

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur Et de La Recherche
Scientifique



Université de Ghardaïa

N° d'ordre :
N° de série:

Faculté des Sciences et Technologie
Département des Sciences et Technologie

Projet de fin d'étude présenté en vue de l'obtention du diplôme de

LICENCE

Domaine : Science et Technologie

Filière : Génie électrique

Spécialité : Maintenance en instrumentation industrielle

THEME:

Etude et modélisation du pendule inversé

PAR :

- ✓ Ouladyahiayahia
- ✓ Moulaylachdarchiech

Jury:

M^r: A.BENCHAABAN Maitre Assistant A Univ. Ghardaïa

Encadreur

M^r:.....Maitre Assistant A Univ. Ghardaïa

Examineur

ANNEE UNIVERSITAIRE: 2013/2014

ملخص

انصب اهتمامنا في هذه المذكرة على دراسة ونمذجة نظام لا خطي غير مستقر في حالة الحلقة المفتوحة و هو النابض المقلوب. بداية نعطي بعض المفاهيم الاساسية و تعريفات حول انظمة النوابض المقلوبة وبالنسبة لموضوعنا هذا نأخذ نوعا واحدا من النوابض و هو النابض المقلوب البسيط (بذراع واحدة). بعدها نقوم بنمذجة هذا النظام على شكل معادلات الكلمات المفتاحية: تفضلية اعتمادا على علاقات اولر لاقرونج .

نظام لا خطي النابض المقلوب بنمذجة.

Résumé

Dans le présent travail, nous nous intéressons à l'étude et la modélisation d'un système sous actionné, non linéaire et instable en boucle ouverte : le pendule inversé. D'abord, nous donnons quelques notions de bases et de généralités sur les systèmes de pendules inversés. Dans notre cas, nous prenons un seul type de pendule inversé, c'est le pendule inversé simple (un seul bras). Ensuite, nous allons développer son modèle dynamique qui sera présenter sous forme d'équations différentielles en se basant sur le formalisme d'Euler-Lagrange.

Mots clefs : système non linéaire , le pendule inversé, modélisation.

Abstract

In this work, we focus on the study and modeling of a system underpowered, non-linear and open-loop unstable: the inverted pendulum. First, we give some basic notions and general systems of inverted pendulums. In our case, we take one type of inverted pendulum is inverted simple pendulum (one arm). Then we will develop a dynamic model that will be in the form of differential equations based on the Euler-Lagrange formalism.

Keywords: nonlinear system, the inverted pendulum model

Dédicaces

Je dédie ce travail à mes parents, qui ont employés tous leurs moyens et efforts, pour m'élever, pour me former, et pour me faire arriver à ce niveau. A tous les professeurs qui ont contribués à ma formation du primaire a l'université. Je dédie aussi ce travail à mes frères et soeurs, A tous ceux que j'aime et qui m'aiment, A ma famille et à mes amis.

yahia

A ma tendre mère et à mon cher père.

A tous ceux que j'aime et qui m'aiment.

A ma famille et à mes amis.

chiech



Remerciement

Nous tenons à remercier en premier lieu **ALLAH**, le tout puissant, qui nous a donné le courage et la volonté pour bien mener ce modeste travail.

Ainsi , nous remercions en premier lieu **Mr A.Benchaabane**, notre encadreur, pour son aide et disponibilité tout au long de ce projet. Nous tenons à remercier toute personne ayant contribué de près ou de loin a l'aboutissement de nos efforts.

Merci a nos professeur et formateurs du primaire à l'université.

Liste des Figures

Figure. I .1 : Descriptif du banc d'essai .

Figure. I .2 : Configuration des signaux du capteur à 2 bits .

Figure. I .3 : synoptique de banc d'essais du Pendule inversé .

Figure. I .4 : Pendule inversé simple rotatif en action.

Figure. I .5 : Double pendule inversé.

Figure. I .6 : Double pendule inversé couplé .

Figure . I.7 : Double pendule inversé parallèle.

Figure. I.8 : double pendule inversé parallèle couplé.

Figure. I.9 : Calcul des contraintes.

Figure. I.10 : Le robot BIPED et sa représentation 3D.

Figure. I.11 : Le robot JOE et sa représentation 3D.

Figure. II.1 : Schéma du Pendule Inversé simple .

Figure. II.2 Pendule inversé simple.

Figure. II.3: Résultats de simulations en boucle ouverte sans frottements.

Figure. II.4 : Résultats de simulations en boucle ouverte.

Figure. II.5: Résultats de simulations en boucle ouverte avec frottements.

Sommaire

Introduction générale	1
 Chapitre 1 : Notions et Généralités sur les Pendules Inversés	
Introduction	4
I.1 Constitution d'un banc d'essai	4
I.1.1. La chaîne d'actionneurs.....	5
I.1.2. La chaîne d'instrumentation.....	7
I.2. Les différents types de pendules inversés.....	9
I.2.1. Le pendule inversé simple.....	9
I.2.2. Le double pendule inversé en cascade.....	11
I.2.3. Le double pendule inversé en cascade couplé par deux ressort.....	12
I.2.4. Le double pendule inversé parallèle.....	12
I.2.5. Le double pendule inversé parallèle couplé par un ressort.....	13
I.3. Intérêt de l'étude d'un pendule inversé.....	13
I.3.1. En médecine.....	13
I.3.2. En robotique.....	14
I.3.4. Dans la recherche.....	16
Conclusion.....	16
 Chapitre 2 : Modélisation d'un Simple Pendule Inversé	
Introduction.....	18
II.1. le pendule inversé simple.....	18
II.2. Modélisation : application du formalisme Euler Lagrange.....	19
II.3. La représentation d'état.....	22

II.3.1. Représentation d'états sans frottements.....	23
II.4. Simulations en boucle ouverte.....	25
II.4.1. Simulation du système libre.....	25
II.4.2. Simulation du système excité.....	26
II.4.3. Simulation du système excité avec frottement.....	28
Conclusion.....	29

INTRUDICION GENERAL :

Nous avons tous essayé au moins une fois de maintenir en équilibre un bâton de bois sur notre index. Afin d'éviter la chute de celui-ci, nous devons déplacer notre doigt de façon à contrecarrer en permanence son basculement. C'est exactement le même principe de celui du pendule inversé que nous allons étudier . Alors que cet exercice semble assez simple et instinctif pour l'homme, il sera nécessaire de définir des stratégies précises pour assurer le maintien automatisé du pendule inversé. Bien évidemment, les performances obtenues grâce à un système automatisé sont de loin supérieures à celles qui seraient obtenues par l'homme.

Etant donné que le pendule inversé est un système non linéaire, instable en boucle ouverte et sous actionné, il constitue une importante plate forme de validation des techniques de commande moderne développées théoriquement .En effet, ce système est largement utilisé dans les laboratoires de recherche dans le monde et beaucoup de résultats sont disponibles dans la littérature concernant ses applications [1]

Le travail présenté dans ce mémoire rentre dans ce cadre. Ainsi, Plusieurs lois de commande seront synthétisées et appliquées sur un pendule inversé. Ce dernier est constitué d'un chariot mobile en translation supportant un pendule en rotation libre, cette plate-forme doit permettre une rotation du pendule de 360° autour de son articulation.

Le mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous donnons une description générale d'un exemple d'un banc d'essai d'un pendule inversé. Ensuite, nous donnons quelques notions de base sur les systèmes de pendules inversés. Ainsi différents types de pendules inversés seront décrits en expliquant leur fonctionnement et spécifiant leur domaine d'application.

Dans le second chapitre, nous élaborons le modèle mathématique d'un pendule inversé en nous basant sur le formalisme d'Euler-Lagrange et en négligeant les frottements. Ensuite, nous présentons le système dans l'espace d'état sans et avec frottements pour l'utilisation en simulations. Les résultats en boucle ouverte seront donnés afin de valider le modèle et montrer l'instabilité du système.

Enfin, Nous finissons notre travail par une conclusion générale dans laquelle est présentée notre méthodologie de travail, ainsi qu'une suggestion pour les travaux à venir sans oublier les difficultés rencontrées.

Chapitre I:Notions et Généralités sur les Pendules Inversés

Introduction

Avant d'entamer notre étude du pendule inversé simple (un seul bras), nous allons donner une description générale d'un exemple d'un banc d'essai d'un pendule inversé simple. Puis nous citerons quelques types de pendules inversés existants, ainsi que montrer leur intérêt en mentionnant quelques applications dans différents domaines.

I.1 Constitution d'un banc d'essai [2]

Nous considérons jusqu'à présent que la grandeur de commande de notre système était la force appliquée sur le chariot. Cette force sera dans les faits fournie par une chaîne d'actionneurs constituée de :

- une alimentation à tension continue réglable analogiquement
- un moteur à courant continu à aimants permanents
- une vis sans fin transformant le couple du moteur en une force appliquée sur le chariot

Nous établirons dans ce chapitre les équations régissant le comportement de ces différents éléments de transmission de la puissance. Nous combinerons celles-ci avec celles obtenues pour le chariot et son pendule afin de créer un nouveau système global dont la grandeur de réglage sera la consigne de courant envoyée à l'alimentation.

Nous introduirons d'autre part les différents capteurs de mesure présents sur le dispositif, à savoir deux encodeurs linéaires mesurant la position $x(t)$ du chariot et la position angulaire $\Theta(t)$ du pendule ainsi qu'une dynamo tachymétrique permettant de déterminer la vitesse de déplacement $\dot{x}(t)$ du chariot. Des interrupteurs de fin de course seront aussi connectés, à la fois pour assurer l'intégrité du procédé et pour faciliter son initialisation.

Le schéma récapitulatif de l'ensemble des constituants est présenté sur la figure I.1

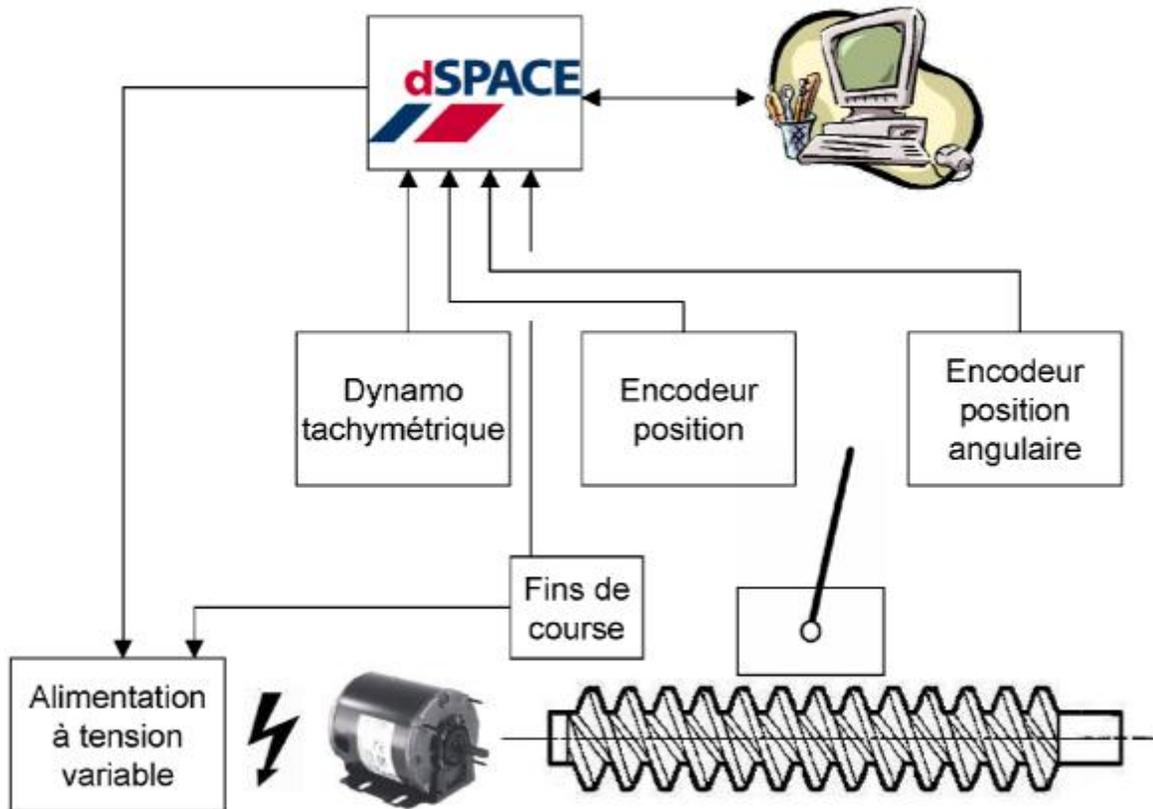


Figure : I.1 : Descriptif du banc d'essai

I.1.1 La chaîne d'actionneurs

Dans cette section, nous parcourons plus en détails la chaîne de transmission de la puissance. Cette chaîne commence avec l'alimentation à courant continu et s'achève avec le système constitué du chariot et de son pendule.

Nous verrons donc comment l'énergie électrique du réseau est transformée en énergie cinétique et potentielle au niveau de l'application finale.

I.1.1.1 L'alimentation

Nous disposons d'un variateur triphasé *WNTC 4105* de marque *CEGELEC*. Cependant, l'expérience nous a montré que ce varia indiqué pour l'application désirée et il a fallu nous procurer une autre alimentation, un hacheur *Junus JSP-180-10* de marque *Copley Control*. Nous établirons donc tout d'abord pour quelles raisons le comportement du variateur n'était pas satisfaisant, avant de décrire plus en détails la nouvelle alimentation et son fonctionnement. Ce dernier n'était pas

• Le variateur WNTC 4105

La tension de sortie du variateur est réalisée à partir d'un pont redresseur réversible constitué de thyristors commandés pour ne laisser passer qu'une fraction réglable des alternances du réseau électrique triphasé. Ce variateur peut être commandé aussi bien en tension qu'en courant et possède donc une boucle interne de régulation en courant.

Ce type de variateur est prévu pour être alimenté par une tension triphasée allant de 220 V à 440 V et le courant nominal qu'il peut fournir est quant à lui de 105 A. Cependant, et nous y reviendrons par la suite, le moteur utilisé possède une tension d'alimentation maximale de 140 V et son courant d'armature ne peut dépasser les 13 A de façon transitoire et 2,5 A de façon continue. Le variateur est donc largement surdimensionné et nous en verrons les conséquences.

En effet, nous avons pu constater expérimentalement en imposant un échelon de consigne de courant que le chariot ne se mettait pas instantanément en mouvement. On peut lire sur la figure 3.2 la courbe de la position du chariot en réponse à un échelon de consigne de courant de 10 A au temps $t = 0,2$ s. N'oublions pas que, suite aux limitations du moteur, un tel courant ne peut être maintenu de façon continue.

On remarque sur cette courbe l'existence d'un temps mort d'environ 75 ms entre l'application de l'échelon et les premières variations de la position du chariot. La présence de ce temps mort est un phénomène systématique dans la mesure où sa valeur reste sensiblement la même lors d'essais identiques.

• Le hacheur Junus JSP-180-10

Comme son nom l'indique, ce hacheur supporte une alimentation continue de 180 V et fournit un courant pouvant atteindre 10 A. On remarque que ces valeurs sont du même ordre de grandeur que les valeurs nominales du moteur.

Cette alimentation peut aussi être commandée en courant. Une interface sur PC permet par ailleurs de configurer et d'optimiser automatiquement la boucle de régulation pour qu'elle soit adaptée au moteur qui lui est raccordé. Le régulateur utilisé est composé d'un terme proportionnel et d'un terme intégrateur (PD).

I.1.1.2 Le moteur

Le moteur utilisé pour entraîner la vis sans fin est un moteur à courant continu *MT30E4 – 52* de la marque *SEM*. L'armature de ce moteur peut être alimentée par une tension continue d'amplitude maximale de 140 V, tandis que son circuit d'excitation est formé d'aimants permanents.

I.1.1.3 La vis sans fin

La vis sans fin permet de transformer le mouvement de rotation de l'arbre moteur en un mouvement de translation du chariot. Si l'on néglige les pertes intervenant à ce niveau, la conservation de la puissance motrice nous apporte la relation:

$$Fm(t) \dot{x}(t) = Cm(t)w(t)$$

I.1.2 La chaîne d'instrumentation**I.1.2.1 L'organe de traitement**

L'organe de traitement sera dans notre cas un ordinateur muni du logiciel *MATLAB* et de son environnement temps réel *Simulink*. L'ordinateur est interfacé au système physique par le biais d'une carte d'acquisition *Dspace DS1102*. Cette carte possède des entrées et sorties analogiques 0 - 10 V ainsi que des entrées numériques à impulsions.

Sous l'environnement *Simulink*, les différentes entrées et sorties sont normalisées de manière à ne jamais dépasser la valeur ± 1 . Il faudra alors considérer un facteur 10 pour retrouver la valeur de la tension présente aux entrées analogiques de la carte *dSPACE* ou souhaitée à ses sorties.

Les entrées numériques sont utilisées pour recevoir les différents signaux provenant d'encodeurs à impulsions. Le résultat du traitement des signaux de chaque encodeur est un signal numérique compris entre -1 et 1 codé en 24 bits, 1 bit pour le signe et 23 bits pour l'amplitude.

I.1.2.2 Mesure de la position angulaire du pendule

Le capteur de position angulaire du pendule est un encodeur rotatif à impulsions. Ce type de capteur est généralement très précis et présente une très bonne immunité au bruit de par le caractère numérique de la mesure.

La plaque signalétique de cet encodeur nous indique une résolution de 1024 impulsions par tour. Dans les faits, il fournit deux signaux A et B évoluant en fonction de l'angle $\theta(t)$ comme indiqué sur la figure 1.3.

Les signaux A et B forment donc un compteur 2 bits. Ceci permet à la carte *dSPACE*, en réactualisant la mesure de l'angle $\theta(t)$ lors de chaque flanc montant ou descendant de A ou de B , de quadrupler la résolution de l'encodeur.

La résolution réelle de ce capteur est donc de 4096 impulsions par tour de pendule, ce qui correspond à un pas de quantification de $0,0879^\circ$. Cette valeur semble largement suffisante pour l'application.

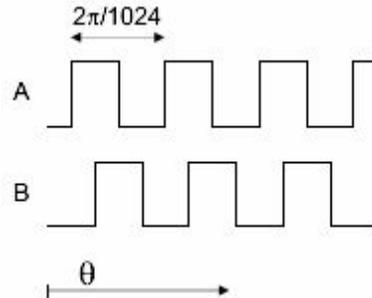


Figure I.2: Configuration des signaux du capteur à 2 bits

I.1.2.3 Mesure de la position du chariot

La position du chariot est mesurée indirectement par le biais d'une mesure de la rotation de l'arbre moteur. Le capteur effectuant cette mesure est tout à fait similaire à celui utilisé pour la mesure de la position angulaire du pendule, à la différence près qu'il présente une résolution indiquée de 1000 impulsions par tour. En rappelant que la vis sans fin présente un pas de 2 cm, la résolution réelle du capteur est donc de $4000/0,02 = 200\ 000$ impulsions par mètre, ce qui correspond à un pas de quantification de $5\ \mu\text{m}$. Là encore, la valeur obtenue semble plus que suffisante.

I.1.2.4. Mesure de la vitesse du chariot

Cette mesure est effectuée grâce à une dynamo tachymétrique associée au moteur à courant continu. Le signal obtenu est donc un signal analogique proportionnel à la vitesse de rotation de l'arbre, et donc à la vitesse du chariot.

I.1.2.5. Les interrupteurs de fin de course

Quatre interrupteurs de fin de course sont câblés au dispositif, deux à chaque extrémité de la vis sans fin. Les deux interrupteurs extérieurs servent à garantir l'intégrité du dispositif. Ils sont reliés à l'alimentation et, lorsque le chariot les actionne, coupent instantanément toute tension appliquée au moteur, parce que la longueur de vis sans fin est limitée et il ne faut pas la dépasser. Les interrupteurs intérieurs permettent quant à eux de réinitialiser le dispositif simplement et en toute sécurité.

I.2. Les différents types de pendules inversés**I.2.1. Le pendule inversé simple****I.2.1.1. Description**

Comme cela a été précisé à l'introduction générale, ce modèle consiste en un chariot supportant un pendule articulé. Ce chariot peut se déplacer horizontalement et librement sur une raille de guidage à l'aide d'un moteur d'entraînement. Comme l'indique la figure suivante :

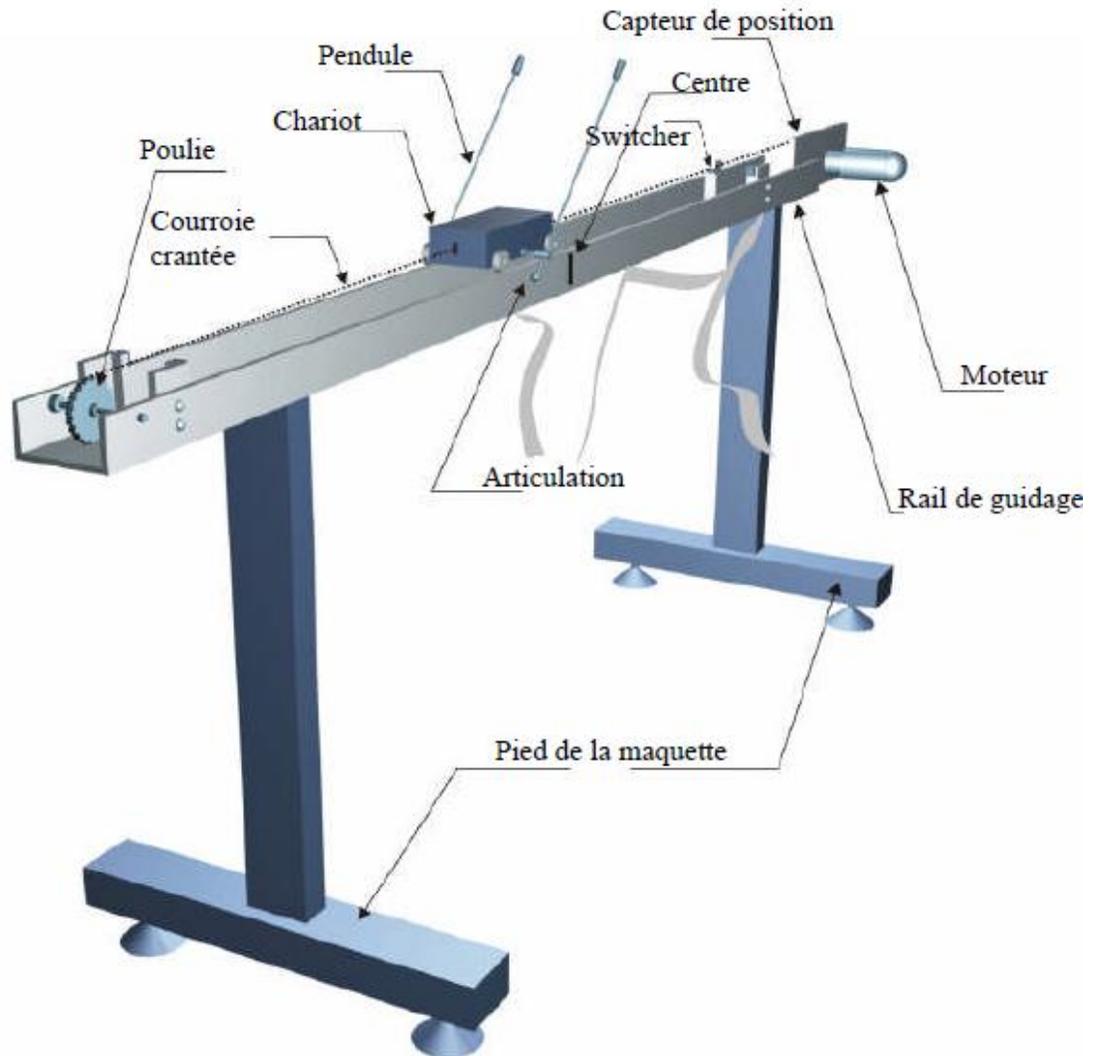


Figure I.3: synoptique de banc d'essais du Pendule inversé .

I.2.1.2. Fonctionnement

Quand le moteur tourne avec un couple quelconque, cela engendre une force $F(t)$ appliquée sur le chariot qui peut se déplacer linéairement sur un axe horizontal, et donc son déplacement $X(t)$ par rapport à l'origine choisie, et une déviation du pendule par rapport à la verticale d'un angle $\Theta(t)$, alors c'est un système à deux degrés de liberté. Le système est multi variable, dont l'entrée est la force $F(t)$, et les sorties sont la position $X(t)$ et l'angle $\Theta(t)$.

Il existe d'autres modèles de pendules inversés simples (un seul bras), on cite par exemple celui avec un chariot en mouvement circulaire autour d'un



Figure I.4 : Pendule inversé simple rotatif en action [3].

I.2.2. Le double pendule inversé en cascade

I.2.2.1. Description

Comme le pendule inversé simple, le double pendule inversé en cascade est constitué d'un chariot supportant un pendule mais cette fois ci avec deux tiges articulées, en rotation libre par rapport à la verticale, ce qui fait une sortie en plus, est l'angle $\theta_2(t)$ q comme le montre la figure suivante :axe vertical comme l'indique la figure suivante :

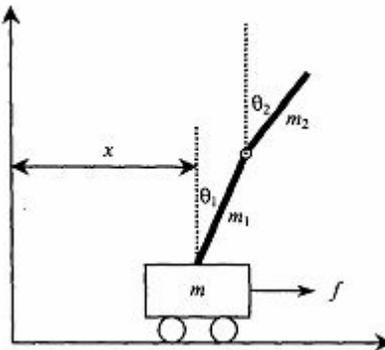


Figure I.5 : Double pendule inversé [4].

I.2.3. Le double pendule inversé en cascade couplé par deux ressorts

Même principe que le précédent, mais cette fois ci les deux tiges sont couplées à l'aide de deux ressorts, et le système à une entrée et trois sorties ; comme le montre le schéma suivant :

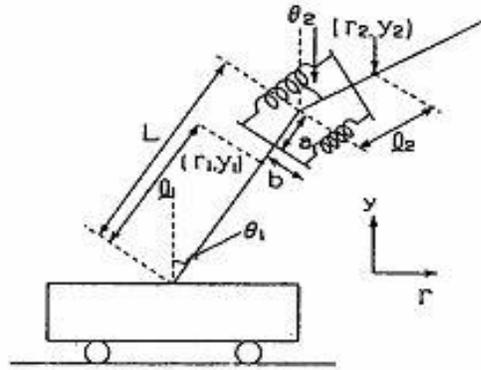


Figure I.6 : Double pendule inversé couplé[5] .

I.2.4. Le double pendule inversé parallèle

Dans ce modèle, il existe deux tiges en rotation libre au lieu d'une seule tige du pendule inversé (un seul bras), une sortie alors en plus, c'est l'angle de déviation de la deuxième tige par rapport à la verticale, nous avons alors trois sorties : θ_1 , θ_2 et $x(t)$.

Le schéma suivant montre l'illustration de ce système :

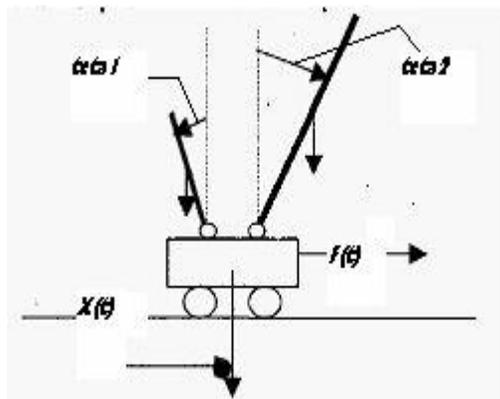


Figure I.7 : Double pendule inversé parallèle.

I.2.5. Le double pendule inversé parallèle couplé par un ressort

Il est obtenu à base du modèle précédent mais dont les deux tiges sont reliées par un ressort. Une extrémité du ressort est fixée sur une tige tant dis que l'autre se déplace librement autour de centre de la deuxième tige, et le nombre de sorties ne change pas par rapport au précédent (une entrée et trois sorties), comme le schéma suivant l'indique :

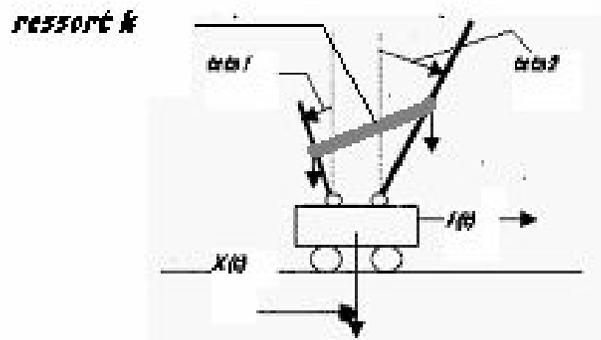


Figure I.8 : double pendule inversé parallèle couplé

I.3. Intérêt de l'étude d'un pendule inversé

On n'étudie pas le pendule inversé par plaisir. Son importance est illustrée à partir des exemples d'application cités ci-dessous.

I.3.1. En médecine

L'homme est vu comme un double pendule inversé en série, dont les deux axes de rotations principales sont les chevilles et les hanches. Quand nous sommes en position debout, nos articulations travaillent sans arrêt pour nous y maintenir. Les spécialistes qui travaillent à la réalisation de prothèses (remplacement chirurgical d'un organe ; la pièce ou l'appareil de remplacement : prothèse dentaire) pour les hanches sont amenés à utiliser le modèle de double pendule inversé pour calculer l'ensemble des contraintes qui sont soumises à la prothèse, comme le montre la figure suivante.



Figure I.9 : Calcul des contraintes

Le premier pendule est articulé à la cheville et représente les membres inférieurs considérés groupés. Le second pendule est articulé à la hanche et représente la partie supérieure du corps. On accélère en se penchant en avant et on ralentit en se penchant en arrière. Le système est le même que le pendule inversé.

I.3.2. En robotique

Dans le même ordre d'idée, un robot est vu comme un pendule inversé. Pour maintenir le robot en équilibre il suffit de stabiliser le pendule inversé correspondant à sa position verticale au cours de son déplacement et en présence d'autres perturbations. A l'occasion nous citons quelques exemples des robots qui sont déjà étudiés et conçus à base de ce principe:

- *Le robot BIPED* : peut se présenter par deux doubles pendules inversés en série, dont les deux pendules sont couplés par une tige avec deux articulations.

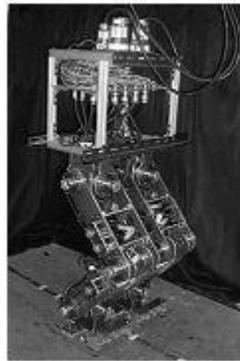


Fig. 1. Overview of "Tomas-k"

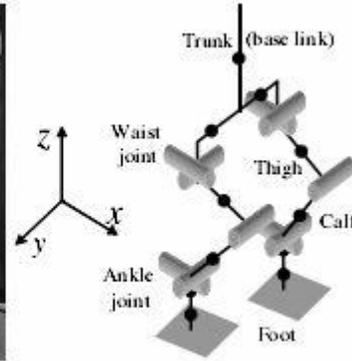


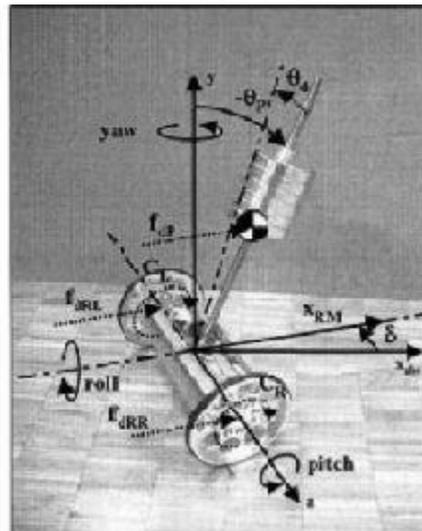
Fig. 2. 3D-model

Figure I.10 : Le robot BIPED et sa représentation 3D .[6]

• **Le robot JOE :** Il est vu comme un pendule inversé simple (une seule tige) se déplaçant à l'aide de deux roues.



Robot JOE



Vue d'un JOE.

Figure I.11 : Le robot JOE et sa représentation 3D

I.3.4. Dans la recherche

Vu sa complexité, le pendule inversé est considéré comme l'un des meilleurs systèmes pour tester des lois de commande modernes.

Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre une description d'un exemple d'un banc d'essai d'un pendule inversé, son fonctionnement, quelques types de pendules inversés, ainsi que l'intérêt de leur application dans différents domaines. Vu cet important intérêt, plusieurs labos de recherche dans le monde entier font des études et des essais d'implémentation des lois de commandes non linéaires sur ces systèmes, on cite l'exemple du laboratoire d'automatique de l'EPFL.

Chapitre II : Modélisation d'un pendule inversé simple

Introduction

Le problème de commande exige la recherche du modèle mathématique du système à commander, donc une phase de modélisation est nécessaire pour permettre l'étude en simulation.

La modélisation consiste à représenter les aspects importants du système en décrivant les relations entre ses différentes grandeurs par des équations mathématiques. L'ensemble de ces relations constitue le modèle de ce système.

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord représenter le pendule inversé et les exigences de son choix. Ensuite, nous allons développer son modèle dynamique qui sera présenté sous forme d'équations différentielles en se basant sur le formalisme d'Euler-Lagrange qui constitue une approche systématique simple à mettre en œuvre, en négligeant les frottements situés au niveau de l'axe de rotation et ceux dus au déplacement du chariot. Puis, nous présenterons ce système dans l'espace d'état dans les deux circonstances ; premièrement frottements négligeables, deuxièmes pris en considération. Finalement, Nous ferons une présentation des résultats de simulation numérique effectuée en boucle ouverte sur le modèle non linéaire du pendule inversé sans frottements, afin de mettre en évidence le comportement dynamique et son instabilité.

II.1. le pendule inversé simple

Pour ce système, le mouvement du chariot doit maintenir le pendule dans sa position d'équilibre instable (masse dirigée vers le haut) avec un déplacement qu'il ne faut pas dépasser -0.5 ou $+0.5$ mètres

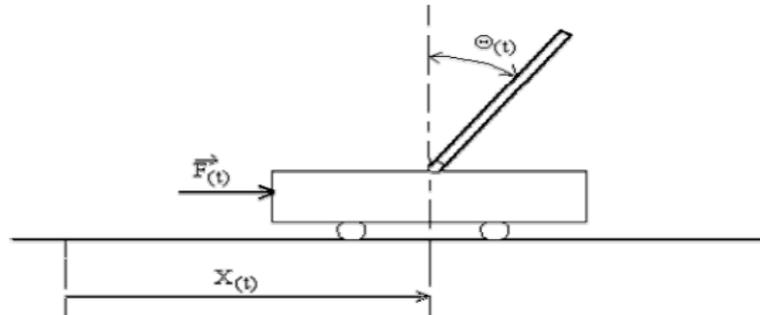


Figure. II.1 : Pendule inversé simple [7]

Le choix de ce système devra répondre à deux exigences préliminaires :

- Permettre une rotation du bras de 360° , afin de prendre en compte toutes les conditions initiales possibles.
- Disposer d'une course de déplacement du chariot suffisante pour permettre au pendule de se relever à partir des conditions initiales les plus défavorables.

II.2. Modélisation : application du formalisme Euler Lagrange

Le pendule de longueur $2l$ et de masse m dont l'axe de suspension est lié au chariot de masse M , peut se déplacer sur un axe horizontal. Initialement le système est au repos, les frottements situés au niveau de l'axe de rotation et ceux dues au déplacement du chariot sont négligés.

Ce système a une entrée $F(t)$ et deux sorties x et Θ

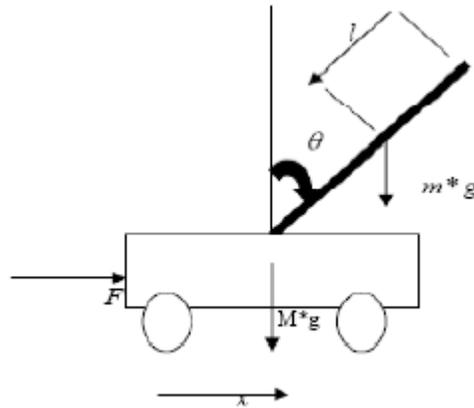


Figure. II.2 : Pendule inversé simple [7]

Pour établir les équations différentielles de ce système, nous calculons le lagrangien L et nous appliquons le formalisme d'euler-Lagrange.

$$L = T - U \quad (\text{II.1})$$

L'énergie cinétique system (T):

$$T = T_1 + T_2 \quad (\text{II.2})$$

T_1 : l'énergie cinétique de chariot.

T_2 : l'énergie cinétique de pendule.

$$T_1 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (\text{II.3})$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} j \dot{\Theta}^2 \quad (\text{II.4})$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m [(l \cos(\Theta) \dot{\Theta} + \dot{x})^2 + (l \sin(\Theta) \dot{\Theta})^2] + \frac{1}{2} [1/12m(2l)^2] \dot{\Theta}^2 \quad (\text{II.5})$$

Et donc l'énergie cinétique total de système est :

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m [(l \cos(\Theta) \dot{\Theta} + \dot{x})^2 + (l \sin(\Theta) \dot{\Theta})^2] + \frac{1}{2} [1/12m(2l)^2] \dot{\Theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m [(l \cos(\Theta) \dot{\Theta} + \dot{x})^2 + (l \sin(\Theta) \dot{\Theta})^2] + \frac{1}{2} (1/3ml^2) \dot{\Theta}^2 \quad (\text{II.6})$$

L'énergie potentielle du system (U) : $U = U_M + U_m$

U_M : l'énergie potentielle de chariot.

U_m : l'énergie potentielle de pendule.

Nous avons que les énergies gravitationnelles :

$U_M = 0$ (pas de déplacement sur l'axe vertical)

$$U_m = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r}; \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \\ g \end{pmatrix}; \quad d\vec{r} = d \vec{OG} \quad (\text{II.8})$$

$$\vec{OG} = \begin{bmatrix} x + l \sin(\Theta) \\ l \cos(\Theta) \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

$$U = m g l (\cos(\Theta) - 1) \quad (\text{II.10})$$

Le Lagrangien du système : $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m [(l \cos(\Theta) \dot{\Theta} + \dot{x})^2 + (l \sin(\Theta) \dot{\Theta})^2] + \frac{1}{2} (1/3ml^2) \dot{\Theta}^2 - mgl(\cos(\Theta) - 1) \quad (\text{II.11})$$

$$L = \frac{1}{2} (m+M) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\Theta}^2 + m \dot{x} \dot{\Theta} \cos(\Theta) + \frac{1}{6} ml^2 \dot{\Theta}^2 - mgl(\cos(\Theta) - 1)$$

$$L = \frac{1}{2}(m+M) \dot{x}^2 + \frac{2}{3}ml^2\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}m \dot{\Theta}^2 x^2 \cos(\Theta) - mgl(\cos(\Theta) - 1) \quad (\text{II.12})$$

Les équations de mouvement du système :

Les équations de Lagrange de ce système sont :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = F_{q1} \quad (\text{II.13})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = F_{q2} \quad (\text{II.14})$$

On a :

$$q_1 = x \quad q_2 = \Theta \quad F_{q1} = F \quad F_{q2} = 0$$

Donc :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m) \dot{x} + m l \cos(\Theta) \dot{\Theta} \quad (\text{II.15})$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.16})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} = m l \cos(\Theta) \dot{x} + \frac{3}{4} ml^2 \dot{\Theta} \quad (\text{II.17})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta} = -m l \sin(\Theta) \dot{x} \dot{\Theta} + m g l \sin(\Theta) \quad (\text{II.18})$$

En conséquence, les équations de mouvement régissant ce système sont :

$$(m + M) \ddot{x} + m l (\cos(\Theta)\ddot{\Theta} - \sin(\Theta)\dot{\Theta}^2) = F \quad (\text{II.19})$$

$$\frac{4}{3}m^2\ddot{\Theta} + m l (\cos(\Theta) \ddot{x} - g \sin(\Theta)) = 0 \quad (\text{II.20})$$

II.3. La représentation d'état:

Les équations qui régissent le système sont :

$$(m+M)\ddot{x} + m l (\cos(\Theta) \ddot{\Theta} - \sin(\Theta) (\dot{\Theta})^2) = F \quad (\text{II.21})$$

$$4/3m l^2 \ddot{\Theta} + m l (\cos(\Theta) \ddot{x} - g \sin(\Theta)) = 0 \quad (\text{II.22})$$

En posant le vecteur d'état suivant :

$$X = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta \\ \dot{\Theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

$$\dot{X} = \begin{cases} \dot{x}1 = x2 \\ \dot{x}2 = \dot{\Theta} \\ \dot{x}3 = x4 \\ \dot{x}4 = \dot{x} \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

II.3.1. Représentation d'état sans frottements :

En remplaçant dans les deux équations (II.21) et (II.22), nous obtenons la Représentation d'état suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}1 = x2 \\ \dot{x}2 = \frac{3 \sin(x1)((M+m)g - mlx2^2 \cos(x1))}{4(M+m)l - 3ml \cos^2(x1)} + \frac{-3 \cos(x1)}{4(M+m)l - 3ml \cos^2(x1)} u \\ \dot{x}3 = x4 \\ \dot{x}4 = \frac{ml \sin(x1)(4lx2^2 - 3g \cos(x1))}{4(M+m)l - 3ml \cos^2(x1)} + \frac{l}{4(M+m)l - 3ml \cos^2(x1)} u \\ u = F \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

Nous pouvons écrire les équations d'état (II.25) d'une autre manière plus simple [8] :

$$\ddot{\Theta} = \frac{3}{4L} (g \sin(\Theta) - \dot{X} \cos(\Theta)) \quad (\text{II.26})$$

$$\ddot{X} = \frac{m(l \sin(\Theta)(\Theta^{\circ 2}) - \frac{3}{8}g \sin(2\Theta)) + u}{M + m(1 - \frac{3}{4} \cos^2(\Theta))} \quad (\text{II.27})$$

Si nous écrivons les équations (II.26) et (II.27) sous la forme :

$$\ddot{\Theta} = h1 - h2 \ddot{X} \quad (\text{II.28})$$

$$\ddot{X} = \frac{f1+u}{f2} \quad (\text{II.29})$$

La représentation d'état sera

$$\begin{cases} \dot{x}1 = x \\ \dot{x} = h1 - h2 \frac{f1}{f2} - \frac{h2}{f2} u \\ \dot{x}3 = x4 \\ \dot{x}4 = \frac{f1+u}{f2} \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

Avec :

$$h1 = \frac{3}{4L}g \sin(\Theta) \quad (\text{II.31})$$

$$h2 = \frac{3}{4L}g \cos(\Theta) \quad (\text{II.32})$$

$$f1 = m(l \sin(\Theta)(\Theta^{\circ 2}) - \frac{3}{8}g \sin(2\Theta)) \quad (\text{II.33})$$

$$M + m(1 - \frac{3}{4} \cos^2(\Theta)) \quad (\text{II.34})$$

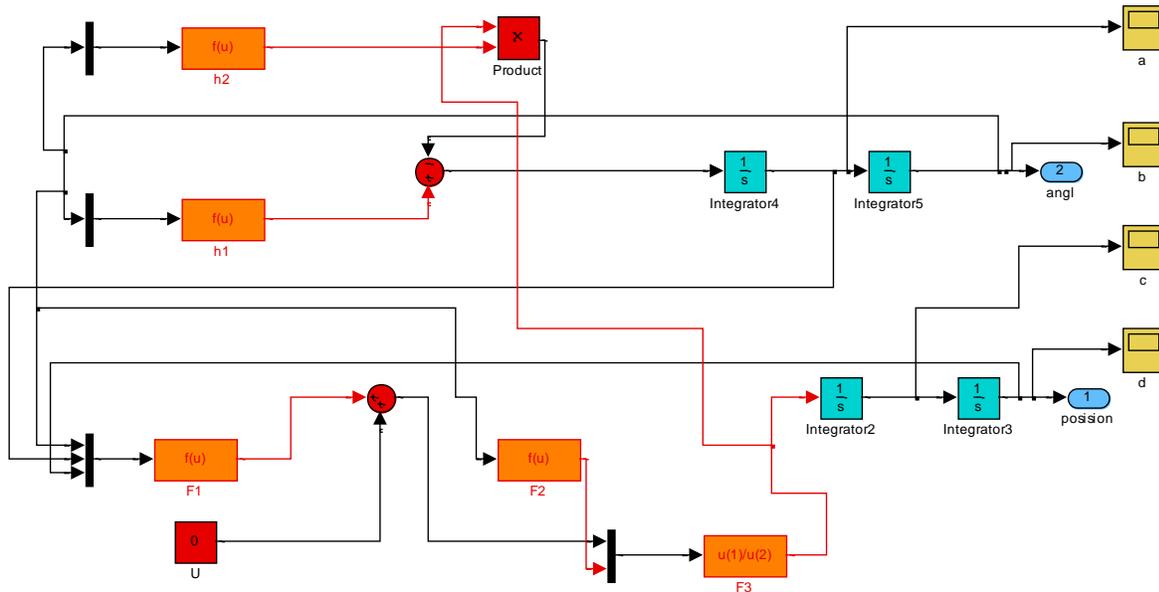
II.3.2. Représentation d'état avec frottements

Nous considérons que les frottements dus au déplacement du chariot.

Nous avons les mêmes équations que précédemment sauf que : [8]

$$f1 = m(l \sin(\Theta)\Theta'^2 - \frac{3}{8} g \sin(2\Theta)) - fx \tag{II.35}$$

f : Coefficient de frottement $f = 0.5 \text{Kg} / \text{s}$



Modélisation du pendule inversé sous matlab

II.4. Simulations en boucle ouverte :

Les paramètres du système que nous avons pris sont [8] :

- $l=0.25\text{m}$,
- $m=100\text{g}$,
- $M=1\text{kg}$.

II.4.1. Simulation du système libre

Nous relâchons le pendule d'une position angulaire quelconque sans vitesse initiale et sans appliquer aucune force au chariot ($u=0$). Les conditions initiales sont : $[\Theta, \Theta', X, \dot{X}] = [\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0]$

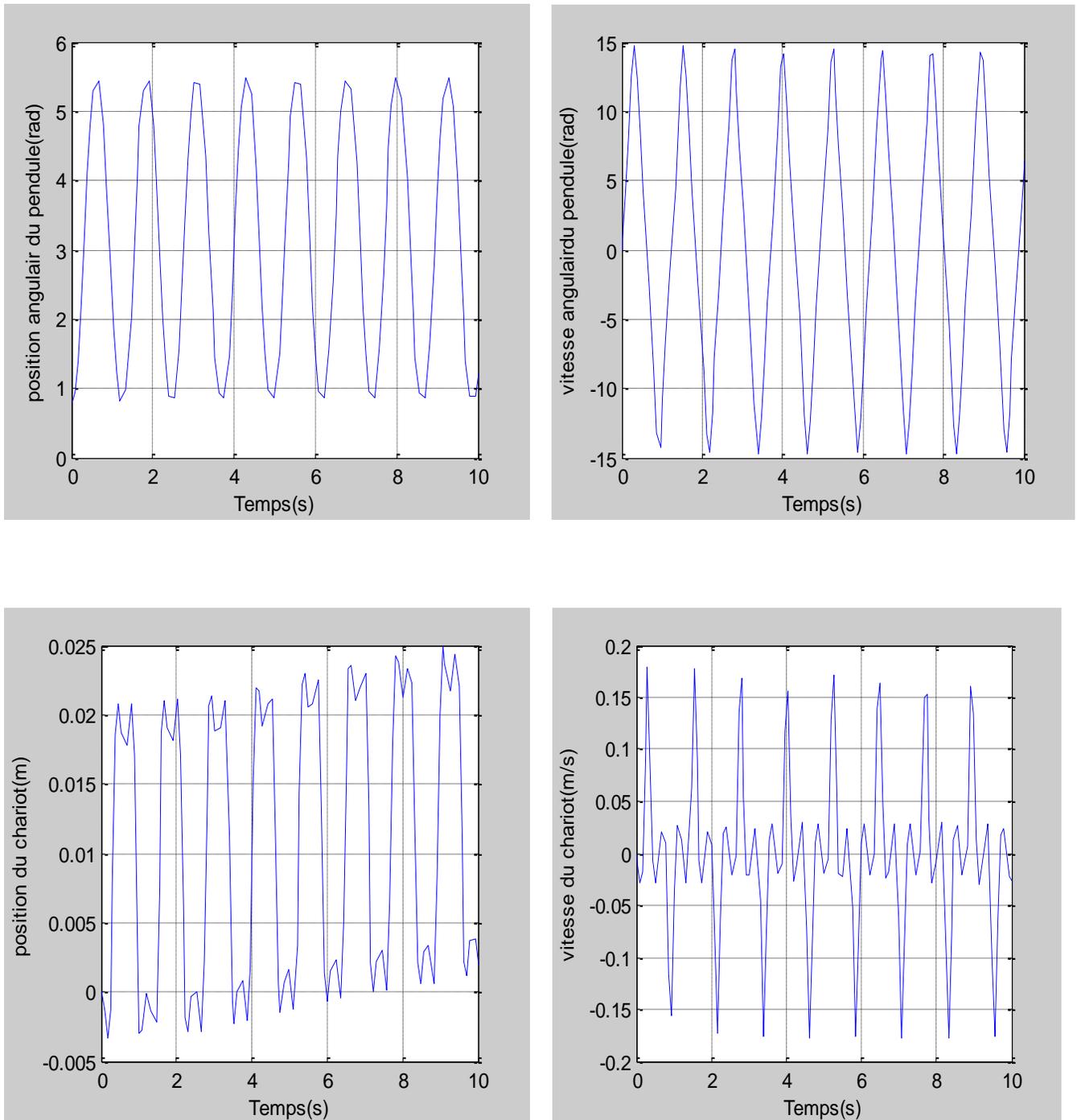


Figure. II.3: Résultats de simulations en boucle ouverte sans frottements

Avec conditions initiales : $[\Theta, \dot{\Theta}, X, \dot{X}] = [\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0]$

L'état du système évolue dans le temps et ne revient pas à son état d'équilibre.

II.4.2. Simulation du système excité

Nous appliquons une impulsion d'une amplitude 0.1 et d'une durée 0.1 Sec.

Nous prenons les conditions initiales : $[\Theta, \dot{\Theta}, X, \dot{X}] = [0, 0, 0, 0]$ (la position d'équilibre instable).

Les résultats de simulation sont les suivant :

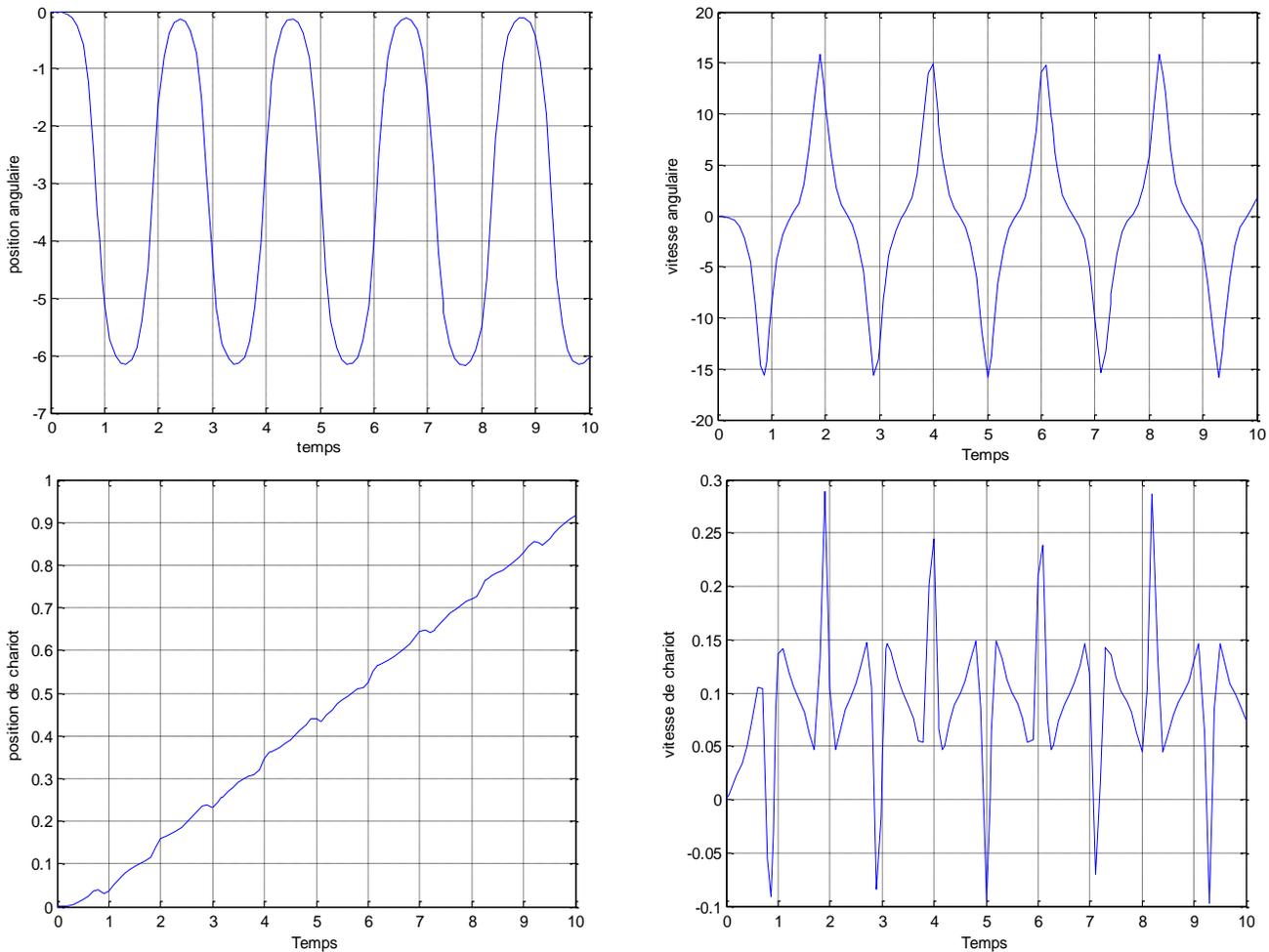


Figure. II.4 : Résultats de simulations en boucle ouverte Entrée impulsion d'une durée 0.1 s et amplitude 0.1 (N) Conditions initiales: $[\Theta, \dot{\Theta}, X, \dot{X}] = [0, 0, 0, 0]$ (Sans frottements)

Les résultats de simulation montrent que la position : $[\Theta, \dot{\Theta}, X, \dot{X}] = [0, 0, 0, 0]$ est un point d'équilibre instable

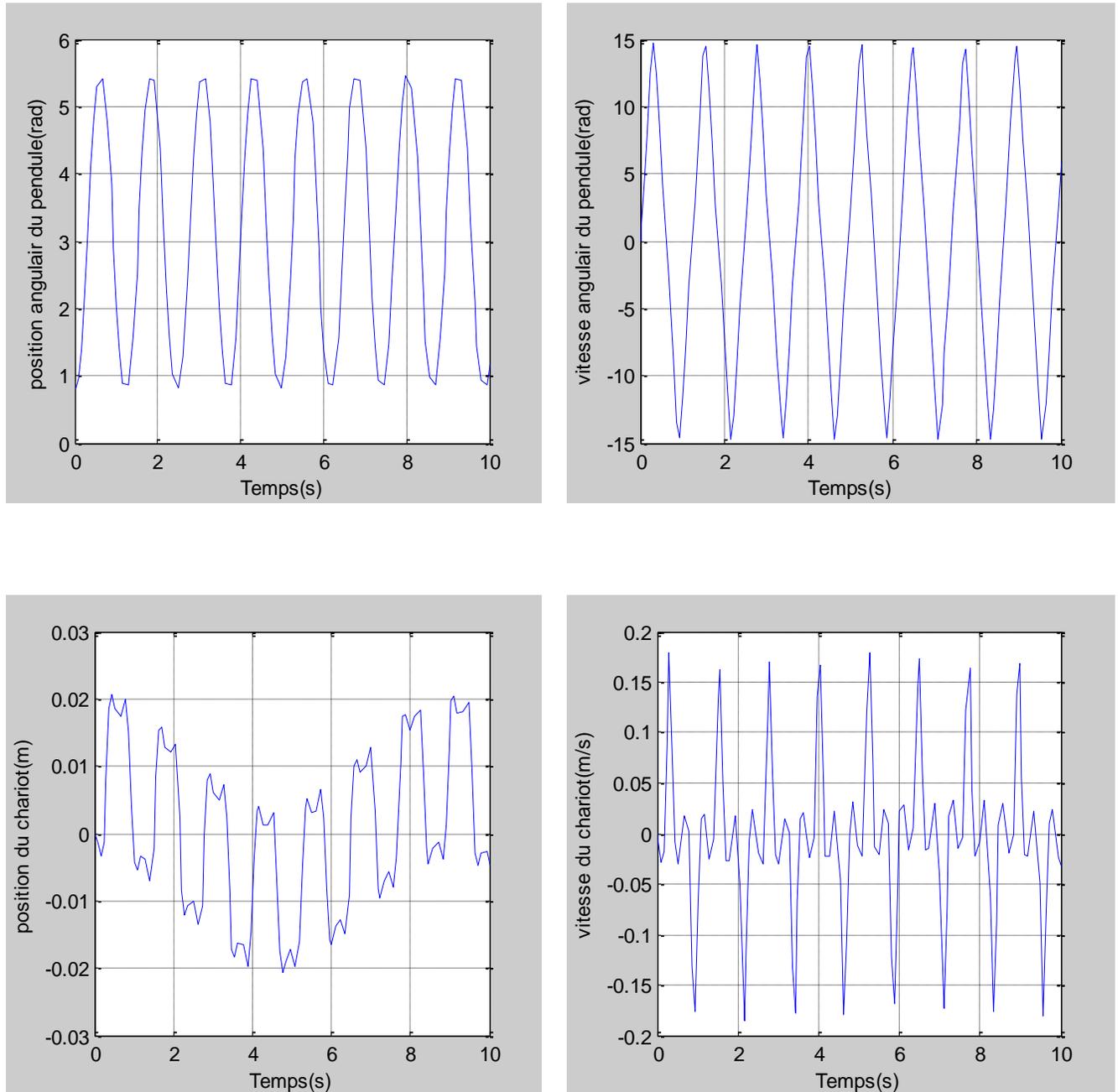
II.4.3.Simulation du système excité avec frottement

Figure. II.5: Résultats de simulations en boucle ouverte avec frottements

Avec conditions initiales : $[\Theta, \dot{\Theta}, X, \dot{X}] = [\frac{\pi}{4}, 0, 0, 0]$

Conclusion

Le modèle dynamique explicite du pendule inversé est obtenu à base de formalisme d'euler Lagrange .ce modèle nous a bien montré que le système est multi variable et présente de fortes non-linéarités, ce qui engendre la difficulté de commande pour ce type de système. Les simulations en positions et en vitesses effectuées en boucle ouverte sur le pendule inversé nous ont permis de constater l'instabilité de celui-ci .D'ou le choix du pendule inversé comme un système de test des lois de commande modernes et l'application de ces lois afin de stabiliser ce système autour de son point d'équilibre instable. Dans les chapitres suivants, trois commandes seront proposées.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude et la modélisation d'un système d'un pendule inversé, vu ses applications intéressantes et sa complexité qui ont fait qu'il soit pris comme une plate forme d'essai et du test des performances et robustesses des loi de commande modernes.

Pour y parvenir, nous étions menés d'abord à connaître la constitution de ce système et comprendre son fonctionnement. La modélisation du système pendule inversé était nécessaire afin de synthétiser les lois de commandes non linéaires proposées . D'après la modélisation et les simulations en boucle ouverte, nous avons constaté l'instabilité de ce système.

Références bibliographiques

- [1] Jong H. Park and Kyoung, « Biped robot walking using gravity-compensated inverted pendulum mode and computed torque control ». IEEE, (1998).
- [2] O. ORBAN, «Automatisation d'un pendule inversé», thèse d'état soutenue en 2006, Université libre de BRUXELLE.
- [3] A.S. Shiriyay and A. Friesel and J. Perram «On stabilization of rotational modes of aninverted pendulum ».IEEE. 2000.
- [4] M. MIHELJ, M. Munih. « Double inverted pendulum optimal control-basis for unsupported standing in paraplegia » IEEE.
- [5] S. KAWAJI and K. KANAZAWA, « Control of double inverted pendulum with elastic joint ». IEEE, (1991).
- [6] Rong-Jong Wai, Senior Member, and Li-Jung Chang« Stabilizing and Tracking Control of Nonlinear Dual-Axis Inverted-Pendulum System Using Fuzzy Neural Network ».IEEE, (2005).
- [7] OULD ABDOU Taleb Moustapha «Commande par Mode de Glissement Floue avec Observateur: Application à Différents Pendules Inversés».thèse Magister, ENP.
- [8] Allon Guez, John Selinsky «A trainable Neuromorphic Controller».Journal of robotic systems, 5(4), 363-388 (1988).