République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Ghardaia

Faculté des Sciences et de Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Projet de fin d'étude en vue de l'obtention de diplôme de

MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique
Spécialité : Analyse Fonctionnelle et applications

THÈME

L'étude de quelques tenseurs particuliers

Présenté par :

LAKEHAL Mebarka

Soutenu le 04/07/2019 devant le jury :

Président :	M.Brahim Merabet	M.C.B (Univ. Ghardaia)
Encadreuse :	Mme.Yasmina Khellaf	M.A.A (Univ. Ghardaia)
Examinateur :	M. Abdel Ouahab Chikh Salah	M.C.B (Univ. Ghardaia)

Année Universitaire : 2018/2019

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ceux qui m'ont soutenu au long de mes études, qui m'ont toujours poussé vers le chemin du savoir, à ma source d'amour et d'affection, les deux êtres les plus chères au monde.

À L'homme mon prècieux offre du dieu,qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect mon cher père : ***Mohammed***

À La femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non âmes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse :mon adorable mère offre du dieu,qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect :
ma chére mère : ***Safia***

À mes frères :
Salah , Bachir , Abdel Kader.

À ma grande famille LAKEHAL

À mes amies :
Aicha,Asma,Hadjer,Sihem,Roumaissa,Mordia,Chahra,Bouchra

À mes amis de l'université de GHARDAIA.

À tous les étudiants de math & info .

À mes collèges de CEM Laiourette Miloud.

À tous ceux qui me sont cher(e)s.

Mebarka Lakehal
Ghardaia 2019

Remerciement

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à DIEU tout puissant, de m'avoir donner le courage et la force de mener à terme ce projet. Qui m'a ouvert les portes du savoir.

Je remercie ma encadreuse Madame : **Yasmina Khellaf** *pour le sujet qu'il m'a proposé et pour l'attention et la disponibilité dont il a su faire preuve au long de la préparation de ce mémoire.*

Je remercie sincèrement les membres de jury Mes sieurs **Brahim Merabet** *et* **Abdel Ouahab Chikh Salah** *pour avoir accepté du juger ce modeste travail.*

Je remercie les enseignants de département des mathématiques et Informatiques qui nous ont encadré depuis notre première année universitaire.

Merci à tous ceux qui m'ont enseigné en primaire, collège, lycée, université et ailleurs, et tous les personnels de ces établissements, Merci à tous les mathématiciens...

Merci mes parents , mes amis, ma famille et mes cousines merci à tout ceux qui ont contribué de près ou de loin dans ce travail.

Mebarka Lakehal
Ghardaia 2019

Résumé,Abstract

Résumé

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'étude de quelques tenseurs particuliers qui jouent un rôle très important dans la géométrie différentielle.
Le calcul des tenseurs que nous avons développé et qui est marqué par la méthode de tenseur métrique, les symboles de Christoffel, le tenseur de Riemann et le tenseur de Ricci a le mérite d'être illustré par des exemples sur des surfaces particulières. Qui ont été confirmés à partir d'une implémentation effectuée sur le logiciel MATHEMATICA.

Mots clés : Les tenseurs, Symboles de Christoffel, Tenseur métrique,Tenseur de Riemann Christoffel, Tenseur de Ricci.

Abstract

In this thesis we are interested in the study of some particular tensors which play an important rule in differential geometry.
Tensors calculus which we have developped and which is marked by tensor metric method, the symbols of Christoffel ,Riemann tensor and Ricci tensor , has the merite of being illustrated by examples in the particulars tensors. which have been confirmed from an implemmentation carried out on the Software MATHEMATICA.

Keywords : The tensors, metric tensor, Christoffel symbols,Riemann Christoffel tensor, Ricci tensor.

Table des matières

Notations

E_n : Espace de dimension.
ds^2 : La métrique Riemannienne.
g_{ij} : Tenseur métrique.
g^{ij} : Tenseur métrique conjugué.
Γ_{ijk} : Symbole de Christoffel de premier espèce.
Γ_{ij}^{k} : Symbole de Christoffel de deuxième espèce.
R_{ijk}^{α} :Tenseur de Riemann Christoffel (La courbure).
$R_{ij\alpha}^{\alpha} = R_{ij}$:Tenseur de Ricci.

Introduction

En 1887, Le professeur Gregorio Ricci de l'Université de Padoue (Italie) a présenté les tenseurs principalement sous forme d'extension de vecteurs. Une quantité ayant seulement une magnitude est appelée scalaire, et une quantité ayant une magnitude et une direction, appelée vecteur. Mais certaines quantités sont associées à deux directions ou plus, une telle quantité est appelée tenseur. en un point d'un solide élastique, est un exemple de tenseur qui dépend de deux directions, l'une normale à la surface et l'autre, celle de la force appliquée sur celle-ci.

Les tenseurs ont des applications dans les domaines de la géométrie riemannienne, de la mécanique, de l'élasticité, de la théorie de la relativité, de la théorie électromagnétique et de nombreuses autres disciplines des sciences et de l'ingénierie.

Le but fixé dans ce mémoire est de présenter les tenseurs dans un résumé très clair qui donne une meilleure compréhension sur eux.

Notre travail s'articule autour de trois points essentiels :

- 1^{er} chapitre : Il est consacré au rappel des notions de base essentielles à la compréhension de la géométrie . Nous définissons la notion de l'espace n dimensionnel,les indices supérieurs et inférieurs, la somme d'Einstein,..., les transformations des coordonnées, le tenseur covariant contravariant d'ordre 1,d'ordre 2, d'ordre mixte...et nous abordons à présenter le tenseur métrique qui joue un rôle fondamental pour définir les tenseurs particuliers que nous allons les voir dans le chapitre suivante.

- $2^{éme}$ chapitre : il est consacrer à définir une notion très importante sur la déterminations des tenseurs particulier, ce sont les symboles de Christoffel,et on le suit par la dérivée covariante et contravariante des tenseurs.

- $3^{éme}$ chapitre : Il constitue le coeur du travail où nous donnons avec beaucoup de détails l'objectif essentiel qui consiste la définition des tenseurs particuliers : le tenseur de Riemann et le tenseur de Ricci.

1 Préliminaires

1.1 Espace de n dimension

Dans un espace rectangulaire de dimension 3 les coordonnées d'un point sont notés (x, y, z) il est convenable d'écrire (x^1, x^2, x^3) pour (x, y, z).les cordonnées d'un point dans un espace de dimension 4 sont données par (x^1, x^2, x^3, x^4).

En général les cordonnées d'un point sur un espace de n dimension sont données par $(x^1, x^2, ...x^n)$ tel que l'espace de n dimension est noté par E_n.

1.2 Les indices Supérieurs et Les indices Inférieurs

Dans le symbole A^{ij}_{kl} , les indices i, j sont écrits dans une position supérieure sont appelés les indices Supérieures et k, l sont écrits dans une position inférieure sont appelés les indices inférieurs.

1.3 La convention de sommation d'Einstein

considérons la somme des séries $S = a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{i=1}^{n} a_ix^i$.
On utilisant la convention de sommation on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{n} a_ix^i = a_ix^i$$

"cette convention est appelée la convention de sommation d'Einstein". [4]

1.4 Indice facteur

toute indice répété dans un terme donné est appelée un indice facteur.

Par exemple l'expression $a_i x^i$ tel que i est l'indice facteur ; donc

$$a_i x^i = a_1 x^1 + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

[4]

1.5 Indice Libre

toute indice apparaitre une seule fois dans un terme donné est appelés un indice libre.

Par exemple on considérons l'expression $a_i^j x^i$ où j est indice libre

1.6 Delta Krönecker

Le symbole δ_j^i est appelé Delta Krönecker (un mathématicien allemand Leopold Krönecker, 1823-91 A.D.) est défini par :

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 \ si \ i = j \\ 0 \ si \ i \neq j \end{cases}$$

De même δ_{ij} et δ^{ij} définis comme

$$\delta^{ij} = \begin{cases} 1 \ si \ i = j \\ 0 \ si \ i \neq j \end{cases}$$

et

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ si \ i = j \\ 0 \ si \ i \neq j \end{cases}$$

propriétés :
1. si $x^1, x^2, ..., x^n$ sont les coordonnées indépendantes, donc

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = 0 \text{ si } i \neq j \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = 1 \text{ si } i = j \tag{1.1}$$

cela implique que,

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$$

on peut écrire également $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^k}\dfrac{\partial x^k}{\partial x^j} = \delta_j^i$.

2. $\delta_i^i = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 + ... + \delta_n^n$ (par convention de l'addition)

=1+1+1+...+1

=n

3. a$^{ij}\delta_k^j = a^{ik}$

Depuis
$a^{3j}\delta_2^j = a^{31}\delta_2^1 + a^{32}\delta_2^2 + a^{33}\delta_2^3 + ... + a^{3n}\delta_2^n$(comme j est indice facteur)

$= a^{32}$ (comme $\delta_2^1 = \delta_2^3 = ... = \delta_2^n = 0$ et $\delta_2^2 = 1$)
4. $\delta_j^i \delta_k^j = \delta_k^i$

$= \delta_1^i \delta_k^1 + \delta_2^i \delta_k^2 + \delta_3^i \delta_k^3 + ... + \delta_i^i \delta_k^i + ... + \delta_n^i \delta_k^n$

$= \delta_i^k$ (comme $\delta_1^i = \delta_2^i = \delta_3^i = ... = \delta_n^i = 0$ et $\delta_i^i = 1$) [4]

2 Algèbre des tenseurs

2.1 La transformation des coordonnées

dans un espace de trois dimension, les coordonnées d'un point sont (x, y, z) où x, y, z sont réelles nombres. Il est commode d'écrire (x^1, x^2, x^3) pour (x, y, z) ou simplement x^i où $i = 1, 2, 3$. De même dans l'espace de n dimension , les coordonnées d'un point sont les n variables indépendants $(x^1, x^2, ..., x^n)$ dans un système de coordonnées$X$, soient $(\overline{x}^1, \overline{x}^2, ...\overline{x}^n)$ sont les coordonnée du même point dans dans un système de coordonnées$Y$.

soient $(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \cdots, \overline{x}^n)$ sont des fonction à valeur singulière de $x^1, x^2, \cdots, x^n$.

$$\begin{aligned}
\overline{x}^1 &= \overline{x}^1(x^1, x^2, \dots, x^n) \\
\overline{x}^2 &= \overline{x}^2(x^1, x^2, \dots, x^n) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \quad \quad \vdots \\
\overline{x}^n &= \overline{x}^n(x^1, x^2, \dots, x^n)
\end{aligned}$$

ou bien

$$\mathcal{T} : \overline{x}^i = \overline{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n); i = 1, 2, ..., n \tag{2.1}$$

La résolutions de ces équations exprimant x^i des fonctions de $\overline{x}^1, \overline{x}^2, ..., \overline{x}^n$,On obtient

$$x^i = x^i(\overline{x}^1, \overline{x}^2, ..., \overline{x}^n); \quad i = 1, 2, ..., n \tag{2.2}$$

les équations (2.1) et (2.2) sont appelées la transformation de système des coordonnées un à l'autre .

Les trois systèmes des coordonnées curvilignes les plus communs sont présentés ci-dessous .

Dans chaque cas, une notation $\ll inverse \gg estutilisée : lesdeuxoutroisdimensionnelledusystèmec$ définis par$\mathcal{T}$ qui la prend dans un système rectangulaire $(\overline{x}^i)$ de la même dimension.

Coordonnées polaires :

[2] Posons $(\overline{x}^1, \overline{x}^2)$ et $(x^1, x^2) = (r, \theta)$, sous la restriction $r > 0$, Alors :

$$\mathcal{T} : \begin{cases} \overline{x}^1 = r\cos\theta \\ \overline{x}^2 = r\sin\theta \end{cases} \qquad \mathcal{T}^{-1} : \begin{cases} r = \sqrt{(\overline{x}^1)^2 + \overline{x}^2)^2} \\ \theta = \tan^{-1}(\dfrac{\overline{x}^2}{\overline{x}^1}) \end{cases} \tag{2.3}$$

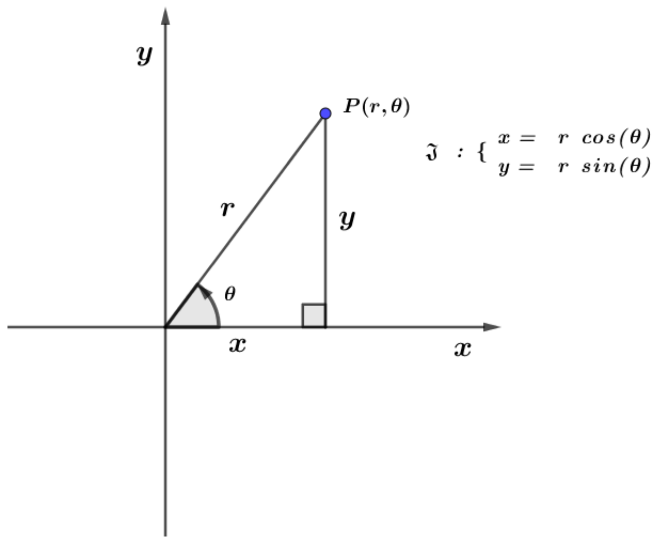


Figure 1 : Les coordonnées polaires

Coordonnées cylindriques :

Si on a $(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^2)$ et $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, z)$, où $r > 0$

$$\mathcal{T} : \begin{cases} \overline{x}^1 = r\cos\theta \\ \overline{x}^2 = r\sin\theta \\ \overline{x}^3 = z \end{cases} \qquad \mathcal{T}^{-1} : \begin{cases} r = \sqrt{(\overline{x}^1)^2 + \overline{x}^2)^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\overline{x}^2}{\overline{x}^1}\right) \\ z = \overline{x}^3 \end{cases} \tag{2.4}$$

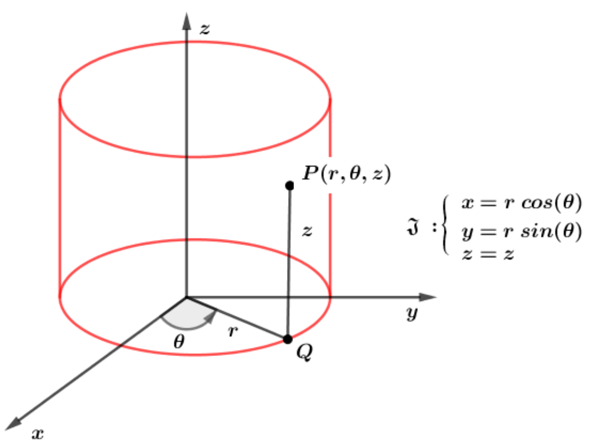


Figure 2 : Les coordonnées cylindriques

Coordonnées sphériques :
Si $(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^2)$ et $(x^1, x^2, x^3) = (\rho, \varphi, \theta)$, où $\rho > 0$ et $0 \leq \varphi \leq \pi$,

$$\mathcal{T} : \begin{cases} \overline{x}^1 = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ \overline{x}^2 = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ \overline{x}^3 = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad \mathcal{T}^{-1} : \begin{cases} \rho = \sqrt{(\overline{x}^1)^2 + \overline{x}^2)^2 + \overline{x}^3)^2} \\ \varphi = \cos^{-1}\left(\dfrac{\overline{x}^3}{\sqrt{(\overline{x}^1)^2 + (\overline{x}^2)^2 + (\overline{x}^3)^2}}\right) \\ \theta = tan^{-1}\left(\dfrac{\overline{x}^2}{\overline{x}^1}\right) \end{cases} \tag{2.5}$$

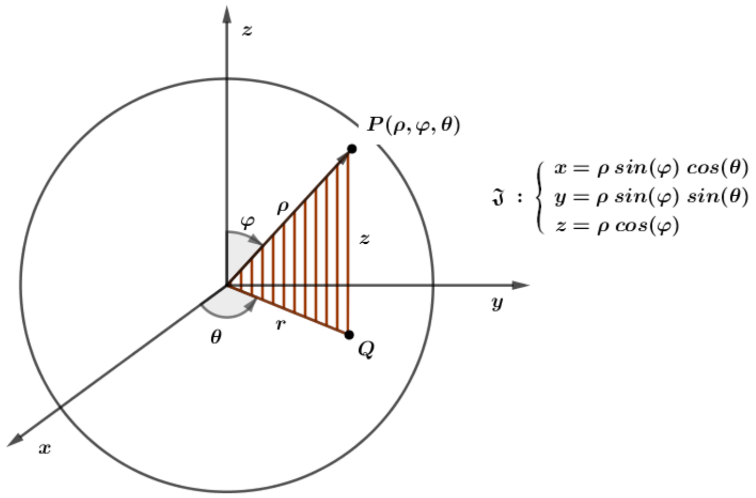


Figure 3 : Les coordonnées sphériques

Note : θ appelée Angle polaire et φ appelée Angle équatoriale.

Le Jacobien :
Les n^2 premiers dérivées partielles $\dfrac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j}$ de (2.2) arrange normalement dans une matrice carrée $n \times n$ (La matrice Jacobienne) [2]

$$\jmath = \mid J \mid = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^n} \\ \dfrac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} \tag{2.6}$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$ soit un système des coordonnées curvilignes $\overline{x}^i$ défini des coordonnées rectangulaires x^ipar les équations

$$\mathcal{T} : \begin{cases} \overline{x}^1 = x^1 x^2 \\ \overline{x}^2 = (x)^2 \end{cases}$$

tel que $\dfrac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^1} = x^2, \dfrac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^2} = x^1, \dfrac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^1} = 0$ et $\dfrac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^2} = 2x^2$,Le Jacobien de $\mathcal{T}$ est

$$\jmath = \begin{vmatrix} x^2 & x^1 \\ 0 & 2x^2 \end{vmatrix}$$

$\mathcal{T}$ est localement bijectif sur un ouvert U dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\jmath \neq 0$ à chaque point de U si $\jmath \neq 0$ dans U et $\mathcal{T}$ est de classe C^2 dans U alors (2.1) admit un changement des coordonnées pour U

Remarque 2.1. donc la condition pour qu'une application admis un changement des coordonnées c'est que le Jacobien s'annule pas.

2.2 Les vecteurs covariants et vecteurs contravariants (tenseur d'ordre un)

Soient $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ les coordonnées d'un point dans un système de coordonné X et $(\overline{x}^1, \overline{x}^2, ..., \overline{x}^n)$ les coordonnées du même point dans un système de coordonné Y.

Soit $\mathrm{A}^i, i = 1, 2, ..., n$. n fonctions des coordonnées $x^1, x^2, \ldots, x^n$ dans un système de coordonné X.

Si les quantités A^i sont transformées à $\overline{\mathrm{A}^i}$ dans un système de coordonné Y, donc par la loi de transformation on a,

$$\overline{\mathrm{A}}^j = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j} \mathrm{A}^j \text{ ou } \mathrm{A}^j = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i} \overline{\mathrm{A}}^i$$

donc A^i sont appelées les composants d'un vecteur contravariant.
Soit $\mathrm{A}_i, i = 1, 2, ..., n$. n fonctions des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans un système de coordonné X.

Si les quantités A_i sont transformées à $\overline{\mathrm{A}_i}$ dans un système de coordonné Y donc,

$$\overline{\mathrm{A}}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i} \mathrm{A}_j \text{ ou } \mathrm{A}_j = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j} \overline{\mathrm{A}}_i$$

Donc A_i sont appelées les composants d'un vecteur covariant .
le vecteur contravariant (ou covariant) s'appelle également un tenseur contravariant (ou covariant) d'ordre Un.

Exemple. Si x^i sont les coordonnées d'un point dans un espace de n dimension donc dx^i sont les composants d'un vecteur covariant.

soient $x^1, x^2, ..., x^n$ ou x^i sont des coordonnées dans un système de coordonnée X et, $\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^n$ ou $\overline{x}^i$ sont des coordonnées dans un système de coordonné Y.
Si

$$\overline{x}^i = \overline{x}^i(x^1, x^2, , ..., x^n)$$

$$d\overline{x}^i = \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^i} dx^1 + \frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^i} dx^2 + ... + \frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^i} dx^n$$

$$d\overline{x}^i = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i} dx^j$$

C'est loi de transformation de vecteur covariant. Ainsi dx^i sont des composants d'un vecteur covariant.

2.3 Tenseur contravariant d'ordre 2

Soit $\mathrm{A}^{ij}(i, j = 1, 2, ..., n)$ n^2 fonctions des coordonnées $x^1, x^2, \ldots, x^n$ dans un système de coordonné X et $\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^n$ dans un système de coordonné Y.alors par la loi de la transformation

$$\overline{\mathrm{A}}^{ij} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l} \mathrm{A}^{kl}$$

alors A^{ij} s'appellent les composants du tenseur contravariant de rang Deux.

2.4 Tenseur covariant d'ordre 2

Soit $\mathrm{A}_{ij}(i, j = 1, 2, ..., n)$, n^2 fonctions des coordonnées $x^1, x^2, \ldots, x^n$ dans un système de coordonné X et $\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^n$ dans un système de coordonné Y.alors par la loi de la transformation

$$\overline{\mathrm{A}}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} \mathrm{A}_{kl}$$

tel que A_{ij} sont appelés les composants du tenseur covariant d'ordre Deux.

2.5 Tenseur mixte d'ordre 2

soit $A^i_j(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ n^2 des fonctions de coordonnées $x^1, x^2, \cdots, x^n$ dans un système de coordonné X. Si les quantités A^i_j transformé à $\overline{A^i_j}$ dans un système de coordonné Y de coordonnées $\overline{x}^1, \overline{x}^2, ..., \overline{x}^n$ puis selon la loi de la transformation

$$\overline{A^i_j} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} A^k_l$$

tel que A^i_jest appelés les composants du tenseur mixte d'ordre deux.

***Théorème* 2.1.** *Le delta Krönecker est un tenseur mixte d'ordre deux.*

Démonstration. Soient X et Y être deux systèmes du même ordre, a laissé le composante du delta de Krönecker dans le δ^i_j de système d'abscisse et $\overline{\delta}^i_j$le composant du delta de Krönecker dans un système de coordonné Y, puis selon la loi de la transformation

$$\overline{\delta}^i_j = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial \overline{x}^j} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^k}{\partial x^l} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j}\delta^k_l \tag{2.7}$$

ceci prouve que Krönecker δ^i_j est un tenseur mixte d'ordre deux □

2.6 Tenseur contravariant d'ordre r

soit $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}$, n^r fonctions de coordonnées $x^1, x^2, \ldots, x^n$ dans un système de coordonné X. Si les quantités $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}$ dans un système de coordonné Y ayant des coordonnées$\overline{x}^1, \overline{x}^2, ..., \overline{x}^n$.puis selon la loi de la transformation

$$\overline{A}^{i_1 i_2 \ldots i_r} = \frac{\partial \overline{x}^{i_1}}{\partial x^{p_1}}\frac{\partial \overline{x}^{i_2}}{\partial x^{p_2}}...\frac{\partial \overline{x}^{i_r}}{\partial x^{p_r}}A^{p_1 p_2 \ldots p_r}$$

Alors $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}$ s'appelant les composantes d'un tenseur contravariant d'ordre r.

2.7 Tenseur covariant d'ordre s

soit $A_{i_1 i_2 \ldots i_r}$,n^s fonctions de coordonnées $x^1, x^2, \ldots, x^n$ dans un système de coordonné X. Si les quantités $A_{j_1 j_2 \ldots j_s}$ dans un système de coordonné Y ayant des coordonnées$\overline{x}^1, \overline{x}^2, ..., \overline{x}^n$. puis selon la loi de la transformation

$$\overline{A}_{j_1 j_2 \ldots j_s} = \frac{\partial x^{q_1}}{\partial \overline{x}^{j_1}}\frac{\partial x^{q_2}}{\partial \overline{x}^{j_2}}...\frac{\partial x^{q_s}}{\partial \overline{x}^{j_s}}A_{q_1 q_2 \ldots q_s}$$

Alors $A_{j_1 j_2 \ldots j_s}$ s'appelant les composantes d'un tenseur covariant d'ordre s. [4]

2.8 Tenseur mixte d'ordre r+s

soit $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}$ n^{r+s} fonctions de coordonnées $x^1, x^2, \ldots, x^n$ dans un système de coordonné X. Si les quantités $A_{j_1 j_2 \ldots j_s}$ dans un système de coordonné Y ayant des coordonnées$\overline{x}^1, \overline{x}^2, ..., \overline{x}^n$. puis selon la loi de la transformation

$$\overline{A}^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} = \frac{\partial \overline{x}^{i_1}}{\partial x^{p_1}}\frac{\partial \overline{x}^{i_2}}{\partial x^{p_2}}...\frac{\partial \overline{x}^{i_r}}{\partial x^{p_r}}\frac{\partial x^{q_1}}{\partial \overline{x}^{j_1}}\frac{\partial x^{q_2}}{\partial \overline{x}^{j_2}}...\frac{\partial x^{q_s}}{\partial \overline{x}^{j_s}}A^{p_1 p_2 \ldots p_r}_{q_1 q_2 \ldots q_s}$$

Alors $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}$ s'appelant les composantes d'un tenseur contravariant d'ordre $r+s$.
un tenseur du type $A^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}$ est connu comme tenseur du type (r, s), dedans (r, s), le premier compensant r indique que le rang du tenseur contravariant et la deuxième compensant s indique le rang du tenseur de covariant.
ainsi les tenseurs A_{ij} et A^{ij} sont le type $(0, 2)$ et les $(2, 0)$ respectivement tandis que le tenseur A^j_i est le type $(1, 1)$

Exemple. A^{ijk}_{lm} est un tenseur mixte de type $(3,2)$dans lequel tenseur contravariant de rang 3 et tenseur de covariant de rang 2, puis selon la loi du transformation

$$\overline{A}^{ijk}_{lm} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^\beta}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial x^b}{\partial \overline{x}^m}A^{\alpha\beta\gamma}_{ab}$$

2.9 Contraction d'un tenseur

Le processus d'obtenir un tenseur de plus d'ordre réduit (déduit par 2) en mettant un égal d'indice de covariant un indice contravariant et en effectuant l'addition indiquée est connu comme contraction.

En d'autres termes, si dans un tenseur nous mettons un contravariant et indice d'un covariant égaux, le processus s'appelle la contraction d'un tenseur. Par exemple, considérons un tenseur mixte A^{ijk}_{lm} de l'ordre Cinq. Alors par loi de transformation,

$$\overline{A}^{ijk}_{lm} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^m}A^{pqr}_{st}$$

mettez l'indice de covariant $l =$ l'indice contravariant i , de sorte que

$$\begin{aligned}\overline{A}^{ijk}_{im} &= \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^m}A^{pqr}_{st}\\ &= \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial x^p}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^m}A^{pqr}_{st}\\ &= \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^m}\delta^s_p A^{pqr}_{st} \quad tq\ \delta^s_p = \frac{\partial x^s}{\partial x^p}\\ \overline{A}^{ijk}_{im} &= \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^m}A^{pqr}_{pt}\end{aligned}$$

c'est la loi de la transformation du tenseur du rang 3. Tellement A^{ijk}_{im} est un tenseur d'ordre 3 et type$(1,2)$ tandis que A^{ijk}_{lm} est un tenseur d'ordre 5 et le type $(2,3)$ .ce signifie que la contraction réduit l'ordre du tenseur de deux.

2.10 Tenseurs symétriques

Un tenseur serait symétrique par rapport deux indices contravariants (ou deux indices covariants) si ses composants demeurent sans changement sur un échange des deux indices.

Par exemple

(1) Le tenseur A^{ij}est symétrique si $A^{ij} = A^{ji}$
(2) Le tenseur A^{ijk}_{lm}est symétrique si $A^{ijk}_{lm} = A^{jik}_{lm}$

2.11 Tenseurs anti-symétriques

Un tenseur serait anti-symétrique par rapport deux indices contravariants (ou deux indices covariants) si ses composants changent le signe sur un échange des deux index. par exemple

(i) Le tenseur A^{ij}est anti-symétrique si $A^{ij} = -A^{ji}$

(ii) Le tenseur A^{ijk}_{lm}est anti-symétrique si $A^{ijk}_{lm} = -A^{jik}_{lm}$

Exemple. Si $\phi = a_{jk}A^jA^k$. Montrons que on peut écrire $\phi = b_{jk}A^jA^k$ tel que b_{jk} est symétrique.

Étant donné

$$\phi = a_{jk}A^jA^k \tag{2.8}$$

en changeons les indices k et j

$$\phi = a_{kj}A^kA^j \tag{2.9}$$

Ajouter (4.18) et (4.19),

$$\begin{aligned} 2\phi &= (a_{jk} + a_{kj})A^jA^k \\ &= \frac{1}{2}(a_{jk} + a_{kj})A^jA^k \\ &= b_{jk}A^jA^k \end{aligned}$$

où $b_{jk} = \frac{1}{2}(a_{jk} + a_{kj})$
pour montrer que b_{jk} est symétrique
comme

$$\begin{aligned} b_{jk} &= \frac{1}{2}(a_{jk} + a_{kj}) \\ b_{kj} &= \frac{1}{2}(a_{kj} + a_{jk}) \\ &= \frac{1}{2}(a_{jk} + a_{kj}) \\ b_{jk} &= b_{kj} \end{aligned}$$

Donc,b_{jk} est symétrique.

2.12 Le tenseur symétrique Conjugué

considérons le tenseur covariant symétrique A_{ij} d'ordre 2 . Soit d dénoter le déterminant $|A_{ij}|$ avec les éléments A_{ij} c-à-d. $d = A_{ij}|$ et $d \neq 0$. Maintenant, définissez A^{ij}

par

$$A^{ij} = \frac{\text{Cofacteur de } A_{ij}}{d}$$

A^{ij} est un tenseur contravariant symétrique d'ordre 2 qui appelé le tenseur conjugué de A_{ij}.

3 Symboles de Christoffel et la Différenciation Covariante

3.1 Tenseur métrique et métrique Riemannienne

3.1.1 Tenseur métrique

La distance entre deux voisinages d'un point sont (x, y, z) et $(x + dx, y + dy, z + dz)$ est donnée par

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

. Dans un espace de n dimension, Riemann défini la distance ds entre deux voisinages d'un point x^i et $x^i + dx^i (i = 1, 2, ...n)$ par la forme différentielle quadratique suivante
$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{12}dx^1dx^2 + ... + g_{1n}dx^1dx^n + g_{12}(dx^2)dx^1 + g_{22}dx^2dx^n + ... + g_{n1}dx^ndx^1$

$+g_{n2}dx^ndx^2 + ... + g_{nn}(dx^n)^2$

$$ds^2 = g_{ij}dx^idx^j (i, j = 1, 2, ...n) \tag{3.1}$$

utilisant la convention de sommation.
où g_{ij} sont les fonctions du x^i de coordonnées tels que

$$g = \left|g_{ij}\right| \neq 0$$

La forme différentielle quadratique (4.20)) est appelée le Métrique Riemannien ou Métrique d'un espace de n dimension et tel que l'espace de dimension n est appelé Espace Riemannien et noté par E_n et g_{ij} appelé un tenseur Métrique ou tenseur fondamental.

***Théorème* 3.1.** *Le tenseur métrique g_{ij} est un tenseur covariant symétrique d'ordre* 2

3.1.2 Tenseur métrique conjugué

le tenseur métrique conjugué à g_{ij}, qui est écrit comme g^{ij}, est défini par

$$g^{ij} = \frac{B_{ij}}{g}$$

où B_{ij} est le cofacteur de g_{ij} en le déterminant $g = \left|g_{ij}\right| \neq 0$

Exemple. Trouvons la métrique et le composant du tenseur métrique et son conjugué est dans coordonnées cylindriques.

Soient (x^1, x^2, x^3) les coordonnées cartésiennes et $(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^3)$ sont les coordonnées de cylindrique d'un point .les coordonnées cylindriques sont données par
$x = rcos\theta,\ y = rsin\theta, z = z$ donc

$$x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z \text{ et } \overline{x}^1 = r, \overline{x}^2 = \theta, \overline{x}^3 = z \tag{3.2}$$

g_{ij} et $\overline{g_{ij}}$ sont les tenseurs métriques dans des coordonnées cartésiennes et des coordonnées de cylindrique respectivement.
le métrique dans la coordonnée cartésienne est donné par :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$ds^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2 \tag{3.3}$$

donc $\qquad ds^2 = g_{ij}dx^i x^j$

$=$g$_{11}\left(dx^1\right)^2 + g_{12}dx^1dx^2 + g_{13}dx^1dx^3 + g_{21}dx^2dx^1 + g_{22}\left(dx^2\right)^2 + g_{23}dx^2dx^3 + g_{31}dx^3dx^1$
$+ g_{32}dx^3dx^2 + g_{33}\left(dx^3\right)^3$
(3.4)

Comparer (3.3) et (3.1.2), nous avons
$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ et $g_{12} = g_{13} = g_{23} = g_{31} = g_{32} = 0$
Dans transformation
$\overline{g}_{ij} = g_{ij}\dfrac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^i}\dfrac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^j}$, puisque g_{ij} est covariant tenseur d'ordre 2 .$(i, j = 1, 2, 3)$
pour $i = j = 1$.

$$\overline{g}_{11} = g_{11}\left(\frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^1}\right)^2 + g_{22}\left(\frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^1}\right)^2 + g_{33}\left(\frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^1}\right)^2$$

tq $g_{12} = g_{13} = ... = g_{32} = 0$

$$\overline{g}_{11} = g_{11}\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + g_{22}\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + g_{33}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2$$

tq $x = rcos\theta, y = rsin\theta, z = z$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = cos\theta,\ \frac{\partial y}{\partial r} = sin\theta,\ \frac{\partial z}{\partial z} = 0$$

et $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$

$$\overline{g}_{11} = cos^2\theta + sin^2\theta + 0$$

$$\overline{g}_{11} = 1$$

pose $i = j = 2$.

$$\overline{g}_{22} = g_{11}\left(\frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^2}\right)^2 + g_{22}\left(\frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^2}\right)^2 + g_{33}\left(\frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^2}\right)^2$$

$$\overline{g}_{22} = g_{11}\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + g_{22}\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + g_{33}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

tq $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -rsin\theta, \frac{\partial y}{\partial \theta} = rcos\theta, \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$$

$$\begin{aligned} \overline{g}_{22} &= (-rsin\theta)^2 + (rcos\theta)^2 + 0 \\ &= r^2sin^2\theta + r^2cos^2\theta \\ \overline{g}_{22} &= r^2 \end{aligned}$$

pose $i = j = 3$.

$$\overline{g}_{33} = g_{11}\left(\frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^3}\right)^2 + g_{22}\left(\frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^3}\right)^2 + g_{33}\left(\frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^3}\right)^2$$

$$\overline{g}_{33} = g_{11}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + g_{22}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + g_{33}\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2$$

tq $\frac{\partial x}{\partial z} = 0, \frac{\partial y}{\partial z} = 0, \frac{\partial z}{\partial z} = 1$.Alors $\overline{g}_{33} = 1$
Donc ,$\overline{g}_{11} = 1, \overline{g}_{22} = r^2, \overline{g}_{33} = 1$
et $g_{12} = g_{13} = g_{23} = g_{31} = g_{32} = 0$

(1) le métrique dans les coordonnées cylindriques

$$ds^2 = \overline{g}_{ij}d\overline{x}^id\overline{x}^j \qquad i,j = 1,2,3$$

$$ds^2 = \overline{g}_{11}(d\overline{x}^1)^2 + \overline{g}_{22}(d\overline{x}^2)^2 + \overline{g}_{33}(d\overline{x}^3)^2$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta)^2 + d\theta^2$$

(2) Le premier fondamental tenseur est :

$$\overline{g}_{ij} = \begin{bmatrix} \overline{g}_{11} & \overline{g}_{12} & \overline{g}_{13} \\ \overline{g}_{21} & \overline{g}_{22} & \overline{g}_{23} \\ \overline{g}_{31} & \overline{g}_{32} & \overline{g}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

depuis

$$g = \left|\overline{g}_{ij}\right| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g = r^2$$

Le cofacteur de g est donné par
$B_{11} = r^2$ $,_{22} = 1$, $B_{33} = r^2$
et $B_{12} = B_{21} = B_{13} = B_{23} = B_{31} = B_{32} = 0$
Le deuxième fondamental tenseur ou tenseur conjugué est $g^{ij} = \dfrac{B_{ij}}{g}$.

$$g^{11} = \frac{\text{Cofacteur de } g_{11}}{g}$$
$$g^{11} = \frac{B_{11}}{g} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$
$$g^{22} = \frac{B_{22}}{g} = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2}$$
$$g^{33} = \frac{B_{33}}{g} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

et $g^{12} = g^{13} = g^{21} = g^{23} = g^{31} = g^{32} = 0$ Par le deuxième fondamental tenseur de forme matricielle est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.2 Les symboles de Christoffel

Le mathématicien allemands Elwin Bruno Christoffel a défini Les symboles :

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right), (i, j, k = 1, 2, ..., n)$$

sont appelés les symboles de Christoffel de premier ordre
et $\qquad \Gamma_{ij}^k = g^{kj}\Gamma_{ij}^l$
appelés les symboles de Christoffel de deuxième ordre , où g_{ij} est les composantes de tenseur métrique ou tenseur fondamental .

***Théorème* 3.2.** *Le symbole de Christoffel Γ_{ij}^ket Γ_{ijk} sont symétriques avec respect des indices i et j.*

Démonstration. Par le symbole de Christoffel de premier type

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

échanger i et j , nous

$$[ji, k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \quad tq \quad g_{ij} = g_{ji}$$

$$[ji, k] = [ij, k]$$

Par symbole de Christoffel de deuxième type

$$\Gamma_{ijk} = g^{kl}\Gamma^l_{ij}$$

$$= g^{kl}\Gamma^l_{ij} \quad tq \quad \Gamma^l_{ij} = \Gamma^l_{ji}$$

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$$

□

***Théorème* 3.3.**

(i) $\Gamma^m_{ij} = g_{km}\Gamma_{ijk}$

(ii) $\Gamma^j_{ik} + \Gamma^i_{jk} = \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$

(iii) $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = -g^{jl}\Gamma_{lki} - g^{im}\Gamma_{mkj}$

3.3 La dérivée Covariante d'un vecteur

L'expression de la dérivée covariante d'un vecteur est donnée par :

$$\nabla_\beta v^\alpha = \partial_\beta v^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}v^\mu \text{ tel que } \partial_\beta v^\alpha = \frac{\partial v^\alpha}{\partial v_\beta}$$

Exemple. Trouvons la dérivée covariante d'un vecteur exprimé par les coordonnées polaires.

$$v = (v^r, v^\theta)$$

où $e_r = \cos\theta e_x + \sin\theta e_y$ et $e_\theta = -r\sin\theta e_x + r\cos\theta e_y$

on a

$$\frac{\partial e_r}{\partial r} = 0 \Rightarrow \Gamma^\mu_{rr} = 0, \frac{\partial e_r}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \Gamma^\mu_{r\theta}e_\mu = \frac{1}{r}e_\theta \Rightarrow \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} \text{ et } \Gamma^r_{r\theta} = 0$$

Aussi :

$$\Gamma^r_{\theta r} = 0, \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{2}, \Gamma^r_{\theta\theta} = -r \text{ et } \Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0$$

.

Donc : $\nabla_r v^\alpha = \partial_r v^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu r}v^\mu = \partial_r v^r + \Gamma^r_{rr}v^r + \partial_r v^\theta + \Gamma^\theta_{\theta r}v^\theta$

$= \partial_r v^r + \partial_r v^\theta + \dfrac{1}{2}v^\theta$

Alors,

$$\nabla_r v^\alpha = \partial_r v^r + \partial_r v^\theta + \frac{1}{2}v^\theta$$

Pour se référer sur la dérivée covariante voir l'annexe page **35**

4 Tenseurs Particuliers

En physique ou en électronique (traitement de l'image) les composantes de tenseurs particuliers ont une signification par rapport à une base d'un espace vectoriel qui peut être par exemple l'espace $\mathbb{R}^3$ ou l'espace de Minkowski.

L'intérêt dans ce paragraphe vise à aborder l'étude de certains tenseurs dits de Riemann, de Ricci pour mieux cerner la détermination des géodésiques sous contraintes qui constitue à elle seule une difficulté majeure.

Ceci nous oblige à reprendre certaines opérations effectuées sur les tenseurs pour mieux cerner l'intérêt quant à leur utilisation.

4.1 Le tenseur de Riemann - Christoffel

La détermination de l'expression du tenseur de Riemann-Christoffel est une opération utile qui nous permet de mieux nous familiariser avec cette notion et bien apprécier l'importance des coefficients de Christoffel.

Écrivons la dérivée covariante d'un tenseur A_i par rapport à la composantex^i. Soit :

$$\nabla_j A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma^{\alpha} A_{\alpha} \tag{4.1}$$

Et

$$\nabla_{jk} A_i = \frac{(\nabla_j A_i)}{\partial x^k)} - \Gamma^{\alpha} \nabla_j A_{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{jk} \nabla_{\alpha} A_i \tag{4.2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma^{\alpha}_{ij} A_{\alpha} \right) - \Gamma^{\alpha}_{ik} \left(\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^j} - \Gamma^{A_{\beta}} \right) - \Gamma jk^{\alpha} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^{\alpha}} \Gamma^{\gamma}_{i\alpha} A_{\gamma} \right) \tag{4.3}$$

$$\nabla_{jk} A_i = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ij}}{\partial x^k} A_{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{ik} \frac{A_{\alpha}}{j} - \Gamma^{\alpha}_{ik} \frac{A_{\alpha}}{\partial x^k} + \Gamma^{\alpha}_{ik} \Gamma^{\beta}_{\alpha j} A_{\beta} \Gamma^{\alpha}_{jk} \frac{\partial A_i}{\partial x^{\alpha}} (A_i) \Gamma jk^{\alpha} \Gamma_{i\alpha^{\gamma} A_{\gamma}} (4.4)$$

Interchangeons les indices j et k dans l'équation(4.4), on trouve :

$$\nabla_{kj} A_i = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x^j} A_{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{ij} \frac{A_{\alpha}}{\partial x^k} - \Gamma^{\alpha}_{ij} \frac{A_{\alpha}}{\partial x^j} + \Gamma^{\alpha}_{ij} \Gamma^{\beta}_{\alpha k} A_{\beta} \Gamma^{\alpha}_{kj} \frac{i}{\partial x^{\alpha}} \Gamma kj^{\alpha} \Gamma_{i\alpha^{\gamma} A_{\gamma}} (4.5)$$

Soustrayons l'équation (4.5) de (4.4) :

$$\nabla_{jk} A_i - \nabla_{kj} A_i = \Gamma^{\alpha}_{ik} \Gamma^{\beta}_{\alpha j} A_{\beta} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ij}}{\partial x^k} A_{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{ij} \Gamma^{\beta}_{\alpha k} A_{\beta} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x^j} A_{\alpha} \tag{4.6}$$

Interchangeons les indices α et β dans le premier et le troisième terme de l'équation ci-dessus :

$$\nabla_{jk}A_i - \nabla_{kj}A_i = \left[\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{ij}}{\partial x^k} +_i k^{\Gamma^{\alpha}_{\beta j} - \Gamma^{\beta}_{ij}\Gamma^{\alpha}_{\beta k}}\right] A_\alpha$$

Posons :

$$R^{\alpha}_{ijk} = \left[\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^{\beta}_{ik}\Gamma^{\alpha}_{\beta j} - \Gamma^{\beta}_{ij}\Gamma^{\alpha}_{\beta k}\right] \tag{4.7}$$

On peut alors écrire :

$$\nabla_{jk}A_i - \nabla_{kj}A_i = A_\alpha R^{\alpha}_{ijk}$$

Le tenseur R^{α}_{ijk} est de Riemann-Christoffel. C'est également la courbure d'ordre 4 appelé également tenseur de la métrique $g_{ij}dx^i dx^j$.

α étant arbitraire donc en général :

$$R^{\alpha}_{ijk} \neq 0$$

***Proposition* 4.1.** *L'expression* (4.7) *ci-dessus peut se mettre sous une forme condensée qui est la différence de deux déterminants :*

$$R^{\alpha}_{ijk} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^k} & \dfrac{\partial}{\partial x^i} \\ \Gamma_{jki} & \Gamma_{jli} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma_{\alpha ki} & \Gamma_{\alpha li} \\ \Gamma_{jk\alpha} & \Gamma_{jl\alpha} \end{vmatrix}$$

Deux propriétés intéressantes de ce tenseur sont citées ci-dessus par deux théorèmes dont nous donnons les démonstrations.

Remarque 4.1. Dans un espace où les composantes de tenseur de Riemann Christoffel sont constantes, le tenseur de Riemann Christoffel est nul et réciproquement :

La première proposition est immédiate car si dans un système de coordonnées $\partial_\delta g_{uv} = 0$(en toute point) , alors $\Gamma^{\rho}_{uv} = 0$ et $\partial_\delta \Gamma^{\rho}_{uv} = 0$; donc $\Gamma^{\rho}_{uv} = 0$.
Comme c'est une équation tensorielle, donc la nullité du tenseur de Riemann est une condition nécessaire pour pouvoir trouver un système de coordonnées où les composantes du tenseur métrique g_{uv} sont constantes partout.
C'est aussi une condition suffisante, bien que ce soit un peu plus difficile de la montrer.

***Théorème* 4.1.** *le Tenseur de courbure R^{α}_{ijk} est anti-symétriques*

Démonstration. $R^{\alpha}_{ijk} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^j} & \dfrac{\partial}{\partial x^k} \\ \Gamma_{ij\alpha} & \Gamma_{ik\alpha} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma_{\beta j\alpha} & \Gamma_{\beta k\alpha} \\ \Gamma_{ij\beta} & \Gamma_{ik\beta} \end{vmatrix}$

$$R^{\alpha}_{ijk} = \frac{\partial\Gamma_{ik\beta}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma_{ij\alpha}}{\partial x^k} + \Gamma_{\beta j\alpha}\Gamma_{ik\beta} - \Gamma_{\beta k\alpha}\Gamma_{ij\beta}$$

Échanger j et k ,On obtient

$$R^{\alpha}_{ikj} = \frac{\partial \Gamma_{ij\beta}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik\alpha}}{\partial x^j} + \Gamma_{\beta k\alpha}\Gamma_{ij\beta} - \Gamma_{\beta j\alpha}\Gamma_{ik\beta}$$
$$= -\left[\frac{\partial \Gamma_{ik\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij\beta}}{\partial x^k} + \Gamma_{\beta j\alpha}\Gamma_{ik\beta} - \Gamma_{\beta k\alpha}\Gamma_{ij\beta}\right]$$
$$R^{\alpha}_{ijk} = -R^{\alpha}_{ikj}$$

Alors R^{α}_{ijk} est anti symétrique par rapport j et k □

***Théorème* 4.2.** $R^{\alpha}_{ijk} + R^{\alpha}_{jki} + R^{\alpha}_{kij} = 0$ *(l'identité de Bianchi).*

Démonstration. Ona

$$R^{\alpha}_{ijk} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x^j} & \dfrac{\partial}{\partial x^k} \\ \Gamma_{ij\alpha} & \Gamma_{ik\alpha} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma_{\beta j\alpha} & \Gamma_{\beta k\alpha} \\ \Gamma_{ij\beta} & \Gamma_{ik\beta} \end{vmatrix}$$

$$R^{\alpha}_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ik\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij\alpha}}{\partial x^k} + \Gamma_{\beta j\alpha}\Gamma_{ik\beta} - \Gamma_{ij\beta}\Gamma_{\beta k\alpha} \tag{4.8}$$

Alors

$$R^{\alpha}_{jki} = \frac{\partial \Gamma_{ji\alpha}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk\alpha}}{\partial x^i} + \Gamma_{\beta k\alpha}\Gamma_{ji\beta} - \Gamma_{jk\beta}\Gamma_{\beta i\alpha} \tag{4.9}$$

et

$$R^{\alpha}_{kij} = \frac{\partial \Gamma_{kj\alpha}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki\alpha}}{\partial x^j} + \Gamma_{\beta i\alpha}\Gamma_{kj\beta} - \Gamma_{ki\beta}\Gamma_{\beta j\alpha} \tag{4.10}$$

Ajouter (4.8), (4.9) et (4.10) , on obtient

$$R^{\alpha}_{ijk} + R^{\alpha}_{jki} + R^{\alpha}_{kij} = 0$$

Ceci s'appelle la propriété cyclique. □

4.1.1 Propriétés des Tenseurs de Riemann-Christoffel de Premier type R_{ijkl}

(i) $R_{jikl} = -R_{ijkl}$
(ii) $R_{ijlk} = -R_{ijkl}$
(iii) $R_{klij} = R_{ijkl}$
(iv) $R_{jikl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$

Démonstration. nous connaissons que

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k}\right) + g^{\alpha\beta}[jk,\beta][il,\alpha] - g^{\alpha\beta}[jl,\beta][ik,\alpha] \tag{4.11}$$

(i) Échanger i et$j$ en (4.11), nous obtenons

$$R_{jikl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k}\right) + g^{\alpha\beta}[ik,\beta][jl,\alpha] - g^{\alpha\beta}[il,\beta][jk,\alpha]$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l}\right) + g^{\alpha\beta}[ik,\beta][jl,\alpha] - g^{\alpha\beta}[il,\beta][jk,\alpha]$$

$$R_{jikl} = -R_{ijkl}$$

ou

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}$$

(ii) Échanger l et$k$ en (4.11), et procèdent comme en (i)

(iii) Échanger i et$k$ en (4.11), nous obtenons

$$R_{kjil} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^j \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{ji}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^k \partial x^i}\right) + \Gamma_{ji\alpha}[kl,\alpha] - \Gamma_{jl\alpha}[ki,\alpha]$$

Maintenant l'échange j et l, nous obtenons

$$R_{klij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^l \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^l \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^k \partial x^i}\right) + \Gamma_{li\alpha}[kj,\alpha] - \Gamma_{lj\alpha}[ki,\alpha]$$ Pour

$$\Gamma_{li\alpha}\Gamma^{\alpha}_{kj} = \Gamma_{li\alpha} g^{\alpha\beta}\Gamma_{kj\beta}$$

$$= \Gamma_{kj\beta} g^{\alpha\beta}\Gamma_{li\alpha}$$

$$= \Gamma_{kj\beta}[li,\beta]$$

$$\Gamma_{li\alpha}\Gamma^{\beta}_{li} = \Gamma_{kj\alpha}\Gamma^{\alpha}_{li}$$

Alors $R_{klij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^l \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^l \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^k \partial x^i}\right) + \Gamma_{kj\alpha}\Gamma^{\alpha}_{li} - \Gamma_{kj\alpha}\Gamma^{\alpha}_{ki}$ $R_{klij} = R_{ijkl}$

, de (4.11)

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k}\right) + \Gamma_{jk\alpha}\Gamma^{\alpha}_{il} - \Gamma_{jl\alpha}\Gamma^{\alpha}_{ik}$$

$$R_{iklj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^i \partial x^l}\right) + \Gamma_{kl\alpha}\Gamma^{\alpha}_{ij} - \Gamma_{kj\alpha}\Gamma^{\alpha}_{li}$$

$$R_{iljk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{lk}}{\partial x^i \partial x^j}\right) + \Gamma_{lj\alpha}\Gamma^{\alpha}_{ik} - \Gamma_{lk\alpha}\Gamma^{\alpha}_{ij}$$

Ajoutant ces équations, nous obtenons

$$R_{jikl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$$

Cette propriété de R_{ijkl} s'appelle la propriété cyclique. □

4.2 Le tenseur de Ricci

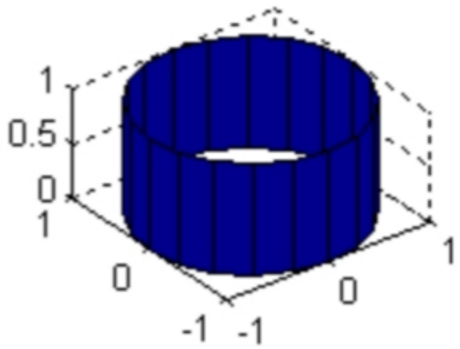
Il est souvent utile de considérer la trace des tenseurs de Riemann. Même métrique pour donner le tenseur de Ricci :

$$R_{ij} \equiv R^k_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^k_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^r_{ik}\Gamma^k_{rj} - \Gamma^r_{ij}\Gamma^k_{rk}$$

Notons qu'il y a plusieurs contractions possibles pour un tenseur de courbure formé à partir de connexion quelconque(pas forcement de Christoffel).

4.3 Exemples sur le calcul du tenseur de Riemann et de Ricci dans des surfaces particulières

4.3.1 Dans un cylindre :



Le Cylindre

1− Paramétrisation :

$$f : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to S^2, f(r, \theta, \varphi) \to (r\cos\theta, r\sin\theta, \varphi)$$

2− Le tenseur métrique :
Le tenseur métrique covariant est donné comme :

$$\overline{g}_{ij} = \begin{pmatrix} \overline{g}_{11} & \overline{g}_{12} & \overline{g}_{13} \\ \overline{g}_{21} & \overline{g}_{22} & \overline{g}_{23} \\ \overline{g}_{31} & \overline{g}_{32} & \overline{g}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et le tenseur métrique contravariant (ou conjugué) est donné comme :

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3− Calcul des symboles de Christoffel du premier espéce :
Rappelons que la loi du calcul des symboles de Christoffel du $1^{ér}$ espèce est donnée par :

$$\Gamma_{ijk} = [ij, k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right), (i, j, k = 1, 2, ..., n)$$

Alors,

$$[1, 2, 2] = r$$

$$[2, 1, 2] = r$$

$$[2, 2, 1] = -r$$

4− Calcul de symboles de Christoffel de deuxième espèce : Rappelons que la loi du calcul des symboles de Christoffel du $2^{éme}$ espèce est donnée par :

$$\Gamma^k_{ij} = g^{kj}[ij, l]$$

Alors,

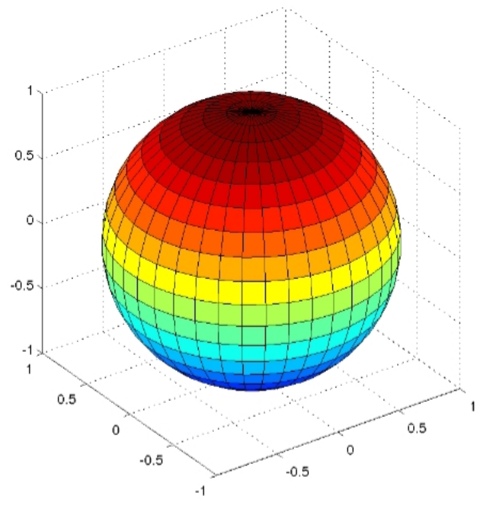
$$\Gamma^1_{22} = -r$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$$

5− Calcul du tenseur de Riemann Christoffel :
Toutes les valeurs seront nulles à causes des valeurs des symboles de Christoffel de $2^{éme}$ espèce
6− Le tenseur de Ricci :
Puisque le tenseur de Riemann est nul, on obtient directement que le tenseur de Ricci est nul.

4.3.2 Dans une sphère :



La Sphère

1– Paramétrisation :

$$f : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to S^2, f(r, \theta, \varphi) \to (r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi)$$

2– Le tenseur métrique :
Le tenseur métrique covariant est donné comme :

$$\overline{g}_{ij} = \begin{pmatrix} \overline{g}_{11} & \overline{g}_{12} & \overline{g}_{13} \\ \overline{g}_{21} & \overline{g}_{22} & \overline{g}_{23} \\ \overline{g}_{31} & \overline{g}_{32} & \overline{g}_{33} \end{pmatrix} = g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin\theta^2 \end{pmatrix}$$

Et le tenseur métrique contravariant (ou conjugué) est donné comme :

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\cos\theta^2}{r^2} \end{pmatrix}$$

3– Calcul des symboles de Christoffel du premier espèce :

$$\Gamma_{122} = \Gamma_{212} = r$$
$$\Gamma_{133} = \Gamma_{313} = r\sin\theta^2$$
$$\Gamma_{233} = \Gamma_{323} = r^2\cos\theta\sin\theta$$
$$\Gamma_{221} = -r$$
$$\Gamma_{331} = -r\sin\theta^2$$
$$\Gamma_{332} = -r^2\cos\theta\sin\theta$$

4– Calcul de symboles de Christoffel de deuxième espèce :

$$\Gamma_{111} = \Gamma_{112} = \Gamma_{113} = \Gamma_{121} = \Gamma_{123} = \Gamma_{131} = \Gamma_{132} = \Gamma_{213} = \Gamma_{231} = \Gamma_{233} = \Gamma_{333} = 0$$

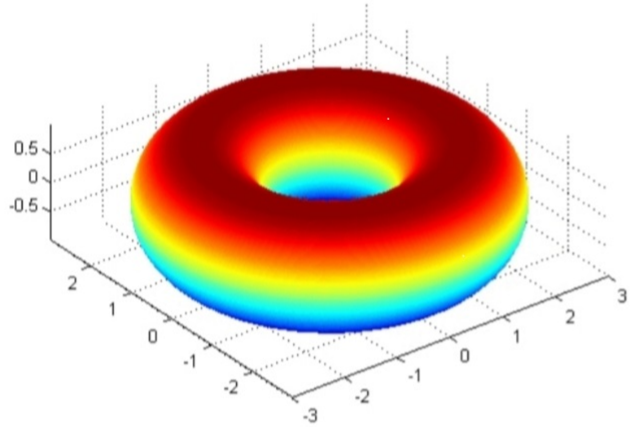
5– Calcul du tenseur de Riemann Christoffel :

$$R^1_{132} = R^1_{231} = -1.$$
$$R^1_{321} = 1.$$
$$R^3_{332} = \cos\theta^2.$$

6– Le tenseur de Ricci :

$$R_{32} = -1 + \cos\theta^2$$

4.3.3 Dans un Tore :



Le Tore

1− Paramétrisation :

$f : [0,\pi] \times [0,2\pi] \to S^2, f : (\theta,\varphi) \to ((2+\cos\theta)\cos\varphi, (2+\cos\theta)\cos\varphi\sin\varphi, \sin\theta)$

2− Le tenseur métrique :
Le tenseur métrique covariant est donné comme :

$$\overline{g}_{ij} = \begin{pmatrix} \overline{g}_{11} & \overline{g}_{12} & \overline{g}_{13} \\ \overline{g}_{21} & \overline{g}_{22} & \overline{g}_{23} \\ \overline{g}_{31} & \overline{g}_{32} & \overline{g}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2+\cos\theta)^2 \end{pmatrix}$$

Et le tenseur métrique contravariant (ou conjugué) est donné comme :

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(2+\cos\theta)^2} \end{pmatrix}$$

3− Calcul des symboles de Christoffel du premier espèce :

$$\Gamma_{122} = \Gamma_{212} = -(2+\cos\theta)\sin\theta$$
$$\Gamma_{221} = (2+\cos\theta)\sin\theta$$

4− Calcul de symboles de Christoffel de deuxième espèce :

$$\Gamma_{122} = (2+\cos\theta)\sin\theta.$$
$$\Gamma_{212} = \Gamma_{221} = -\frac{\sin\theta}{2+\cos\theta}$$

5− Calcul du tenseur de Riemann Christoffel :

$$R^1_{221} = -\cos\theta(2+\cos\theta)$$
$$R^2_{121} = \frac{\cos\theta}{2+\cos\theta}$$

6– Le tenseur de Ricci :

$$R_{11} = \frac{\cos\theta}{2+\cos\theta}$$
$$R_{22} = \cos\theta(2+\cos\theta)$$

4.4 Mise en oeuvre des programmes

Programme 01 : Calcul le tenseur métrique et son conjugué dans le Cylindre :

```
In[1]:= NX = 3
Out[1]= 3
In[2]:= Y = Array[, NX]
        Y[[1]] = r;
        Y[[2]] = th;
        Y[[3]] = phi;
Out[2]= {Null[1], Null[2], Null[3]}
In[6]:= X = Array[, NX]
        X[[1]] = r Cos[th];
        X[[2]] = r Sin[th];
        X[[3]] = phi ;
Out[6]= {Null[1], Null[2], Null[3]}
In[10]:= J = Array[, {NX, NX}]
         Do[
          J[[i, j]] = D[X[[i]], Y[[j]]],
          {j, 1, NX}, {i, 1, NX}
         ]
Out[10]= {{Null[1, 1], Null[1, 2], Null[1, 3]},
          {Null[2, 1], Null[2, 2], Null[2, 3]}, {Null[3, 1], Null[3, 2], Null[3, 3]}}
In[12]:= g = Array[, {NX, NX}]
         Do[
           g[[i, j]] = Sum[J[[k, i]] J[[k, j]], {k, NX}],
           {j, 1, NX}, {i, 1, NX}
          ];
Out[12]= {{Null[1, 1], Null[1, 2], Null[1, 3]},
          {Null[2, 1], Null[2, 2], Null[2, 3]}, {Null[3, 1], Null[3, 2], Null[3, 3]}}
In[14]:= g = Simplify[g]
```

Out[14]= $\{\{1, 0, 0\}, \{0, r^2, 0\}, \{0, 0, 1\}\}$

```
In[15]:= g // MatrixForm
```

Out[15]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[16]:= inverseg = Simplify[Inverse[g]]
```

Out[16]= $\left\{\{1, 0, 0\}, \left\{0, \frac{1}{r^2}, 0\right\}, \{0, 0, 1\}\right\}$

```
In[17]:= inverseg // MatrixForm
```

Out[17]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Programme 02 : Calcul les symboles de Christoffel :
de $1^{ér}$ espèce dans le Cylindre :

```
In[1]:= Clear[coord, metric, inversemetric, affine, riemann, ricci, scalar, th,
          phi, r]
In[2]:= n = 3
Out[2]= 3
In[3]:= coord = {r, th, phi}
Out[3]= {r, th, phi}
In[4]:= metric = {{1, 0, 0}, {0, r^2, 0}, {0, 0, 1}}
Out[4]= {{1, 0, 0}, {0, r^2, 0}, {0, 0, 1}}
In[5]:= inversemetric = Simplify[Inverse[metric]]
Out[5]= {{1, 0, 0}, {0, 1/r^2, 0}, {0, 0, 1}}
```

Out[6]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[7]:= affine :=
         affine = Simplify[Table[(1 / 2) * (D[metric[[i, k]], coord[[s]]] +
                D[metric[[s, k]], coord[[i]]] -
                D[metric[[i, s]], coord[[k]]])
            , {i, 1, n}, {s, 1, n}, {k, 1, n}]]
In[8]:= listaffine :=
         Table[If[UnsameQ[affine[[i, s, k]], 0], {ToString[Γ[i, s, k]], affine[[i, s, k]]}] ,
          {i, 1, n}, {s, 1, n}, {k, 1, n}]
In[9]:= TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[listaffine], Null], 2],
                     TableSpacing → {2, 2}]
```

Out[9]//TableForm=

Γ[1, 2, 2]	r
Γ[2, 1, 2]	r
Γ[2, 2, 1]	-r

et de $2^{ème}$ espèce dans le Cylindre :

```
In[10]:=
        affine :=
         affine = Simplify[Table[(1 / 2) * Sum[(inversemetric[[i, s]]) *
                (D[metric[[s, j]], coord[[k]]] +
                  D[metric[[s, k]], coord[[j]]]
                  - D[metric[[j, k]], coord[[s]]]), {s, 1, n}]
            , {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}]]
```

```
TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[listaffine], Null], 2],
        TableSpacing → {2, 2}]
In[11]:= listaffine :=
      Table[If[UnsameQ[affine[[i, s, k]], 0], {ToString[Γ[i, s, k]], affine[[i, s, k]]}] ,
       {i, 1, n}, {s, 1, n}, {k, 1, n}]
In[12]:= TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[listaffine], Null], 2],
            TableSpacing → {2, 2}]
Out[12]//TableForm=
        Γ[1, 2, 2]   -r
        Γ[2, 1, 2]   1/r
        Γ[2, 2, 1]   1/r
```

Programme 03 : Calcul le tenseur de Riemann et de Ricci dans le Cylindre :

```
Clear[coord, metric, inversemetric, affine, riemann, ricci, th, phi, r]
n = 3
3
coord = {r, th, phi}
{r, th, phi}
metric = {{1, 0, 0}, {0, r^2, 0}, {0, 0, 1}}
{{1, 0, 0}, {0, r², 0}, {0, 0, 1}}
inversemetric = Simplify[Inverse[metric]]
{{1, 0, 0}, {0, 1/r², 0}, {0, 0, 1}}
affine := affine = Simplify[Table[(1 / 2) * Sum[(inversemetric[[i, s]]) *
       (D[metric[[s, j]], coord[[k]] ] +
         D[metric[[s, k]], coord[[j]] ] - D[metric[[j, k]], coord[[s]] ]), {s,
    {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}] ]
listaffine :=
 Table[If[UnsameQ[affine[[i, j, k]], 0], {ToString[Γ[i, j, k]], affine[[i, j, k
  {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, j}]
riemann :=
 riemann = Simplify[Table[
    D[affine[[i, j, l]], coord[[k]] ] - D[affine[[i, j, k]], coord[[l]] ] +
     Sum[affine[[s, j, l]] affine[[i, k, s]] - affine[[s, j, k]] affine[[i, l, s
      {s, 1, n}],
    {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}, {l, 1, n}] ]
```

```
listriemann :=
 Table[If[UnsameQ[riemann[[i, j, k, l]], 0],
   {ToString[R[i, j, k, l]], riemann[[i, j, k, l]]}] , {i, 1, n}, {j, 1, n},
  {k, 1, n}, {l, 1, k - 1}]
TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[listriemann], Null], 2],
 TableSpacing → {2, 2}]
{}
```

Programme 04 : Calcul le tenseur de Ricci dans le Cylindre :

```
ricci :=
 ricci = Simplify[Table[Sum[riemann[[i, j, i, l]], {i, 1, n}], {j, 1, n}, {l, 1,
listricci := Table[If[UnsameQ[ricci[[j, l]], 0], {ToString[R[j, l]], ricci[[j,
  {j, 1, n}, {l, 1, j}]
TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[listricci], Null], 2], TableSpacing -
{}
```

Programme 05 : Calcul le tenseur de Riemann et le tenseur de Ricci dans La Sphère :

Le tenseur de Riemann :

R[1, 1, 3, 2]	-1
R[1, 2, 3, 1]	-1
R[1, 3, 2, 1]	1
R[3, 3, 3, 2]	$\mathrm{Cot}[th]^2$

Le Tenseur de Ricci :

R[3, 2]	$-1 + \mathrm{Cot}[th]^2$

Programme 06 :Calcul le tenseur de Riemann dans Le Tore :

Le tenseur de Riemann :

R[1, 2, 2, 1]	-Cos[th] (2 + Cos[th])
R[2, 1, 2, 1]	$\frac{\mathrm{Cos}[th]}{2+\mathrm{Cos}[th]}$

Le tenseur de Ricci :

R[1, 1]	$\frac{\mathrm{Cos}[th]}{2+\mathrm{Cos}[th]}$
R[2, 2]	Cos[th] (2 + Cos[th])

Annexe

4.5 Preuve de théorème 3.1 :

Démonstration. La métrique est donnée par :

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

soient x^i sont les coordonnées dans un système de coordonnée X et $\overline{x}^i$ soit les coordonnées dans un système de coordonnée Y. alors la métrique $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ transforme au $ds^2 = \overline{g}_{ij}d\overline{x}^i d\overline{x}^j$.

Quand la distance étant quantité scalaire.

Ainsi,

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = \overline{g}_{ij}d\overline{x}^i d\overline{x}^j$$

Le théorème sera prouvé dans trois étapes :

(i) On montre que dx^i est vecteur contravariant.

Si

$$\overline{x}^i = \overline{x}^i(x^1, x^2, ..., x^n)$$
$$d\overline{x}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial \overline{x}^i}{dx^2}dx^2 + ... + \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^n}dx^n$$
$$d\overline{x}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}dx^k$$

c'est loi de transformation de vecteur contravariant. Ainsi, dx^i est vecteur contravariant.

(ii) pour prouver que g_{ij} est un tenseur covariant d'ordre 2. Depuis

$$d\overline{x}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}dx^k \quad et \quad d\overline{x}^j = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l}dx^l$$

de l'équation (4.17)

$$g_{ij}dx^i dx^j = \overline{g}_{ij}\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}dx^k \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l}dx^l$$

$$g_{ij}dx^i dx^j = \overline{g}_{ij}\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\overline{x}^j}{dx^l}dx^k dx^l$$

$$g_{kl}dx^k dx^l = \overline{g}_{ij}\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l}dx^k dx^l$$

depuis $g_{ij}dx^i dx^j = g_{kl}dx^k dx^l (i, j$sont les indices facteurs)

$$\left(g_{kl} - \overline{g}_{ij}\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l}\right)dx^k dx^l = 0$$

ou $\left(g_{kl} - \overline{g}_{ij}\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l}\right) = 0$ comme dx^ket dx^l sont arbitraires.

$$g_{kl} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l}$$

or

$$\overline{g}_{ij} = g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j}$$

Alors g_{ij} est un tenseur covariant d'ordre 2.

(iii) pour prouver que g_{ij} est symétrique .alors g_{ij} peut écrire comme

$$g_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}) + \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji})$$

$$g_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

où

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}) = Symétrique$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji}) = Anti - symétrique$$

Maintenant,

$$g_{ji}dx^i x^j = (A_{ij} + B_{ij})dx^i x^j$$

$$(g_{ji} - A_{ij})dx^i x^j = B_{ij}dx^i x^j$$

échangeant les indices facteurs dans $B_{ij}dx^i x^j$ nous avons

$$B_{ij}dx^i x^j = B_{ji}dx^i x^j$$

$$B_{ij}dx^i x^j = -B_{ij}dx^i x^j$$

Comme B_{ij} est anti-symétrique c-à-d : $B_{ij} = -B_{ji}$

$$B_{ij}dx^i x^j + B_{ij}dx^i x^j = 0$$

$$2B_{ij}dx^i x^j = 0$$

$$\Rightarrow \quad B_{ij}dx^i x^j = 0$$

Alors , de (4.18)

$$(g_{ji} - A_{ij})dx^i x^j = 0$$

$\Rightarrow \quad g_{ji} = A_{ij}$ comme dx^i, x^j sont arbitraires.

Alors, g_{ji} est symétrique comme A_{ij} est symétrique.Par conséquentg_{ji}est un tenseur symétrique covariant d'ordre 2 cet s'appelle le tenseur fondamental covariant .

□

4.6 Preuve de théorème 3.3 :

Démonstration.

(i) Par le symbol de Christoffel de deuxième espèce

$$\Gamma_{ij}^{k} = g^{kl}\Gamma_{ij}^{l}$$

multipliant cette équation par g_{km}, on obtenons

$$g_{km}\Gamma_{ij}^{k} = g_{km}g^{kl}\Gamma_{ij}^{l}$$

$$= \delta_m^l \Gamma_{ij}^l \quad comme \quad g_{km}g^{kl} = \delta_m^l$$

$$g_{km}\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{m}$$

(ii) Par le symbol de Christoffel de premier espèce

$$\Gamma_{ikj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right) \tag{4.12}$$

et

$$\Gamma_{jki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right) \tag{4.13}$$

ajouter (4.15) et (4.17),

$$\Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}\right) \quad tq \quad g_{ij} = g_{ji}$$

$$\Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} = \frac{1}{2}.2\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

(iii) Comme $g_{ij}g^{lj} = \delta_l^i$.

le différenciant par rapport à x^k, nous obtenons

$$g^{ij}\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + g_{lj}\frac{\partial g^i j}{\partial x^k} = 0 \tag{4.14}$$

multipliant cette équation par g^{lm}, nous obtenons

$$g^{lm}g^{ij}\frac{lg_{lj}}{\partial x^k} + g^{lm}g_{lj}\frac{\partial g^i j}{\partial x^k} = 0$$

$$g^{lm}g_{lj}\frac{\partial g^i j}{\partial x^k} = -g^{lm}g^{ij}\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k}$$

$$\delta^m_j\frac{\partial g^i j}{\partial x^k} = -g^{lm}g^{ij}\left\{\Gamma_{lkj} + \Gamma_{jkl}\right\} \quad tq \quad \frac{\partial g^{lj}}{\partial x^k} = \Gamma_{lkj} + \Gamma_{jkl}.$$

$$\frac{\partial g^{im}}{\partial x^k} = -g^{im}\left\{g^{ij}\Gamma_{lkj}\right\} - g^{ij}\left\{g^{lm}\Gamma_{jkl}\right\}$$

$$\frac{\partial g^{im}}{\partial x^k} = -g^{im}g^{ij}\Gamma^k_{il} - g^{ij}\Gamma^k_{mj}$$

échanger m et j, nous obtenons

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = -g^{lj}\Gamma^k_{il} - g^{im}\Gamma^j_{mk}$$

et
$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = -g^{ij}\Gamma^i_{lk} - g^{im}\Gamma^j_{mk} \qquad tq \qquad g^{lj} = g^{jl}$$ □

4.7 La dérivée Covariante d'un vecteur covariant

Soient A_i et $\overline{A}_i$ sont les composantes d'un vecteur covariant dans un système de même ordre x^i et $\overline{x}^i$ respectivement.
Alors

$$\overline{A}_i = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}A_p \tag{4.15}$$

La différenciant par rapport à $\overline{x}^j$,

$$\frac{\partial \overline{A}_i}{\partial \overline{x}^j} = \frac{\partial^2 x^p}{\partial \overline{x}^j \partial \overline{x}^i}A_p + \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial A_p}{\partial \overline{x}^j} \tag{4.16}$$

$$\frac{\partial \overline{A}_i}{\partial \overline{x}^j} = \frac{\partial^2 x^p}{\partial \overline{x}^j \partial \overline{x}^i}A_p + \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial A_p}{\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} \tag{4.17}$$

Ce n'est pas un tenseur dû à la présence du premier terme de l'équation (4.17)
. Maintenant, remplacez l'indice facteur p par s dans le premier terme de l'équation (4.17), nous ont

$$\frac{\partial \overline{A}_i}{\partial \overline{x}^j} = \frac{\partial^2 x^s}{\partial \overline{x}^j \partial \overline{x}^i}A_p + \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial A_p}{\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} \tag{4.18}$$

Puisque nous connaissons que

$$\frac{\partial^2 x^s}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^j} = \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k}\Gamma^k_{ij} - \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j}\Gamma^s_{pq}$$

Substitution de la valeur de $\dfrac{\partial^2 x^s}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^j}$ dans l'équation (4.18), nous avons

$$\frac{\partial \overline{A}_i}{\partial \overline{x}^j} = \left(\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k}\Gamma^k_{ij} - \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j}\Gamma^s_{pq}\right)A_s + \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial A_p}{\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j}$$

$$= \Gamma^k_{ij}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k}A_s + \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j}\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - A_s\Gamma^s_{pq}\right)$$

$$\frac{\partial \overline{A}_i}{\partial \overline{x}^j} - \overline{A}_k \Gamma^k_{ij} = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} \left(\frac{\partial A_p}{\partial x^q} - A_s \Gamma^s_{pq} \right) \tag{4.19}$$

Maintenant, nous présentons la notation de virgule

$$A_{i,j} = \frac{\partial A_i}{x^j} - A_k \Gamma^k_{ij} \tag{4.20}$$

Utilisant (4.20), l'équation (4.19) peut être exprimée Comme

$$\overline{A}_{i,j} = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} A_{p,q}$$

C'est loi de transformation d'un tenseur covariant d'ordre 2. Ainsi, $A_{i,j}$ est un tenseur covariant d'ordre 2 Ainsi, $A_{i,j}$ s'appelle la dérivée covariante de A_i par rapport x^j.

4.8 La dérivée Covariante d'un vecteur contravariant

Soient A^i et $\overline{A}^i$ sont les composantes d'un vecteur contravariant dans un système de même ordre x^i et $\overline{x}^i$ respectivement.
Alors

$$\overline{A}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^s} A^s$$

ou

$$A^s = \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^i} \overline{A}^i$$

le différenciant par rapport à $\overline{x}^j$, nous obtenons

$$\frac{\partial A^s}{\partial \overline{x}^j} = \frac{\partial^2 x^s}{\partial \overline{x}^{j\,i}} \overline{A}^i + \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial \overline{A}^i}{\partial \overline{x}^j} \tag{4.21}$$

de l'équation (4.21),

$$\frac{\partial^2 x^s}{\partial \overline{x}^{j\,i}} = \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k} \Gamma^k_{ij} \overline{A}^i - \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} \Gamma^s_{pq}$$

substitution de la valeur de $\frac{\partial^2 x^s}{\partial \overline{x}^{j\,i}}$ dans l'équation (4.15), nous obtenons

$$\frac{\partial A^s}{\partial \overline{x}^j} = \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k} \Gamma^k_{ij} \overline{A}^i - \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} \Gamma^s_{pq} \overline{A}^i + \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial \overline{A}^i}{\partial \overline{x}^j}$$

$$\frac{\partial A^s}{q} \frac{A^q}{\partial \overline{x}^j} = \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k} \Gamma^k_{ij} \overline{A}^i - \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} \overline{A}^i \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} \Gamma^s_{pq} + \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial \overline{A}^i}{\partial \overline{x}^j}$$

Échanger les index facteurs i et k dans le premier terme et on pose $\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} \overline{A}^i = A^p$ on obtient

$$\frac{\partial A^s}{\partial x^q} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} = \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k} \Gamma^k_{ij} \overline{A}^k - \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} A^p \Gamma^s_{pq} + \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial \overline{A}^i}{\partial \overline{x}^j}$$

$$\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} \left(\frac{\partial A^s}{\partial x^q} + A^p \Gamma^s_{pq} \right) = \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^j} \left(\Gamma^k_{ij} \overline{A}^k + \frac{\partial \overline{A}^i}{\partial \overline{x}^j} \right)$$

$$\frac{\partial \overline{A}^i}{\partial \overline{x}^j} + \overline{A}^k \Gamma^k_{ij} = \frac{\partial \overline{A}^i}{\partial x^s} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} \left(\frac{\partial A^s}{\partial x^q} + A^p \Gamma^s_{pq} \right) \tag{4.22}$$

Maintenant, nous présentons la notation de virgule,

$$A^i_{,j} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} + A^k \Gamma k j^i \tag{4.23}$$

Utilisant (4.23), l'équation (4.22) peut être exprimée comme,

$$\overline{A}^i_{,j} = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} Ap, q \tag{4.24}$$

C'est loi de transformation d'un tenseur mixte d'ordre 2. Ainsi,$A^i_{,j}$ est un tenseur mixte d'ordre 2. $A^i_{,j}$ s'appelle la dérivée covariante de A^i par rapport x^j.

4.9 La dérivée Covariante des tenseurs

Dérivé de covariant d'un tenseur covariant d'ordre deux :
Soient A_{ij} et $\overline{A}_{ij}$ sont les composants d'un tenseur covariant d'ordre 2 dans le système du même rang x^i et $\overline{x}^i$ respectivement alors,

$$\overline{A}_{ij} = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} A_{pq} \tag{4.25}$$

Différenciant (4.25) partiellement par rapport à$\overline{x}^k$

$$\frac{\overline{A}_{ij}}{\partial \overline{x}^k} = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial A_{pq}}{\partial \overline{x}^k} + \frac{\partial}{\partial \overline{x}^k} \left(\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} \right) A_{pq}$$

$$\frac{\overline{A}_{ij}}{\partial \overline{x}^k} = \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial A_{pq}}{\partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \overline{x}^k \partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} A_{pq} + \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial^2 x^q}{\partial \overline{x}^k \partial \overline{x}^j} A_{pq} \tag{4.26}$$

Comme $\dfrac{\partial A_{pq}}{\partial \overline{x}^k} = \dfrac{\partial A_{pq}}{\partial x^r} \dfrac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k}$(puisque composants de A_{pq} dans x^icoordonnée)

$$A_{pq} \frac{\partial^2 x^p}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^k} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} = A_{lq} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^k} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j}$$

$$A_{pq} \frac{\partial^2 x^p}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^k} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} = A_{lq} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} \left[\Gamma^k_{ij} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^h} - \Gamma^l_{pr} \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k} \right]$$

Nous connaissons que,

$$\frac{\partial^2 x^l}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^k} = \Gamma^k_{ik} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^h} - \Gamma^l_{pr} \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k}$$

$$A_{pq} \frac{\partial^2 x^p}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^k} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} = \Gamma^k_{ik} A_{lq} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^h} \frac{\partial x^2}{\partial x^j} - \Gamma^l_{pr} A_{lq} \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^q}{\overline{x}^j} \frac{\partial x^r}{\overline{x}^k}$$

$$A_{pq} \frac{\partial^2 x^p}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^k} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j} = \Gamma^k_{ik} \overline{A}_{hj} - \Gamma^l_{pr} A_{lq} \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^q}{\overline{x}^j} \frac{\partial x^r}{\overline{x}^k} \tag{4.27}$$

Comme $\overline{A}_{hj} = A_{lq}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^h}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k}$ par équation (4.25) et

$$A_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial^2 x^q}{\partial \overline{x}^j \partial \overline{x}^k} = A_{pl}\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial^2 x^l}{\partial \overline{x}^j \partial \overline{x}^k}$$

$$= A_{pl}\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}\left[\Gamma^h_{jk}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^h} - \Gamma^l_{qr}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k}\right]$$

$$= \Gamma^h_{jk}A_{pl}\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^h} - \Gamma^l_{qr}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial x^p}{\overline{x}^i}A_{pl}$$

$$A_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial^2 x^q}{\partial \overline{x}^j \partial \overline{x}^k} = \Gamma^k_{ik}\overline{A}_{ih} - \Gamma^l_{qr}\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k}A_{pl} \tag{4.28}$$

Substituant la valeur des équations (4.27) et (4.28) dans l'équation (4.26) nous obtenons,

$$\frac{\partial \overline{A}_{ij}}{\partial \overline{x}^k} = \left[\frac{\partial A_{pq}}{\partial \overline{x}^r} - A_{lq}\Gamma^l_{pp} - A_{pl}\Gamma^l_{qr}\right]\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k} + \Gamma^h_{jk}\overline{A}_{hj} + \Gamma^h_{jk}\overline{A}_{ih}$$

$$\frac{\partial \overline{A}_{ij}}{\partial \overline{x}^k} - \Gamma^h_{jk}\overline{A}_{hj} - \Gamma^h_{jk}\overline{A}_{ih} = \left[\frac{\partial A_{pq}}{\partial x^r} - A_{lq}\Gamma^l_{pr} - A_{pl}\Gamma^l_{qr}\right]\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k}$$

$$A_{ij,k}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^h_{jk}A_{ih} - \Gamma^h_{ik}A_{hj},\ Alors$$

$$\overline{A}_{ij,k} = A_{pq,r}\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k}$$

C'est loi de transformation d'un tenseur de covariant d'ordre 3 trois. Ainsi,$A_{ij,k}$ est un tenseur de covariant d'ordre 3. Alors ,$A_{ij,k}$ s'appelle la dérivée covariante de A_{ij} w.r.t à x^k.

De même nous définissons la dérivée covariante x^k des tenseurs A^{ij} et $A\hat{\imath}_j$ par la formule

$$A^{ij}, k = \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^k} + A^{lj}\Gamma^i_{lk} + A^{il}\Gamma^j_{lk}$$

et $$A^i_{j,k}\frac{\partial A^l_j}{\partial x^k} + A^l_j\Gamma^i_{lk} + A^i_l\Gamma^j_{lk}$$

Généralement nous définissons la dérivée covariante x^k d'un tenseur mixte $A^{ij...l}_{ab...c}$ par la formule

$$A^{ij...l}_{ab...c,k} = \frac{\partial A^{ij...l}_{ab...c}}{\partial x^k} + A^{pj...l}_{ab...c}\Gamma^i{}_{pk} + A^{ip...l}_{ab...c}\Gamma^l{}_{pk} + ... + A^{ij...p}_{ab...c}\Gamma^j{}_{pk}$$
$$-A^{ij...l}_{pb...c}\Gamma^l{}_{ak} - A^{ij...l}_{ap...c}\Gamma^p{}_{bk} - ... - +A^{ij...l}_{ab...p}\Gamma^p{}_{ck}$$

$A_{i,k}$est également écrit comme $A_{i,k} = \nabla_k A_i$.

Conclusion

Nous avons présenté dans ce travail un outil très important dans la géométrie différentielle, les tenseurs.

Nous avons d'abord donné un rappel sur quelques aspects que nous avons jugé utiles afin de permettre au lecteur du présent document une meilleure compréhension.

Le calcul des tenseurs que nous avons développé et qui est marqué par la méthode le tenseur métrique, les symboles de Christoffel, le tenseur de Riemann et le tenseur de Ricci a le mérite de d'être illustré par des exemples sur des surfaces particulières. Qui ont été confirmés à partir d'une implémentation effectuée sur le logiciel MATHEMATICA.

" Ne pas si tu as difficultés en maths, je peux t'assurer que les miennes sont bien plus importantes".

Albert EINSTEIN (1879-1955)

Bibliographie

[1] A.McConnell, *Applications of Tensor Analysis*,Dover Publications,1977.

[2] David C Kev, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Tensor Calculus*, McGraw-Hill, first edition, 1988.

[3] Islam Nazrul, *Tensors and their applications, (new age international(P))*, 2006.

[4] J.H.Heinbockel, *Introduction to Tensor Calculus and Continuum mechanics*,1996.

[5] Leonid P Lebedev, Michael J Cloud, and Victor A Eremeyev ,*Tensor analysis with applications in Mechanics*, 2014.

[6] Michael Trott, *The Mathematica Guidbook for symbolics*, 2006.

[7] Mikhail Itskov, *Tensor algebra and tensor analysis for energineers*, 2009.

[8] O.Calin, V Mangione, *Variational calculus on sub-Riemannian manifold accepted to Balcan Journal of Geometry and application*, vol8, 2003.

[9] R.Abraham, J.E.Marsden, and T.Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, volume 75 of *Applied Mathematical Sciences*. Spring-Verlag, New York, second edition, 1988.

[10] S.Lovett, *Differential Geometry of manifolds*, A K Peters Ltd, 2010.

[11] Zafar Ahsen, *Tensors mathematics of differential geometry and relativity*, 2015.