République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Ghardaia
Faculté des Sciences et technologie
Département des Mathématiques et Informatique

Projet de fin d'étude présenté en vue de l'obtention du diplôme de

LICENCE

Domaine :Mathématiques et Informatique
Spécialité : Mathématiques

THEME :

TITRE :Notions générales sur les semi-groupes d'opérateurs linéaires

PAR :

CHERIF DJIHAD

Jury :

M^{eme}. **Hammouche Hadda**	Maitre de conférence à Univ .Ghardaia	**Encadreur**
M^{r} **Latreche Smail**	Maitre Assistant à Univ .Ghardaia	**Examinateur**

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2013/2014

Remerciement

T*out d'abord, je remercie mon dieu qui m'a aidé et m'a donné la capacité et la volonté pour terminer ce travail.*

J*e souhaite adresser ici tous mes remerciements aux personnes qui m'ont apporté leur aide, madame Hammouche H maitre de conférence à l'Université de Ghardaia, Encadreur de ce mémoire, pour l'aide et le temps qu'elle m'a consacré et sans elle ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.*

M*erci à toute ma famille, qui m'a soutenue en toutes circonstances . J'espère qu'ils trouvent ici l'expression de mon éternelle reconnaissance.*

E*nfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes amis proches et mes cousines qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.*

Dédicace

A toute personne chére à mon cœur :

"Mes parents", *je leurs dédie ce travail parcequ'il est le résultat de tous qu'ils me fournissaient et mon succès est grâce à ses invocations.*

"Mes chéres sœurs" *:*
Noura , Hayat , Fadila , Anfel et la plus proche Mbarka

"Mon frère" *: Youcef*

Je leurs souhaite tout le bonheur dans la vie.

"Les beaux gosses" *: Youcef , Khalil , Aymane , et Abdssamad*

Et **"Les belles petites"** *: Tasnim et Amal*

Pour toute ma famille spécialement **"mes cousines"** *:*
Zineb , Imane , Assia , et la plus chére à mon cœur Sabrine.

"Mes chers cousins" *: Ahmed , Oussama*

"Mes amis proches" *qui j'ai passé avec leurs les meilleurs moments de ma vie :*
Imane , Zohra , Hanaa , Anfel, Mohamed , Mohamed , Mohamed Fouad ,Ahmed de Annaba et spécialement Mohamed Zakaria
Et pour tous les amis que j'ai connu tout le long de ma vie et que je n'ai pas cité leurs noms.

Table des matières

Introduction

Il est bien connu que la fonction exponentielle $t \longmapsto \exp(ta)$ est la solution unique sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x' = ax$ avec la condition initiale $x(0) = 1$.

L'importance des fonctions exponentielles a connu une grande croissance après l'année 1888, quand les grands mathématiciens,entre autre Peano a eu l'inspiration d'écrire la solution du problème de Cauchy vectoriel :

$$\begin{gathered} x' = Ax \\ x(0) = I \end{gathered}$$

où A est une matrice quadratique, sous la forme :

$$t \longmapsto \exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

Ce résultat a été étendu aux équations différentielles opératorielles $X' = AX$, où A est un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach X, qui a pour solution fondamentale la fonction exponentielle $t \longmapsto \exp(tA)$.

La définition d'une fonction exponentielle comme une solution de l'équation $x' = Ax$ a donné naissance aux semi-groupes de classe C_0

Les résultats fondamentaux pour les semi-groupes de classe C_0 dans les espaces de Banach sont donnés par Hille[11] [12] [13] , Yosida [25] [26], Feller [8] [9], Miyadera [20] [21] et Phillips [22] [10] .

La généralisation des semi-groupes de classe C_0 est marqué par l'introduction des semi-groupes intégrés . Dans la théorie des semi-groupes intégrés un rôle important revient à un théorème classique de représentation de la transformée de Laplace pour une fonction avec valeurs réelles, prouvé par Widder [23] [24].

Malheureusement, dans 1960 Zaidman [27] a prouvé que le théorème de Widder ne peut être étendu aux fonctions à valeurs dans un espace de Banach arbitraire. Difficilement, en 1987 Arendt [4] a prouvé une version " intégré " du théorème de Widder pour des fonctions à valeurs dans un espace de Banach, avec lequel il a obtenu une caractérisation complète pour le générateur d'un semi-groupe intégré. Dans le cas des semi-groupes intégrés on peut voir que le générateur n'est pas nécessairement à domaine dense, comme on peut le voir dans les nombreux travaux parus dans les dernières décennies sur ce sujet.

Le présent mémoire est consacré à l'étude des deux classes des semi-groupes d'opérateurs linéaires , ce sont les semi-groupes fortement continus et intégrés et leurs propriétés.Il est composé de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, on rappelle les principales notions utiles tout le long de ce travail à savoir sur les espaces de Banach et de Hilbert,et quelques propriétés des opérateurs linéaires.

Le second chapitre est consacré à l'étude des semi-groupes fortement continus d'opérateurs linéaires sur un espace de Banach et leurs propriétés générales et spectrales

Dans le troisième chapitre, on va introduire les semi-groupes intégrés ainsi que leurs propriétés générales et spectrales.

Enfin dans le dernier chapitre, on donne quelques applications des semi-groupes dans la résolution des équations et inclusions différentielles fonctionnelles illustrés par des exemples.

Chapitre 1

Notions générales

1.1 Rappel sur les espaces de Banach et de Hilbert

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques notions et définitions que nous allons les utiliser au cours de ce travail.

1.1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.1 *[5] On appelle norme une application* $\|.\| : x \in E \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}_+$ *qui vérifie :*
1)$\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$
2)$\forall \lambda \in \mathbb{K} et \forall x \in E on\ a :\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$
3) $\forall x, y \in E$ *on a* :$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Définition 1.1.2 *[5]*

Soit X un espace vectoriel normé.

X est de Banach s'il est complet.

Proposition 1.1.1 *[5]*
Les espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R} ou$ $\mathbb{C}$ *sont des Banach*

1.1.2 Espace de Hilbert

Produit scalaire :[17] soit E un K.espace.vectoriel (K= $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
On appelle produit scalaire sur E une application $f : E \times E \longrightarrow K$ possédant les propriétés suivantes :

1. $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$

2. $f(\lambda x, y) = \overline{\lambda}.f(x, y)$

3. $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$

4. $f(x, x) \geq 0$

5. $f(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\forall x, x', y \in E, \lambda \in K$

Espace préhilbertien :[17]

Le produit scalaire défini sur un espace vectoriel E induit une norme sur E : $x \longmapsto < x, x >^{1/2} = \|x\|$ dans ce cas l'espace est dit préhilbertien

Définition 1.1.3 *[17]*

Un espace de Hilbert H est un espace préhilbertien complet.

1.2 Opérateurs linéaires

Soient H et H' deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{C}$

Définition 1.2.1 *[7]*

Toute application linéaire continue $T : H \longrightarrow H'$ s'appelle un opérateur.

L'espace vectoriel $\mathcal{L}(H, H')$ des applications linéaires continues de H dans H' est l'espace des opérateurs de H dans H'

Un opérateur linéaire sur H est la donnée d'un couple (T, D(T)) où :
• D(T) est un sous-espace vectoriel de H appelé domaine
•$T : D(T) \longrightarrow H$ est une application linéaire.

Notations :[7]

1. Pour alléger les écritures, l'image d'un vecteur $x \in H$ par l'opérateur $T \in \mathcal{L}(H, H')$ sera généralement notée Tx mais la notation traditionnelle $T(x)$ sera parfois utilisée également.

2. La norme de T est le nombre : $\|T\| = \sup\limits_{\|x\| \geq 1} \|Tx\|_{H'}$
   c'est la norme usuelle assujettie aux normes de H et H'

3. On notera Ker T le noyau de l'opérateur T i.e : Ker T $=\{x \in H; Tx = 0\}$.

4. Im T désignera le sous-espace de H' image de H par T. On le notera aussi T(H).

Inverse d'un opérateur :
Soient H et H' des espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H, H')$ un opérateur.

Définition 1.2.2 *[7]*

On dit que A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{L}(H', H)$ *tel que :*
$A \circ B = I_{H'}$ *et* $B \circ A = I_H$

Où I_H *(resp.* $I_{H'}$*) est l'opérateur identité de H (resp. de* H'*). Un tel opérateur B (lorsqu'il existe) est unique. On l'appelle opérateur inverse de A ou plus simplement inverse de A et on le note :* $B = A^{-1}$

Théorème 1.2.1 *[7]*

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$.

si dim(H) est finie alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
1) T est inversible.

2) T est injectif.

3) T est surjectif.

4) T admet un inverse à droite (i.e : il existe $U \in \mathcal{L}(H)$ *tel que* $T \circ U = I_H$*).*

5) T admet un inverse à gauche (i.e : il existe $V \in \mathcal{L}(H)$ *tel que* $V \circ T = I_H$*).*

Opérateur linéaire borné :

Soient E et F deux espaces de Banach
On appelle un opérateur linéaire borné de E dans F toute application linéaire continue de E dans F.

Si E=F , alors l'ensemble des opérateurs linéaires bornés est noté : B(E)

Définitions :[6]

1. **Le graphe** d'un opérateur (T,D(T)) est le sous-espace de $H \times H$ donné par :
   $\Gamma(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\} \subset H \times H$.

2. **Extension** : Soient S et T deux opérateurs et soient D(T), D(S) leurs domaines respectifs.
   On dit que (S,D(S)) est une extension de (T,D(T)) si $D(T) \subset D(S)$ et $Tx = Sx$ pour tout $x \in D(T)$, (Autrement dit, $\Gamma(T) \subset \Gamma(S)$).

3. On dit que (T,D(T)) est fermé si son graphe $\Gamma(T)$ est un fermé de $H \times H$.

4. On dit qu'un opérateur (T,D(T)) est fermable s'il possède une extension fermée.

Soient X un espace de Banach, B(X) l'ensemble des opérateurs linéaires bornés définis sur X et $T \in B(X)$.

Définition 1.2.3 *[14] L'ensemble :*

$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que :* $(\lambda I - T)^{-1}$ *est inversible dans* B $\}$
S'appelle l'ensemble résolvant de $T \in B$

Définition 1.2.4 *[14]*

L'application :

$$R(.,T) : \rho(T) \longrightarrow B$$
$$R(\lambda,T) = (\lambda I - T)^{-1}$$

S'appelle la résolvante de T

Proposition 1.2.1 *[14]*

La résolvante d'un opérateur linéaire $T \in B$ *, admet les propriétés suivantes :*

1. *Si* $\lambda, \mu \in \rho(T)$ *, alors :*
$$R(\lambda,T) - R(\mu,T) = (\mu - \lambda)R(\lambda,T)R(\mu,T)\,;$$
2. $R(.,T)$ *est une application analytique sur* $\rho(T)$ *;*
3. *Si* $\lambda \in \mathbb{C}$ *et* $|\lambda| > \|T\|$ *, alors* $\lambda \in \rho(T)$ *et nous avons :* $R(\lambda,T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$ *;*
4. *Nous avons :* $\frac{\partial^n R(\lambda,T)}{\partial \lambda^n} = (-1)^n n! R(\lambda,T)^{n+1}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\lambda \in \rho(T)$ *.*

Définition 1.2.5 *[14]*

L'ensemble $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ *s'appelle le spectre de* $T \in B$

Proposition 1.2.2 *[14]*

$\lambda \in \sigma(T) \Longleftrightarrow (\lambda - IT)$ *n'est pas inversible.*

Définition 1.2.6 *[14] Pour un opérateur* $T \in B(X)$*, le nombre*

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

s'appelle le rayon spectrale de T*.*

Chapitre 2

Semi-groupes fortement continus

Nous savons que l'équation $u'(t) - Au(t) = f(t)$ avec $u(0) = u_0$, où A une matrice carrée d'ordre n, admet comme solution : $u(t) = A(t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} A^{(t-s)}.f(s)ds$.

Les mathématiciens se sont demandés qu'elle sera la solution d'une équation pareil, si l'espace est de dimension infini, est c'est l'idée des semi-groupes.

Dans la suite, on note X l'espace de Banach , B(X) l'ensemble des opérateurs linéaires bornés définis sur X et par I l'opérateur identité .

2.1 Définition

Définition 2.1.1 *[18] Dans un espace de Banach X, une famille d'opérateurs linéaires bornés* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$ *tel que :* $S(t) : X \longrightarrow X$ *et dépend du paramètre* $t \geq 0$*, forme un semi-groupe fortement continu (ou* C_0 *semi- groupes) si :*

1. $S(0) = I_X$ *où I est l'opérateur identique de X dans X.*

2. $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)\ \forall t_1, t_2 \in [0, \infty[$.

3. $\|S(t)x - x\|_X \longrightarrow 0$ *quand :* $t \longrightarrow 0^+, \forall x \in X$

Définition 2.1.2 *[18] Soit* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$ *un semi-groupe, on dit que* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe fortement continus si :*

$\|S(t+s)x - S(s)x\|_X \longrightarrow 0$ *quand :* $t \longrightarrow 0, \forall x \in X$ *et* $s \in [0, +\infty[$.

Exemple 2.1.1 *[18] Considérons l'espace* $L_p(]0, \infty)), 1 \leq p \leq \infty$*, avec la norme :*

$$\|f\|_p = \Big(\int_0^{\infty} |f(\alpha)|^p \partial\alpha\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Avec cette norme, $L_p(]0, \infty)), 1 \leq p < \infty$*, est un espace de Banach. Définissons :*

$$(S(t)f)(\alpha) = f(t+\alpha), \forall t \geq 0 \ et \ \alpha \in]0,\infty)$$

Nous avons :

$$\|S(t)f\|_p = \Big(\int_0^{\infty} |(S(t)f)(\alpha)|^p \partial\alpha\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int_0^{\infty} |f(\alpha+t)|^p \partial\alpha\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int_t^{\infty} |f(\beta)|^p \partial\beta\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_0^{\infty} |f(\beta)|^p \partial\beta\Big)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p$$

Donc : $\|S(t)\| = 1, \forall t \geq 0.$

Il est évident que $S(0) = I$ *et* $S(t+s) = S(t)S(s), \forall t,s \geq 0.$

De plus, on a :

$$\lim_{t\to 0} \|S(t)f - f\|_p = \lim_{t\to 0}\Big(\int_0^{\infty} |(S(t)f)(\alpha) - f(\alpha)|^p \partial\alpha\Big)^{\frac{1}{p}} = \lim_{t\to 0}\Big(\int_0^{\infty} |f(\alpha+t) - f(\alpha)|^p \partial\alpha\Big)^{\frac{1}{p}} = 0$$

Par suite $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$ *est un* C_0*-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur* $L_p(]0,\infty))$.

2.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu

Définition 2.2.1 *[18] On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$ *, l'opérateur linéaire :*

$$A : X \longrightarrow X \ \text{où} \ D(A) = \{x \ \text{tel que :} \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t} \ , \text{existe} \ \}$$
$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t}$$

Remarque 2.2.1 *[18]*
En général, le générateur infinitésimal A d'un semi-groupe est un opérateur non borné, mais il détermine toujours univoquement le semi-groupe.

Exemple 2.2.1 *Si* A *est un opérateur borné dans* X *, La famille d'opérateurs* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$ *:* $S(t) = \exp(tA)$ *est un semi-groupe fortement continu engendré par* A.

Proposition 2.2.1 *[18]*

Soit $(A, D(A))$ *le générateur infinitésimal d'un semi-groupe* $S(t), t \geq 0$ *:*

Le domaine D(A) est l'ensemble des vecteurs $x \in X$ *tel que* $t \mapsto S(t)x$ *est continument dérivable dans* $[0,\infty)$.

Proposition 2.2.2 *[18]*

Si (A,D(A)) est le générateur infinitésimal d'un semi -groupe $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$*, alors (A, D(A)) est fermé et D(A) est dense dans X :* $\overline{D(A)} = X$

2.3 Propriétés générales des semi-groupe fortement continus

Ce qui suit, nous allons donner quelques propriétés des C_0-semi-groupes

Lemme 2.3.1 *[18] Soit* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$ *un semi-groupe fortement continus alors il existe une constante* $M \geq 1$ *et* $\omega \in \mathbb{R}$
tel que :

$$\|S(t)\| \leq M.\exp(\omega.t), \forall t \in [0, +\infty[\ .$$

Le cas de $\omega = 0, (\|S(t)\| \leq M).S(t)$ *est un semi-groupe borné.*

Le cas de $\omega = 0$ *et* $M = 1(\|S(t)\| \leq 1).S(t)$ *est un semi-groupe de contraction.*

Lemme 2.3.2 *[18] Si* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe fortement continu a l'origine admettant une majoration :*
$\|S(t)\| \leq M.\exp(\omega.t), \forall t \in [0, +\infty[$ *, alors S(t) est fortement continu.*

Corollaire 2.3.1 *[18]*

Si $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$ *est un* C_0*-semi-groupe, alors l'application :*

$$[0, \infty) \ni t \longmapsto S(t)x \in X$$

est continue sur $[0, \infty)$ *, quel que soit* $x \in X$

Définition 2.3.1 *[18] On dit que le* C_0*-semi-groupe* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$ *est uniformément borné s'il existe* $M \geq 1$ *tel que :*

$$\|S(t)\| \leq M\ ,\ \forall t \geq 0.$$

Dans la suite, nous noterons par Sg(M,ω) l'ensemble des C_0-semi-groupes $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \subset B(X)$ pour lesquels il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que :

$$\|S(t)\| \leq M.\exp(\omega.t), \forall t \geq 0 \ .$$

Proposition 2.3.1 *[18]*
Soient $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \in Sg(M,\omega)$ *et A son générateur infinitésimal.*
Si $x \in D(A)$, alors $S(t)x \in D(A)$ et on a l'égalité :

$$S(t)Ax = A.S(t)x, \forall t \geq 0.$$

Remarque 2.3.1 *[18] On voit que :*

$$S(t)D(A) \subseteq D(A), \forall t \geq 0.$$

Théorème 2.3.1 *[18] Soient* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \in Sg(M,\omega)$ *et A son générateur infinitésimal. Alors l'application :*

$$[0,\infty) \ni t \longmapsto S(t)x \in X$$

est dérivable sur $[0,\infty)$, pour tout $x \in D(A)$ et nous avons :

1. $\dfrac{d}{dt}S(t)x = S(t)Ax = AS(t)x, \forall t \geq 0\,$;
2. $S(t)x - x = \displaystyle\int_0^t S(s)Axds, \forall t \geq 0.$

Lemme 2.3.3 *[18] Soit* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$ *un C_0-semi-groupe. Alors :*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)xds = S(t)x$$

pour tout $x \in X$ et $t \geq 0$.

2.4 Les semi-groupes fortement continus différentiables

Définition 2.4.1 *[19] On dit que l'application : $t \longrightarrow S(t)x$ est différentiable si :*

$$\lim_{t\to s}\frac{S(t)x - S(s)x}{t-s} \ \textit{existe où} \ \lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)x - S(s)x}{h} \ \textit{existe}$$

Définition 2.4.2 *[19] On dit que* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe fortement continu différentiable si l'application :*

$$[0,+\infty[\ni t \longrightarrow S(t)x$$

Tel que : $S(t)x \in X$ *, est différentiable pour tout* $x \in X$*.*

Théorème 2.4.1 *[19] Soit* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$ *un semi-groupe fortement continus et* A *son générateur infinitésimal, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe fortement continus différentiable.*
2. $Im\Big(S(t)\Big) \subset D(A), \forall t \in [0,+\infty[$

Proposition 2.4.1 *[19] Soit* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$ *un semi-groupe fortement continu différentiable,*

alors l'application : $[0,+\infty[\ni t \longrightarrow S(t)x$ *tel que :* $S(t)x \in X$*, est continue pour la topologie de la convergence uniforme.*

2.5 Propriétés spectrales des C_0-semi-groupes

Nous terminons ce chapitre par quelques propriétés spectrales pour les C_0-semi-groupes.

Dans la suite, pour $\omega \geq 0$ nous désignerons par Λ_ω l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C} | Re(\lambda) > \omega\}$.

Théorème 2.5.1 *[18] soient* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \in Sg(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal . Si* $\lambda \in \Lambda_\omega$*. alors l'application :*

$$R_\lambda : X \longrightarrow X$$
$$R_\lambda x = \int_0^\infty \exp(-\lambda.t).S(t)xdt$$

définit un opérateur linéaire borné sur X *,* $\lambda \in \rho(A)$ *et* $R_\lambda x = R(\lambda, A)x$ *pour tout* $x \in X$

Remarque 2.5.1 *[18] on voit que pour tout* $\lambda \in \Lambda_\omega$ *on a :*

$$ImR(\lambda, A) = ImR_\lambda \subseteq D(A)$$

Définition 2.5.1 *[18] L'opérateur :*

$$R_\lambda : X \longrightarrow X$$
$$R_\lambda x = \int_0^\infty \exp(-\lambda.t).S(t)xdt, \lambda \in \Lambda_\omega$$

s'appelle la transformée de Laplace du semi-groupe $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \in Sg(M,\omega)$

Remarque 2.5.2 *[18] Soient* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \in Sg(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Alors nous avons :*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} | Re(\lambda) > \omega\} \subset \rho(A)$$
$$\rho(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} | Re(\lambda) \leq \omega\}$$

Lemme 2.5.1 *[18] Soient* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \in Sg(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Alors pour tout* $\lambda \in \Lambda_\omega$ *et* $t > 0$ *, l'application :*

$$B_\lambda(t) : X \longrightarrow X$$
$$B_\lambda(t)x = \int_0^t \exp(\lambda(t-s)).S(s)xds$$

définit un opérateur linéaire borné sur X *vérifiant les propriétés suivantes :*

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)x = \exp(\lambda.t)x - S(t)x, \forall x \in X$$

et :

$$B_\lambda(t)(\lambda I - A)x = \exp(\lambda.t)x - S(t)x, \forall x \in D(A)$$

De plus : $B_\lambda(t)S(t) = S(t)B_\lambda(t)$.

On peut formuler maintenant le théorème spectral pour C_0-semi-groupes.

Théorème 2.5.2 *[18] Soient* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \in Sg(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Alors :*

$$\exp(t.\sigma(A)) = \{\exp(\lambda.t) | \lambda \in \sigma(A)\} \subseteq \sigma(S(t)), \forall t \geq 0.$$

2.5.1 Théorème de Hille-Yosida

Théorème 2.5.3 *[18] Un opérateur linéaire :*

$$A : D(A) \subset X \longrightarrow X$$

est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \in Sg(M,\omega)$ *si et seulement si :*

1. *A est un opérateur fermé et $D(A)$ est dense dans X (i.e : $\overline{D(A)} = X$)*

2. *il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a :*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(Re(\lambda) - \omega)^n} \ , \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Chapitre 3

Semi-groupes intégrés

Nous avons vu dans le chapitre précédent que si A est dense , il génère un C_0-semi-groupe, dans le cas où A n'est pas dense , nous allons voir une nouvelle famille d'opérateurs linéaires ,ce sont les semi-groupes intégrés.

3.1 Définition

Définition 3.1.1 *[15] On appelle semi-groupe intégré sur X une famille* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \subset B(X)$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $S(0) = 0$;
2. *l'application* $[0, \infty) \ni t \longmapsto S(t) \in B(X)$ *est fortement continue ;*
3. *pour tous* $t, s \geq 0$ *on a :*

$$S(t)S(s) = \int_0^t [S(\tau + s) - S(\tau)]d\tau.$$

Remarque 3.1.1 *[15] Soit* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$ *un semi-groupe intégré. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *, nous désignerons par* C^n *l'ensemble*

$$\{x \in X | S(.)x \in C^n([0, \infty), X)\}$$

avec la convention $C^0 = X$.

Alors la propriété (3) de la définition 3.1.1 est équivalente à

$$S(t)x \in C^1$$

et

$$S'(r)S(t)x = S(r + t)x - S(r)x, \forall r, t \geq 0$$

pour tout $x \in X$. *De plus, nous avons*

$$S(t) : C^n \longrightarrow C^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } t \geq 0$$

et

$$S'(t) : C^n \longrightarrow C^n, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } t \geq 0.$$

Proposition 3.1.1 *[15] Soit* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$ *un semi-groupe intégré. Alors :*

1. *Pour tout* $x \in C^1$ *on a :*
$$S(r)S'(t)x = S(r+t)x - S(t)x, \forall r, t \geq 0\,;$$
2. *Pour tout* $x \in C^1$ *on a :*
$$S'(t)x = S''(0)S(t)x + S'(0)x, \forall t \geq 0\,;$$
3. *Pour tout* $x \in C^2$ *on a :*
$$S''(0)S(t)x = S(t)S''(0)x, \forall t \geq 0.$$

Exemple 3.1.1 *[15] Soit* $\Big(T(t)\Big)_{t\geq 0} \in Sg(M, \omega)$. *Alors la famille* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \subset B(X)$

$$S(t) = \int_0^t T(s)ds$$

est un semi-groupe intégré sur X.

3.2 Propriétés générales

Définition 3.2.1 *[15] On appelle espace dégénéré du semi-groupe intégré* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \subset B(X)$ *l'ensemble :*

$$N = \{x \in X | S(t)x = 0, \forall t \geq 0\}.$$

Remarque 3.2.1 *[15] N est un sous-espace fermé de* C^1.

Proposition 3.2.1 *[15] Soit* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \subset B(X)$ *et*

$$N_1 = \{x \in C^1 | S'(0)x = 0\}.$$

Alors N=N_1.

Définition 3.2.2 *[15] On dit que le semi-groupe intégré* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \subset B(X)$ *est non-dégénéré si* $N = \{0\}$ *. Dans le cas contraire, on dit que* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \subset B(X)$ *est un semi-groupe intégré dégénéré.*

Remarque 3.2.2 *[15] Le semi-groupe intégré* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \subset B(X)$ *est non-dégénéré si pour tout* $t \geq 0, S(t)x = 0$ *implique* $x = 0$.

Proposition 3.2.2 *[15] Un semi-groupe intégré* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \subset B(X)$ *est non-dégénéré si et seulement si on a* $S'(0)x = x$ *pout tout* $x \in C^1$.

Théorème 3.2.1 *[15] Soit* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \subset B(X)$ *un semi-groupe intégré non-dégénéré. Alors* $\Big(S'(t)\Big)_{t\geq 0}$ *est un* C_0*-semi-groupe sur* C^1.

3.2.1 Le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré

Définition 3.2.3 *[15] On appelle générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \subset B(X)$ *un opérateur linéaire*

$$A : D(A) \subset X \longrightarrow X$$

défini par : $x \in D(A)$ *et* $Ax = y$ *si et seulement si pour tout* $t \geq 0$ *on a :*

$$S(t)x - tx = \int_0^t S(r)ydr.$$

[15] On voit que $x \in D(A)$ et $Ax = y$ si et seulement si $x \in C^1$ et

$$S'(t)x - x = S(t)y, \forall t \geq 0$$

Remarque 3.2.3 *[15] Si (A,D(A)) est le générateur infinitésimal d'un semi -groupe intégré non-dégénéré* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$ *alors D(A) est non dense.*

Proposition 3.2.3 *[15] Soit* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \subset B(X)$ *. Alors*

$$C^2 \subseteq D(A) \subseteq C^1$$

et

$$Ax = S''(0)x, \forall x \in C^2.$$

Proposition 3.2.4 *[15] Soit* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \subset B(X)$ *. Alors A est un opérateur fermé.*

Proposition 3.2.5 *[15] Soit* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré* $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \subset B(X)$ *. Pour tout* $x \in X$ *il résulte* $\int_0^t S(\sigma)xd\sigma \in D(A)$ *et*

$$A\int_0^t S(\sigma)xd\sigma = S(t)x - tx, \forall t \geq 0.$$

Lemme 3.2.1 *[15] Soient $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \subset B(X)$ et $\varphi : [0,\infty) \longrightarrow X$ une application continue tel que :*

$$\int_0^t \varphi(s)ds \in D(A), \forall t \geq 0.$$

Si

$$A\int_0^t \varphi(s)ds = \varphi(t) \in D(A), \forall t \geq 0,$$

alors $\varphi(t) = 0$, pour tout $t \geq 0$.

Théorème 3.2.2 *[15](l'unicité de l'engendrement]) : Soient $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$ et $\Big(U(t)\Big)_{t\geq 0}$ deux semi-groupes intégrés ayant pour générateur le même opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$. Alors pour tout $t \geq 0$ on a $S(t) = U(t)$.*

3.3 Propriétés spectrales des semi-groupes intégrés

3.3.1 Semi-groupes intégrés non-dégénéré exponentiellement bornés

Soit $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \subset B(X)$ un semi-groupe intégré.

Définition 3.3.1 *[15] On dit que le semi-groupe intégré $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \subset B(X)$ est exponentiellement borné s'il existe $M \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\|S(t)\| \leq M.\exp(\omega.t).$$

Remarque 3.3.1 *[15] Il existe des semi-groupes intégrés qui ne sont pas exponentiellement bornés. Pour un semi-groupe intégré exponentiellement borné $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \subset B(X)$, l'intégrale de Laplace*

$$R(\lambda) = \lambda\int_0^\infty \exp(-\lambda.t)S(t)dt$$

existe pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$. Si, en plus, le semi-groupe est non-dégénéré, alors on peut montrer le théorème suivant.

Théorème 3.3.1 *[15] Soient $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire fermé et $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \subset B(X)$ une famille fortement continue pour laquelle il existe $M \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\|S(t)\| \leq M.\exp(\omega.t)$$

et ayant l'espace non-dégénéré $N = \{0\}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *la famille $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \subset B(X)$ est un semi-groupe intégré non-dégénéré exponentiellement borné ayant pour générateur l'opérateur A ;*

2. *$\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a*

$$R(\lambda, A) = \lambda\int_0^\infty \exp(-\lambda.t)S(t)dt.$$

3.3.2 Le théorème de Arendt

Dans la théorie des semi-groupe intégré, une grande importance revient à un théorème de représentation de la transformée de Laplace pour une fonction avec des valeurs réelles, montré par Widder en 1934.

Théorème 3.3.2 *[15] (Widder) Soient $r : \Lambda_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $M \geq 0$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *$r \in C(\Lambda_0)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_0$ on a*
$$|r^{(n)}(\lambda)| \leq \frac{M.n!}{(Re(\lambda))^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$$
2. *il existe une fonction $f \in L^\infty[0,\infty)$ avec la propriété $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \geq 0$, tel que*
$$r(\lambda) = \int_0^\infty \exp(-\lambda.t) f(t) dt, \forall \lambda \in \Lambda_0.$$

Théorème 3.3.3 *[15] (Widder–Arendt) Soient X un espace de Banach, $a > 0$, $R : \Lambda_a \longrightarrow X$ une fonction, $M \geq 0$ et $\omega \in (-\infty, a]$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *$R \in C^\infty(\Lambda_a, X)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_a$ on a*
$$\|R(\lambda)^{(n)}\| \leq \frac{M.n!}{(Re(\lambda) - \omega)^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}$$
2. *il existe une fonction $F : [0,\infty) \longrightarrow X$ avec les propriétés*
$$F(0) = 0$$
et
$$\|F(t+h) - F(t)\| \leq M.\exp(\omega(t+h)).h, \forall t, h \geq 0 \ ,$$
tel que pour tout $\lambda \in \Lambda_a$ on a
$$R(\lambda) = \lambda \int_0^\infty \exp(-\lambda.t) F(t) dt.$$

Théorème 3.3.4 *[15] (Arendt) Un opérateur linéaire*

$$A : D(A) \subset X \longrightarrow X$$

est le générateur d'un semi-groupe intégré non-dégénéré $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0} \subset B(X)$ pour lequel il existe $M \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|S(t+h) - S(t)\| \leq M.\exp(\omega(t+h)).h, \forall t, h \geq 0$$

si et seulement si

1. *A est un opérateur fermé ;*

2. *il existe $a \geq \max\{0, \omega\}$ tel que $\Lambda_a \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_a$ on a*
$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(Re(\lambda) - \omega)^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chapitre 4

Application

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques exemples sur les applications des semi-groupes pour résoudre quelques équations et inclusions différentielles fonctionnelles .

4.1 Résolution des équations et inclusions différentielles fonctionnelles

4.1.1 L'opérateur A est à domaine dense

1) Étant donnés un espace de Banach X, un élément u_0 de X , une application f définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans X , on considère le problème de Cauchy suivant :

Trouver une fonction u définie pour $t \geq 0$, à valeurs dans X telle que :

$$\begin{cases} u'(t) - Au(t) = f, t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Où u' désigne la dérivée de u par rapport à t.

On suppose que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$.

Définition 4.1.1 *[16]*

On dit que u est solution forte de (4.1) si :

1. *u une fonction continue de* $[0, +\infty[$ *à valeurs dans D(A) muni de la norme du graphe .*
2. *u est continument dérivable de* $[0, +\infty[$ *à valeurs dans X.*
3. *u vérifie l'équation (4.1).*

Théorème 4.1.1 *[16] (Unicité de la solution forte)*

Si u est solution forte de (4.1) elle est donnée par :

$$u(t) = S(t).u_0 + \int_0^t S(t-s).f(s)ds$$

donc est unique.

Définition 4.1.2 *[16]*

On dit que u est solution faible de (4.1) si :

1. *u est une fonction continue de* $[0, +\infty[$ *à valeurs dans X.*

2. *Il existe une suite de fonctions* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *:*
   a. Continues de $[0, +\infty[$ *à valeurs dans D(A) muni de la norme de graphe.*
   b. Continument dérivables de $[0, +\infty[$ *à valeurs dans X.*
   telle que :

   $$\begin{gathered}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } u. \\ (u'_n - Au_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } f.\end{gathered}$$

   (Ces deux convergences étant uniformes sur $[0, T], \forall T > 0$*)*
   et $u_n(0)$ *converge vers* u_0 *, dans X.*

Théorème 4.1.2 *[16] (existence)*
Soient u_0 *un élément de X et f une fonction continue de* $[0, +\infty[$ *à valeurs dans X. Alors u définie par :*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

est solution faible de (4.1) et elle est unique.

2) **l'inclusion différentielle** :

On considère l'inclusion différentielle suivante :

$$\begin{cases} u'(t) - Au(t) \in F(t, y(t)), t \in J = [0, b] \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Définition 4.1.3 *[1][2][3] L'ensemble*

$$S_{F,y} = \{v \in L^1(J, X) : v(t) \in F(t, y_t)\}$$

est appelé l'ensemble des sélections de F.

Définition 4.1.4 *[1][2][3] Une fonction $u : [0, b] \to X$ est appelée solution faible de problème (4.2) si pour tout $t \in [0, b]$ et $\exists v(.) \in S_{F,y}$, et elle est de cette forme :*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)v(s)ds$$

Exemple 4.1.1 *[1][2][3]*

Comme application de notre résultats, on considère l'équation différentielle fonctionnelle suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} z(t,x) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} z(t,x) + Q(t, z(t,x)), x \in [0,\pi], t \in [0,b] \\ z(t,0) = z(t,\pi), t \in [0,b] \\ z(0,x) = \phi(0,x), x \in [0,\pi] \end{cases} \tag{4.3}$$

Où Q est une fonction à valeurs compactes.

Soient $y(t) = z(t, .), t \in [0, b]$
et

$f(t, y(t))(x) = Q(t, z(t, x)), t \in [0, b], x \in [0, \pi]$

Prend $X = L^2[0, \pi]$, et on définit l'opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ par : $Aw = w''$ avec domaine $D(A) = \{w \in X, w'$ est absolument continue, $w'' \in X, w(0) = w(\pi) = 0\}$

et

$$Aw = \sum_{n=0}^{\infty} n^2(w, w_n)w_n, w \in D(A)$$

où (.,.)est le produit scalaire dans $L^2[0, \pi]$ et $w_n(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(ns).n = 1, 2$: est l'ensemble orthogonal des vecteurs propres dans A. Il est clair que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique T(t),$t \in [0, b] \in X$ donné par :

$$T(t)w = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2.t)(w, w_n)w_n, w \in X$$

Avec des conditions supplémentaires sur Q, on peut voir que le problème (4.3) est pour formulation abstraite :
$u' - Au = f$ avec $u(0) = u_0$ et qui peut admettre au moins une solution faible.

4.1.2 L'opérateur A est à domaine non dense

Si A est à domaine non dense alors il génère un semi-groupe intégré $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$

1) Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), t \in J = [0, b] \\ u(0) = u_0 \in X. \end{cases} \tag{4.4}$$

Alors nous avons le suivant :[1][2][3]

Soit $f : J \to X$ une fonction continue, $u_0 \in \overline{D(A)}$, alors le problème (4.3) admet une solution $u : J \to X$: une fonction continue telle que :

$$u(t) = S'(t)u_0 + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)f(s)ds.$$

2) **L'inclusion différentielle** :

Soit

$$\begin{cases} u'(t) - Au(t) \in F(t), t \in J = [0, b] \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{4.5}$$

Une inclusion différentielle telle que F une fonction donnée

On dit que u est une solution intégrale de problème (4.4) si : [1][2][3]

1. $u : J \to X$
2. $\displaystyle\int_0^t u(s)ds \in D(A)$ pour $t \in J$
3. $u(0) = u_0$, pour tout $t \in [0, b]$ il existe $v \in L^1(J, X)$ tel que $v(t) \in F(t)$

et

$$u(t) = S'(t)u_0 + \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)v(s)ds.$$

Exemple 4.1.2 *[1][2][3]*

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}z(t,x) \in \frac{\partial^2}{\partial x^2}z(t,x) + [Q_1(t, z(t,x)), Q_2(t, z(t,x))], x \in [0,\pi], t \in [0,b] \\ z(t,0) = z(t,\pi) = 0, t \in [0,b] \\ z(0,x) = \phi(0,x) \end{cases} \tag{4.6}$$

On suppose que : pour tout $t \in [0,b]$, $Q_1(t,.)$ est semi-continue inférieurement (i.e l'ensemble : $\{y \in \mathbb{R} : Q_1(t,y) > \mu\}$ est un ouvert pour tout $\mu \in \mathbb{R}$)

et que $Q_2(t,.)$ est semi-continue supérieurement (i.e l'ensemble : $\{y \in \mathbb{R} : Q_1(t,y) < \mu\}$ est un ouvert pour tout $\mu \in \mathbb{R}$)

Soient : $y(t)(x) = z(t,x), t \in [0,b], x \in [0,\pi]$

et

$F(t,\phi)(x) = [Q_1(t,\phi(0,x)), Q_2(t,\phi(0,x))], x \in [0,\pi]$

et $\phi(0)(x) = \phi(0,x)$

On considère : $X = C([0,\pi])$*, l'espace de Banach des fonctions continues sur* $[0,\pi]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*. On définit l'opérateur linéaire* A *par :*

$$Az = \frac{\partial^2}{\partial x^2} z$$
$$D(A) = \{z \in C([0,\pi]) : z(0) = z(\pi) = 0, \frac{\partial^2}{\partial x^2} z \in C([0,\pi])\}$$

Et on a :

$$\overline{D(A)} = C_0([0,\pi]) = \{v \in C([0,\pi]) : v(0) = v(\pi) = 0\} \neq C([0,\pi])$$

il s'ensuit que A *génère un semi-groupe intégré* $(S(t))_{t\geq 0}$ *et que* $\|S'(t)\| \leq \exp(-\mu.t)$ *pour* $t \in [0,b]$ *et* $\mu > 0$ *, et que* A *satisfait le condition de Hille-Yosida*

Avec des conditions supplémentaires sur Q_1, Q_2 *le problème (4.6) se met sous la forme* $u' - Au \in F$ *avec* $u(0) = u_0$ *et qui peut admettre une solution intégrale.*

Bibliographie

[1] N. Abada, R.P. Agarwal,M. Benchohra and **H. Hammouche**, Existence results for non-densely impulsive semilinear functional differential equations with state-dependent delay, *Asian Europian J.Math.* Vol. 1, No. 4 (2008) 449-468.

[2] N. Abada, M. Benchohra and **H. Hammouche**, Existence and controllability results for impulsive partial functional differential inclusions, *Nonlinear Anal.***69** (2008) 2892-2909.

[3] N. Abada, M. Benchohra and **H. Hammouche**, Existence and controllability results for nondensely defined impulsive semilinear functional differential equations, *Differ. Integral Equations* **21** (5-6) (2008), 513-540.

[4] Arendt, W. Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems. *Israel J. Math.*, (3)59(1987), 327-352.

[5] article extrait de l'Internet : analyse fonctionnelle et théorie spectrale ,MT404, Année (2001-2002)

[6] article extrait de l'Internet : Master Mathématiques ,Analyse spectrale,chapitre 4

[7] article extrait de l'Internet : Chapitre 5, Opérateurs dans les espaces de Hilbert. Notions d'opérateur adjoint,(18 mars 2008)

[8] Feller, W. The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations. *Ann. Math.*, (3)55(1952), 468-519.

[9] Feller, W. On the generation of unbounded semigroups of bounded linear operators. *Ann. of Math.*, 58(1953), 166-174.

[10] Hille, E., Phillips, R.S. Functional Analysis and Semi-Groups. *A.M.S., Providence, Rhode Island*, (1957).

[11] Hille, E. Notes on linear transformation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 39(1936), 131-153.

[12] Hille, E. Functional Analysis and Semi-Groups. *A.M.S., New York*, (1948).

[13] Hille, E. A note on Cauchy's problem. *Ann. Soc. Pol. Math.*, 25(1952), 56-68.

[14] Lecturas Matemàticas Volumen 31 (2010), pàginas 99145 ISSN 0120(1980), Autour des propriétés spectrales des semi-groupes,*Ludovic Dan Lemle Université Claude Bernard Lyon1, 69622 Villeurbanne, France Université "Politehnica" de Timisoara, 331128 Hunedoara, Roumanie*

[15] Lecturas Matemàticas Volumen 26 (2005), pàginas 27–88, Une étude comparative concernat les semi-groupes de classe C0 et les semi-groupes intégrés, *Ludovic Dan Lemle Université Blaise Pascal, Aubiére, France Faculté d'Ingénierie, Université Politehnica, Hunedoara, Roumanie*

[16] livre de : "semi-groupes linéaires", professeur "Amar El Kolli", (1991)

[17] mémoire sur Introduction à la Topologie ,Licence de Mathématiques ,*Université de Rennes 1 Francis Nier* ,Dragos Iftimie

[18] MéMOIRE DE RECHERCHE de Mathématiques Pures intitulé , "LA FORMULE DE LIE - TROTTER POUR LES SEMI-GROUPES FORTEMENT CONTINUS",par Ludovic Dan LEMLE sous la direction de Gilles CASSIER,(04 juillet 2001)

[19] MEMOIRE Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en Mathématiques,Thème : Quelques méthodes de régularisation de problèmes mal-posés,*université de constantine*,(04-07-2011)

[20] Miyadera, I. Generation of strongly continuous semi-groups of operators. *Tohoku Math. J.*, 4(1952), 109-114.

[21] Miyadera, I. On the representation theorem by Laplace transformation of vector-valued functions. *Tohoku Math. J.*, 8(1956), 170-180.

[22] Phillips, R.S. On the generation of semi-groups of linear operators. *Pacific J.Math.*, 2(1952), 393-415.

[23] Widder, D.V. The inversion of the Laplace integral and the related moment problem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 36(1934), 107-200.

[24] Widder, D.V. An introduction to Transform Theory. *Academic Press, New York*, (1971).

[25] Yosida, K. On the differentiability and the representation of one-parameter semi-groups of linear operators. *J. Math. Soc. Japan*, 1(1948), 15-21.

[26] Yosida, K. Lectures on Semi-group Theory and its application to Cauchy problem in Partial Differential Equations. *Tata Institute of Fundamental Research, Bombay*, (1957).

[27] Zaidman, S. Sur un théorème de I. Miyadera concernant la représentation des fonction vectorielles par des intégrales de Laplace. *Tohoku Math. J.*, 1(1960), 12-47.