République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Université de Ghardaïa

Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et d'Informatique

PLYCOPIE DE COURS

Analyse II

Première année socle commun
Mathématiques et Informatique

Réaliser par : Dr. KINA Abdelkrim

Année universitaire 2021-2022

Liste des figures

Table des matières

Avant-propos

Le présent polycopié contient le programme officiel de la matière Analyse 2 destiné principalement aux étudiants en première année socle commun Mathématiques et Informatique. Il peut aussi servir aux étudiants de première ST.

Le contenu de cette matière est la base de toute introduction à l'analyse mathématique. Il est considéré comme une continuation directe de la matière Analyse 1 en premier semestre.

Ce polycopié comporte quatre chapitres principaux, où sont exposées les notions d'intégrale de Riemann, de différentes techniques de calcul des primitives, de l'initiation à la résolution des équations différentielles.

A la fin de chaque chapitre on pourra trouver une série d'exercices avec solutions permettant d'aller plus loin dans la compréhension et l'assimilation des notions mathématiques introduites.

Chapitre 1

Intégrale indéfinie

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial.

1.1 Généralités, Définitions et Notations

Définition 1.1.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I, vérifiant :$\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple. $F(x) = \coth x$, $f(x) = \frac{-1}{\sinh^2 x}$, $I =]0, +\infty[$.

Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, le dénominateur des fonctions f et F ne s'annule pas. Il n'y a donc pas de problème de définition ou de dérivabilité pour ces fonctions sur l'intervalle considéré.

On a

$$F'(x) = \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = \frac{\sinh^2 x - ch^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{-1}{\sinh^2 x} = f(x).$$

Théorème 1.1.1. *Si f admet une primitive, alors elle en admet une infinité et si F, G sont deux primitives de f sur I, alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in I$, $F(x) = G(x) + C$.*

Démonstration. 1-Comme la dérivée de toute constante C est nulle alors : si $F'(x) = f(x)$ on a encore $(F(x)+C)' = f(x)$. Par conséquent, si f admet une primitive F alors toute fonction de la forme $F + C$, où C est une constante quelconque est encore une primitive de f donc f admet une infinité des primitives.

2- Comme F, G sont des primitives de f sur I, on a $(G - F)' = f - f = 0$.

Soit $a, x \in I$. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $H = F - G$, dérivable sur $[a, x[\subset I$ comme somme de fonctions dérivables. On a donc

$$\begin{aligned}(F(x) - G(x)) - (F(a) - G(a)) &= (x-a)(G-F)'(C) \\ &= (x-a)(f(c) - f(c)) = 0\end{aligned}$$

Donc $(F(x) - G(x)) = (F(a) - G(a))$, ce qui est une constante, indépendante de x qui peut parcourir l'ensemble des points de I. ■

Définition 1.1.2. On appelle intégrale indéfinie de f sur $I \subset \mathbb{R}$ **l'ensemble des primitives** de f sur I, si elles existent, qu'on note :

$$\int f(x)dx, x \in I.$$

Si F est une primitive de f, alors on écrit :

$$\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$$

Théorème 1.1.2. *Pour chaque $x_0 \in I$ et chaque $C \in \mathbb{R}$ il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = C$.*

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I. Pour toute primitive G de f il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + k$ et

$$G(x_0) = C \Leftrightarrow F(x_0) + k = C \Leftrightarrow k = C - F(x_0)$$

ce qui montre que $G : I \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = F(x) - F(x_0) + C$ est l'unique primitive de f prenant la valeur C en x_0. ■

Remarque 1.1.1. Si I n'est pas un intervalle les Théorèmes (1.1.1) et (1.1.2) peuvent être fausses.

Exemple. Soient F et G deux fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\begin{aligned}F(x) &= \ln|x| = G(x) \text{ si } x > 0 \\ G(x) &= \ln|3x| \text{ si } x < 0.\end{aligned}$$

On a $G'(x) = F'(x) = \frac{1}{x}$. Les fonctions F et G sont donc des primitives sur $\mathbb{R}^*$ de $x \to \frac{1}{x}$ mais lasi la fonction $F - G$ n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$ et $F(1) = G(1) = 0$.

■ 1.1.1 Condition suffisante pour l'existence de l'intégrale indéfinie d'une fonction

Le théorème fondamental suivant garantit l'existence de primitives d'une fonction continue sur un intervalle.

Théorème 1.1.1.1. *Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.*

Démonstration. Ce théorème est admis.. ■

C'est une condition suffisante, mais pas nécessaire : il y a des fonctions primitivables qui ne sont pas continues.

Remarque 1.1.2. 1- Les fonctions élémentaires réelles admettent toutes des primitives.

Remarque 1.1.3. Il existe des fonctions n'admettant de primitives au sens de la définition donnée.

Exercice 1.1.1. Soit $I = [0, 2]$ et $f : I \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 1 \\ 0 \text{ si non} \end{cases} .$$

Montrer que f n'admettant pas de primitive.

Solution : Supposons que f admette une primitive F sur $[0, 2]$. Comme F est dérivable en tout point de $[0; 1[$ et que sa dérivée est nulle, F est constante sur $[0, 1[$. De même F est constante sur $]1, 2]$. Donc il existe deux constantes k_1 et k_2 telles que

$$\forall x \in [0; 1[,\ F(x) = k_1 \text{ et } \forall x \in]1; 2],\ F(x) = k_2.$$

Mais comme F est aussi continue en 1, sa limite à droite et sa limite à gauche doivent être égales et donc $k_1 = k_2$. Ainsi F est constante sur

$[0; 2]$, et donc f , qui est la dérivée de F, est nulle sur $[0; 2]$, ce qui est une contradiction.

Remarque 1.1.4. Toute fonction définie sur l'intervalle I n'est pas primitivable. En effet, les fonctions dérives vérifient le théorème des valeurs intermédiaires (voir l'annexe). La satisfaction de ce théorème est donc une condition nécessaire pour possèder une primitive et si $f(I)$ n'est pas un intervalle alors on est certain que f n'a pas de primitive sur I. Par exemple, la fonction partie entière n'est pas primitivable sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1.1.1. *Il existe des fonctions primitivables non continues et même non bornées au voisinage d'un point.*

Démonstration. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

La fonction $g = F'$ est primitivable sur $\mathbb{R}$ et n'est bornéee sur aucun voisinage de 0. ■

■ 1.2 Calcul de primitives

■ 1.2.1 Propriétés fondamentales de l'intégrale indéfinie

Soient f, g des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont vraies :

$1 - \int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

$2 - \int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$

$3 - d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

$4 - \int dF(x) = F(x) + c$

$5-$ Si $\int f(x)dx = F(x) + c$ alors $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$

Table des principales intégrales indéfinies.

A partir de la table des dérivées des fonctions élémentaires, on établit la table suivante des primitives des fonctions élémentaires.

Fonction	intégrale indéfinie	intervalle d'intégration
0	$\int 0dx = c$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c.$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln \lvert x \rvert + c$	$\mathbb{R}^*$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c.$	$\mathbb{R}_+^*$
a^x, $a \in \mathbb{R}_+^* - \{-1\}$	$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c,$	$\mathbb{R}$
e^x	$\int e^x dx = e^x + c$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\mathbb{R}$

■ 1.3 Méthodes d'intégration

Méthode directe d'intégration

Cette méthode consiste, grâce aux propriétés des intégrales et aux transformations sur la fonction à intégrer, à utiliser la table des principales primitives.

Exemples 1.3.1. 1-$\int 5(\sin x) - \frac{3}{1+x^2}dx = 5\int \sin x dx - 3\int \frac{1}{1+x^2}dx = -5\cos x - 3\arctan x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

2-$\int \frac{1+x^2}{x}dx = \int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int 2xdx = \ln x + \frac{1}{2}x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Méthode du changement de variable

Théorème 1.3.1. *Soient $f(x) = \varphi'(x)g(\varphi(x))$, $x \to \varphi(x) = t$ définie et dérivable sur un intervalle $J_x \subset \mathbb{R}$. Si la fonction $t \to g(t)$ admet une primitive $G(t)$ sur un intervalle J_t tel que $\varphi(J_x) = J_t$, alors la fonction $f(x) = \varphi'(x)g(\varphi(x))$ admet une primitive sur J_x et on a*

$$\int f(x)dx = \int \varphi'(x)g(\varphi(x))dx = G(\varphi(x)) + c.$$

En particulier le théorème est vrai si φ, g, φ' sont continues.

Démonstration. Elle immédiate en vertu du théorème de la dérivée des fonctions composées

$$(G(\varphi(x)))' = \varphi'(x)G'(\varphi(x)) = \varphi'(x)g(\varphi(x)).$$

■

Méthode pratique

Posons $\varphi(x) = t$, $dt = \varphi'(x)dx$ dans ce cas on a

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + c = G(\varphi(x) + c.$$

Parfois le changement de variable n'est pas visible et on peut, dans certains cas, poser $x = \varphi(t)$. Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 1.3.2. *Soient f une fonction continue sur I et $\varphi : J \to I$ une fonction inversible telle que $\varphi \in C^1(J)$. Alors, en posant $x = \varphi(t)$ on obtient la formule*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int g(t)dt = G(t) + c.$$

Avec $t = \varphi^{-1}(x), dx = \varphi'(t)dt$ et G une primitive de g. On revient ensuite à la variable x en remplaçant t, d'où

$$\int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x)) + c$$

Exemple. Calculer en effectuant un changement de variable l'intégrale suivant :

$$J = \int \frac{\ln x}{x + x(\ln x)^2}dx.$$

Posons $t = \ln x \Rightarrow x = e^t$ et $\frac{dx}{dt} = e^t$.

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\ln x}{x + x(\ln x)^2}dx = \int \frac{te^t}{e^t + e^t(t)^2}dt \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + c \\ &= \frac{1}{2}\ln(1 + (\ln x)^2) + c, \ \ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Remarque 1.3.1. Si la fonction à intégrer contient un facteur $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$; $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$; $\sqrt{-a^2 + b^2x^2}$, mais aucun autre facteur irrationnel, les substitutions suivantes permettent souvent de résoudre l'intégrale.

Pour $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$ on utilise $x = \frac{a}{b}\sin t$

Pour $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$ on utilise $x = \frac{a}{b}\tan t$

Pour $\sqrt{-a^2 + b^2x^2}$ on utilise $x = \frac{a}{b\cos t}$

Méthode d'intégration par parties

Théorème 1.3.3. *Soient f, g deux fonctions dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ telles que les fonctions f', g' sont continues sur I et la fonction $f'g$ admet une primitive sur I.*

Alors la fonction fg' admet une primitive sur I et on a :

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

En particulier le théorème est vrai si $f, g \in C^1(I)$.

Démonstration. La fonction produit fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$, ce qui entraine en particulier la continuité de la fonction $(fg)'$ sur I. Les trois fonctions,$(fg)'$, $f'g$, fg', sont donc continues sur I,.d'après les propriétés fondamentales de l'intégrale indéfinie on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\int f'(x)g(x)dx &= \int (fg)'(x)dx - \int f(x)g'(x)dx \\ &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.\end{aligned}$$

∎

Exemples 1.3.2. Calculons par parties les primitives suivantes :

1-$\int \arctan x dx$,

Posons $u = \arctan x \Rightarrow u' = \frac{1}{1+x^2}, v' = 1, v = x.$

$\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} + c_1 = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$

2-$\int e^{-3x}\cos x dx.$

Par une intégration par parties deux fois on a

$$\begin{cases} f(x) = e^{-3x} \\ g'(x) = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = -3e^{-3x} \\ g(x) = \sin x \end{cases}$$

Posons $I = \int e^{-3x}\cos x dx = \sin x e^{-3x} + 3\int \sin x e^{-3x} dx.$

$$\begin{cases} f(x) = e^{-3x} \\ g'(x) = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = -3e^{-3x} \\ g(x) = -\cos x \end{cases}.$$

Donc $\int \sin x e^{-3x} dx = -e^{-3x}\cos x - 3\int e^{-3x}\cos x$

alors $I = \sin x e^{-3x} - 3e^{-3x}\cos x - 9I$ donc

$$\int e^{-3x}\cos x dx = \frac{1}{10}(\sin x - 3\cos x)\, e^{-3x} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Primitive d'une fonction rationnelle

Toute fraction rationnelle s'écrit d'une seule manière (décomposition en éléments simples) comme d'un polynôme et d'un nombre fini de fractions rationnelles(éléments simples) de la forme

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Mx+N}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n}.$$

1-**Première espèce :**

Il n'y a aucune difficulté à intégrer le polynôme ainsi que les éléments simples de première espèce $\frac{A}{(x-a)^n}$

$$\begin{cases} \int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + c \text{ si } n > 1. \\ \int \frac{A}{(x-a)}dx = A\ln|x-a| + c \text{ si } n = 1. \end{cases}$$

Exemple. Calculer $I = \int \frac{5x-1}{(x+2)^2(x^2-1)}dx$.

Le théorème de décomposition en éléments simples assure alors l'existence de $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\frac{5x-1}{(x+2)^2(x^2-1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+1}$$

- En multipliant par $(x+2)^2$ on obtient

$$\frac{5x-1}{(x^2-1)} = (x+2)\,a + b + \frac{(x+2)^2\,c}{x-1} + \frac{(x+2)^2\,d}{x+1}$$

et en évaluant en -2 on obtient $b = \frac{-11}{3}$.

- En multipliant par $(x-1)$ on obtient

$$\frac{5x-1}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{(x-1)a}{x+2} + \frac{-11}{3}\frac{(x-1)}{(x+2)^2} + c + \frac{(x-1)d}{x+1}$$

et en évaluant en 1 on obtient $c = \frac{2}{9}$.

- En multipliant par $(x+1)$ on obtient

$$\frac{5x-1}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{(x+1)a}{x+2} + \frac{(x+1)b}{(x+2)^2} + \frac{(x+1)c}{x-1} + d$$

et en évaluant en -1 on obtient $d = 3$.

donc

$$\frac{5x-1}{(x+2)^2(x^2-1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{-11}{3(x+2)^2} + \frac{2}{9\,(x-1)} + \frac{3}{x+1}$$

- L'évaluation en 0 donne $a = -3$.

Finalement

$$\frac{5x-1}{(x+2)^2(x^2-1)} = \frac{-3}{(x+2)} + \frac{-11}{3(x+2)^2} + \frac{2}{9\,(x-1)} + \frac{3}{x+1}.$$

On a

$$\begin{aligned}\int \frac{5x-1}{(x+2)^2(x^2-1)}dx &= \int \frac{-3}{(x+2)}dx + \int \frac{-11}{3(x+2)^2}dx + \int \frac{2}{11\,(x-1)}dx + \int \frac{3}{x+1}dx \\ &= -3\ln|x+2| + \frac{2}{11}\ln|x-1| + 3\ln|x+1| + \frac{11}{6(x+2)} + c.\end{aligned}$$

Exemple 1.3.3. Calculer $I = \int \frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)^3}dx$.

On commence par effectuer le changement de variable $u = x^2$. Cela conduit '

$$\int \frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)^3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(u-1)(u+1)^3}du$$

Le théorème de décomposition en éléments simples assure alors l'existence de $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)^3} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+1} + \frac{c}{(u+1)^2} + \frac{d}{(u+1)^3}$$

En multipliant par $u-1$ et en évaluant en 1 on obtient $a = \frac{1}{8}$.

En multipliant par $(u+1)^3$ et en évaluant en -1 on obtient $d = \frac{-1}{2}$.

En multipliant par u et en faisant tendre u vers $+\infty$ on obtient $b = \frac{-1}{8}$.

En évaluant en 0 on trouve $c = \frac{-1}{4}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \frac{1}{(u-1)(u+1)^3}du &= \frac{1}{16}\int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} - \frac{2}{(u+1)^2} - \frac{4}{(u+1)^3}\right)du \\ &= \frac{1}{16}\left(\ln|u-1| - \ln|u+1| + \frac{2}{u+1} + \frac{4}{3\,(u+1)^2}\right) + c.\end{aligned}$$

Alors

$$\int \frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)^3}dx = \frac{1}{16}\left(\ln\left|x^2-1\right| - \ln\left|x^2+1\right| + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{3\,(x^2+1)^2}\right) + c.$$

2- **Deuxième espèce**

L'intégration des élément simples de seconde espèce $\frac{Mx+N}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n}$

se ramène, par le changement de variable $x = \alpha + \beta t$, au calcul des intégrales

$$I_n = \int \frac{t}{(1+t^2)^n}dt; \quad J_n = \int \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$$

Le calcul de I_n est immédiat. En effet ; le changement de variable $1+t^2=u$ donc $\frac{du}{dt}=2t \Rightarrow tdt=\frac{1}{2}du$ alors

$$I_n=\frac{1}{2}\int \frac{1}{u^n}du$$

$$\begin{cases} I_n=\frac{-1}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}}+c \text{ si } n>1 \\ I_1=\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+c \text{ si } n=1 \end{cases}$$

Pour J_n une intégration par parties

Posons $\begin{cases} v(t)=\frac{1}{(1+t^2)^n} \Rightarrow v'(t)=\frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}} \\ u'(t)=1 \Rightarrow u(t)=t \end{cases}$,alors

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{t}{\left(1+t^2\right)^n}+2n\int \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^{n+1}}dt, \\ &= \frac{t}{\left(1+t^2\right)^n}+2n\int \frac{\left(1+t^2\right)-1}{\left(1+t^2\right)^{n+1}}dt, \\ &= \frac{t}{\left(1+t^2\right)^n}+2n\int \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}dt-2n\int \frac{1}{\left(1+t^2\right)^{n+1}}dt \end{aligned}$$

donc $2nJ_{n+1}=\frac{t}{(1+t^2)^n}+(2n-1)J_n$.

Exemple 1.3.4. Calculer $I=\int \frac{dx}{1+x^3}$; on a $\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{3}\frac{2-x}{x^2-x+1}$

$$x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$$

donc

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{1+x^3} \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+x}dx+\frac{1}{3}\int \frac{2-x}{x^2-x+1}dx \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+x}dx+\frac{1}{3}\int \frac{2-x}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \int \frac{2-x}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx &= \int \frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}t\right)dt}{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}} \\ &= \int \frac{\left(\sqrt{3}-t\right)dt}{t^2+1} \\ &= \int \frac{1}{t^2+1}dt-\int \frac{t}{t^2+1}dt \end{aligned}$$

Primitive d'une fonction rationnelle de $sinx$ **et** $cosx$

Soit à calculer

$$I = \int R(\sin x, \cos x)dx.$$

où R est une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$.

Pour ce type d'intégrale, on peut faire le changement de variable universel :

$$t = tg\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan t.$$

On a alors les formules

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale, on obtient :

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Exemples 1.3.5. 1- $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \times \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + c.$

2- $\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{21+2t^2}{1+t^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2.} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C.$

Primitive d'une fonction rationnelle en e^x : $\int R(e^x)dx$.

Dans ce cas, on pose $t = e^x$, et alors on a $\frac{dt}{dx} = e^x$.

Exemple 1.3.6. $\int \frac{dx}{1+e^x}$.

En utilisant le changement de variable $t = e^x$, et alors on a $\frac{dt}{dx} = e^x$

$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{dt}{(1+t)t} = \int \frac{-1}{t}dt + \int \frac{1}{(1+t)}dt = \ln\left|\frac{1+e^x}{e^x}\right| + c.$

Primitive d'une fonction rationnelle de sh et ch: $\int R(shx, chx)dx$

Pour ce type d'intégrale, on peut faire le changement de variable universel :

$$t = th\frac{x}{2}$$

On a alors les formules

$$shx = \frac{2t}{1-t^2} \quad chx = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1-t^2}.$$

En remplaçant ces expressions dans l'intégrale, on obtient :

$$\int R(shx, chx)dx = \int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{2dt}{1-t^2}.$$

Intégrales de la forme $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$.

Si $ad-bc \neq 0$, dans ce cas, la fonction R est irrationnelle en x. Posons $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ d'où

$t^n = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow x = \frac{-b+t^n d}{-t^n c+a}$, $dx = \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(-t^n c+a)^2}dt$. D'où

$$\int R\left(\frac{-b+t^n d}{-t^n c+a}, t\right)\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(-t^n c+a)^2}dt = \int r(t)dt,$$

où r est une fraction rationnelle en t.

Exemple 1.3.7. Calculer $I = \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$, $a > 0$.

Le changement de variable $t^2 = \frac{a+x}{a-x} \implies t^2(a-x) = a+x$, donc $x = a\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{a4t}{(t^2+1)^2}$

alors $I = \int \frac{1}{a}\frac{t^2+1}{t^2-1}t\frac{a4t}{(t^2+1)^2}dt = \int \frac{4t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}dt = \int \left(\frac{2}{t^2+1} - \frac{2}{t^2+1}\right)dt$

$I = 2\arctan\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + \ln\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}} + c$.

Recherche des primitives de $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}), a \neq 0$.

En effet, le problème se ramène toujour à l'intégration d'une fraction rationnelle en effectuant les changements de variables suivants (Euler)

1-Si $a > 0$, on pose $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t$ ou $(-x\sqrt{a}+t)$.

2-Si ax^2+bx+c admet une racine réel x_0, on pose $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_0)\,t$.

3- Si $c > 0$, on pose $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{c} + t$

Exemple 1.3.8. Calculer l'intégrale $I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$.

Faisons la première substitution d'Euler en posant $\sqrt{x^2+x+1} = x - t$

donc

$$x^2+x+1 = (x-t)^2 \implies x^2+x+1 = x^2+t^2-2tx,$$

$$x(1+2t) = t^2-1 \implies x = \frac{t^2-1}{1+2t},$$

donc $\frac{dx}{dt} = \frac{2t(1+2t)-2(t^2-1)}{(1+2t)^2} = \frac{2t(1+2t)-2(t^2-1)}{(1+2t)^2} = \frac{2t+4t^2-2t^2+2}{(1+2t)^2} = \frac{2(1+t+t^2)}{(1+2t)^2}$.

alors

$$I = \int \frac{\frac{2(1+t+t^2)}{(1+2t)^2}dt}{\left(1+\frac{t^2-1}{1+2t}\right)\left(t-\frac{t^2-1}{1+2t}\right)} = \int \frac{2dt}{t(2+t)} = 2\int \frac{dt}{t(2+t)}.$$

Intégrales de la forme $\int \sin^m x \cos^n x dx$, $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$

1- Si $m = 2k+1$ impaire on fait le changement $t = \cos x, \frac{dt}{dx} = -\sin x$ dans ce cas

$$\begin{aligned}\int \sin^m x \cos^n x dx &= \int \left(1-\cos^2 x\right)^k \cos^n x \sin x dx \\ &= -\int \left(1-t^2\right)^k t^n dt.\end{aligned}$$

2- Si $n = 2k+1$ impaire on fait le changement $t = \sin x, \frac{dt}{dx} = \cos x$ dans ce cas

$$\begin{aligned}\int \sin^m x \cos^n x dx &= \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^k \cos x dx \\ &= -\int \left(1-t^2\right)^k t^m dt.\end{aligned}$$

3- Si m, n sont pairs alors on passe à la linéarisation de l'expression.

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

1.4 Exercices avec solutions

Exercice 1.4.1. Calculer la primitive suivante $\int \frac{1}{(x+1)(x-1)^2} dx$.

Solution

on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+1)(x-1)^2} &= \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{(x-1)^2} + \frac{\gamma}{(x-1)} \\ &= \frac{\alpha(x-1)^2 + \beta(x+1) + \gamma(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)^3}\end{aligned}$$

d'où

$$1 = \alpha(x-1)^2 + \beta(x+1) + \gamma(x+1)(x-1). \tag{1.1}$$

Par substitution dans (1.1) on obtient

$$\begin{cases} \text{Si } x = -1, \text{ on aura } \alpha = \frac{1}{4}. \\ \text{Si } x = 1, \text{ on aura } \beta = \frac{1}{2}. \\ \text{Si } x = 0, \text{ on aura } \gamma = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x+1)(x-1)^2} dx &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \frac{-1}{4}\int \frac{1}{(x-1)} dx \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{2(x-1)} + c, \ c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exercice 1.4.2. Calculer la primitive suivante $\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx$.

Solution

On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x-1)^2} &= \frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{(x-1)^2}+\frac{\gamma}{(x-1)} \\ &= \frac{\alpha(x-1)^2+\beta x+\gamma\,(x-1)\,x}{x(x-1)^2}\end{aligned}$$

d'où

$$1=\alpha(x-1)^2+\beta x+\gamma\,(x-1)\,x \tag{1.2}$$

Par substitution dans (1.1) on obtient $\begin{cases} \text{Si } x=0, \text{ on aura } \alpha=1 \\ \text{Si } x=1, \text{ on aura } \beta=1 \\ \text{Si } x=-1, \text{ on aura } \gamma=-1 \end{cases}$, alors

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx &= \int \frac{1}{x}dx+\int \frac{1}{(x-1)^2}dx-\int \frac{1}{(x-1)}dx \\ &= \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{1}{x-1}+c,\ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exercice 1.4.3. Déterminer la primitive suivante en procédant par un changement de variable $\int \frac{e^{2t}}{e^t+1}dt$.

Solution : Posons $e^t=u$ donc $\frac{du}{dt}=e^t=u$, alors

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2t}}{e^t+1}dt &= \int \frac{u}{u+1}du \\ &= \int \frac{u+1-1}{u+1}du=u-\ln|u+1|+c.\end{aligned}$$

Exercice 1.4.4. Soit $n\in\mathbb{N}$. On désire déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 de la fonction

$$f_n(x)=\frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

1- Justifier l'existence et l'unicité de la fonction cherchée. Celle-ci est désormais notée F_n.

2- Calculer $F_1(x)$ où $F_n(x)=\int_0^x f_n(t)dt$.

3- En procédant au changement de variable $x=\tan\theta$, déterminer $F_2(x)$

4- En s'aidant d'une intégration par parties, former une relation de récurrence entre $F_{n+1}(x)$ et $F_n(x)$

5- Calculer $F_3(x)$.

Solution :

1- f_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc possède une unique primitive s'annulant en 0 : $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$.

3-Par le changement de variable $t = \tan\theta$ donc $\theta = \arctan t$ et $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$, et on a

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^2}dt = \int_0^{\arctan x} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2}(1+\tan^2\theta)d\theta \\ &= \int_0^{\arctan x} \frac{1}{1+\tan\theta^2}d\theta \\ &= \int_0^{\arctan x} \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\arctan x} (1+\cos 2\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{4}\sin(2\arctan x)\,. \end{aligned}$$

On a $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \cos(Arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \sin(Arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, donc

$$F_2(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \arctan x\right).$$

4- En s'aidant d'une intégration par parties, former une relation de récurrence entre $F_{n+1}(x)$ et $F_n(x)$

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}dt = \int_0^x \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt \\ &= \int_0^x \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt + \int_0^x \frac{-t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt \\ &= F_n(x) - \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt. \end{aligned}$$

Puis par intégration par parties

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= F_n(x) - \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt. \\ &= F_n(x) + \frac{1}{2n}\left(\left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}dt\right) \\ &= \frac{2n-1}{2n}F_n(x) + \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n}. \end{aligned}$$

5- On utilise la question précédent on obtient

$$\begin{aligned} F_3(x) &= \frac{3}{4}F_2(x) + \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{3}{8}\left(\frac{x}{1+x^2} + \arctan x\right) + \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Exercice 1.4.5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int \sin^n x dx$$

-Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,$n \geq 2$: $I_n = -\frac{\cos x}{n} \sin^{n-1} x + \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2}$.

Solution :

Montrons que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,$n \geq 2$: $I_n = -\frac{\cos x}{n} \sin^{n-1} x + \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2}$.

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sin^n x dx = \int \left(\sin^{n-2} x\right) \sin^2 x dx = \int \left(\sin^{n-2} x\right)\left(1-\cos^2 x\right) dx \\ &= \int \left(\sin^{n-2} x\right) dx - \int \left(\sin^{n-2} x\right)\left(\cos^2 x\right) dx \\ &= I_{n-2} - \int \left(\sin^{n-2} x\right)\left(\cos^2 x\right) dx. \end{aligned}$$

Pour calculer $\int (\sin^{n-2} x)(\cos^2 x)\, dx$, En utilise une intégration par parties. On pose :

$g'(x) = \cos x \sin^{n-2} x$, $\qquad g(x) = \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x$.

$$\int \left(\sin^{n-2} x\right)\left(\cos^2 x\right) dx = \frac{\cos x}{n-1} \sin^{n-1} x + \int \frac{1}{n-1} \sin^n x dx.$$

Finalement :

$$I_n = -\frac{\cos x}{n} \sin^{n-1} x + \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2}.$$

Exercice 1.4.6. 1) Décomposition en éléments simples : Determiner a, d et c telle que

$$\frac{2}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}.$$

2)- Calculer $I = \int \frac{2}{x^3+1} dx$.

Solution :

1) Determinons a, d et c telle que

$$\frac{2}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}.$$

* $\frac{2(x+1)}{x^3+1} = \frac{2(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = a + \frac{(x+1)(bx+c)}{x^2-x+1}$, si $x = -1$ alors $a = \frac{2}{3}$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ax}{x+1} + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(bx+c)x}{x^2-x+1}$, alors $0 = a + b \Rightarrow b = \frac{-2}{3}$.

*$\lim\limits_{x\to0} \frac{2}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to0} \frac{a}{x+1} + \lim\limits_{x\to0} \frac{bx+c}{x^2-x+1}$,alors $2 = a + c \Rightarrow c = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

2)- Calculons $I = \int \frac{2}{x^3+1} dx$.

$$I = \int \frac{2}{x^3+1} dx = \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3} \int \frac{-x+2}{x^2-x+1} dx$$

On a $\int \frac{-x+2}{x^2-x+1} dx = \int \frac{-x+2}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dx$, posons $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} t$, $\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\frac{2}{3}\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}dx = \frac{2}{3}\int \frac{2-x}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{2}{3}\left(\int \frac{1}{t^2+1}dt - \int \frac{t}{t^2+1}dt\right) = \frac{2}{3}\arctan(t) - \frac{1}{3}\ln\left(t^2+1\right) + c$.

Alors

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3}\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}dx \\ &= \frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{2}{2}\arctan(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)) - \frac{1}{3}\ln\left(\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\right) + K,\ K\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 1.4.7. 1- Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$P(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}.$$

2- Déterminer sur $]0,+\infty[$

$$I = \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx.$$

Solution : 1- On a $\frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} = \frac{a+(a+b)x^2+cx}{x(1+x^2)}$ donc $a=1, b=-1, c=0$. Alors $P(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$.

2- Déterminons sur $]0,+\infty[$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx \\ &= \ln x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c = \ln\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right) + c,\ \text{avec } c\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Intégrales définies

2.1 Intégrale d'une fonction en escalier

2.1.1 Fonction en escalier

Définition 2.1.1.1. On appelle **subdivision** de l'intervalle $[a, b]$ toute famille finie $(x_i)_{i\in\{0,1,\ldots,n\}}$ des réels vérifiant les conditions suivantes

1- pour tout $i \in \{0, 1, ..., n\}$, $x_i \in [a, b]$.

2- $x_0 = a$; $x_n = b$.

3- pour tout $i \in \{0, 1, ..., n\}$, $x_{i-1} < x_i$.

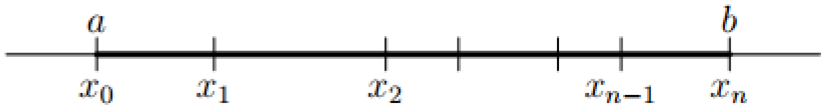

Figure 2.1 – Subdivision de l'intervalle $[a, b]$

Définition 2.1.1.2. On appelle le pas de la subdivision $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,1,\ldots,n\}}$ le réel $h = \max\limits_{i\in\{0,1,\ldots,n\}} (x_i - x_{i-1})$

Soit $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,1,\ldots,n\}}$ et $\sigma' = (x'_i)_{i\in\{0,1,\ldots,m\}}$ deux subdivisions de l'intervalle $[a, b]$. On dit que σ'est plus fine que σ si

$$\sigma \subset \sigma'$$

Exemples 2.1.1. 1- La famille $(x_i)_{i\in\{0,1,\ldots,n\}}$ où $x_i = a+\frac{i}{n}(b-a)$ définit une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ de pas $h = \frac{1}{n}(b-a)$

appelée subdivision **uniforme** de l'intervalle $[a, b]$.

2- La La famille $(x'_i)_{i\in\{0,1,\dots,2n\}}$ où $x'_i = a + \frac{i}{2n}(b-a)$ définit une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ de pas $h' = \frac{1}{2n}(b-a) = \frac{1}{2}h$, donc $(x_i)_{i\in\{0,1,\dots,2n\}} \subset (x'_i)_{i\in\{0,1,\dots,n\}}$ i.e. (x'_i) plus fine que (x_i) .

Définition 2.1.1.3. Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est une application en escalier s'il existe :

1- Une subdivision $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,1,\dots,n\}}$ de $[a, b]$,

2- $y_0; y_1; ...; y_n \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\ i \in \{0, 1, ..., n-1\}, \forall t \in]x_i, x_{i+1}[\ ;\ f(t) = y_i$

On dit alors que la subdivision $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,1,\dots,n\}}$ est adaptée à f .

On note $\mathscr{E}([a; b])$ l'ensemble des fonctions en escalier défnies sur $[a, b]$.

Proposition 2.1.1. *L'ensemble des fonctions en escalier $\mathscr{E}([a; b])$ sur $[a, b]$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.*

Démonstration. On montre que c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

La stabilité par multiplication par un scalaire est claire. Si f et g sont deux fonctions en escalier, on considère une subdivision $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,1,\dots,n\}}$ adaptée à la fois à f et g c-à-d. on a

$y_0; y_1; ...; y_n \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\ i \in \{0, 1, ..., n-1\}, \forall t \in]x_i, x_{i+1}[\ ;\ f(t) = y_i$

et

$z_0; z_1; ...; z_n \in \mathbb{R} \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\ i \in \{0, 1, ..., n-1\}, \forall t \in]x_i, x_{i+1}[\ ;\ g(t) = z_i$

C'est alors $\xi_0; \xi_1; ...; \xi_n \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\ i \in \{0, 1, ..., n-1\}, \forall t \in]x_i, x_{i+1}[\ ;\ g(t) + f(t) = z_i + y_i$

donc $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,1,\dots,n\}}$ une subdivision adaptée à $f + g$ et par conséquent $f + g$ est bien une fonction en escalier. ■

Exemple 2.1.2. 1-La fonction partie entière E est une fonction en escalier sur l'intervalle $[-2, 2]$. La subdivision $\sigma_1 = (-2, -1, 0, 1, 2)$ est une subdivision uniforme adapté à la fonction partie entière.

$\sigma_2 = \left(-2, \frac{-3}{2}, -1, \frac{-1}{4}, 0, 1, \frac{7}{4}, 2\right)$ est également une subdivision adaptée σ_2 plus fine que σ_1.

$\sigma_3 = \left(-2, \frac{-3}{2}, -1, 1, 2\right)$ non adaptée à la fonction partie entière.

Remarque 2.1.1. Toute fonction en escalier est borné. Si $f; g \in \mathscr{E}([a; b])$ alors $f + g; fg; |f|,\ \ \lambda f \in \mathscr{E}([a; b])$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.1.2 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 2.1.2.1. Soient $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier et $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,1,\ldots,n\}}$ une subdivision adaptée. On suppose que

$\forall i \in \{0, 1, ..., n-1\}, \forall t \in \,]x_i, x_{i+1}[\,;\ f(t) = \lambda_i$. On appelle intégrale de f le réel $I(f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, \lambda_i = \int_a^b f$

on note aussi ce réel $\int_a^b f(x)dx$.

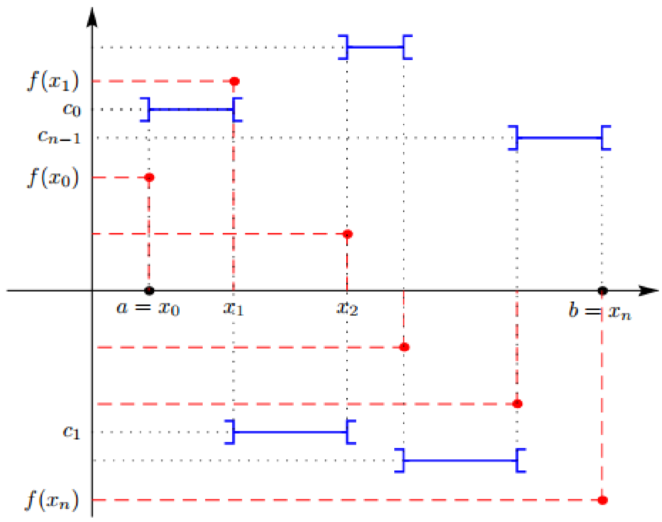

Figure 2.2 – Représentation graphique d'une fonction en escalier

Exemple 2.1.3.

$$E(x) = \begin{cases} -2 \text{ si } x \in [-2, -1[\\ -1 \text{ si } x \in [-1, 0[\\ 0 \text{ si } x \in [0, 1[\\ 1 \text{ si } x \in [1, 2[\end{cases}$$

$\int_{-2}^{2} E = \sum\limits_{i=0}^{3} (x_{i+1} - x_i)\, \lambda_i = -2.$

Interprétation graphique

Le réel $\int_a^b f$ représente l'aire algébrique entre la représentation graphique de la fonction en escalier f sur l'intervalle $[a; b]$ et l'axe des abcisse. La quantité $(x_{i+1} - x_i)\, \lambda_i$ est en effet l'aire d'un rectangle de longueur $(x_{i+1} - x_i)$ et de hauteur λ_i.

Propriétés des intégrales de fonctions en escalier

Proposition 2.1.2. *soit $f; g \in \mathscr{E}([a;b])$, on a les propriétés suivantes*

1- $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

2- Si $f \geq 0$, *alors* $\int_a^b f \geq 0$.

3- Si $f \leq g$ *alors* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

4- $\forall c \in]a,b[$ $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ *(relation de Chasles)* f *escalier sur* $[a,c[$ *et* $[c,b[$.

5- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *la fonction* $\alpha f + \beta g$ *est une fonction en escalier sur* $[a;b]$ *et*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Démonstration. 1- Par définition on a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f\right| &= \left|\int_a^b \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \lambda_i\right| \\ &\leq \int_a^b \left|\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \lambda_i\right| \\ &\leq \int_a^b \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) |\lambda_i| = \int_a^b |f|.\end{aligned}$$

2-Toutes les valeurs λ_i de f sur $]x_i, x_{i+1}[$ sont positives. Comme les $x_{i+1} - x_i$ sont tous positifs aussi on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \lambda_i \geq 0.$$

3- Comme $0 \leq g - f$, On applique (2). Donc

$$\int_a^b (g-f)(x)\, dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)\, dx \geq \int_a^b f(x)\, dx.$$

■

Proposition 2.1.3. *Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application linéaire. Alors $u \circ f$ est en escalier et*

$$\int_a^b (u \circ f)(x)dx = u\left(\int_a^b f(x)dx\right).$$

Démonstration. En effet, $u \circ f$ est constante sur $[x_{i+1}, x_i]$ et y vaut $u(\lambda_i)$ si f vaut λ_i, mais alors

$$\int_a^b (u \circ f)(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} u(\lambda_i)(x_{i+1} - x_i) = u\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i)\right) = u\left(\int_a^b f(x)dx\right).$$

■

■ 2.2 Sommes de Darboux

Dans toute la suite du chapitre, on ne considérera que des fonctions bornées c'est-à-dire les fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telles que

$$\|f\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| < +\infty.$$

Pour chaque subdivision $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_n = b\}$ .On pose

$$m_i = m_i(f) = m_i(f, \sigma) = \inf_{x_{i-1} < x < x_i} f(x)$$

$$M_i = M_i(f) = M_i(f, \sigma) = \sup_{x_{i-1} < x < x_i} f(x)$$

Définition 2.2.1. Considérons

$$s = s(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$S = S(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Ces deux sommes sont dites sommes de Darboux, respectivement inférieure et supérieure de f, relativement à la subdivision σ.

Remarque 2.2.1. L'aire $A(f)$ de la surface délimitée par la courbe représentative de f, les droites verticales d'equations $x = a, x = b$ et l'axe des abscisses vérifie la relation

$$s(f, \sigma) \leq A(f) \leq S(f, \sigma).$$

■ 2.2.1 Propriétés des sommes de Darboux

Proposition 2.2.1. $\forall \sigma$, $s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma)$.

Démonstration. Évident. ■

Proposition 2.2.2. *Si $\sigma \subset \sigma'$, alors*

1- $S(f, \sigma) \geq S(f, \sigma')$.

2- $s(f, \sigma) \leq s(f, \sigma')$.

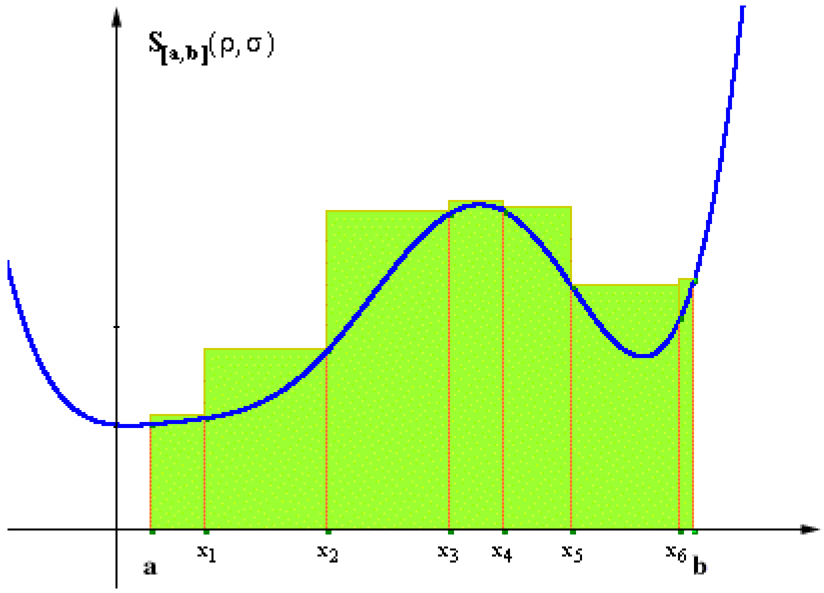

Figure 2.3 – Sommes de Darboux

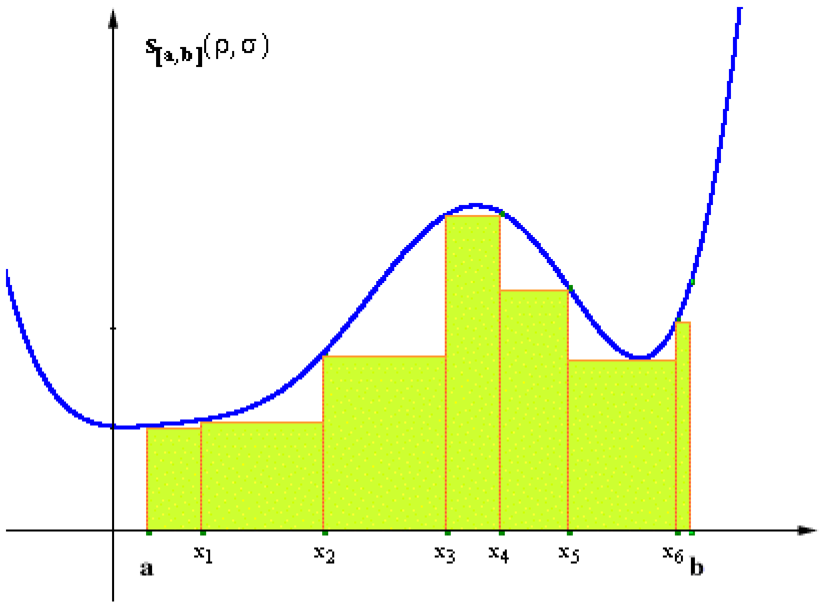

Figure 2.4 – Sommes de Darboux

Démonstration. Montrons (1), supposons d'abord que $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$, ce qui signifie que la subdivision σ est obtenue à partir de $\sigma = \{x_0, ..., x_n\}$ par adjonction d'un point supplémentaire c, c étant un point de $[a, b]$, il existe donc j tel que $x_{j-1} < c < x_j$.

Posons

$$M'_j(f) = \sup_{x_{j-1} \prec x \prec c} f(x), \;\; M''_j(f) = \sup_{c \prec x \prec x_j} f(x)$$

On a $M'_j(f) \leq M_j(f)$ et $M''_j(f) \leq M_j(f)$. d'où

$$S(f, \sigma') = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) + M''_j(f)(c - x_{j-1}) + M''_j(f)(x_j - c).$$

Il en résulte

$$S(f, \sigma') \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) + M_j(f)(x_j - x_{j-1}) = S(f, \sigma).$$

Dans le cas général, la subdivision $\sigma' = \sigma \cup \{c_1, c_2, c_3, ..., c_k\}$ est obtenue à partirde σ par k adjonctions successives des ensembles $\{c_0\}, \{c_1\}, .., \{c_k\}$. D'après ce qui précède, on a alors

$$S(f, \sigma') \leq S(f, \sigma \cup \{c_1, c_2, c_3, ..., c_{k-1}\}) \leq S(f, \sigma \cup \{c_1, c_2, c_3, ..., c_{k-2}\}) \leq ... \leq S(f, \sigma \cup \{c_1\}) \leq S(f, \sigma).$$

■

Proposition 2.2.3. *Deux subdivisions quelconques σ, σ' de $[a, b]$ vérifient*

$$s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma')$$

Démonstration. D'après les propositions (2.2.1), (2.2.2), $s(f, \sigma) \leq s(f, \sigma \cup \sigma') \leq S(f, \sigma \cup \sigma') \leq S(f, \sigma')$. ■

A chaque fonction f définie et bornée sur $[a, b]$, associons l'ensemble
$D_*(f)$ les sommes de Darboux inférieures $s(f, \sigma)$
$D^*(f)$ les sommes de Darboux supérieures $S(f, \sigma)$.
les ensembles $D_*(f), D^*(f)$ sont évidemment non vides.

Proposition 2.2.4. $\sup D_*(f) \leq \inf D^*(f)$.

Démonstration. Conséquence immédiate de la proposition (2.2.3). ■

Définition 2.2.1.1. La borne supérieure de l'ensemble $D_*(f)$, la borne inférieure de l'ensemble $D^*(f)$ seront notées

$$\int_{*a}^{b} f dx = \sup D_*(f), \;\; \int_{a}^{*b} f dx = \inf D^*(f).$$

Remarque 2.2.2. La proposition (2.2.4) entraine les inégalités

$$\forall \sigma, \sigma' : s(f, \sigma) \leq \int_{*a}^{b} f dx \leq \int_{a}^{*b} f dx \leq S(f, \sigma')$$

■ 2.3 Fonction intégrables. Intégrale de Riemann

Définition 2.3.1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On dit que f est **intégrable** (au sens de Riemann) sur $[a, b]$ si

$$\int_{*a}^{b} f dx = \int_{a}^{*b} f dx.$$

La valeur **commune** de l'intégrale inférieur et de l'intégrale supérieure est alors appelée intégrale (de Riemann) de f sur $[a, b]$ et notée

$$\int_{a}^{b} f dx \text{ ou} \int_{a}^{b} f(x) dx \text{ ou } \int_{[a,b]} f(x) dx.$$

Exemple 2.3.1. La fonction de Dirichlet :

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

n'est pas Riemann-intégrable, car on a, pour toute partition σ de $[a, b]$, on a

$$S(f, \sigma) = b - a \text{ et } s(f, \sigma) = 0.$$

Théorème 2.3.1. *Pour qu'une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ soit intégrable il faut, et il suffit, que*

$$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists d : S(f, d) - s(f, d) \prec 0$$

■ 2.3.1 Théorème de Darboux

Soit $D\,[a, b]$ l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a, b]$ et soit $F : D\,[a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction associant à toute subdivision d le nombre $F(d)$.

Définition 2.3.1.1. On dit que $\lim\limits_{\delta(d) \to 0} F(d) = A$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall d\ \ [\delta(d) < \eta \Rightarrow |F(d) - A| < \varepsilon]\,.$$

Théorème 2.3.1.1. *Si la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée, alors*

$$\int_{a}^{*b} f dx = \lim_{\delta(d) \to 0} S(f, d), \quad \int_{*a}^{b} f dx = \lim_{\delta(d) \to 0} s(f, d).$$

Interprétation géométrique de l'intégrale de Riemann

Si f est continue sur $[a, b]$ le réel $\int_a^b f(t)dt$ représente l'aire algébrique de la portion de plan comprise entre les droites d'équation $x = a, x = b$ l'axe des abscisses et la représentation graphique de f.

Remarque 2.3.1. 1- Par convention, si $b < a$ et si f est Riemann -intégrable sur $[a; b]$ alors on pose $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.

2- On convient également que si $a = b$ alors $\int_a^b f(t)dt = 0$.

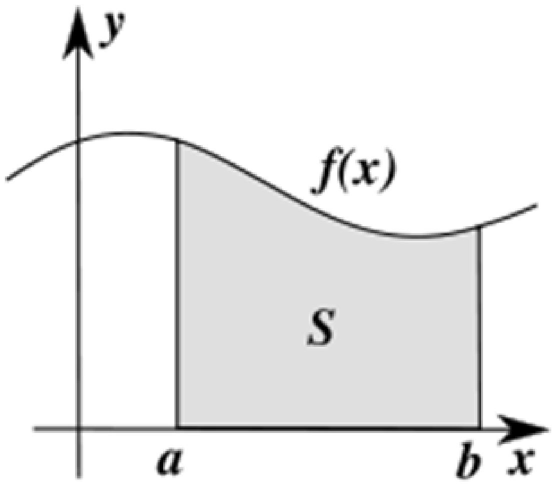

Figure 2.5 – Interprétation géométrique de l'intégrale de Riemann

Définition 2.3.1.2. On dit qu'une application f définie sur $[a, b]$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,1,\ldots,n\}}$ de l'intervalle $[a, b]$ tells que tout ${}_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}}$ l'application f est continue sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ et admet une limite à droite en x_i et une limite à gauche en x_{i+1}.

■ 2.3.2 Intégrabilité des fonctions monotones et continues

Théorème 2.3.2.1. *Toute fonction monotone* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est intégrable.*

Démonstration. Soit h une fonction monotone sur I. On suppose par exemple que h est décroissante et on choisit la subdivision donnée par $(x_i)_{i\in\{0,1,\ldots,n\}}$ où $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$.

On note M_i la limite à droite de h en x_i pour $0 \le i \le n-1$ et m_i la limite à gauche de h en x_i pour $1 \le i \le n$. On considère les deux fonctions en escalier G et H définies par :

$$G(x) = m_{i+1} \text{ et } H(x) = M_i \text{ pour } x_i \in]x_i, x_{i+1}[, \ 0 \le i \le n-1.$$

On rappelle que les valeurs prises par G et celles prises par H aux points x_i de la subdivision n'ont pas d'importance pour la suite. On a alors

$$G \leq h \leq H.$$

et

$$\int_a^b G(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{m_{i+1}}{n}(b-a), \quad \int_a^b H(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{M_i}{n}(b-a).$$

et par suite

$$\int_a^b [H(x) - G(x)]\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{M_i - m_{i+1}}{n}(b-a) \leq (M_0 - m_n)(b-a).$$

Par suite, H est intégrable. ■

Théorème 2.3.2.2. *Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable.*

Démonstration. On rappelle que si f est continue sur $[a,b]$ alors f est uniformément continue sur $[a,b]$. En d'autres termes

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0, \ |x - x^*| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon.$$

On précise que η ne dépend ni de x ni de x^*.

Pour la subdivision de $[a,b]$ donnée par $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$, on définit sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour $0 \leq i < n-1$, les deux fonctions en escalier H et G suivantes :

$$G(x) = f(x_i) - \varepsilon \text{ et } H(x) = f(x_i) + \varepsilon.$$

Il est facile de voir que G et H sont deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui vérifient à partir d'un certain rang convenable n, $G \leq f \leq H$ et

$$\int_a^b [H(x) - G(x)]\, dx = 2\varepsilon(b-a).$$

Par suite, f est intégrable. ■

■ 2.3.3 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Soient f, g deux fonctions Riemann-intégrable sur $[a,b]$,notée $(f, g \in R[a,b])$

Proposition 2.3.1. *1- Si f est intégrable sur $[a,b]$, alors f est intégrable sur $[a';b']$, $\forall [a',b'] \subset [a,b]$.*

2-$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$

3- Si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

4- Si $f \leq g$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

5- $\forall c \in]a,b[$ la fonction f est Riemann-intégrable sur $[a,c]$ et $[c,b]$, de plus $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ (relation de Chasles)

6- $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ la fonction $\alpha f + \beta g$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt.$$

Remarque 2.3.2. Par convention, on pose :$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$, $\int_a^a f(t)dt = 0$.

Proposition 2.3.2. *Soient a, b et c trois éléments de I et f une fonction continue sur I. On a*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I. L'égalité cherchée est une autre façon d'écrire $F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a)$. ■

Proposition 2.3.3. *Soient f et g deux fonctions continues sur I. Pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(a,b) \in I^2$.*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt.$$

Démonstration. On utilise la définition de l'intégrale et le fait que si F et G sont des primitives de f et g sur I alors $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$. ■

Proposition 2.3.4. *Soit f une fonction continue et positive sur $I = [a,b]$. Si $a < b$ alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.*

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I. Comme la fonction f est positive, F est croissante et $a < b$ implique $F(a) \leq F(b)$ d'où $\int_a^b f(t)dt \geq 0$. ■

Proposition 2.3.5. *Soient f et g deux fonctions continues sur $I = [a,b]$. Si pour tout $x \in [a,b]$, $f \leq g$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.*

L'inégalité stricte ayant lieu si et seulement si il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) < g(x_0)$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition (2.3.4) à la fonction continue et positive $L = g - f$. ■

Proposition 2.3.6. *Soit f une application continue sur $[a, b]$ et à valeurs positives on a*

$$\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Démonstration. ($\Leftarrow$) La fonction nulle est une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $\sigma = \{a, b\}$ est une subdivision de $[a; b]$ adaptée , d'après la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier on a

$$\int_a^b f(t)dt = (b - a)0 = 0.$$

($\Rightarrow$)Pour montrer que la réciproque est vraie, utilisons un raisonnement par contraposée.

Supposons que f n'est pas nulle c'est -à-dire qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) \neq 0$ et montrons que dans ce cas $\int_a^b f(t)dt \neq 0$.

Puisque f est continue sur $[a, b]$ il existe un voisinage de x_0 où f ne s'annule pas autrement dit , on peut trouver deux réels $\alpha; \beta$ dans $[a, b]$ avec $\alpha < x_0 < \beta$ tels que

$$\forall x \in [\alpha, \beta] \ f(x) \neq 0$$

Puisque f est positive elle strictement positive sur $[\alpha, \beta]$ cela implique que

$$\exists \eta > 0, \forall x \in [\alpha; \beta], f(x) \geq \eta$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &= \int_a^\alpha f(t)dt + \int_\alpha^\beta f(t)dt + \int_\beta^b f(t)dt \\ &\geq \int_\alpha^\beta f(t)dt \\ &\geq \int_\alpha^\beta \eta dt = (\beta - \alpha)\eta > 0.\end{aligned}$$

On a donc$\int_a^b f(t)dt \neq 0$. ■

■ 2.3.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité de Minkowski

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 2.3.4.1. $\forall f, g \in \boldsymbol{R}[a, b] : \left(\int_a^b fgdx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2dx\right)\left(\int_a^b g^2dx\right).$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que f, g étant intégrables alors d'après la proposition les fonctions $f + \lambda g$ et $(f + \lambda g)^2$ l'est également pour tout nombre réel λ.

On considère, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ le trinôme en λ

$$P(\lambda) = \int_a^b (f + \lambda g)^2 \, dx = \int_a^b f^2 dx + 2\lambda \int_a^b fg dx + \lambda^2 \int_a^b g^2 dx \geq 0$$

P est un polynôme λ de degré 2, toujours positif, d'où $\Delta \leq 0$.

$$4 \left(\int_a^b fg dx \right)^2 - 4 \int_a^b f^2 dx \int_a^b g^2 dx \leq 0.$$

■

Proposition 2.3.7. $\forall f, g \in \boldsymbol{C}([a,b], R) : \int_a^b |fg| \, dx \leq \left(\int_a^b f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

Démonstration. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ■

Inégalité de Minkowski

Théorème 2.3.4.2. $\forall f, g \in \boldsymbol{C}([a,b]) : \left(\int_a^b (f(x) + g(x))^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

Démonstration. $\forall f, g \in \boldsymbol{C}([a,b])$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(x) + g(x))^2 &= \int_a^b f^2(x)dx + 2 \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \\
&\leq \int_a^b f^2(x)dx + 2 \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} + \int_a^b g^2(x)dx \\
&= \left(\left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2.
\end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité souhaitée. ■

■ 2.3.5 Intégrale de fonction de sa limite supérieure

Soit $f \in \boldsymbol{R}[a,b]$. Considérons la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Proposition 2.3.8. *F est continue dans $[a,b]$. Si f est continue en $x_0 \in [a,b]$, alors F est dérivable en x_0 et l'on a*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Théorème 2.3.5.1. *Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ admet une primitive. L'application*

$$x \to F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f.

Formule de Newton-Leibniz

Théorème 2.3.5.2. *Si f est continue sur $[a,b]$, et si F est une primitive de f, alors on a :*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Exemple 2.3.2. $\int_1^\pi e^{ax}dx = \left[\frac{1}{a}e^{ax}\right]_1^\pi = \frac{1}{a}\left(e^{a\pi} - e^a\right).$

■ 2.4 Calcul intégral

Définition 2.4.1. Soit f une fonction Riemann intégrable sur $[a,b]$ pour tout $x \in [a,b]$ la fonction f est Riemann -intégrable sur $[a,x]$ et l'application $F : x \in [a;b] \to \int_a^x f(t)dt$ est appelée intégrale indéfinie de f sur $[a,b]$.

D'après la relation de Chasles pour tout $(x_1,x_2) \in [a,b]^2$, on a

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \int_a^{x_2} f(t)dt - \int_a^{x_1} f(t)dt \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt. \end{aligned}$$

Le théorème fondamental suivant garantit l'existence de primitives d'une fonction continue sur un intervalle

Théorème 2.4.1. *(*Théorème fondamental*) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I. Pour $a \in I$, la fonction :*

$$\begin{array}{rll} F: & I \to & \mathbb{R} \\ & x \to & F(x) = \int_a^x f(t)dt. \end{array}$$

est de classe C^1 sur I et est la seule primitive de f qui s'annule en a $F' = f$ et $F(a) = 0$.

Proposition 2.4.1. ***(Dérivabilité de l'intégrale indéfinie)***

Soit f une fonction Riemann intégrable sur $[a,b]$.Si f est continue en $x_0 \in]a,b[$ alors son intégrale indéfinie F sur $[a,b]$ est dérivable en x_0 et admet pour dérivée $F'(x_0) = f(x_0)$.

Proposition 2.4.2. *Soient f une application continue sur un intervalle J et u, v deux applications de classe C^1 sur un intervalle ouvert I tel que $u(I) \subset J$, $v(I) \subset J$. L'application*

$$\phi : x \in I \longrightarrow \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt.$$

est de classe C^1 sur I et pour tout $x \in I$, on a

$$\phi'(x) = f(v(x)) \times v'(x) - f(u(x)) \times u'(x).$$

Exemple 2.4.1. Considérons l'application

$$\phi : x \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[\longrightarrow \int_x^{2x} \sqrt{1+t^3}dt.$$

L'application $f : x \in \left]-1, +\infty\right[\to \sqrt{1+t^3}$ est continue et les deux applications $u : x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\to x \in \left]-1, +\infty\right[$

$v : x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\to 2x \in \left]-1, +\infty\right[$ sont de classe C^1. D'après la proposition (2.4.2) on obtient :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\; \phi'(x) = 2\sqrt{1+8x^3} - \sqrt{1+x^3}.$$

Le Théorème suivant est un outil pour montrer l'intégrabilité de certaines classes de fonctions intégrables :

Théorème 2.4.2. *(La moyenne) Soit f une fonction réelle, définie, bornée et intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. Posons*

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \text{ et } M = \sup_{x\in[a,b]} f(x),$$

alors

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\,(b-a)\,.$$

Démonstration. Les fonctions m et M sont constantes sur l'intervalle $[a, b]$, elles sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$ donc elles sont intégrables et on a

$$m \leq f(x) \leq M, \; x \in [a, b].$$

Donc d'après les propriétés de l'intégrale on obtient $m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\,(b-a)$. Voire la Figure(2.6). ■

Proposition 2.4.3. *Soit f une application continue sur $[a, b]$. L'intégrale indéfinie de f sur $[a, b]$*

$$F : x \in [a; b] \to \int_a^x f(t)dt.$$

est une primitive de f sur $[a, b]$. De plus, pour toute primitive G de f sur $[a, b]$ il existe un réel c tel que $G = F + c$.

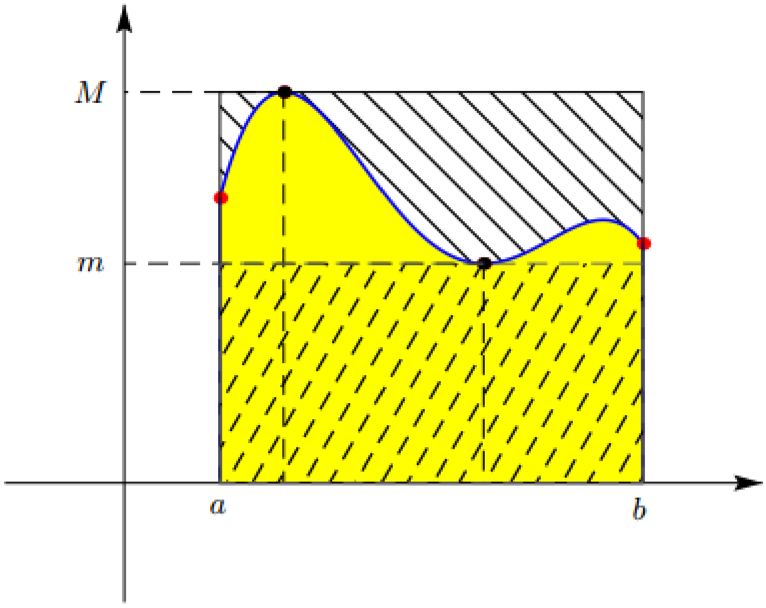

Figure 2.6 – Encadrement d'une intégrale

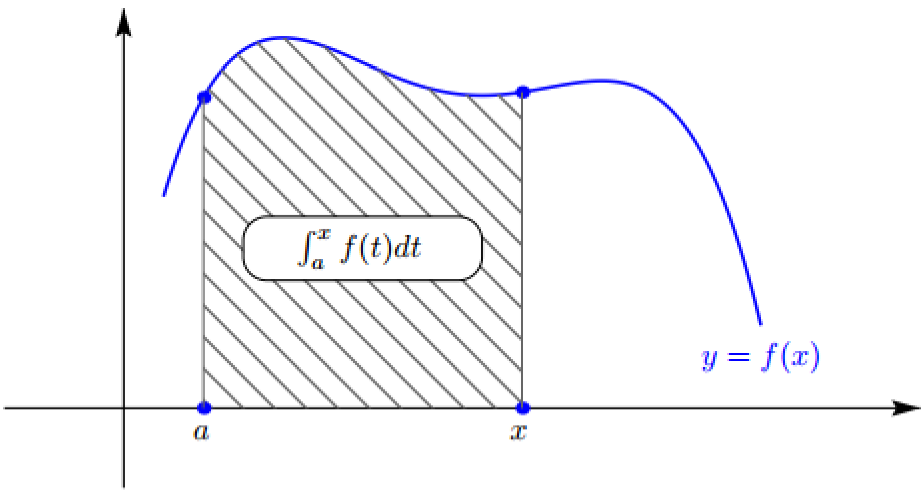

Figure 2.7 – Théorème fondamental de l'analyse

Démonstration. Si G est une autre primitive de f, on a $F'(x) = G'(x)$ et donc $F(x) - G(x) = c$ (constante). Par suite,$F(b) - G(b) = F(a) - G(a)$. ■

Exemple 2.4.2.

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

la formule est vraie sur n'importe quel intervalle $[a, b]$.

Proposition 2.4.4. ***(Lien entre primitive et intégrale)***

Soit f une application Riemann-intégrable sur $[a; b]$ admettant une primitive G sur $[a, b]$. On a

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a).$$

Le réel $G(b) - G(a)$ est souvent noté $[G(t)]_a^b$.

Démonstration. Nous admettant une primitive G.Nous supposons que f est continue sur $[a, b]$ d'après la proposition 2.4.3

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in [a, b],\ G(x) = F(x) + c$$

ou F est l'intégrale indéfinie de f on a donc

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

■

■ 2.4.1 Résultats généraux sur l'intégrale de Riemann

Intégration par parties

Théorème 2.4.1.1. ***(Formule d'intégration par parties)***

Soient u et v deux applications de classe C^1 sur un intervalle fermé borné d'extrémités a et b. On a

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

Démonstration. Nous supposons que $a < b$. La fonction $F : x \to u(x)v(x)$ est une primitive sur $[a, b]$ de la fonction $f : x \to u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$.

D'après la proposition 2.4.4 on a donc

$$\begin{aligned}\int_a^b [u(x)v'(x) + u'(x)v(x)]\, dt &= \int_a^b f(x)dt \\ &= [F(x)]_a^b,\end{aligned}$$

ce qui implique que $\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$. ■

Exemple 2.4.3. Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$.

Posons $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = -\cos x \end{cases}$, alors

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = \left[-x^2 \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x.$$

et une seconde intégration par parties calculons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x$.

Posons $\begin{cases} u(x) = 2x \\ v'(x) = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = \sin x \end{cases}$, alors

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x dx = [2x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x.$$

Finalement

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = \left[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2.$$

Formule du changement de variable pour une intégrale

Théorème 2.4.1.2. *Soit ϕ une application de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$ et f une application continue sur l'intervalle fermé borné $\phi([a, b])$; on a*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

on dit que l'on effectue le changement de variable $x = \phi(t)$.

Démonstration. L'intégrabilité de $(f \circ \phi)\phi'$ puisque cette fonction est continue. Soit F une primitive de f. La fonction $F \circ \phi$ est une primitive de $(f \circ \phi)\phi'$ puisque

$$(F \circ \phi)' = (f \circ \phi)\phi'$$

d'où d'après la proposition 2.4.4, on a

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = (F \circ \phi(b)) - (F \circ \phi(a)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx.$$

■

Exemples 2.4.4. 1) $I = \int_0^1 \frac{1}{cht} dt; \forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{cht} = \frac{2}{e^t + e^{-t}} = \frac{2e^t}{1+e^{2t}}$. Donc

$$I = \int_0^1 \frac{1}{cht} dt = \int_0^1 \frac{2}{1 + (e^t)^2} e^t dt$$

Le changement de variable $x = e^t$. L'application $\phi : [0,1] \to e^t$ de classe C^1sur $[0,1]$ et la fonction $f : t \to \frac{2}{t^2+1}$ est continue sur

$\phi([0,1]) = [1,e]$. La formule du changement de variable nous indique que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{cht}dt &= \int_0^1 \frac{2}{1+(e^t)^2}e^t dt \\ &= 2\int_1^e \frac{1}{1+x^2}dx = 2\left[\arctan x\right]_1^e.\end{aligned}$$

2)- $I = \int_0^{\pi} \cos^2 x \sin x dx$; le changement de variable $t = \cos x$ donne

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x \sin x dx = -\int_1^{-1} t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

3)-$I = \int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}$.Posons $t = \frac{x}{a} \Rightarrow x = ta$ donc

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} &= \int_0^1 \frac{adt}{a^2(1+t^2)} \\ &= \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)} = \frac{1}{a}\left[\arctan t\right]_0^1 = \frac{\pi}{4a}.\end{aligned}$$

Corrollaire 2.4.1. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et ϕ une bijection de classe C^1 sur le segment de bornes $\phi^{-1}(a)$ et $\phi^{-1}(b)$. On a :*

$$\int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(x))\phi'(x)dt = \int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que ϕ est bijective, ce qui établit l'existence de ϕ^{-1}, sa bijection réciproque.

Appliquons alors le théorème (changement de variable) précédent à ϕ et f entre $\phi^{-1}(a)$ et $\phi^{-1}(b)$.

$$\int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(\phi^{-1}(a))}^{\phi\left(\phi^{-1}(b)\right)} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

■

Exemple 2.4.5. Calculer $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

Posons $x = \sin u$, $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{dx}{du} = \cos u$. La fonction sinus réalise une bijection de classe C^1 entre $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u du \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t+1}{2} = \left[\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

■ 2.5 Exercices avec solutions

Exercice 2.5.1. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x$.

Solution :

On a $\cos^3 x = \cos x(1-\sin^2 x)$ d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(1-\sin^2 x)dx.$$

Posons $t = \sin x$, donc $\frac{dt}{dx} = \cos x$, et

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x &= \int_0^1 (1-t^2)dt \\ &= \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 2.5.2. Calculer $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$.

Solution :

On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+(x^2)^2}dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\arctan x^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 2.5.3. 1-Calculer les sommes suivantes :

$$\Sigma_{(1,n)} = \sum_{k=1}^{n} k,\ \Sigma_{(2,n)} = \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

2- En déduire les sommes de Darboux Supérieure et Inférieure des fonctions suivantes :

I- $f(x) = x,\ x \in [0,1]$.

II-$h(x) = x^2,\ x \in [0,1]$.

Solution :

1. On a l'identité $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} 2k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\Sigma_{(1,n)} + n \end{aligned}$$

Ou encore

$$2^2 + 3^2 + ... + (n+1)^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + ... + (n)^2 + 2\Sigma_{(1,n)} + n$$

d'où

$$\Sigma_{(1,n)} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Utilisons l'identité $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 &= \sum_{k=1}^{n}k^3 + 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1\\ &= \sum_{k=1}^{n}k^3 + 3\Sigma_{(2,n)} + 3\frac{n(n+1)}{2} + n\end{aligned}$$

Ou encore

$$2^3 + 3^3 + ... + (n+1)^3 = 1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + 3\Sigma_{(2,n)} + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

d'où

$$\Sigma_{(2,n)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

I) Somme de Darboux Inférieure de la fonction $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0,1]$ en utilisant une subdivision équidistante de cet intervalle :

$$(x_i)_{i\in\{0,1,\dots,n\}} \text{ où } x_i = 0 + \frac{i}{n}(1-0) = \frac{i}{n}.$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})m_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}m_k,$$

Où

$$m_k = \inf\{f(x),\ x_{k-1} \le x \le x_k\} = f(x_{k-1}) = x_{k-1} = \frac{k-1}{n}.$$

Car la fonction f est continue, croissante sur $[0,1]$. Donc :

$$\begin{aligned}s_n &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\\ &= \frac{1}{n^2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}k\right) - n\right) = \frac{1}{n^2}\left(\Sigma_{(1,n)} - n\right) = \frac{n(n-1)}{2n^2}.\end{aligned}$$

-De même la somme de Darboux Supérieure de la fonction f sur l'intervalle $[0,1]$ est :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})M_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M_k$$

Où
$$M_k = \sup\{f(x),\ x_{k-1} \leq x \leq x_k\} = f(x_{k-1}) = x_k = \frac{k}{n}$$
Car la fonction f est continue, croissante sur $[0,1]$. Donc :
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{n^2}\Sigma_{(1,n)} = \frac{n(n+1)}{2n^2}. \end{aligned}$$

II) Somme de Darboux Inférieure de la fonction $h(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0,1]$ en utilisant une subdivision équidistante de cet intervalle :
$$(x_i)_{i\in\{0,1,\ldots,n\}} \text{ où } x_i = 0 + \frac{i}{n}(1-0) = \frac{i}{n}.$$
$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})m_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k.$$
Où
$$m_k = \inf\{h(x),\ x_{k-1} \leq x \leq x_k\} = h(x_{k-1}) = x_{k-1}^2 = \frac{(k-1)^2}{n^2}.$$
Car la fonction h est continue, croissante sur $[0,1]$. Donc :
$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2 - 2k + 1\right). \\ &= \frac{1}{n^3}\left(\Sigma_{(2,n)} - 2\Sigma_{(1,n)} + n\right) = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} \end{aligned}$$

-De même la somme de Darboux Supérieure de la fonction h sur l'intervalle $[0,1]$ est :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})M_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_k$$
Où
$$M_k = \sup\{h(x),\ x_{k-1} \leq x \leq x_k\} = h(x_{k-1}) = x_k^2 = \frac{k^2}{n^2}$$
Car la fonction h est continue, croissante sur $[0,1]$. Donc :
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\Sigma_{(2,n)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}. \end{aligned}$$

Exercice 2.5.4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x dx;$$

01- Calculer I_0, I_1 et établier la formule de récurence

$$\pi^2 I_n = \pi - (n-1)nI_{n-2}.$$

02- Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

Solution

01- Calculons I_0, I_1

$$I_0 = \int_0^1 \sin \pi x dx = \left[\frac{-\cos \pi x}{\pi}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 x \sin \pi x dx = \left[\frac{-x\cos \pi x}{\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x\cos \pi x}{\pi} dx \text{ (une intégration par partie)} \\ &= \frac{1}{\pi} + \left[\frac{\sin \pi x}{\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

02- On utilise l'intégration par parties en posant $u = x$, $v' = \sin \pi x$ donc $u' = 1$, $v = \frac{-\cos \pi x}{\pi}$, alors dans le cas général

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^n \sin \pi x dx \\ &= \left[\frac{-x^n \cos \pi x}{\pi}\right]_0^1 + \frac{n}{\pi}\int_0^1 x^{n-1}\cos \pi x dx \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{n}{\pi}\left[\frac{x^{n-1}\sin \pi x}{\pi}\right]_0^1 - \frac{n-1}{\pi}\int_0^1 x^{n-2}\sin \pi x dx \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{(n-1)\,n}{\pi^2} I_{n-2}. \end{aligned}$$

03- On a $\sin \pi x \geq 0$ pour $x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n \sin \pi x dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ d' où

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n \sin \pi x dx \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Exercice 2.5.5. Soit f une application continue sur $[a,b]$ et à valeurs positives, montrer que

$$f \neq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \neq 0.$$

Solution

f n'est pas nulle c'est -à-dire qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

Puisque f est continue sur $[a, b]$ il existe un voisinage de x_0 dans lequel f ne s'annule pas . Autrement dit , on peut trouver deux réels $\alpha; \beta$ dans $[a, b]$ avec $\alpha < x_0 < \beta$ tels que

$$\forall x \in [\alpha; \beta]\ f(x) \neq 0$$

Puisque f est positive elle est strictement positive sur $[\alpha, \beta]$ cela implique que

$$\exists \eta > 0, \forall x \in [\alpha, \beta], f(x) \geq \eta.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)dt &= \int_a^\alpha f(t)dt + \int_\alpha^\beta f(t)dt + \int_\beta^b f(t)dt \\ &\geq \int_\alpha^\beta f(t)dt \\ &\geq \int_\alpha^\beta \eta dt = (\beta - \alpha)\eta > 0. \end{aligned}$$

$$f \neq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \neq 0.$$

Exercice 2.5.6. Montrer l'inégalité suivante :

$$\forall f, g \in \boldsymbol{C}([a, b], \mathbb{R}) : \left(\int_a^b |fg|\, dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b |f|^2\, dx\right)\left(\int_a^b |g|^2\, dx\right).$$

Solution

Remarquons tout d'abord que $|f|, |g|$ étant intégrables alors d'après la proposition les fonctions $|f| + \alpha |g|$ et $(|f| + \alpha |g|)^2$ le sont également pour tout nombre réel α. On considère, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ le trinôme en α

$$P(\alpha) = \int_a^b (|f| + \alpha |g|)^2\, dx = \int_a^b |f|^2\, dx + 2\alpha \int_a^b |fg|\, dx + \alpha^2 \int_a^b |g|^2\, dx \geq 0$$

P est un polynôme en α de degré 2, toujours positif, d'où $\boldsymbol{\Delta} \leq 0$.

$$4\left(\int_a^b |fg|\, dx\right)^2 - 4\int_a^b |f|^2\, dx \int_a^b |g|^2\, dx \leq 0 \Rightarrow \left(\int_a^b |fg|\, dx\right)^2 \leq \int_a^b |f|^2\, dx \int_a^b |g|^2\, dx.$$

Exercice 2.5.7. A l'aide d'un changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, Montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Indication : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.
2- En déduire

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t}.$$

Solution :
1- A l'aide d'un changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ donc
$t = \frac{\pi}{2} - u$ et $\frac{du}{dt} = -1, \cos(\frac{\pi}{2} - u) = \sin u$; $\sin(\frac{\pi}{2} - u) = \cos u$, finalement

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt.$$

On a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

2- A l'aide d'un changement de variable $t = \sin u$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sin u + \cos u} du = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2.5.8. Etudier la suite (I_n) définie pour $n > 0$ par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{n}} \, dx.$$

Solution :
Si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors $0 \leq \sin x \leq 1$ et $0 \leq (\sin x)^{\frac{1}{n}} \leq (\sin x)^{\frac{1}{n+1}} \leq 1$. D'après les propriétés de l'intégrale on obtient :

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{n}} \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{n+1}} \, dx \leq \frac{\pi}{2}.$$

La suite croissante et majorée I_n est donc convergente.
On a $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$ d'où $\left(\frac{2}{\pi}x\right)^{\frac{1}{n}} \leq (\sin x)^{\frac{1}{n}}$ et donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\pi}x\right)^{\frac{1}{n}} dx \leq I_n.$$

on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\pi}x\right)^{\frac{1}{n}} dx = \frac{n\pi}{2(n+1)},$$

d'où

$$\frac{n\pi}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{\pi}{2} \text{et } \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2.5.9. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

1- Calculer I_0, I_1

2-Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : I_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2} \tag{2.1}$$

3- Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2.2.4.4.6.6...2n.2n}{3.3.5.5.7.7...(2n-1).(2n-1).(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$ (**Le produit de Wallis**)

Solution :

1- $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$, $\qquad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

2-Montrons que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,$n \geq 2 : I_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2}$.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{n-2} x\right) \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{n-2} x\right) \left(1 - \cos^2 x\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{n-2} x\right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{n-2} x\right) \left(\cos^2 x\right) dx \\ &= I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{n-2} x\right) \left(\cos^2 x\right) dx. \end{aligned}$$

Pour calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x) (\cos^2 x) dx$, En utilisant une intégration par parties. On pose :

$g'(x) = \cos x \sin^{n-2} x,$ $\qquad g(x) = \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x.$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{n-2} x\right) \left(\cos^2 x\right) dx = \left[\frac{\cos x}{n-1} \sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n-1} \sin^n x dx = \frac{I_n}{n-1}.$$

Finalement :

$$I_n = I_{n-2} - \frac{I_n}{n-1} \Rightarrow I_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2}.$$

3-En vertu de l'equation (2.1) et par récurrence sur n , on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} ... \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{1.3.5... (2n-1)}{2.4.6... (2n)} \frac{\pi}{2}.$$

et que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} ... \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2.4...2n}{3.5...2n+1}.$$

Ainsi

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx} \frac{2.2.4.4.6.6...2n.2n}{3.3.5.5.7.7...(2n-1).(2n-1).(2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

Le résultat suit donc des inégalités

$$1 \leq \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx} = \frac{2n+1}{2n} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx} \leq \frac{2n+1}{2n},$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx} = 1.$$

Alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2.2.4.4.6.6...2n.2n}{3.3.5.5.7.7...(2n-1).(2n-1).(2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

Chapitre 3

Equations différentielles du premier ordre

L'objectif de ce chapitre est de donner les techniques nécessaires pour la résolution de certaines équations relativement simples. Tout d'abord, on précise ce qu'on entend par "Equations différentielles" et par solutions d'une équation donnée vérifiant certaines conditions initiales En particulier, on étudiera les équations homogènes, de Bernoulli et de Ricatti.

3.1 Définitions et vocabulaires

Définition 3.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on appelle équation différentielle d'ordre n et d'inconnue la fonction y toute relation de la forme

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)), \tag{3.1}$$

avec les conditions initiales

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \tag{3.2}$$

où f est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^{n+1}$, $(x_0, y_0, ..., y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et l'inconnue est une fonction y de classe C^n définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant x_0.

Définition 3.1.2. On appelle ordre d'une équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée contenue dans cette équation.

Définition 3.1.3. On appelle équation diférentielle d'ordre 1 et d'inconnue la fonction y toute relation de la forme :

$$y' = f(x, y(x)) \tag{3.3}$$

avec le condition initiale

$$y(x_0) = y_0 \tag{3.4}$$

où f est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2, (x_0, y_0)$ est vecteur fixé dans $\mathbb{R}^2$, et l'inconnue est une fonction y de classe C^1 définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, contenant x_0.

Définition 3.1.4. On appelle solution de l'équation (3.3) toute fonction y de classe C^1 définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 et vérifiant l'équation (3.3) ainsi que les conditions initiales (3.4) contenant x_0.

Définition 3.1.5. Les courbes représentatives des fonctions solutions s'appellent les courbes intégrales de l'équation.(3.3).

Exemple 3.1.1. L'équation $y' - 3x^2y^2 = x^2$ est une équation du premier ordre.

Ici, nous avons bien entendu

$$f(x, y(x)) = 3x^2y^2(x) + x^2.$$

Définition 3.1.6. (Condition initiale) Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. On dit que la solution φ de (3.3) vérifie la condition initiale (x_0, y_0) si et seulement si $\varphi(x_0) = y_0$.

Définition 3.1.7. (**Problème de Cauchy**) On appelle problème de Cauchy la recherche d'une solution $y : I \to \mathbb{R}$ d'une équation différentielle (3.3) vérifiant une condition initiale $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ fixée.

Définition 3.1.8. On appelle équation différentielle normale d'ordre 1 toute équation de la forme :

$$y' = f(x, y(x)).$$

Définition 3.1.9. On appelle équation différentielle autonome d'ordre 1 toute équation de la forme

$$y' = f(y(x)).$$

Autrement dit, f ne dépend pas explicitement de x.

Exemple 3.1.2. L'équation : $\pi y' + 2y + 1 = 0$ est une équation différentielle autonome d'ordre 1.

■ 3.1.1 Classification des équations différentielles du premier ordre

Donnons maintenant une classification par linéarité.

Définition 3.1.1.1. Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation de la forme

$$a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t) \tag{3.5}$$

avec a_1, a_0 et g sont trois fonctions de la variable réelle t continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Exemple 3.1.3. Dire si les équations différentielles suivantes sont linéaires, ou non linéaires,

$$a)\ (x-t)dt + 4tdx = 0. \tag{3.6}$$

On a $(x-t)dt + 4tdx == 0 \Rightarrow x - t = -4t\frac{dx}{dt} \Rightarrow 4tx' + x - t = 0$,

Alors (3.6) une équation différentielle linéaire du premier ordre puisque elle s'écrite sus la forme (3.5)

$$b)\ (1-y)y' + 2y = e^t. \tag{3.7}$$

C'est une équation différentielle non linéaire du premier ordre, car on ne peut pas écrire (3.7) sous la forme (3.5)

■ 3.2 Intégration d'équations d'un certain type

■ 3.2.1 Equations à variables séparables

Définition 3.2.1.1. Une équation diférentielle du premier ordre

$$y' = f(x, y(x))$$

est dite à variables séparables si elle peut être ramenée à la forme suivante

$$g(y(x))y'(x) = h(x) \tag{3.8}$$

où g et h sont deux fonctions définies sur un intervalle ouvert et continues.En pratique, cela signifie qu'on peut séparer x et y.

Remarque 3.2.1. On a dans ce cas

$$\int g(y(x))y'(x)dx = \int h(x)dx$$

et par suite si G et H désignent respectivement une primitive de g et de h, on aura

$$G(x) = H(x) + K.$$

On pourra ensuite essayer d'exprimer y en fonction de x.

Méthode de résolution

L'équation (3.8) peut se mettre sous la forme :

$$g(y(x))dy = h(x)dx,$$

en intégrant membre à membre on peut écrire

$$\int g(y(x))dy = \int h(x)dx + k,\ \ k \in \mathbb{R}$$

Exemple 3.2.1. Résoudre l'équation différentielle

$$y'(x) = x^2 y(x) + x^2, \text{avec } y(0) = 1 \tag{3.9}$$

(3.9)$\Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)+1} = x^2$, est à variables séparables, en effet,

$$\begin{aligned} \int \frac{y'(x)}{y(x)+1}dx &= \int x^2 dx \Rightarrow \ln|y(x)+1| = \frac{1}{3}x^3 + c \\ |y(x)+1| &= \exp\left(\frac{1}{3}x^3 + c\right) \Rightarrow y(x) = Ke^{\frac{1}{3}x^3} - 1 \end{aligned}$$

K étant une constante arbitraire non nulle ; on a $y(0) = 2$.

Exemple 3.2.2. On sépare les variables :

$$(x^2+1)y'(x) = y^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{y'(x)}{y^2-1} = \frac{1}{x^2+1}$$

est à variables séparables

$$\int \frac{dy}{y^2-1} = \int \frac{1}{x^2+1}dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{1}{y-1}dy - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y+1}dx = \int \frac{1}{x^2+1}dx.$$

Et en intégrant, on trouve

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \arctan x + c.$$

■ 3.2.2 Equations diférentielles linéaires du premier ordre

Définition 3.2.2.1. On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation diférentielle de la forme

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

où a et b sont deux fonctions supposées définies et continues sur un intervalle ouvert donné de $\mathbb{R}$

L'équation $y'(x) = a(x)y(x)$ est dite équation homogène associée ou équation sans second membre. Elle sera souvent

notée "ssm".

Exemple 3.2.3.

$$y' + xy = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -x,$$

donc $y = Ae^{-\frac{x^2}{2}}$ est la solution générale de l'équation ssm.

Théorème 3.2.2.1. *Soit y_0 une solution particulière de l'équation avec second membre, alors y est solution de l'équation avec second membre si et seulement si $(y - y_0)$ est solution de l'équation sans second membre.*

Démonstration. Puisque y_0 une solution particulière de l'équation avec second membre donc

$$y_0'(x) = a(x)y_0(x) + b(x)$$

d'autre part, si y est une solution quelconque de l'équation avec second membre, y vérifie

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

ceci équivaut en soustrayant membre à membre les deux équations à

$$(y - y_0)(x) = a(x)[(y - y_0)(x)].$$

Ce qui prouve le théorème. ■

Remarque 3.2.2. D'après le théorème (3.2.2.1) en déduit que la solution générale de et $y = y_0 + y_{ssm}$.

■ 3.2.3 Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

Recherche d'une solution particulière (Méthode de la variation de la constante ou Méthode de Lagrange) :

Première étape :
A partir de la solution générale de l'équation ssm : $y' = a(x)y$

$$y(x) = Ke^{\int a(x)dx}.$$

Deuxième étape :
Cherchons une solution particulière y_p de l'équation avec second membre sous la forme $y_p(x) = K(x)e^{\int a(x)dx}$.

La méthode consiste à considérer K comme une fonction de x et à remplacer dans l'équation avec second membre $y' = a(x)y + b(x)$ On aura

$$y'(x) = K'(x)e^{\int a(x)dx} + K(x)a(x)e^{\int a(x)dx}$$

donc

$$y'(x) = K'(x)e^{\int a(x)dx} + a(x)y(x)$$

alors

$$K'(x)e^{\int a(x)dx} = b(x) \Rightarrow K'(x) = b(x)e^{\int -a(x)dx}$$

par suite $K(x) = \int b(x)e^{\int -a(x)dx}dx + C$. Comme on cherche une solution particulière, on peut prendre $C = 0$, ainsi une solution

particulière de (avec sm) est égale à :

$$y_p(x) = \left(\int b(x)e^{\int -a(x)dx}dx\right) e^{\int a(x)dx}.$$

Donc la solution générale de (avec sm) est donnée par la formule :

$$y_G(x) = \left(K + \int b(x)e^{\int -a(x)dx}dx\right) e^{\int a(x)dx}.$$

Exercice 3.2.4. Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' - 2y = \sin x$$

01- Résoudre l'équation ssm : $y' - 2y = 0$.

02- Par la méthode de la variation de la constante donner une solution particulière de l'équation $y' - 2y = 0$.

03- Déduire la solution générale de $y' - 2y = 0$.

Solution :

Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' - 2y = \sin x \tag{3.10}$$

01-On a $y' - 2y = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2$ alors $y_{ssm} = Ae^{2x}$ où $A \in \mathbb{R}$.

02- Par la méthode de la variation de la constante donner une solution particulière de l'équation : $y' - 2y = 0$.

Posons $y = A(x)e^{2x}$ alors $y' = A'(x)e^{2x} + 2A(x)e^{2x} \Rightarrow y' - 2A(x)e^{2x} = A'(x)e^{2x}$ alors

$$A'(x)e^{2x} = \sin x \Rightarrow A(x) = \int e^{-2x} \sin x dx$$

$A(x) = \frac{-1}{5}e^{-2x}(\cos x + 2\sin x)$, d'où la solution particulière de l'équation :$y' - 2y = 0$ est

$$y_p = A(x)e^{2x} = \frac{-1}{5}e^{-2x}(\cos x + 2\sin x)e^{2x} = \frac{-1}{5}(\cos x + 2\sin x)$$

03-La solution générale de (3.32).est

$$y = y_{ssm} + y_p = \frac{-1}{5}(\cos x + 2\sin x) + Ae^{2x}.$$

Recharche d'une solution particulière (Méthode de Bernoulli)

On cherche la solution de l'équation

$$y' + b(x)y = c(x) \tag{3.11}$$

sous la forme $y = u(x)v(x)$.

*On a

$$y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

*En remplaçant y' et y dans (3.11), on obtient, après simplification

$$u'(x)v(x) + u(x)[v'(x) + b(x)v(x)] = c(x) \tag{3.12}$$

*On cherche ensuite une solution de l'équation linéaire homogène $v'(x)+b(x)v(x) = 0$ qui est une équation à variables séparables

Ayant trouvée v, l'équation (3.12) devient $u'(x)v(x) = c(x)$,d'où l'on déduit u, et par conséquent y.

Exemple 3.2.5. Résoudre l'équation

$$y' - \frac{n}{x}y = e^x x^n \tag{3.13}$$

Appliquons la méthode de Bernoulli en cherchant $y = u.v$ donc $y' = u'v + v'u$ en remplaçant y' et y dans (3.13), on a

$$u'v + v'u - \frac{n}{x}u.v = e^x x^n$$

alors

$$u'v + u\left(v' - \frac{n}{x}v\right) = e^x x^n \tag{3.14}$$

On cherche ensuite une solution de l'équation linéaire homogène :$v' - \frac{n}{x}v = 0 \Rightarrow v = Ae^{\int \frac{n}{x}dx}$ donc $v = kx^n$ Il suffit de choisir $k = 1$

donc $v = kx^n$. Dans ce cas, (3.14) devient

$$u' = e^x$$

donc $u = e^x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$. Ainsi la solution générale de l'équation (3.13) est donnée par

$$y(x) = x^n(e^x + C),\ C \in \mathbb{R}.$$

■ 3.2.4 Equations homogènes du premier ordre

Définition 3.2.4.1. On dit qu'une fonction f dépendant de deux variables x et y, $\varphi = f(x, y)$, est une fonction homogène de degré $n \in \mathbb{N}$ par rapport à x et y si pour tout réel λ, on a

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Exemple 3.2.6. La fonction $f(x, y) = yx^3 + x^2y^2$ est une fonction homogène de degré 4, car on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda y)(\lambda x)^3 + (\lambda x)^2(\lambda y)^2 \\ &= \lambda^4\left(yx^3 + x^2y^2\right) \\ &= \lambda^4 f(x, y). \end{aligned}$$

Définition 3.2.4.2. L'équation différentielle du premier ordre de la forme (3.3), $y' = f(x, y)$, est dite homogène par rapport à x et y si la fonction $f(x, y)$ est une fonction homogène de degré zéro par rapport à x et y.

Proposition 3.2.1. *Une équation différentielle homogène du premier ordre peut toujours s'écrire sous forme suivant :*

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right). \tag{3.15}$$

Pour résoudre cette équations, on utilise le changement de variable $y(x) = x\alpha(x)$, où α est une fonction à déterminer, permet de transformer l'équation initiale en une équation du premier ordre à variables séparables.

Démonstration. Comme $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$, on pose $\lambda = \frac{1}{x}(x \neq 0)$, alors on obtient

$$f(x, y) = f(1, \frac{y}{x}).$$

Ainsi, l'équation (3.3) s'écrit comme suit :

$$y'(x) = f(1, \frac{y}{x}),$$

c'est à dire qu'une équation homogène peut toujours s'écrire sous forme

$$y'(x) = g\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3.16}$$

Pour intégrer cette équation, faisons le changement de variable $y(x) = x\alpha(x)$, $x \neq 0$. Ce qui donne

$$\frac{dy(x)}{dx} = \alpha(x) + \frac{d\alpha(x)}{dx}x.$$

En remplaçant dans l'équation (3.16), on obtient :

$$\alpha(x) + \frac{d\alpha(x)}{dx}x = f(1, \frac{y}{x}) = g\left(\alpha(x)\right),$$

qui est une équation à variables séparables

$$\frac{d\left(\alpha(x)\right)}{g\left(\alpha(x)\right) - \alpha(x)} = \frac{dx}{x} \text{ avec } g\left(\alpha(x)\right) - \alpha(x) \neq 0,$$

et par intégration on trouve

$$\int \frac{d\left(\alpha(x)\right)}{g\left(\alpha(x)\right) - \alpha(x)} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Enfin, en remplaçant ensuite $\alpha(x)$ par $\frac{y(x)}{x}$, on obtient la solution générale de l'équation (3.15). ∎

Exemple 3.2.7.

$$x^2y'(x) = y^2(x) + xy(x) + x^2 \tag{3.17}$$

est une équation homogène. En effet, elle peut être ramenée à la forme

$$y'(x) = \frac{y^2(x)}{x^2} + \frac{y(x)}{x} + 1$$

Le changement de variable précédent permet d'obtenir

$$x\alpha'(x) + \alpha(x) = \alpha^2(x) + \alpha(x) + 1$$

c'est -a-dire

$$\frac{\alpha'(x)}{\alpha^2(x)+1} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{\alpha'(x)}{\alpha^2(x)+1}dx = \int \frac{1}{x}dx.$$

Donc

$$arctan(\alpha(x)) = \ln|x| + c$$

d'où $\alpha(x) = \tan(\ln|x| + c)$, alors la solution générale de l'équation (3.17) est :

$$y(x) = x\tan(\ln|x| + c), c \in \mathbb{R}.$$

■ 3.2.5 Equations de type Bernoulli

Définition 3.2.5.1. Les équations différentielles de type Bernoulli sont les équations différentielles du premier ordre de la forme

$$y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y^n(x) = 0 \text{ avec } n \in \mathbb{R}- \{0, 1, -1\}.$$

où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et supposées continues.

La méthode de résolution consiste à diviser par y^n ce qui conduit, modulo un changement de variable, à une équation différentielle linéaire du premier ordre. En effet, on a

$$\frac{y'(x)}{y^n(x)} + \frac{a(x)}{y^{n-1}(x)} + b(x) = 0. \tag{3.18}$$

Si on pose $z(x) = \frac{1}{y^{n-1}(x)}$, donc l'équation (3.18) équivalent à

$$\frac{z'(x)}{n-1} + a(x)z(x) + b(x) = 0.$$

Exemple 3.2.8.

$$y'(x) + x^2y(x) + x^5y^2(x) = 0 \text{ avec } y(0) = 1,$$

est de Bernoulli. On pose donc $z(x) = \frac{1}{y(x)}$ et on obtient l'équation

$$-\frac{1}{n-1}z'(x) + x^2 z(x) + x^5 = 0.$$

la résolution de l'équation ssm donne

$$z(x) = Ke^{\frac{x^3}{3}}.$$

et la variation de la constante donnne $K'(x) = x^5 e^{\frac{-x^3}{3a}}$ à l'aide d'une intégration par partie, on obtient

$$K(x) = \left(-x^3 - 3\right) e^{\frac{-x^3}{3}} \Rightarrow s_p = -x^3 - 3,$$

par suite

$$z(x) = s_p + s_h = Ke^{\frac{x^3}{3}} - x^3 - 3.$$

Dans notre cas, on a

$$y(x) = \frac{1}{Ke^{\frac{x^3}{3}} - x^3 - 3}, K = 4.$$

■ 3.2.6 Equations de type Ricatti

Définition 3.2.6.1. Les équations différentielles de type Ricatti sont les équations différentielles du premier ordre de la forme

$$y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y^2(x) = c(x) \tag{3.19}$$

où a, b et c sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et supposées continues.

Transformation d'une équation de Riccati à une équation de Bernoulli

Quand on connait une solution particulière y_0 de cette équation (3.19), on fait le changement de variable $z = y - y_0$

L'intérêt est que nous obtenons une équation qui est de Bernoulli en z,

$$z'(x) - b(x)z^2(x) + (-2b(x)y_0(x) + a(x))\, z(x) = 0.$$

Transformation d'une équation de Riccati à une une équation linéaire.

Quand on connait une solution particulière y_0 de cette équation (3.19), on fait le changement de variable $\frac{1}{z} = y - y_0$

pour aboutir à une équation différentielle linéaire non homogène de la forme

$$z'(x) + (2b(x)y_0(x) - a(x))\, z(x) = b(t).$$

Intégrons les équations obtenues par ces changements, suivant les cas connus, équations linèaires ou équations de Bernoulli.

Exercice 3.2.9. Résoudre sur $]t_0, +\infty[,\ t_0 > 1$ l'équation :

$$(1-t^3)y' = 1 + t^2 y - 2ty^2,\ y(t_0) > t_0. \tag{3.20}$$

Indication : En cherchera une solution particulière sous la forme : $y_p = at + b$.

Solution : On cherchant comme proposé une solution particulière $y_p = at + b$.

$$\begin{aligned} (3.20) \quad &\Rightarrow \quad (1-t^3)a - t^2(at+b) + 2t(at+b)^2 = 1 \\ &\Rightarrow \quad \left(2a^2 - 2a\right)t^3 + (4ab - b)t^2 + \left(2b^2\right)t + a = 1, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} 2a^2 - 2a = 0 \\ 4ab - b = 0 \\ 2b^2 = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1. \\ b = 0. \end{cases}$$

Alors la solution particulière est $y_p = t$.
On pose alors $z = y - y_p$ et, sur $]t_0, +\infty[$, z satisfait l'équation

$$\begin{aligned} (1-t^3)z' &= (1-t^3)y' - (1-t^3)y_p' \\ &= 1 + t^2(z + y_p) - 2t(z + y_p)^2 - (1-t^3)y_p' \\ &= 1 + t^2 z + t^2 y_p - 2tz^2 - 4tzy_p - 2ty_p^2 - (1-t^3)y_p' \\ &= -3t^2 z - 2tz^2. \end{aligned}$$

On obtient l'équation de Bernoulli :

$$(1-t^3)z' + 2tz^2 + 3t^2 z = 0. \tag{3.21}$$

On pose $u(t) = \frac{1}{z(t)}$, on obtient l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(1-t^3)u' + 3t^2 u = -2t \tag{3.22}$$

finalement après la résolution de l'équation (3.22), la solution générale de (3.20) est

$$y(t) = t + \frac{t^3 - 1}{t^3 + c}.$$

Remarque 3.2.3. Il n'est pas toujours évident de trouver une solution particulière de l'équation de Riccati.

Proposition 3.2.2. *Etant donné une équation de Riccati de la forme :*

$$y' = ay^2 + \frac{b}{x}y + \frac{c}{x^2}. \tag{3.23}$$

où a, b et c sont des constantes, si de plus, on a

$$(b+1)^2 - 4ac \geq 0,$$

alors l'équation (3.23) admet une solution particulière de la forme :

$$y(x) = \frac{\lambda}{x}.$$

Démonstration. En effet, portons l'expression $y(x) = \frac{\lambda}{x}$ dans l'équation (3.23) ; on obtient

$$\frac{a\lambda^2 + (b+1)\lambda + c}{x^2} = 0.$$

Pour trouver la valeur de λ ; il faut que la condition $(b+1)^2 - 4ac \geq 0$ soit remplie. ∎

Proposition 3.2.3. *Etant donné une équation de Riccati de la forme :*

$$y' - \frac{1}{2x}y = \frac{a}{x}y^2 + b, \tag{3.24}$$

où a, b sont des constantes, alors cette équation se ramène à une équation à variables séparables par la substitution de la fonction suivante :

$$y(t) = z(t)\sqrt{t}.$$

Démonstration. En effet, portons l'expression $y(t) = z(t)\sqrt{t}$ dans l'équation (3.24) ; on obtient

$$z'(t)\sqrt{t} = az^2 + b,$$

ou encore

$$\frac{1}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}\left(\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}z\right)^2 + 1}\right)dz = \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

∎

■ 3.2.7 Equations différentielles totales

Définition 3.2.7.1. Soit $f = u(x, y)$ une fonction à deux variables réelles x et y définie et dérivable par rapport à chacune des variables x et y sur un domaine $D \in \mathbb{R}^2$. On appelle **différentielle totale** de u l'expression suivante :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ étant les dérivées (partielles) respectivement par rapport à x et à y.

Définition 3.2.7.2. On appelle **forme différentielle** une expression de la forme

$$\omega = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

où M et N sont des fonctions des deux variables x et y. On dit cette **forme différentielle est exacte** dans D s'il existe une fonction

$f = u(x, y)$ définie sur D telle que

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

Définition 3.2.7.3. L'équation différentielle

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{3.25}$$

est dite aux **différentielles totales** si la forme différentielle $\omega = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ est **exacte**.

Dans ce cas, il existe une fonction $f = u(x, y)$ ayant des dérivées partielles telle que $M(x, y)dx + N(x, y)dy = du = 0$.

Ainsi la solution générale de (3.25) est donnée par la formule $u(x, y) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Pour savoir si une équation différentiellle est aux différentielles totales, on a la condition nécessaire et suffisante suivante exprimée par le théorème suivant :

Théorème 3.2.7.1. *Si M, N, $\frac{\partial N}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial y}$, sont continues sur D, alors pour que la forme différentielle $\omega = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ soit* ***exacte****, il faut et il suffit que*

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}. \tag{3.26}$$

Exemple 3.2.10. Soit l'équation $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$

Tout d'abord vérifions la condition (3.26) $\frac{\partial(x-2y)}{\partial x} = \frac{\partial(x^2+y)}{\partial y} = 1$, Par conséquent, l'équation donnée est aux différentielles totales.

Il existe donc une fonction $u(x,y)$ telle que $du = (x^2+y)dx + (x-2y)dy$. Trouvons cette fonction. De la relation

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) = x^2 + y \Rightarrow u(x,y) = \int \left(x^2+y\right) dx + \varphi(y)$$

D'où

$$u(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy + \varphi(y)$$

En dérivant cette égalité par rapport à y et sachant que $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = x - 2y$, il vient que

$$x - 2y = x + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = -2y \Rightarrow \varphi(y) = -y^2 + C$$

De cette façon on trouve que $u(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy - y^2 + C$, la solution générale est donc $\frac{1}{3}x^3 + xy - y^2 = C$.

■ 3.3 Exercices avec solutions

Exercice 3.3.1. Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' + y = e^{-2x} \tag{3.27}$$

01- Résoudre l'équation : $y' + y = 0$.

02- Par la méthode de la variation de la constante donner une solution particulière de l'équation (3.27).

03- Déduire la solution générale de (3.27).

Solution

Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' + y = e^{-2x} \tag{3.28}$$

01- Résolvons l'équation : $y' + y = 0$.

$y' + y = 0 \Leftrightarrow y = Ae^{-x}$

02- En utilisant la méthode de la variation de la constante.

Si $y = A(x)e^{-x}$ est une solution de l'équation (3.28) on a

$$y' = A'(x)e^{-x} - A(x)e^{-x}$$

donc

$$\begin{aligned} A'(x)e^{-x} &= e^{-2x} \Longrightarrow A'(x) = e^{-x} \\ &\Rightarrow A(x) = -e^{-x} + k \end{aligned}$$

d'où la solution particulière de (3.28) $y = (-e^{-x} + k)\, e^{-x}$

03- La solution générale de (3.28) est :

$$y = \left(-e^{-x} + k\right) e^{-x} + Ae^{-x} = \left(K - e^{-x}\right) e^{-x},$$

avec $K \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.3.2. Résoudre l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$(x^2 + 1)y'(x) = y^2 - 1. \tag{3.29}$$

Solution

On a

$$\begin{aligned} (x^2+1)y'(x) &= y^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{2y'}{y^2-1} = \frac{1}{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow \ln\left|y^2-1\right| = \arctan x + c \\ &\Leftrightarrow \left|y^2-1\right| = Ke^{\arctan x}, K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice 3.3.3. Résoudre l'équation :

$$y' = \frac{x+y+1}{x-y}. \tag{3.30}$$

Solution :

Cette équation est de la forme : $y' = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$.

Pour la ramener à une équation homogène on effectue le changement :

$$X = x - \alpha,\ Y = y - \beta.$$

On a alors

$$Y' = \frac{X + Y + \alpha + \beta + 1}{X - Y + \alpha - \beta}.$$

En résolvant le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-1}{2}. \\ \beta = \frac{-1}{2}. \end{cases}$$

Et l'équation devient :

$$Y' = \frac{X+Y}{X-Y}.$$

Qui est une équation homogène du premier ordre, posons alors $Z = \frac{Y}{X}$, $Y = ZX$.

ce qui donne après dérivation

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dZ}{dX}X + Z.$$

On remplace dans l'équation pour avoir :

$$\frac{dZ}{dX}X + Z = \frac{1+Z}{1-Z}.$$

On sépare les variables :

$$\left(\frac{1-Z}{1+Z^2}\right) dZ = \frac{dX}{X}.$$

Et en intégrant,

$$\begin{aligned}\int \frac{dX}{X} &= \int \left(\frac{1-Z}{1+Z^2}\right) dZ \\ &= \int \frac{dZ}{1+Z^2} - \frac{1}{2}\int \frac{2Z}{1+Z^2}dZ,\end{aligned}$$

alors

$$\arctan Z = \ln|X| \left(1+Z^2\right)^{\frac{1}{2}} + \ln|c|\,,$$

donc

$$\exp(\arctan Z) = \left|cX\left(1+Z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right|$$

Comme $Z = \frac{Y}{X}$, $\exp(\arctan \frac{Y}{X}) = \left|cX\left(1+(\frac{Y}{X})^2\right)^{\frac{1}{2}}\right|$.

Et en revenant aux variables x, y on trouve :

$$\exp(\arctan \frac{y+\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}) = \left|cX\left(1+\left(\frac{y+\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right|.$$

Exercice 3.3.4. *a*) Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$-y' + y = x^2 \tag{3.31}$$

01- Résoudre l'équation : $-y' + y = 0$.

02- Par la méthode de la variation de la constante donner une solution particulière de l'équation (3.31).

03- Déduire la solution générale de (3.31).

b) Déterminer toutes les fonctions $Z : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ qui sont dérivables, solutions de l'équation différentielle :

$$z' + z - x^2z^2 = 0 \text{ telles que } z(0) = \frac{1}{3}.$$

Indication : On pourra faire le changement de variable $y = \frac{1}{z}$

Solution

$a)$ Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$-y' + y = x^2 \tag{3.32}$$

01- Résoudre l'équation : $-y' + y = 0$.

$-y' + y = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1$, alors $y = Ae^x$ avec, $A \in \mathbb{R}$

02- Par la méthode de la variation de la constante donner une solution particulière de l'équation (3.32).

Cherchons une solution particulière de l'équation (3.32) de la forme : $y_p = A(x)e^x$

$y' = A'(x)e^x + A(x)e^x$ alors $A'(x)e^x = -x^2 \Rightarrow A(x) = -\int x^2 e^{-x} dx$,

par une intégration par parties on obtient :

$f(x) = x^2$ $\qquad$ $f'(x) = 2x$

$g'(x) = -e^{-x}$ $\qquad$ $g(x) = e^{-x}$

$$A(x) = \int -x^2 e^{-x} dx = x^2 e^{-x} - 2\int xe^{-x} dx + c_1$$

par une intégration par parties on obtient :

$f(x) = x$ $\qquad$ $f'(x) = 1$

$g'(x) = -e^{-x}$ $\qquad$ $g(x) = e^{-x}$

$$-\int xe^{-x} dx = xe^{-x} + e^{-x} + c_2$$

alors $y = A(x)e^x = \left(x^2 e^{-x} - 2\int xe^{-x} dx + c_1\right) e^x = x^2 + 2x + 2 + C$. Si on prend $C = 0$ donc

$$y_p = x^2 + 2x + 2$$

03- Déduire la solution générale de (3.32).

$y_g = y_P + y_{ssm} = Ae^x + x^2 + 2x + 2$, avec $A \in \mathbb{R}$.

$b)$ Déterminer toutes les fonctions $Z : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ qui sont dérivables, solutions de l'équation différentielle :

$$z' + z - x^2 z^2 = 0 \text{ telles que } z(0) = \frac{1}{3}.$$

on a $z' + z - x^2 z^2 = 0 \Rightarrow \frac{z'}{z^2} + \frac{z}{z^2} - x^2 z^2 = 0$ si $z \neq 0$.

Par le changement de variable $y = \frac{1}{z}$ l'équation $z' + z - x^2 z^2 = 0$ devient :$-y' + y = x^2$

donc

$$z = \frac{1}{Ae^x + x^2 + 2x + 2}.$$

et comme

$$z(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{A+2} = \frac{1}{3}$$

donc $A = 1$. Par conséquent $z_G = \frac{1}{e^x + x^2 + 2x + 2}$.

Exercice 3.3.5. Résoudre l'équation différentielle

$$y' e^{\left(-x^2+y\right)} = x. \tag{3.33}$$

Solution :

L'équation (3.33) est une équation différentielle à variables séparables

$$\begin{aligned} y' e^{\left(-x^2+y\right)} &= x \Rightarrow y' e^y = x e^{x^2} \\ &\Rightarrow \int e^y dy = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx \\ &\Rightarrow e^y = \frac{1}{2} e^{x^2} + c. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$y(x) = \ln \left| \frac{1}{2} e^{x^2} + c \right|, \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.3.6. 01- Résoudre l'équation

$$y' - 3y = 0$$

02- Par la méthode de la variation de la constante donner une solution particulière de l'équation :

$$y' - 3y = \cos x$$

03- Déduire la solution générale de cette équation.

04- On considère l'équation différentielle :

$$(1 - x^2) y' - 2xy = 1$$

- Résoudre cette équation sur $]-1, 1[$.

Solution

01-La solution générale de équation :$y' - 3y = 0$ est : $y = Ae^{3x}$.

02- Par la méthode de la variation de la constante donner une solution particulière de l'équation :

$$y' - 3y = \cos x$$

On cherchens une solutions particulière de cette équation de la forme :$y = A(x)e^{3x}$.

$y' - 3A(x)e^{3x} = A'(x)e^{3x}$ donc $A'(x)e^{3x} = \cos x$ par conséquent $A'(x) = e^{-3x}\cos x$.

$$A(x) = \int e^{-3x}\cos x dx + c.$$

Par une intégration par partie deux fois on a
$\begin{cases} f(x) = e^{-3x} \\ g'(x) = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = -3e^{-3x} \\ g(x) = \sin x \end{cases}$ posons $I = \int e^{-3x}\cos x dx = \sin x e^{-3x} + 3\int \sin x e^{-3x} dx$.
$\begin{cases} f(x) = e^{-3x} \\ g'(x) = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = -3e^{-3x} \\ g(x) = -\cos x \end{cases}$ .On a $\int \sin x e^{-3x} dx = -e^{-3x}\cos x - 3\int e^{-3x}\cos x$
alors $I = \sin x e^{-3x} - 3e^{-3x}\cos x - 9I$ donc $I = \frac{1}{10}(\sin x - 3\cos x)\, e^{-3x}$
et $A(x) = \frac{1}{10}(\sin x - 3\cos x)\, e^{-3x} + C$. Pour $C = 0$, la solution particulière est :

$$y(x) = \frac{1}{10}(\sin x - 3\cos x)$$

.

03-La solution générale de cette équation : $y(x) = Ae^{3x} + \frac{1}{10}(\sin x - 3\cos x)$ avec $A \in \mathbb{R}$

04- On considère l'équation différentielle : $(1-x^2)y' - 2xy = 1$, où $x \in]-1, 1[$.

- L'équation sans second membre : $(1-x^2)y' - 2xy = 0$

$(1-x^2)y' - 2xy = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2x}{1-x^2} \Rightarrow \int \frac{y'}{y}dx = -\int \frac{-2x}{1-x^2}dx \Rightarrow \ln|y| = -\ln|1-x^2| + c$,

alors la solution générale de l'équation ssm est donnée par : $y = \frac{C}{1-x^2}$. Par la méthode de la variation de la constante nous cherchons une solution particulière de la forme : $y = \frac{C(x)}{1-x^2}$,de l'équation avec seconde membre.

En effet

$$y' = \frac{C'(x)}{1-x^2} + \frac{2xC(x)}{(1-x^2)^2} \Rightarrow \left(1-x^2\right)y' = C'(x) + 2x\frac{C(x)}{1-x^2}.$$

donc $C'(x) = 1 \Rightarrow C(x) = x + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Finalement la solution générale de l'équation avec seconde membre est :

$$y = \frac{C+x}{1-x^2}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.3.7. Résoudre l'équation suivante :

$$2y' - y - xy^3 = 0. \tag{3.34}$$

Solution : Il s'agit d'une équation du type Bernoulli.

$$2y' - y - xy^3 = 0 \Rightarrow 2\frac{y'}{y^3} - \frac{1}{y^2} - x = 0$$

Posons alors $z = \frac{1}{y^2}$, $z' = \frac{-2y'}{y^3}$.
L'équation (3.34) devient :

$$z' + z = -x \tag{3.35}$$

qui est une équation linéaire du premier ordre. La solution de l'équation son seconde membre : $z' = -z$, après intégration ce donne :

$$z = \alpha e^{-x} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Cherchons maintenant une solution particulière z_p.

Utilisons la méthode de la variation de la constante et posons $z = \alpha(x)e^{-x}$ est alors solution de l'équation avec seconde membre si et seulement si

$$\alpha'(x)e^{-x} = -x,$$

et après intégration par parties,

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= -\int xe^x dx \\ &= (1-x)\, e^x + c \end{aligned}$$

d'où

$$z_p = (1-x)$$

La solution générale de l'équation (3.35) est :

$$z = \alpha e^{-x} + (1-x)\,, \alpha \in \mathbb{R}.$$

et finalement, la solution de l'équation initiale est définie par

$$y^2 = \frac{1}{\alpha e^{-x} + (1-x)}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 4

Equations différentielles du second ordre

En plus de la physique où de nombreux phénomènes sont régis par des équations différentielles, d'autres domaines comme la biologie et l'étude des populations (dans un modèle "prédateur- proie" par exemple) font appel aux équations différentielles. C'est un domaine qui connait un grand développement motivé par des questions non encore résolues. En fait, on sait résoudre très peu d'équations différentielles. Les équations linéaires à coefficients constants, certaines équations linéaires à coefficients non constants et les équations à variables séparables font partie de celle qu'on sait résoudre.

■ 4.1 Définitions et vocabulaires

Dans tout ce qui suit, on parle de fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Définition 4.1.1. On appelle équation différentielle linéaire du second ordre une équation de la forme :

$$f(t, y, y', y'') = 0, \tag{4.1}$$

où f étant linéaire par rapport à y, y', y''.

Et on l'écrit plus commodément : $a(t)y''(t) + b(t)y(t) + c(t)y(t) = d(t)$ où d est dite second membre de cette l'équation.

- Résourdre de l'équation différentielle (4.1) sur un intervalle J, c'est trouver les solutions $t \to \psi(t)$ définies et deux fois dérivable sur J, vérifiant :

$$\forall t \in J,\ f(t, \psi(t), \psi'(t), \psi''(t)) = 0.$$

- Les courbes représentatives des fonctions solutions de l'équation différentielle (4.1) s'appellent les courbes intégrales de l'equation (4.1).

Exemple 4.1.1. L'équation :

$$ch(t)y'' + sh(t)y' + 4y = (2t+1)\,e^{2t} + 1,$$

est une équation différentielle du second ordre.

- La fonction : $t \to 2te^t$, est une solution particulière de cette équation.

Définition 4.1.2. On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coeficients constants une équation différentielle de la forme suivant :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = h(t), \text{ avec } a \neq 0, \tag{4.2}$$

où a, b et c sont des constantes et h une fonction supposée continue sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$.

Définition 4.1.3. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ On dit que la solution φ de (4.2) vérifie la condition initiale (t_0, y_0) si et seulement si $\varphi(t_0) = y_0$.

■ 4.2 Equations différentielles linéaires du second ordre homogènes à coefficients constants

Définition 4.2.1. On appelle équation linéaire sans second membre une équation

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \text{ avec } a \neq 0, \tag{4.3}$$

linéaire homogène en y'', y' et y.

Proposition 4.2.1. *L'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.*

Démonstration. Soit l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre :

$$\forall t \in J,\ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \text{ avec } a \neq 0. \tag{4.4}$$

Si f et g sont des solutions de (4.4) alors, pour tout couple de scalaires $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $\alpha f(t) + \beta g(t)$ est encore solution de (4.4).

Notons $S_{\mathbb{K}}$ l'ensemble des solutions de (4.4). Donc $S_{\mathbb{K}}$ possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. ■

Théorème 4.2.1. *Soit y_0 une solution particulière de l'équation avec second membre (4.2), alors y est solution de l'équation avec second membre (4.4) si et seulement si $(y - y_0)$ est solution de l'équation sans second membre (4.4).*

■ 4.3 Résolutions des équations différentielles du second ordre homogènes à coefficients constants

Pour résoudre l'équation différentielle (4.2), on a besoin de définir l'équation caractéristique.

Définition 4.3.1. L'équation caractéristique associée à l'équation (4.2) est :

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{4.5}$$

Théorème 4.3.1. *i)- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ et si r_1 et r_2 sont les deux racines réelles distinctes de l'équation caractéristique (4.5) alors la solution générale de l'équation (4.3) est donnée par :*

$$y(t) = \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t},$$

où α, β étant deux constantes.

ii)- Si $\Delta = 0$ et si r est la racine double de l'équation caractéristique (4.5), alors la solution générale de l'équation (4.3) est donnée par :

$$y(t) = (\alpha + t\beta)\, e^{rt},$$

où α, β étant deux constantes.

iii)- Si $\Delta < 0$ et si $\lambda + i\mu$ et $\lambda - i\mu$ sont les deux racines complexes conjuguées, alors la solution générale de l'équation (4.3) est donnée par :

$$y(t) = (\alpha \cos(\mu t) + \beta \sin(\mu t))\, e^{t\lambda},$$

où α, β étant deux constantes.

Démonstration. i) Si $b = 0$, l'équation ((4.3)) devient :

$$ay''(t) + cy\prime(t) = 0 \text{ avec } a \neq 0. \tag{4.6}$$

Dans ce cas, le changement de variable $y' = x$ transforme l'équation différentielle (4.6) en une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants de la forme :

$$ax'(t) + cx(t) = 0,$$

dont la solution générale est de la forme :

$$x(t) = Ae^{\frac{-c}{a}t},$$

où A est une constante réelle dépendant des conditions initiales. Ainsi, en revenant à la fonction y, on a

$$y'(t) = Ae^{\frac{-c}{a}t}. \tag{4.7}$$

L'équation différentielle (4.7) admet la solution générale suivante :

$$y(t) = K_1 e^{\frac{-c}{a}t} + K_0 e^0,$$

où $K_1 = \frac{-a}{c}A$ et étant une nouvelle constante d'intégration. Nous avons bien établi le théorème dans le cas où $b = 0$.

Dans ce cas, les deux solutions réelles sont $r_1 = \frac{-c}{a}$ et $r_2 = 0$.

Si $b \neq 0$, on introduit la variable $x = y' + my$ où m est un réel que nous allons préciser. En reportant dans l'équation (4.3), on obtient

$$ax''(t) + (b - am)x(t) + \left(am^2 - bm + c\right) y(t) = 0.$$

- Si $b^2 - 4ac > 0$ et si $r_1 = \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $r_2 = \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ sont les deux racines réelles, pour le choix $m = r_1$, on a

$$ax''(t) + r_2 x(t) = 0.$$

La solution générale de cette équation est donnée par :

$$x(t) = K_0 e^{-r_2 t}.$$

On a $x(t) = y'(t) + r_1 y(t)$, alors

$$y'(t) + r_1 y(t) = K_0 e^{-r_2 t}. \tag{4.8}$$

Pour le choix $m = r_2$, on a

$$ax''(t) + r_1 x(t) = 0.$$

La solution générale de cette équation est donnée par :

$$x(t) = K_1 e^{-r_1 t}.$$

On a $x(t) = y'(t) + r_2 y(t)$, alors

$$y'(t) + r_2 y(t) = K_1 e^{-r_1 t}. \tag{4.9a}$$

Nous reconnaissons deux équations différentielles linéaires du premier ordre (4.8), (4.9a) et qui admettent le même ensemble de solutions :

$$y(t) = C_1 e^{-r_1 t} + C_2 e^{-r_2 t}, \text{avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Il faut remarquer pour finir que $-r_1$ et $-r_2$ sont les deux racines réelles de l'équation caractéristique (4.5).

- Si $b^2 - 4ac < 0$, dans ce cas nous avons deux racines complexes conjuguées pour l'équation :

$$am^2 + bm + c = 0, \tag{4.10}$$

et l'idée de la démonstration consiste à chercher les solution à valeurs dans $\mathbb{C}$, puis à déduire toutes les solutions possibles à valeurs réelles.

Dans ce cas, nous obtenons de la même manière

$$x(t) = K_1 e^{-r_1 t}, \ x(t) = K_2 e^{-r_2 t},$$

où, cette fois-ci, r_1 et r_2 sont les deux racines complexes conjuguées de l'équation (4.10), et K_1, K_1 sont des constantes complexes.

Par suite, on a les solutions correspondantes :

$$y(t) = C_1 e^{-r_1 t} + C_2 e^{-r_2 t}, \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Si nous vous déduire toutes les solutions réelles possibles, C_1 et C_2 doivent être complexes conjuguées. Par suite, si on pose :

$$\begin{aligned} C_1 &= \eta + i\xi \\ C_2 &= \eta - i\xi \\ r_1 &= \lambda + i\mu \\ r_2 &= \lambda - i\mu \end{aligned}$$

y sera nécessairement de la forme :

$$y(t) = (2\eta \cos(\mu t) + 2\xi \sin(\mu t))\, e^{t\lambda},$$

car

$$\begin{aligned} y(t) &= (\eta + i\xi)\, e^{(\lambda + i\mu)t} + (\eta - i\xi)\, e^{(\lambda - i\mu)t} \\ &= (\eta + i\xi)\,(\cos(\mu t) + i \sin(\mu t))\, e^{\lambda t} + (\eta - i\xi)\,(\cos(\mu t) - i \sin(\mu t))\, e^{\lambda t} \\ &= (2\eta \cos(\mu t) - 2\xi \sin(\mu t))\, e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Si on pose $C_1 = 2\eta$ et $C_1 = -2\xi$, on retrouve le résultat annoncé.

Si $b^2 - 4ac = 0$ il y a une seule solution à l'équation (4.10) c'est $r = \frac{b}{2a}$, pour le choix $m = r$, on a

$$ax'(t) - rx(t) = 0.$$

La solution générale de cette équation est donnée par :

$$x(t) = Ke^{rt}.$$

On a $x(t) = y'(t) + ry(t)$, on obtient :

$$y'(t) + ry(t) = Ke^{rt}.$$

La solution généralle de cette équation est donnée par :

$$y(t) = (\alpha + \beta t)\, e^{rt}.$$

où α et β étant deux constantes réeles. ■

Exemple 4.3.1. Résolvez l'équation différentielle :

$$y'' - y' + y = 0, \tag{4.11}$$

avec les conditions initiales $y(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y'(0) = \frac{1}{2}$.

L'équation différentielle (4.11) est linéaire du second ordre, à coeffcients constants, et sans second membre. Son équation caractéristique :

$$r^2 - r + 1 = 0,$$

admet deux racines complexes conjuguées : $r_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $r_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Sa solution générale est donc :

$$y(t) = \left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) e^{\frac{1}{2}t}, \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On a alors

$$y'(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}\left(\left(\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \left(\beta - \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).$$

Les conditions initiales fournissent le système :

$$\begin{cases} y(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y'(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta\right) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \beta = -1. \end{cases}$$

La solution de (4.11) qui vérifie les conditions initiales est donc :

$$y(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) e^{\frac{1}{2}t}.$$

4.4 Méthode de recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre

4.4.1 Quelques seconds membres particuliers

On considère dans toute la suite une équation différentielle du second ordre à coefficients complexes :

$$\forall t \in I : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = h(t), \tag{4.12}$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ et $h : I \to \mathbb{C}$

On admettra les résultats suivants :

Proposition 4.4.1. *Toute solution de (4.12) est somme d'une solution particulière de l'équation homogène associée à (4.12) et d'une solution particulière de (4.12).*

Proposition 4.4.2. *Cas où h est une fonction polynomiale.*

On suppose que h est une fonction polynomiale. Alors (4.12) possède une solution particulière de la forme :

1- P si $c \neq 0$.

2- tP si $c = 0$ et $b \neq 0$.

3- $t^2 P$ si $b = c = 0$.

où P est une fonction polynomiale de même degré que h.

Proposition 4.4.3. *Cas où $h(t) = f(t)e^{rt}$.*

On suppose que h est de la forme :$t \to h(t) = f(t)e^{rt}$,où f est une fonction polynomiale et $r \in \mathbb{C}$. Alors (4.12) possède une solution particulière de la forme :

1-$t \to P(t)e^{rt}$ si r n'est pas une racine de $ax^2 + bx + c = 0$.

2-$t \to tP(t)e^{rt}$ si r est une racine simple $ax^2 + bx + c = 0$.

3-$t \to t^2 P(t)e^{rt}$ si r est une racine double de $ax^2 + bx + c = 0$.

où P est une fonction polynomiale de même degré que f.

Proposition 4.4.4. *Cas où h est une combinaison linéaire de fonctions* sin *et* cos.

Soient $a, b, c, \alpha, \beta, \theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \neq 0$. L'équation :

$$\forall t \in I : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \alpha \cos(t\theta) + \beta \sin(t\theta), \tag{4.13}$$

admet une solution particulière sur I de la forme :

$$t \longrightarrow C_1 \cos(t\theta) + C_2 \sin(t\theta) \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Démonstration. Soit $g : t \longrightarrow C_1 \cos(t\theta) + C_2 \sin(t\theta)$. Posons $\alpha \cos(t\theta) + \beta \sin(t\theta) = \psi(t)$. On a les équivalents suivants :

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (4.13) &\Leftrightarrow \forall t \in I : ag''(t) + bg'(t) + cg(t) = \psi(t). \\ &\Leftrightarrow \forall t \in I : \psi(t) = \Big((1-\theta^2)C_1 + \theta C_2\Big)\cos(t\theta) \\ &\quad + \Big((1-\theta^2)C_2 - \theta C_1\Big)\sin(t\theta). \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\theta^2)C_1 + \theta C_2 = \alpha. \\ (1-\theta^2)C_2 - \theta C_1 = \beta. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\theta^2 & \theta \\ -\theta & (1-\theta^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1-\theta^2 & \theta \\ -\theta & 1-\theta^2 \end{pmatrix}$ est $(1-\theta^2)^2 + \theta^2 \neq 0$, et le système (4.13) possède toujours un couple solution. L'équation (4.13) admet donc toujours une solution de la forme indiquée. ∎

qué

Exemple 4.4.1. Réoudre sur $\mathbb{R}$ l'équations différentielle suivante :

$$y'' + 4y' - 5y = 2e^t, \tag{4.14}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique :

$$r^2 + 4r - 5 = 0,$$

a deux racines réelles distinctes $r = -5, r = 1$.

La solution de l'équation sans second membre $y'' + 4y' - 5y = 0$ est donc :

$$y(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^t \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Cherchons une solution particulière de (4.14). on a $h(t) = 2e^t$ qui est de la forme $h(t) = f(t)e^{rt}$:

Comme $r = 1$ est une racine de l'équation caractéristique, il faut chercher cette solution particulière sous la forme :

$$y_p = \alpha t e^t, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

En injectant cette fonction dans l'équation différentielle (4.14), on trouve $\alpha = \frac{1}{2}$. En fin, les solutions de (4.14) sont les fonctions :

$$t \longrightarrow y(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^t + \frac{1}{2} t e^t \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

■ 4.4.2 Principe de superposition

Supposons que le second membre de l'équation différentielle est une somme de deux fonctions :

$$\forall t \in I : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = h_1(t) + h_2(t), \tag{4.15}$$

Considérons les deux équations différentielles :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = h_1(t). \tag{4.16}$$

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = h_2(t). \tag{4.17}$$

Si y_1 est une solution de (4.16) et si y_2 est une solution de (4.17), alors la fonction $y_1 + y_2$ est une solution de (4.15).

En effet, si l'on a

$$\begin{aligned} ay_1''(t) + by_1'(t) + cy_1(t) &= h_1(t). \\ ay_2''(t) + by_2'(t) + cy_2(t) &= h_2(t). \end{aligned}$$

Alors

$$a\left(y_1''(t) + y_2''(t)\right) + b\left(y_1'(t) + y_2'(t)\right) + c\left(y_1(t) + y_2(t)\right) = h_1(t) + h_2(t).$$

On en déduit la règle suivante (principe de superposition) :

Si le second membre se présente sous la forme d'une somme de fonctions

$$h(t) = h_1(t) + ... + h_n(t),$$

on cherche une solution particulière correspondant à chacune des fonctions ci $1 \leq j \leq n$ séparément, puis d'après la linéarité on ajoute les différentes solutions particulières trouvées. On dit qu'on les superpose.

Exemple 4.4.2. Résoudre l'équations différentielle donnée par :

$$y'' + 2y' + 5y = \cos^2 t. \tag{4.18}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique :

$$r^2 + 2r + 5 = 0,$$

a deux racines complexes conjuguées distinctes : $r = -1 + 2i$, $r = -1 - 2i$.

Les solutions de l'équation homogène $y'' + 2y' + 5y = 0$ sont donc les fonctions :

$$t \longrightarrow y(t) = (C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t))\, e^{-t} \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Le second membre $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$.

Cherchons une solution particulière de l'équation :

$$y'' + 2y' + 5y = \frac{1}{2} \cos 2t. \tag{4.19}$$

Cette équation admet une solution particulière de la forme :

$$y(t) = K_1 \cos(2t) + K_2 \sin(2t) \text{ avec } (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2.$$

On a

$$y'(t) = -2K_1 \sin(2t) + 2K_2 \cos(2t).$$

$$y''(t) = -4K_1 \cos(2t) - 4K_2 \sin(2t).$$

En injectant ces fonctions dans l'équation différentielle (4.19), on trouve :

$$(4K_2 + K_1) \cos(2t) + (K_2 - 4K_1) \sin 2t = \frac{1}{2} \cos 2t,$$

alors :

$$\begin{cases} 4K_2 + K_1 = \frac{1}{2} \\ K_2 - 4K_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_1 = \frac{1}{34}. \\ K_2 = \frac{2}{17}. \end{cases}$$

Donc

$$t \longrightarrow y(t) = \frac{1}{34} \cos(2t) + \frac{2}{17} \sin(2t),$$

est une solution particulière de l'équation (4.19).

-Cherchons une solution particulière de l'équation :

$$y'' + 2y' + 5y = \frac{1}{2}. \tag{4.20}$$

Cette équation admet une solution particulière de la forme :

$$y(t) = a, \text{ avec } a \in \mathbb{R}.$$

La fonction $t \longrightarrow y(t) = \frac{1}{10}$ est une solution particulière de l'équation (4.20).

On applique alors le principe de superposition et les solutions de (4.18) sont les fonctions :

$$t \longrightarrow y(t) = (C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t))\, e^{-t} + \frac{1}{34} \cos(2t) + \frac{2}{17} \sin(2t) + \frac{1}{10} \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

■ 4.4.3 Méthode de la variation de la constante

Si y_1 est une solution de (4.3), ne s'annulant pas sur I, on peut chercher les solutions de (4.2) sous la forme :

$$y(t) = u(t)y_1(t),$$

où u est une fonction inconnue (de classe C^1) qui vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre en u' obtenue en reportant dans (4.3).

■ 4.4.4 Système fondamental de solutions

Dans chacun des trois cas qui peuvent se présenter, la solution générale est de la forme :

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t).$$

Si y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (4.3). La méthode consiste à considèrer C_1 et C_2 comme des fonctions de t on peut chercher la solution de (4.2) sous la forme :

$$y(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t),$$

où C_1 et C_2 sont des fonctions inconnues (de classe C^1) soumises à la condition :

$$C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) = 0.$$

Maintenant, si on cherche y', y'' puis on reporte dans l'équation (4.2), on obtient l'équation :

$$C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) = h(t).$$

Les fonctions C_1 et C_2 sont obtenues en résolvant le système :

$$\begin{cases} C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) = 0, \\ C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) = h(t). \end{cases}$$

Si on note

$$W(y_1, y_2)(t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix},$$

alors on déduit :

$$C_1'(t) = \frac{-y_2(t)h(t)}{W(y_1, y_2)(t)}, \; C_2'(t) = \frac{y_1(t)h(t)}{W(y_1, y_2)(t)}.$$

On cherchera alors à trouver une primitive C_1 et une primitive C_2.

Remarque 4.4.3. La fonction $W(y_1, y_2)$ s'appelle wronskien de y_1, y_2 ne s'annule pas sur I lorsque y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

Exemple 4.4.4. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y = 2\cos t. \tag{4.21}$$

L'équation sans second membre associée est $y'' + y = 0$ admet visiblement les solutions non proportionnelles :

$$t \longrightarrow y_1(t) = \cos t,\ t \longrightarrow y_2(t) = \sin t.$$

La solution générale de (4.21) est de la forme :

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Les fonctions C_1 et C_2 sont obtenues en résolvant le système :

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos t + C_2'(t)\sin t = 0, \\ -C_1'(t)\sin t + C_2'(t)\cos t = 2\cos t. \end{cases}$$

Le wronskien de y_1, y_2 est $W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1$, donc

$$\begin{aligned} C_1'(t) &= -2\sin t\cos t \Longrightarrow C_1(t) = \frac{1}{2}\cos 2t + k_1. \\ C_2'(t) &= 2\cos^2 t \Longrightarrow C_2(t) = t + \sin 2t + k_2. \end{aligned}$$

Finalement la solution générale de (4.21) est :

$$t \longrightarrow y(t) = t\sin t + \alpha\cos t + \beta\sin t,\ \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

■ 4.5 Exercices avec solutions

Exercice 4.5.1. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

1) $y'' + 3y' + 2y = 0.$
2) $4y'' + 4y' + y = 0.$
3) $y'' + 2y' + 3y = 0.$

Solution :

1) Soit l'équation $y'' + 3y' + 2y = 0$, le polynôme caractéristique est : $r^2 + 3r + 2$; ses racines sont -1 et -2. Les solutions générales de cette équation différentielle sont donc les fonctions.

$$t \longrightarrow y(t) = \alpha e^{-t} + \beta e^{-2t}, \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

2) $4y'' + 4y' + y = 0$:

Le polynôme caractéristique est : $4r^2 + 4r + 1$; se racine double est : $\frac{-1}{2}$. Les solutions générales de cette équation différentielle sont donc les fonctions :

$$t \longrightarrow y(t) = (\alpha + t\beta)\, e^{\frac{-1}{2}t}, \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

3) $y'' - 2y' + 3y = 0$.

Le polynôme caractéristique est : $r^2 - 2r + 3$, ses racines sont :$1 + \sqrt{2}i$, $1 - \sqrt{2}i$ Les solutions générales de cette équation différentielle sont donc les fonctions :

$$t \longrightarrow y(t) = \left(C_1 \cos\left(\sqrt{2}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{2}t\right)\right) e^t, \ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 4.5.2. 1- Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - y = \cos t, \tag{4.22}$$

Solution :

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique : $r^2 - 1 = 0$, a deux racines distinctes $r = 1, r = -1$.

Les solutions de l'équation homogène : $y'' - y = 0$, sont donc les fonctions :

$$t \longrightarrow y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^t, \ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

On sait que $y(t) = \frac{-1}{2} \cos t$ est une solution particulière de l'équation (4.22). Enfin, les solutions de (4.22) sont les fonctions :

$$t \longrightarrow y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^t - \frac{1}{2} \cos t, \ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2-Soit $t \longrightarrow F(t)$ la fonction primitive de la fonction $t \longrightarrow f(t)$; alors l'équation (4.22) devient :

$$F''(t) - F(t) = \cos t.$$

d'après (1), $F(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^t - \frac{1}{2} \cos t$; alors $f(t) = K_1 e^{-t} + C_2 e^t + \frac{1}{2} \sin t$, avec $(K_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 4.5.3. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2my' + y = 0. \tag{4.23}$$

où m est un paramètre réel.

a) Donner, en distinguent suivant les valeurs de m, la solution générale de (4.23).

Solution :

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique :

$$r^2 + 2mr + 1 = 0. \tag{4.24}$$

On résout cette équation, on trouve $\Delta' = (m-1)(m+1)$.

* 1^{er}Cas : $\Delta' = 0$.

Si $m = 1$ les solutions de l'équation (4.23) sont les fonctions :

$$t \longrightarrow y(t) = (C_1 + tC_2)\, e^t, \;\; (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Si $m = -1$ les solutions de l'équation (4.23) sont les fonctions :

$$t \longrightarrow y(t) = (k_1 + tk_2)\, e^{-t}, \;\; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2.$$

* $2^{ème}$ Cas : $\Delta' > 0$.

Si $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \in \,]-\infty, -1[\, \cup \,]1, +\infty[$, l'équation caractéristique (4.24) admet deux racines réelles distinctes :

$$r_1 = m + \sqrt{m^2-1}, r_2 = m - \sqrt{m^2-1}.$$

Les solutions de l'équation (4.23) sont donc les fonctions :

$$t \longrightarrow y(t) = C_1 e^{\left(m+\sqrt{m^2-1}\right)t} + C_2 e^{\left(m-\sqrt{m^2-1}\right)t}, \;\; (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

* $3^{ème}$Cas : $\Delta' < 0$.

L'équation caractéristique (4.24) admet deux racines complexes conjuguées distinctes :

$$r_1 = m + i\sqrt{m^2-1}, r_2 = m - i\sqrt{m^2-1}.$$

Les solutions de l'équation (4.23) sont donc les fonctions :

$$t \longrightarrow y(t) = \left(C_1 \cos\left(t\sqrt{m^2-1}\right) + C_2 \sin\left(t\sqrt{m^2-1}\right)\right) e^{tm}, \;\; (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 4.5.4. Résoudre en fonction de $m \in \mathbb{R}$:

$$y'' - 2y' + my = \cos t. \tag{4.25}$$

Solution

Le polynôme caractéristique est donné par : $P(r) = r^2 - 2r + m$: on trouve le discriminant réduit $\Delta' = 1 - m$.

On est donc conduit à étudier les trois cas :

1- Si $m = 1$.

Les solutions générales de l'équation sans second membre sont les fonctions :$t \longrightarrow y(t) = (C_1 + tC_2)\, e^t$, $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

- Cherchons une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + my = \cos t$, cette équation admet une solution particulière de la forme :$y(t) = K_1 \cos t + K_2 \sin t$, $(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$.

On a

$$\begin{aligned} y'(t) &= -K_1 \sin t + K_2 \cos t. \\ y''(t) &= -K_1 \cos t - K_2 \sin t. \end{aligned}$$

En injectant ces fonctions dans l'équation différentielle (4.25), on trouve

$$K_1 = 0, K_2 = -\frac{1}{2}.$$

Finalement les solutions de l'équation (4.25) sont donc les fonctions :

$$t \longrightarrow y(t) = (C_1 + tC_2)\, e^t - \frac{1}{2}\sin t, \ \ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2- Si $m > 1$.

L'équation caractéristique $r^2 - 2r + m$ admet deux racines complexes conjuguées distinctes :

$$r_1 = 1 + i\sqrt{m-1}, r_2 = 1 - i\sqrt{m-1}$$

Les solutions générales de l'équation sans second membre sont les fonctions :

$$t \longrightarrow y(t) = \left(C_1 \cos\left(t\sqrt{m-1}\right) + C_2 \sin\left(t\sqrt{m-1}\right)\right) e^t, \ \ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Cherchons une solution particulière de l'équation (4.25).

Cette équation admet une solution particulière de la forme :

$$y(t) = K_1 \cos t + K_2 \sin t, \ \ (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2.$$

On a

$$\begin{aligned} y'(t) &= -K_1 \sin t + K_2 \cos t. \\ y''(t) &= -K_1 \cos t - K_2 \sin t. \end{aligned}$$

En injectant ces fonctions dans l'équation différentielle (4.25), on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = \frac{-2}{(m-1)^2+4}. \\ K_2 = \frac{m-1}{(m-1)^2+4}. \end{array} \right.$$

Par conséquent, les solutions de l'équation (4.25) sont donc les fonctions :

$$y(t) = \left(C_1 \cos\left(t\sqrt{m-1}\right) + C_2 \sin\left(t\sqrt{m-1}\right)\right) e^t + \frac{(m-1)\cos t - 2\sin t}{(m-1)^2+4}, \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

3- Si $m < 1$.

L'équation caractéristique $r^2 - 2r + m$ admet deux racines réelles distinctes :

$$r_1 = 1 + \sqrt{1-m}, r_2 = 1 - \sqrt{1-m}.$$

Les solutions générales de l'équation sans second membre sont les fonctions :

$$t \longrightarrow y(t) = k_1 e^{t\left(1+\sqrt{1-m}\right)} + k_2 e^{t\left(1-\sqrt{1-m}\right)}, \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2.$$

La solution générale de (3.18) est donc donnée, pour tout réel t, par :

$$t \longrightarrow y(t) = k_1 e^{t\left(1+\sqrt{1-m}\right)} + k_2 e^{t\left(1-\sqrt{1-m}\right)} + \frac{(m-1)\cos t - 2\sin t}{(m-1)^2+4}, \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 4.5.5. Résoudre les équations différentielles (EDO) données par :

1) $y'' - y' - 2y = \cos t + 3\sin t$.
2) $y'' - 4y' + 4y = (t^2+1)e^{2t}$.
3) $y'' + 4y' + 13y = e^t$.
4) $y'' + y = \sin 2t$.
5) $y'' + y' + 2y = e^t \sin t$.
6) $y'' - 4y' + 4y = e^t + (3t-1)e^{2t} + t - 2$.

Solution :

1) $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - \sin t$.
2) $y(t) = (C_1 + tC_2)e^{2t} + \frac{t^2}{12(6+t^2)} e^{2t}$.
3) $y(t) = (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)e^{2t} + \frac{1}{10} e^t$.
4) $y(t) = (C_1 \cos t + C_2 \sin t) - \frac{1}{3} \sin 2t$.
5) $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - \frac{1}{10(3\cos t + \sin t)} e^t$.
6). $y(t) = C_1 + tC_2)e^{-t} - e^t + \frac{t^3 - t^2}{2} e^{2t} + \frac{t-1}{4}$

Chapitre 5

Annexe

■ 5.1 Quelques théorèmes fondamentaux dans l'analyse

■ 5.1.1 Théorème de Rolle

Théorème 5.1.1.1. *Soit une fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *On suppose que :*

1- la fonction f *est continue sur* $[a, b]$.

2- la fonction f *est dérivable sur l'intervalle ouvert* $]a, b[$,

3- $f(b) = f(a)$

alors il exiset $C \in]a, b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

■ 5.1.2 Théorème des accroissement finis

Théorème 5.1.2.1. *Soit une fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *On suppose que :*

1- la fonction f *est continue sur* $[a, b]$.

2- la fonction f *est dérivable sur l'intervalle ouvert* $]a, b[$,

alors il exiset $C \in]a, b[$ *tel que* $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

■ 5.1.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 5.1.3.1. *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et une fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Soient deux points* $(a, b) \in I \times I$ *tels que* $a < b$.*On suppose que :*

1- la fonction f *est continue sur l'intervalle* I.

2- $f(a) \leq 0,\ f(b) \geq 0$

Alors il existe un réel $c \in [a, b]$ *tel que* $f(c) = 0$.

Théorème 5.1.3.2. ***(Deuxième forme)***

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On suppose que : f est continue sur $[a, b]$.

alors $f(x)$ prend toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$ quand x parcourt $[a, b]$. Autrement dit, si $y_0 \in [f(a), f(b)]$, alors il existe au moins un réel $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

5.2 Table des principales intégrales indéfinies

Fonction	intégrale indéfinie	intervalle d'intégration
$\cos(ax+b)\,,\ a \in \mathbb{R}^*$	$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)\,,\ a \in \mathbb{R}^*$	$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c.$	$\mathbb{R}^*$
$\tan x$	$\int \tan x dx = -\ln\lvert x\rvert + c$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{(2\pi+1)k}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\coth x$	$\int \coth x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + c.$	$\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c$	$]-1, 1[$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos x + c$	$]-1, 1[$

Fonction	intégrale indéfinie	intervalle d'intégration
shx	$\int shxdx = chx + c$	$\mathbb{R}$
chx	$\int chxdx = shx + c.$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{shx}$	$\int \frac{1}{shx}dx = \ln\left\lvert\tan\frac{x}{2}\right\rvert + c$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{chx}$	$\int \frac{1}{chx}dx = 2\arctan e^x + c.$	$\mathbb{R}$
thx	$\int thxdx = \ln(chx) + c$	$\mathbb{R}$
$\coth\ x$	$\int \coth\ dx = \ln\lvert shx\rvert + c$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \arg shx + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \arg chx + c$	$]1, +\infty[$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \arg thx + c$	$]-1, 1[$

5.3 Quelques formules de trigonométrie vraiment utiles

Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \qquad \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

Relation entre sin, cos et tan

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \qquad 1 + \tan^2\theta = \tfrac{1}{\cos^2\theta}.$$

Formules de duplication

$$\begin{array}{ll} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta & \sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta \\ \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} & 2\cos^2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{array}$$

Formules de linéarisation

$$\cos^2\theta = \tfrac{1+\cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2\theta = \tfrac{1-\cos 2\theta}{2}, \quad \tan^2\theta = \tfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$

Expression des fonctions cos, sin et tan en fonction de la tangente de l'angle moitié

Si $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ on a

$$\cos\theta = \tfrac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\theta = \tfrac{2t}{1+t^2}, \quad \tan\theta = \tfrac{2t}{1-t^2}.$$

Bibliographie

[1] K. Allab. Eléments d'analyse. *OPU*, Alger, 1984.

[2] B. Calvo et J. Doyen et A. Calvo et F. Boschet. Cours d'analyse. *Librairie Armand Colin*, Paris, 1976.

[3] J. Lelong-Ferrand et J. M. Arnaudies. Cours de mathématiques, tome 2. *Edition Dunod*, 1978.

[4] A. Mezghiche et M.Moulai. Exercices d'analyse. *Editions Houma*, 2011.

[5] Y. Bougrov et S. Nikolski. Cours de mathématiques supérieures. *Editions Mir, Moscou*, 1983.

[6] Davidson K.R. and Dosig A.P. Real analysis and applications. *Springer,New York*, 2010.

[7] J.-M. Monier. Analyse pcsi-ptsi. *Dunod*, Paris 2003.

[8] N. Piskounov. Calcul différentiel et intégral, tome 1. *Editions Mir*, Moscou, 1980.

[9] s. Balac et F.Sturm. Exercices d'algèbre et d'analyse. *Presses polytechnique et universitaire romandes*, 2011.