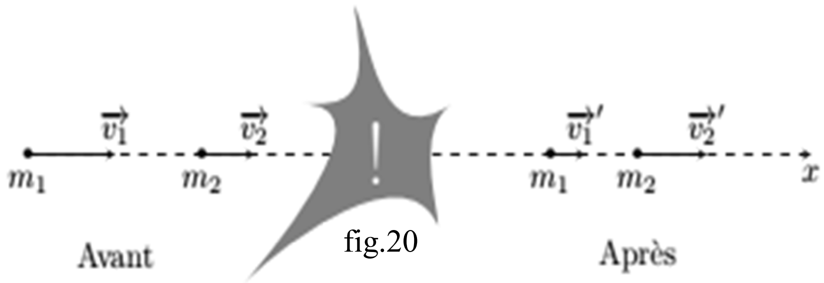


fig.20

$$\vec{P}_{avant} = \vec{P}_{après} \Longrightarrow \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} = \overrightarrow{P'_1} + \overrightarrow{P'_2} \Longrightarrow m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = m_1\overrightarrow{v'_1} + m_2\overrightarrow{v'_2}$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$$

$$E_{avant} = E_{après} \Longrightarrow \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

$$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1v_1'^2 + m_2v_2'^2$$

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2 \\ m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1v_1'^2 + m_2v_2'^2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2) & (1) \\ m_1\left(v_1^2 - v'^2_1\right) = m_2(v'^2_2 - v_2^2) & (2) \end{cases}$$

On divise la relation (2) sur (1)

$$\frac{m_1\left(v_1^2 - v'^2_1\right)}{m_1(v_1 - v'_1)} = \frac{m_2(v'^2_2 - v_2^2)}{m_2(v'_2 - v_2)} \Rightarrow \frac{(v_1 + v'_1)(v_1 - v'_1)}{(v_1 - v'_1)} = \frac{(v'_2 + v_2)(v'_2 - v_2)}{(v'_2 - v_2)}$$

$$(v_1 + v'_1) = (v'_2 + v_2) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v'_1 = (v'_2 + v_2) - v_1 \\ v'_2 = \left(v_1 + v'_1 +\right) - v_2 \end{cases}$$

On remplace dans l'équation (1) pour trouver :

$$v'_1 = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{(m_1 - m_2)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

- Dans le cas où la cible ou la 2eme particule est immobile ($v_2 = 0$)

$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} v_1$ et $v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$

- **Collision élastique à deux dimensions**

Considérons la collision élastique entre un point matériel de masse m_1 animé d'une vitesse $\overrightarrow{v_1}$ et un point matériel de masse m_2 initialement au repos (fig.21).

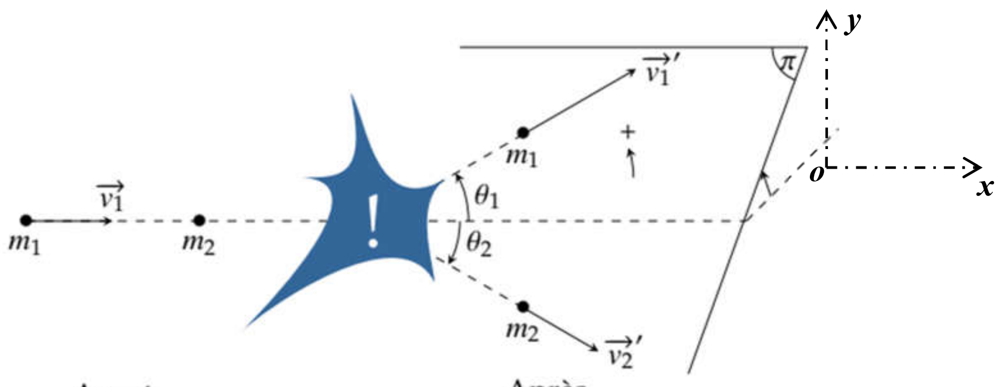


fig.21

Les lois de conservation donnent :

$$\begin{cases} \vec{P}_{avant} = \vec{P}_{après} \\ E_{avant} = E_{après} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m_1\overrightarrow{v_1} = m_1\overrightarrow{v'_1} + m_2\overrightarrow{v'_2} & (1) \\ m_1 v_1^2 = m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2 & (2) \end{cases}$$

On projette l'équation (1) dans un repère (xOy)

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 v'_1 cos\theta_1 + m_2 v'_2 cos\theta_2 & (1') \\ 0 = m_1 v'_1 sin\theta_1 - m_2 v'_2 sin\theta_2 & (2') \end{cases}$$

De l'équation (2')

$$v'_1 = \frac{m_2 sin\theta_2}{m_1 sin\theta_1} v'_2$$

De l'équation (2)

$$m_1 v_1^2 = m_1 (\frac{m_2 sin\theta_2}{m_1 sin\theta_1} v'_2)^2 + m_2 v'^2_2$$

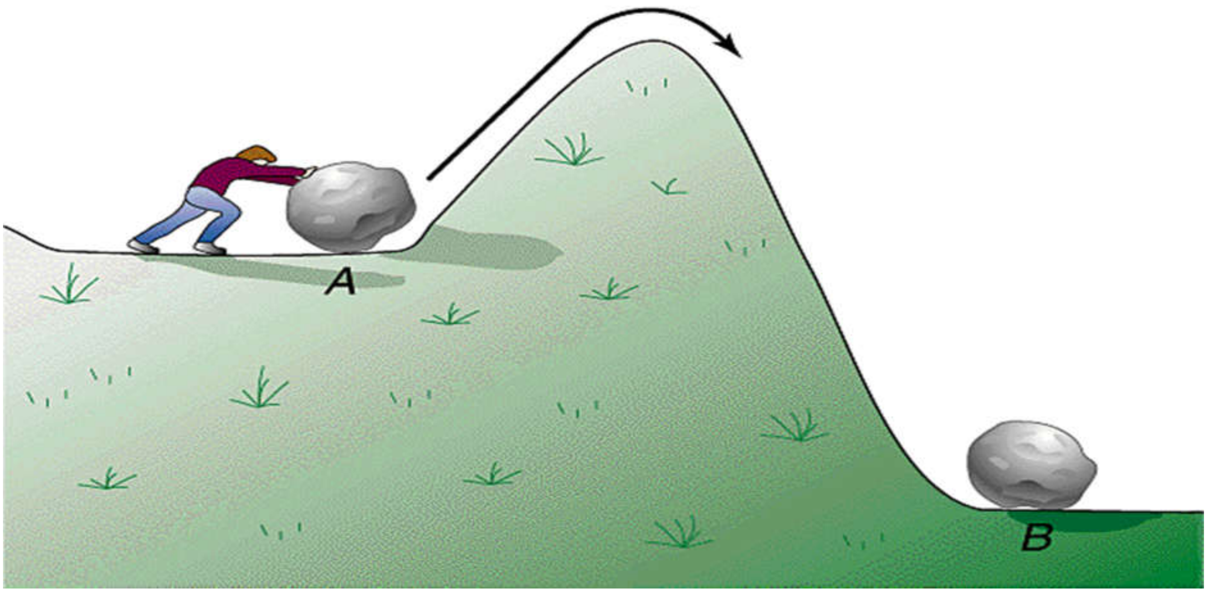
$$m_1 v_1^2 = ((\frac{m_2 sin\theta_2}{sin\theta_1})^2 + m_2) v'^2_2$$

$$v'_2 = \sqrt{m_1 v_1^2 - (m_1 \left(\frac{m_2 sin\theta_2}{m_1 sin\theta_1}\right)^2 + m_2)}$$

CHAPITRE IV

Travail et Energie

Contenu du Chapitre



I. Introduction

L'objectif de cette partie du cours est de présenter les outils énergétiques utilisés en mécanique pour résoudre des problèmes. En effet, parfois le principe fondamental de la dynamique ne suffit pas ou n'est pas approprié pour parvenir au bout de la résolution. Avant de décrire les différents types d'énergies (énergies cinétique, potentielle et mécanique) et les utiliser dans des théorèmes énergétiques, nous présenterons les notions de puissance et de travail d'une force.

II. Travail d'une force

En physique, ***le travail*** est une notion liée aux ***forces*** et aux ***déplacements*** de leurs points d'application. Considérons une force $\vec{F}$ dont le point d'application subit un déplacement rectiligne de A vers B (fig.1). le travail peut être calculé par l'intégration du travail élémentaire.

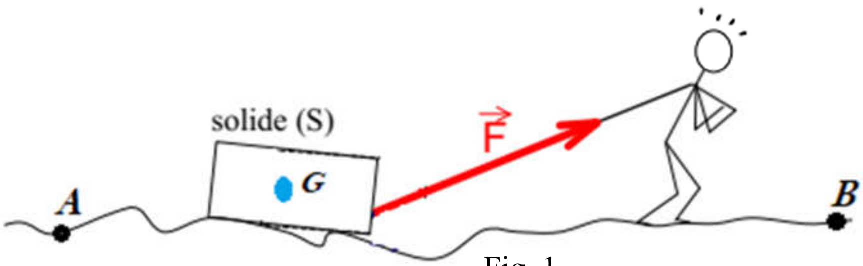


Fig. 1

II.1 Travail élémentaire

Pour calculer le travail, on décompose alors le trajet en une succession de *déplacements élémentaires* $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'}$, infiniment petits et donc rectilignes (fig. 2). Sur l'un quelconque de ces trajets élémentaires. L'expression du travail élémentaire sur un tel déplacement élémentaire entre le point M et le point M' peut donc s'écrire:

$$\delta W_{M\rightarrow M'} = \vec{F}(M).\overrightarrow{dl}$$

On a $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{dl}}{dt} \Longrightarrow \overrightarrow{dl} = \vec{v}dt$

$$\delta W_{M\rightarrow M'} = \vec{F}(M).\vec{v}dt$$

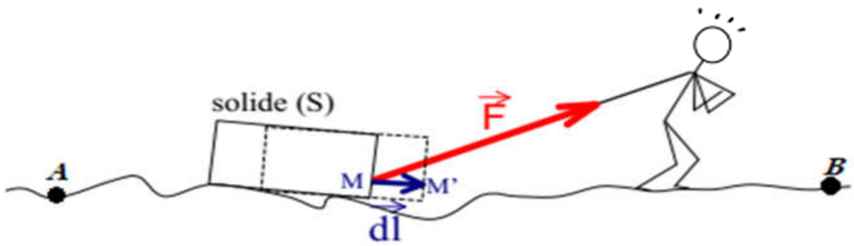


Fig. 2

Pour obtenir le travail total de la force $\vec{F}(M)$ sur le déplacement total AB, il suffit d'additionner les travaux élémentaires quand on passe du point A A au point B. La sommation est continue, ce qui conduit à :

$$W(\vec{F})_{A\to B} = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F}(M).\overrightarrow{dl} = \int_A^B \vec{F}(M).\vec{v}\,dt$$

II.2 La puissance

On appelle puissance instantanée de la force $\vec{F}(M)$ dont le point d'application se déplace avec une vitesse instantanée $\vec{v}$ dans le référentiel Galiléen, la grandeur scalaire:

$$P(t) = \vec{F}.\vec{v} = \frac{W(\vec{F})_{A\to B}}{T}$$

L'équation aux dimensions d'une puissance est $[P] = ML^2T^{-3}$.

L'unité de puissance dans le système international S.I. est le *WATT* ($Kg.m^2.s^{-3} \equiv W$).

II.3 Travail d'une force constante

Lorsque la force est constante (vecteur constant en sens, direction et norme quel que soit le déplacement du point M (fig.3)), celle-ci peut sortir de l'intégration ci-dessus, on obtient:

$$W(\vec{F})_{A\to B} = \int_A^B \delta W = \vec{F}(M).\int_A^B \overrightarrow{dl} = \vec{F}(M).\overrightarrow{AB}$$

$$W(\vec{F})_{A\to B} = \vec{F}(M).\overrightarrow{AB} = F\,.\,AB\,.\cos\left(\widehat{\vec{F},\overrightarrow{AB}}\right) = F\,.\,AB\,.\cos\alpha$$

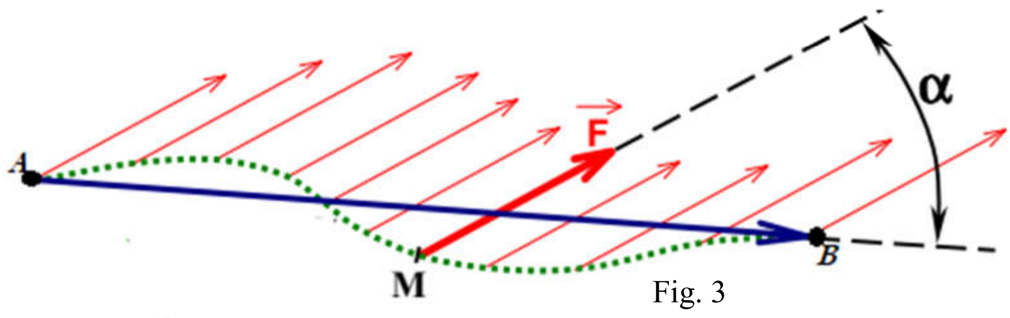


Fig. 3

On pourra parler de travail, ***moteur*** (fig.4), ***résistant*** (fig.4b) ou ***nul*** (fig.4c) d'une force selon le signe de celui-ci.

Le travail d'une force constante ne dépend pas du chemin suivi entre A et B

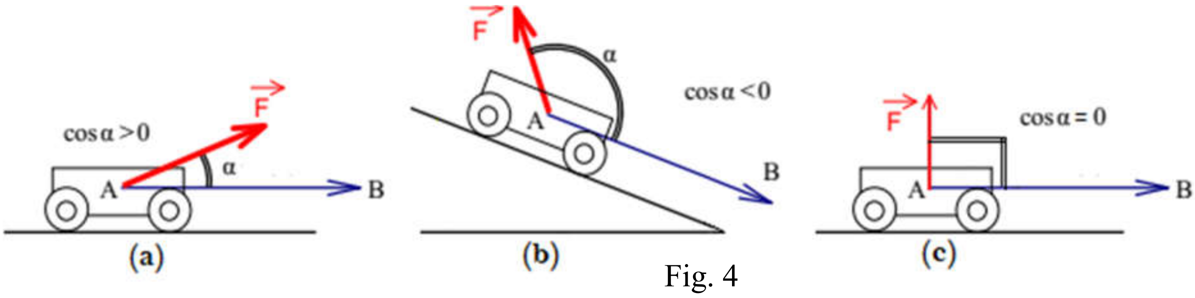


Fig. 4

II.4 Travail d'une force en rotation

On considère une force F appliquée à un objet M (fig.5) et on suppose que :

Le module de la force est constant et qu'elle est continuellement tangente à la trajectoire.

Le travail de cette force est :

$$W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\vec{dl}$$

$$\vec{dl} = Rd\theta\,\vec{T}$$

$$W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\vec{dl} = F\vec{T}.\,Rd\theta\,\vec{T}$$

$$W(\vec{F}) = \int_A^B F.\,Rd\theta = FR\,(\theta_B - \theta_A)$$

$$W(\vec{F}) = FR\,\theta = \mathcal{M}(\vec{F})(\theta_B - \theta_A)$$

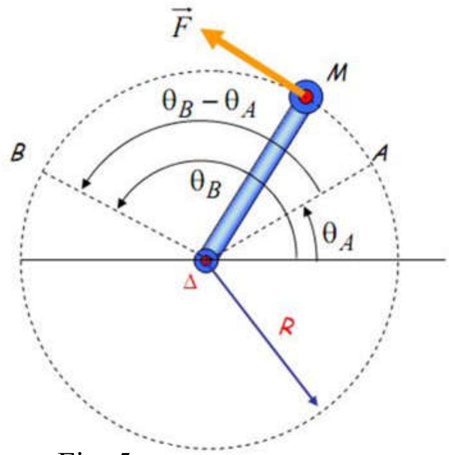


Fig. 5

II.5 Travail de force conservative ou non-conservative

Une force est dite conservative si son travail entre deux points A et B quelconques ne dépend pas de la trajectoire suivie entre ces deux points (fig.6). Toutes les forces constantes sont conservatives: le poids (dans un champ de pesanteur uniforme), la force électrique (dans un champ électrostatique uniforme), mais aussi d'autres forces non constantes (force de rappel élastique d'un ressort, par exemple).

Dans le cas d'une trajectoire fermée (c'est-à-dire si le système revient à son point de départ), le travail d'une force conservative est nul.

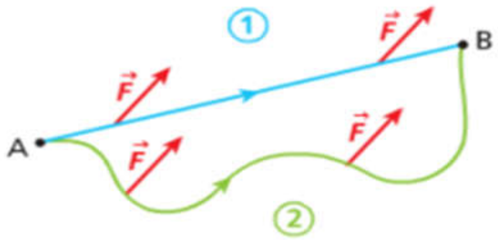


Fig. 6

$$W_{AB}(\vec{F})_{trajet ①} = W_{AB}(\vec{F})_{trajet ②}$$

Les forces de frottements ou la force de tension d'un fil sont des forces non-conservatives (fig.7).

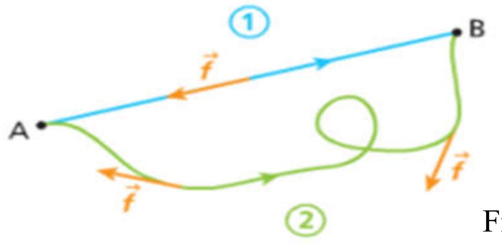


Fig. 7

$$W_{AB}(\vec{f})_{trajet ①} \neq W_{AB}(\vec{f})_{trajet ②}$$

II.6 Travaux de forces constantes

II.6.1 Travail du poids

On considère un solide qui se déplace sous l'effet seul de son poids (Fig.8), ($\vec{P}$ force est considérée constante). Calculons le travail de poids pour un déplacement curviligne quelconque du centre de gravité G du solide partant du point A pour aboutir au point B.

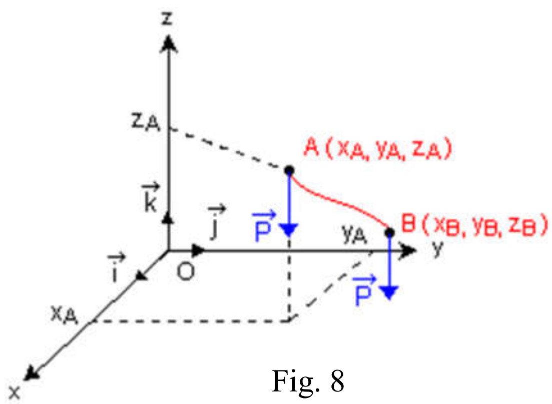


Fig. 8

Si décompose la trajectoire de A vers B en déplacements élémentaires rectilignes $\overrightarrow{dl_1}$, $\overrightarrow{dl_2}$, $\overrightarrow{l_3}$, etc. Ces déplacements rectiligne très courts permettent de décrire exactement le déplacement curviligne $\overrightarrow{dl} = \widehat{AB} = \overrightarrow{dl_1} + \overrightarrow{dl_2} + \overrightarrow{dl_3} + \cdots$. Le travail effectué par le poids $\vec{P}$ entre les points extrêmes A et B est égal à la somme des travaux élémentaires :

$$W(\vec{P})_{A\to B} = \triangle W(\vec{P})_1 + \triangle W(\vec{P})_2 + \triangle W(\vec{P})_3 = \vec{P}(M).\overrightarrow{dl_1} + \vec{P}(M).\overrightarrow{dl_2} + \vec{P}(M).\overrightarrow{dl_3}$$

$$= \vec{P}(M).\left(\overrightarrow{dl_1} + \overrightarrow{dl_2} + \overrightarrow{dl_3}\right) = \vec{P}(M).\overrightarrow{dl} = \vec{P}(M).\overrightarrow{AB}$$

On a $\overrightarrow{AB}((x_B - x_A),(y_B - y_A),(z_B - z_A))$ et $\vec{P}(M)(0,0,-P_z)$

$\vec{P}(M).\overrightarrow{AB} = P_x(x_B - x_A) + P_y(y_B - y_A) - P_z(z_B - z_A)$ donc

$$W(\vec{P})_{A\to B} = \vec{P}(M).\overrightarrow{AB} = -P_z(z_B - z_A)$$

$$W(\vec{P})_{A\to B} = P(z_A - z_B) = mgh$$

Le travail du poids d'un solide ne dépend que des altitudes des points de départ et d'arrivée de son centre de gravité. Il ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A vers B.

Ce travail est positif (moteur) si le solide descend, négatif (résistant) si le solide monte, nul si les points A et B sont à la même altitude.

II.6.2 Travail d'une force élastique

Un ressort comprimé ou dilaté emmagasine de l'énergie appelée énergie potentielle élastique. Cette énergie potentielle emmagasinée par le ressort est égale au travail effectué par la force $\vec{F}$ qui a permis de le comprimer ou de le dilater fig.9.

$\vec{F} = kx\,\vec{\imath}$

$\overrightarrow{dl} = dx\,\vec{\imath}$

$\delta W(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = -kxdx$

$W(\vec{F}) = \int_x^0 -kxdx = -\frac{1}{2}k(0 - x^2)$

$W(\vec{F}) = \frac{1}{2}kx^2$

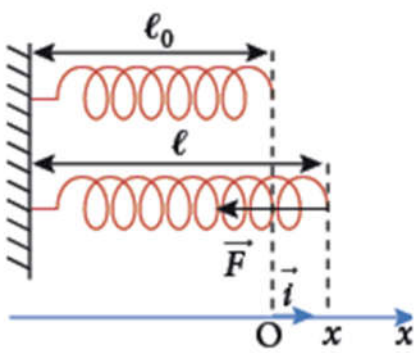


Fig. 9

II.7 Travail d'une force quelconque

Dans le cas général où la force est écrite dans un référentiel galiléen

$\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}$ et le déplacement $\overrightarrow{dl} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}$

Le travailélémentaire s'écrit alors :

$$\delta W_{M\to M'} = \vec{F}.\,\overrightarrow{dl} = \left(F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}\right).\left(dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}\right) = F_x dx + F_y dy\ + F_z dz$$

Le travail de la force entre deux points A et B sera :

$$W_{A\to B} = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F}.\,\overrightarrow{dl} = \int_A^B \left(F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}\right).\left(dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}\right)$$

$$= \int_A^B (F_x dx + F_y dy\ + F_z dz)$$

III. Application

Un corps est soumis à une force $\vec{F} = (y^2 - x^2)\vec{\imath} + (3.x.y)\vec{\jmath}$

- Calculer le travail de la force $\vec{F}$ si le corps se déplace du point A(0,0) au point B(2,4) suivant les trajectoires :

1. Sur l'axe (*Ox*) de A vers C(2,0) puis parallèlement à (Oy) de C vers B.
2. Sur l'axe (Oy) de A vers D(0,4) puis parallèlement à (*Ox*) de D vers B.
3. Sur la ligne droite [AB].
4. Sur la trajectoire $y=x^2$.

- Que peut-en conclure ?

Solution

1) Le travail de la force $\vec{F}$ pour la trajectoire (Sur l'axe (*Ox*) de A vers C(2,0) puis parallèlement à (Oy) de C vers B).

$$dW = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

On a

$$\begin{cases} \overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k} \\ \vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k} \end{cases}$$

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$W_{A\to B} = \int_A^B F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$W_{A\to B} = W_{A\to C} + W_{C\to B}$$

Pour $W_{A\to C}$:($y = Cst = 0 \Longrightarrow dy = 0$ et $0 \leq x \leq 4$)

$$W_{A\to C} = \int_A^C (0 - x^2)dx + (3.x.0)dy$$

$$W_{A\to C} = \int_{x_A}^{x_C} -x^2 dx = -\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 = -\frac{8}{3}\ joule$$

Pour $W_{C\to B}$ ($x_C = Cst = 2 \Longrightarrow dx = 0$ et$0 \leq y \leq 4$)

$$W_{C\to B} = \int_C^B (y^2 - x^2)0 + (3.2.y)dy$$

$$W_{C\to B} = \int_{y_C}^{y_B} (3.2.y)dy = 6\int_0^4 y dy = 6\frac{y^2}{2}\bigg|_0^4 = 3(16) = 48\,joule$$

$$W_{A\to B} = W_{A\to C} + W_{C\to B} = -\frac{8}{3} + 48 = \frac{136}{3}\ Joule$$

2) Le travail de la force $\vec{F}$ pour la trajectoire (Sur l'axe (Oy) de A vers D(0,4) puis parallèlement à (*Ox*) de D vers B.

$$W_{A\to B} = W_{A\to D} + W_{D\to B}$$

Pour $W_{A\to D}$:($x = Cst = 0 \Longrightarrow dx = 0$ et $0 \leq y \leq 4$)

$$W_{A\to D} = \int_A^D (y^2 - 0)O + (3.0.y)dy = 0\,Joule$$

Pour $W_{D\to B}$:($y = Cst = 4 \Longrightarrow dy = 0$ et $0 \leq x \leq 2$)

$$W_{D\to B} = \int_D^B (4^2 - x^2)dx + (3.x.4)0$$

$$W_{D\to B} = \int_{x_D}^{x_B} (4^2 - x^2)dx = 16x|_0^2 - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 = 32 - \frac{8}{3} = \frac{88}{3}\ Joule$$

3) Le travail de la force $\vec{F}$ pour la trajectoire (Sur la ligne droite [AB].

Il faut trouver l'équation de cette droite, elle est de la forme : $y = ax + b$

$$\begin{cases} a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4-0}{2-0} = 2 \\ b = 0\ puisque\ A(0,0) \end{cases}$$

Donc $y = 2x \Longrightarrow dy = 2dx$ on les remplace dans la formule du travail :

$$W_{A\to B} = \int_A^B (y^2 - x^2)dx + (3.x.y)dy \Longrightarrow W_{A\to B} = \int_{x_A}^{x_B} ((2x)^2 - x^2)dx + (3.x.2x)2dx$$

$$\int_{x_A}^{x_B} ((3x)^2)dx + (12x^2)dx = 3\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 + 12\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 = x^3 + 4x^3|_0^2 = 40\,Joule$$

4) Le travail de la force $\vec{F}$ pour la trajectoire $y=x^2$

$$y = x^2 \Longrightarrow dy = 2xdx$$

De la même manière de la question précédente on va trouver

$$W_{A\to B} = 42{,}13\,Joule$$

Pour les quatre chemins le travail n'est pas le même donc la force $\vec{F}$ n'est pas conservative.

IV. Energie cinétique

IV.1 Définition

L'énergie cinétique est l'énergie, en Joule, que possède un corps du fait de sa vitesse :

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

IV.2 Théorème de l'énergie cinétique

On se place ici en référentiel galiléen, ceci nous permet d'utiliser la seconde loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\sum \vec{F}_{ext}\,.\,d\overrightarrow{OM} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt}\,.\,d\overrightarrow{OM}$$

$$\sum \delta W(\vec{F}_{ext}) = m\,\frac{d\vec{v}}{dt}\,.\,\vec{v}dt$$

$$\sum \delta W(\vec{F}_{ext}) = m\,.\,\vec{v}.\,d\vec{v}$$

$$\sum \delta W(\vec{F}_{ext}) = d(\frac{1}{2}m\,.\,\vec{v}^2)$$

$$\sum \delta W(\vec{F}_{ext}) = d\left(\frac{1}{2}m\,.\,v^2\right) = dE_C$$

On obtient alors la forme différentielle du théorème de l'énergie cinétique:

Ou bien en intégrant celle-ci entre deux positions (deux instants) A et B :

$$W_{A\to B}(\vec{F}_{ext}) = \Delta E_C = \left(\frac{1}{2}m\,.\,v_B^2\right) - \left(\frac{1}{2}m\,.\,v_A^2\right)$$

V. Energie potentielle

L'énergie potentielle d'un système physique est l'énergie liée à une interaction, qui a le potentiel de se transformer en d'autres énergies, on va s'intéresser à l'énergie potentiel de pesanteur et l'énergie potentiel élastique.

V.1 Energie potentielle de pesanteur.

Comment faire passer un solide d'une position A(z_A), à une autre position B(z_B) et ($z_B > z_A$),il faut exercer une force $\vec{F}$ pour l'amené de point A au point B, sachant qu'au points de départ A et d'arrivée B, la vitesse est nulle $v_B = v_A = 0\ ms^{-1}$par conséquence $E_B = E_B = 0 joule$ (fig.10).

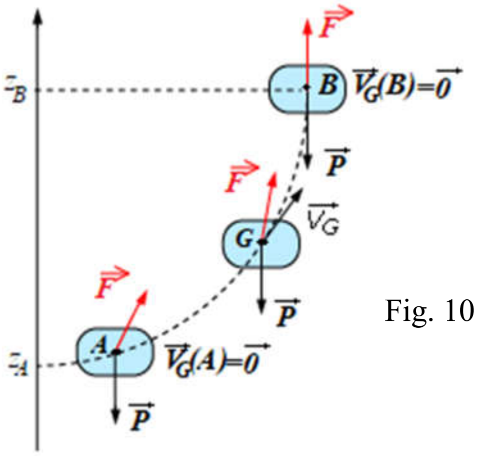


Fig. 10

On appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre A et B :

$$W_{A\to B}(\vec{F}_{ext}) = \Delta E_C = \left(\frac{1}{2}m\,.v_B^2\right) - \left(\frac{1}{2}m\,.v_A^2\right) \Rightarrow W_{A\to B}(\vec{F}) + W_{A\to B}(\vec{P}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow W_{A\to B}(\vec{F}) = -W_{A\to B}(\vec{P}) = mg(z_B - z_A)$$

$$\Rightarrow W_{A\to B}(\vec{F}) = mgz_B - mgz_A = E_p(B) - E_p(A)$$

$$\Rightarrow W_{A\to B}(\vec{F}) = \Delta E_p = -W_{A\to B}(\vec{P})$$

V.2 Energie potentielle élastique

L'énergie potentielle élastique est l'énergie potentielle emmagasinée dans un corps à caractère élastique, (ressort fig.11), lorsque ce dernier est compressé ou étiré par rapport à sa position naturelle.

$\delta W(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{dl} = -kxdx$

$\delta W(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{dl} = -d(\frac{1}{2}kx^2)$

$W(\vec{F}) = \int_A^B \delta W(\vec{F}) = -(\frac{1}{2}kx^2)\Big|_{x_A}^{x_B}$

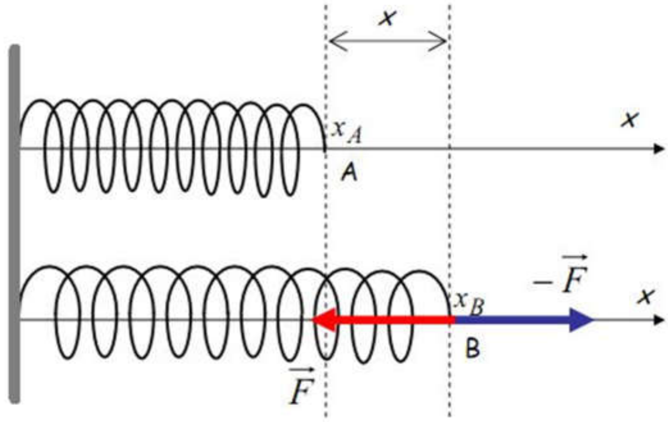


Fig. 10

$W(\vec{F}) = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2) = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 = -(E_p(B) - E_p(A))$

$$W(\vec{F})_{élastique} = -\Delta E_{p_{élastique}}$$

VI. Energie mécanique

Lorsqu'un point matériel M se déplace dans un champ de forces, son énergie mécanique noté E_m définie par la relation

$$E_m = E_C + E_P$$

Où

E_C : est l'énergie cinétique

E_p : est l'énergie potentielle

VI.1 Théorème de l'énergie mécanique:

Si un système n'est soumis à aucune force non conservatrice (pas de force de frottement), ou considéré isolé, l'énergie mécanique se conserve:

$$E_m = Cst \Longrightarrow E_m(B) - E_m(A) = 0$$

VII.Force dérivant d'un potentiel-Forces conservatives

On dit qu'une force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel s'il existe une fonction scalaire $E_p = f(x, y, z)$ telque: $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$.

Si l'énergie potentielle E_p est connue, cette expression nous permet de déterminer l'expression de la force.

- Si c'est l'expression de la force qui est connue, une énergie potentielle ne peut lui être associée que si la relation: $\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$

- Lorsqu' une particule n'est soumise qu'à une force dérivant d'un potentiel :

$$W_{A\to B} = \Delta E_C = -\Delta E_p \Rightarrow \frac{1}{2}m\,.v_B^2 - \frac{1}{2}m\,.v_A^2 = -(E_p(B) - E_p(A))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\,.v_B^2 + E_p(B) = \frac{1}{2}m\,.v_A^2 + E_p(A)$$

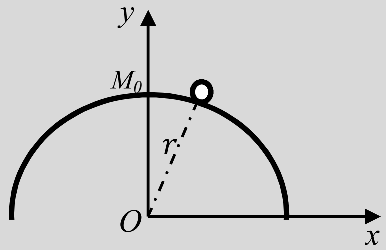
$$E_M(A) = E_M(B)$$

$$E_M(A) - E_M(B) = 0 \Rightarrow \Delta E_M = 0$$

VIII. Applications

Exercice 1

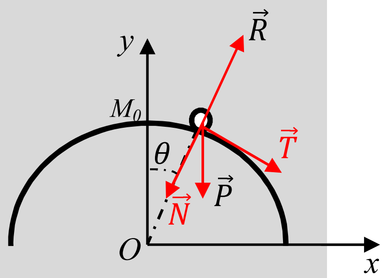
On lâche sans vitesse initiale, à l'instant t=0, une bille ponctuelle de masse m en un point M_0 (sommet) de la face convexe d'une sphère de centre O et de rayon r, sur laquelle elle glisse sans frottement.



a) En utilisant le PFD, trouver les équations différentielles du mouvement
b) Trouver l'expression de la force de réaction de la sphère sue la bille.
c) Déterminer l'angle pour lequel la bille quitte la surface de la sphère. Déduire dans cette position la vitesse de la bille.

Solution

a) les équations différentielles du mouvement.



En appliquant le PFD :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

On projette cette équation dans le repère de Frenet $(\vec{T},\vec{N})$:

$$\begin{cases} 0 + P_T = ma_T \\ P_N - R = ma_N \end{cases}$$

$$\begin{cases} P\sin\theta = m\dfrac{dv}{dt} \\ P\cos\theta - R = m\dfrac{v^2}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mg\sin\theta = m\dfrac{dv}{dt} \\ mg\cos\theta - R = m\dfrac{v^2}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g\sin\theta = \dfrac{dv}{dt} \ldots\ldots\ldots (*) \\ R = mg\cos\theta - m\dfrac{v^2}{r} \ldots\ldots\ldots (**) \end{cases}$$

b) l'expression de la force de réaction de la sphère sue la bille.

Pour trouver la valeur la force R il faut trouver v^2 à partir de l'équation (*) et la remplacée dans l'équation (**)

$gsin\theta = \frac{dv}{dt}$ on multiplie par $d\theta$

$$gsin\theta d\theta = d\theta\frac{dv}{dt} \Longrightarrow -gd(cos\theta) = \frac{d\theta}{dt}dv = \dot{\theta}dv = \frac{v}{r}dv \Longrightarrow -grd(cos\theta) = vdv \Longrightarrow$$

$$-gr\int_0^\theta d(cos\theta) = \int_0^\theta vdv \Longrightarrow -gr|cos\theta|_0^\theta = \frac{1}{2}|v^2|_0^v \Longrightarrow v^2 = 2rg(1 - cos\theta)$$

$$R = mgcos\theta - m\frac{2rg(1 - cos\theta)}{r} \Longrightarrow R = mgcos\theta - 2mg + 2mgcos\theta$$

$$\boldsymbol{R = mg(3cos\theta - 2)}\ (N)$$

c) l'angle pour lequel la bille quitte la surface de la sphère.

La bille quitte la surface de la sphère donc il y a pas de contact donc pas de force de réaction R

$$R = mg(3cos\theta - 2) = 0 \Longrightarrow cos\theta = \frac{2}{3} \Longrightarrow cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 48{,}2°$$

- la vitesse de la bille lorsqu'elle quitte la surface :

$$v^2 = 2rg(1 - cos\theta) = 2Rg - 2Rg\frac{2}{3} = \frac{2rg}{3} \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{v = \sqrt{\frac{2rg}{3}}\ (ms^{-1})}$$

Exercice 2

Un petit morceau de glace (M) de masse (m) glisse sans frottement sur la surface externe d'un igloo qui est une demi-sphère de rayon r dont la base est horizontale.

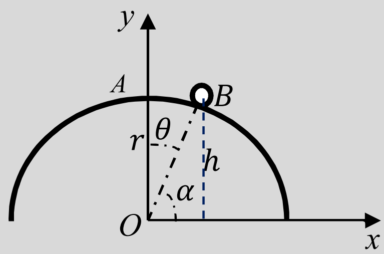
A t=0 il est lâché sans vitesse initiale.

a) Trouver l'expression de la vitesse au point B en fonction de g, r et α

b) En utilisant le PFD, déterminer l'expression de R réaction de l'igloo sur (M) au point B en fonction de la vitesse v_B.

c) A quelle hauteur, (M) quitte-t-il la sphère ?

d) A quelle vitesse (M) arrive-t-il à l'axe (ox) ?



Solution

a) l'expression de la vitesse au point B en fonction de g, r et α.

On a $v_A = 0\ et\ v_B = ?$

En appliquant le théorème de l'énergie mécanique entre la position A et la position B :

$E_m(A) = E_m(B) \Longrightarrow E_C(A) + E_P(A) = E_C(B) + E_P(B)$

$v_A = 0 \Longrightarrow E_C(A) = 0 \Longrightarrow$

$mgr = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh \Longrightarrow v_B^2 = 2gr - 2gh = 2g(r-h)$; $\sin\alpha = \frac{h}{r} \Longrightarrow h = r\sin\alpha$ et $\cos\theta = \frac{h}{r} \Longrightarrow h = r\cos\theta$

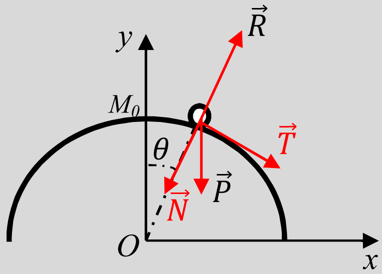
$$\boldsymbol{v_B = \sqrt{2g(r - r\cos\theta)} = \sqrt{2gr(1-\cos\theta)}}$$

$$\boldsymbol{v_B = \sqrt{2g(r - r\sin\alpha)} = \sqrt{2gr(1-\sin\alpha)}}$$

b) l'expression de R réaction de l'igloo sur (M) au point B en fonction de la vitesse v_B.

$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (1)$

On projette cette équation dans le repère de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$:



$$\begin{cases} 0 + P_T = ma_T \\ P_N - R = ma_N \end{cases}$$

$$\begin{cases} P\sin\theta = m\dfrac{dv}{dt} \\ P\cos\theta - R = m\dfrac{v^2}{r} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} mg\sin\theta = m\dfrac{dv}{dt} \\ mg\cos\theta - R = m\dfrac{v^2}{r} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} g\sin\theta = \frac{dv}{dt} \ldots\ldots\ldots (*) \\ R = mg\cos\theta - m\frac{v_B^2}{r} \ldots\ldots\ldots (**) \end{cases}$$

De l'équation (**)

$$\boldsymbol{R = mg\cos\theta - m\frac{v_B^2}{r}}$$

c) la hauteur pour laquelle (M) quitte la sphère,(M) quitte la surface il y apas de contact R=0)

$R = mg\cos\theta - m\frac{v_B^2}{r}$; $v_B^2 = 2gr(1-\cos\theta) \Longrightarrow R = mg\cos\theta - m\frac{2gr(1-\cos\theta)}{r} = 0 \Longrightarrow$
$mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) = 0 \Longrightarrow mg\cos\theta - 2mg + 2mg\cos\theta = 0 \Longrightarrow \cos\theta + 2\cos\theta$

$$= 2 \Longrightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} = \frac{h}{r} \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{h = \frac{2}{3}r}$$

d) La vitesse avec laquelle (M) arrive à l'axe (ox) v_C =?.

Toujours avec le théorème de l'énergie mécanique :

$E_m(A) = E_m(C) \Longrightarrow E_C(A) + E_P(A) = E_C(C) + E_P(C)$

$$E_P(A) = mgr, E_P(C) = 0$$

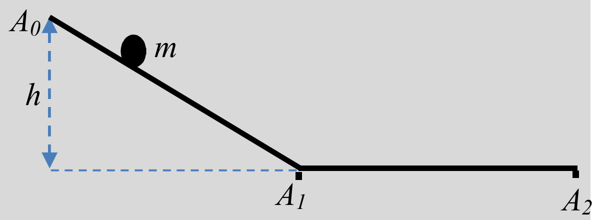
$$E_C(A) = 0, E_C(C) = \frac{1}{2}mv_C^2$$

$$mgr = \frac{1}{2}mv_C^2 \Longrightarrow v_C^2 = 2gr \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{v_C = \sqrt{2gr}\ (ms^{-1})}$$

Exercice 3

Une particule M de masse m, lâchée en A_0, sans vitesse initiale glisse sans frottements sur un plan incliné suivant A_0A_1.



Calculer la distance d'arrêt $D = A_1A_2$ sachant qu'à partir de A_1 interviennent des frottements de glissement de coefficient f sur le plan horizontal.

1ère étape : Entre A_0 et A_1 (**Pas de frottement**)

Il y a Conservation de l'énergie mécanique

$$E_m(A_0) = E_m(A_1) \Longrightarrow E_C(A_0) + E_P(A_0) = E_C(A_1) + E_P(A_1) \Longrightarrow$$

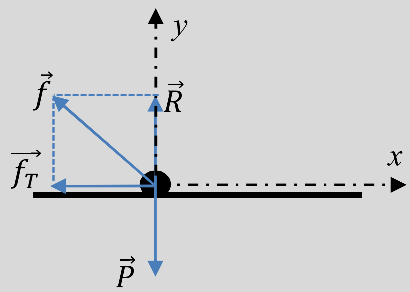
$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2$ ……….(1)

2ème étape : Entre A_1 et A_2 (**avec frottement**). A partir de A_1, l'énergie mécanique diminue jusqu'à s'annuler en A_2

PFD appliqué à la particule M dans $\Re_G$ supposé galiléen 2 forces

$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$ (1)

$\Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{f_T} = m\vec{a}$



$f = \frac{f_T}{R} \Longrightarrow f_T = fR$

On projette l'équation (1) sur les axes (*ox*) et (*oy*)

$\begin{cases} -f_T = ma \\ R - P = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{R = P = mg}$

$f_T = fmg$

$W(f_T) = -f_T D = -fmgD$

$\Delta E_{m_1}^{\ 2} = W(\vec{F}) = W(\vec{f_T}) = -fmgD$

$\Delta E_{m_1}^{\ 2} = (0 + 0) - \left(0 + \frac{1}{2}mv_1^2\right) = -fmgD \Longrightarrow$

$-\frac{1}{2}mv_1^2 = -mgh\ d'après l'équation(1)$

$-mgh\ = -fmgD \Longrightarrow$

$\boldsymbol{D = \frac{h}{f}}$

Supports bibliographiques

1) Belfedal Abdelkader, Kara-Zaitri Kamel, « PHYSIQUE MECANIQUE (Rappels de cours et exercices résolus)» 2012
2) Alain Gibaud, Michel Henry « COURS DE PHYSIQUE MÉCANIQUE DU POINT (Cours et exercices corrigés) » 2nd éd. Dunod 2007.
3) Anne-Emmanuelle Badel, François Clausset « PHYSIQUE TOUT-EN-UN COURS ET EXERCICES CORRIGES (1re année MPSI - PCSI – PTSI) » 3rd éd Dunod 2002.
4) Michel Henry, Nicolas delorme, « MINI MANUEL DE MECANIDUE DU POINT (Cours+ Exo) » Dunod 2008.
5) جدي حسين " الفيزياء في الجامعة ، ميكانيك الجذع المشترك (ملخص للدروس- تمارين محلولة- مسائل وامتحانات شاملة)" 1997 .
6) A. Gibaud, M. Henry ; Cours de physique - Mécanique du point - Cours et exercices corrigés; Dunod, 2007.
7) P. Fishbane et al., "PHYSICS FOR SCIENTISTS AND ENGINEERS WITH MODERN PHYSICS", 3rd Ed. ; 2005.
8) P. A. Tipler, G. Mosca ; "PHYSICS FOR SCIENTISTS AND ENGINEERS" 6th Ed., W. H. Freeman Company, 2008
9) Ziani Nossair, BOUTAOUS AHMED, « MECANIQUE DU POINT MATERIEL, COURS et EXERCICES », polycopie du cours, Univ. Oran, 2015/2016
10) AHMED FIZAZI, « CAHIER DE LA MECANIQUEDU POINT MATERIEL », (Version en Français), COURS SIMPLIFIES, 100 EXERCICES CORRIGES, Univ. Bachar.
11) H. RABOUHI, « POLYCOPIE DE COURS SUR LA MECANIQUE DU POINT », Univ- Bejaia.
12) http://www.physagreg.fr/mecanique-24-systeme-isole-a-2-corps.php
13) https://femto-physique.fr/mecanique/cinematique.php